

Inleiding Quantumveldentheorie

F.A. Bais

Instituut voor Theoretische Natuurkunde

Valckenierstraat 65

1018XE Amsterdam

Collegediktaat vervaardigd met medewerking van
M.L. van Hecke, D.S. Wiersma en M.A. van Eijck.

Inhoudsopgave

1	Relativistische Quantummechanica	4
1.1	Inleiding	4
1.2	Lorentz covariantie	5
1.2.1	Covariante notatie	5
1.2.2	Lorentz-transformaties	6
1.2.3	De Lorentz-groep	6
1.2.4	De Lorentz-algebra	8
1.2.5	Eindige Lorentz-transformaties	10
1.3	De Klein-Gordon vergelijking	11
1.4	De Dirac vergelijking	13
1.4.1	De Dirac vergelijking	13
1.4.2	Covariantie van de Dirac-vergelijking	17
2	Klassieke veldentheorie	23
2.1	Het Hamilton-Lagrange formalisme	23
2.2	Toepassingen op relativistische velden	32
2.3	Symmetrieën en behoudswetten	39
2.3.1	De stelling van Noether	42
2.3.2	Translatie invariantie en energie-impuls behoud	43
2.3.3	Lorentz invariantie en het behoud van impulsmoment	45
2.3.4	Globale ijkvariantie en ladingsbehoud	48
2.4	Locale ijkvariantie en interacties	48
3	Quantisatie van vrije velden	53
3.1	Kanonieke quantisatie	53
3.1.1	Het puntdeeltje	53
3.1.2	De lineaire harmonische oscillator in het Heisenberg beeld	55
3.1.3	Quantisatie van velden	58
3.2	Quantisatie van het Klein-Gordon veld	60
3.2.1	De fysische structuur van het Klein-Gordon veld	62
3.2.2	Greenfuncties en Propagatoren	66
3.3	Quantisatie van het vrije Diracveld	71
3.4	Covariante quantisatie van het Maxwellveld	76

4	Velden met wisselwerking en de S-matrix	84
4.1	Inleiding	84
4.2	Greenfuncties	88
4.3	S-matrix elementen	89
4.4	Feynmandiagrammen	92
5	Elementaire processen	97
5.1	Mott verstrooiing	97
5.1.1	De verstrooiingsamplitude	98
5.1.2	De werkzame doorsnede	99
5.1.3	Middeling en sommatie over spins	100
5.2	Møller verstrooiing	103
5.2.1	De amplitude	103
5.2.2	Het wegwerken van de operatoren	104
5.2.3	Het uitvoeren van de impulsintegralen	105
5.2.4	De overgangsamplitude	105
5.2.5	De werkzame doorsnede	107
5.2.6	De middeling over spins	107
5.3	Algemene uitdrukkingen en Feynman-regels	109

Inleiding

In het begin van deze eeuw vonden er twee fundamentele omwentelingen plaats in de natuurkunde, die elk een essentiële beperking in het geldigheids gebied van de klassieke Newtonse mechanica markeerden.

De eerste werd gevormd door de speciale relativiteitstheorie van Einstein uit 1905, welke radikaal afwijkt van de Newtonse mechanica wanneer wij deeltjes beschouwen die snelheden hebben welke van de orde van de lichtsnelheid c zijn.

Een tweede keerpunt was de formulering van de quantummechanica die middels het werk van Bohr, Schrödinger, Heisenberg, Dirac en vele anderen zijn beslag kreeg en een correcte beschrijving geeft van systemen waarvoor het product van de ruimtelijke uitgebreidheid en impuls van de orde van de constante van Planck is, d.w.z. $xp \sim \hbar$. Hiermee werd de fysica van het atoom op spectaculaire wijze tot een oplossing gebracht. Aangezien de atomaire bindingsenergieën van de orde van electronvolts zijn terwijl de massa van een electron een $5 \times 10^5 eV$ bedraagt kon men in eerste instantie volstaan met een niet relativistische formulering van de quantummechanica.

Bij het voortschrijdende onderzoek naar steeds fundamenteelere structuren in de materie werd men echter geconfronteerd met het probleem een theorie te formuleren die zowel consistent was met de uitgangspunten van de relativiteitstheorie als die van de quantummechanica. Dit werd in eerste instantie gerealiseerd met de Quantum Electrodynamica (QED) waarvoor Feynman, Schwinger en Tomonaga in 1965 de Nobelprijs ontvingen. QED is het prototype van een relativistische quantumveldentheorie en vormt het voornaamste onderwerp van dit college. Deze theorie geeft een quantummechanische beschrijving van de electromagnetische wisselwerking tussen geladen deeltjes (met spin $1/2$) zoals electronen, en fotonen. Quantum electrodynamica is één van de meest succesvolle theorieën uit de fysica, waarmee over een breed scala van toepassingen een zeer preciese overeenstemming met het experiment is bereikt.

In de decennia na 1950 is men er echter ook in geslaagd de sterke wisselwerkingen (d.w.z. de krachten tussen quarks maar ook de kernkrachten tussen nucleonen) en de zwakke krachten (die verantwoordelijk zijn voor het nucleaire verval) met het formalisme van de relativistische quantumveldentheorie te beschrijven. Het is opmerkelijk dat men er tot nog toe niet in geslaagd is om de gravitatie kracht, de kracht waarvan de mens zich het eerst bewust werd, quantummechanisch te beschrijven.

Het bovenstaande wekt de indruk dat het enige toepassings gebied van de quantumveldentheorie gelegen is in de fysica van de fundamentele wisselwerkingen tussen elementaire deeltjes, de zogenaamde hoge energiefysica. Dit is geenszins het geval: er bestaan legio toepassingen van het formalisme in de statistische fysica en de fysica van de gecondenseerde materie.

Dit inleidende college is beperkt en conventioneel van opzet. In het eerste hoofdstuk behandelen we de Lorentz-groep en relativistische golfvergelijkingen zoals de

Dirac-vergelijking in detail. In hoofdstuk 2 gaan we in op het Lagrange-Hamilton formalisme voor de klassieke velden, waarbij het verband tussen symmetrieën van de actie en behouden grootheden (Noethers theorema) toegepast wordt op ruimte tijd symmetrieën en iksymmetrieën. In een volgend hoofdstuk geven we de kanonieke kwantisatie van de vrije velden en berekenen de propagatoren. In hoofdstuk vier worden interacties behandeld en de S-matrix in stringtheorie. Tot slot berekenen we de werkzame doorsneden van enige elementaire processen in QED met behulp van de Feynman regels. Zoals blijkt uit de inhoudsopgave komen helaas het berekenen van lus-diagrammen en het probleem van renormalisatie niet wezenlijk aan de orde. We hebben bij dit college niet gekozen voor een rigoreuze aanpak, als een eerste kennismaking met de quantum veldentheorie leek ons een meer fysisch georiënteerde aanpak welke direct aansluiting geeft op de standaard colleges meer op zijn plaats. Uit de inhoudsopgave blijkt dat de vele belangrijke mathematische en fysische ontwikkelingen welke de laatste decennia op dit gebied van de theoretische fysica hebben plaats gevonden in dit college onbesproken blijven, hiervoor verwijz ik naar een aantal keuzecolleges.

Als tekstboeken waarin het hier behandelde materiaal in herkenbare vorm is terug te vinden noem ik de boeken van Bjorken en Drell, en het boek van Itzykson en Zuber van meer recente datum. De volgorde waarin de diverse onderwerpen aan bod komen wijkt echter op vele punten af. We hebben gekozen voor normalisaties van Bjorken en Drell, en werken in het zogenaamde ‘natuurlijke’ eenheden stelsel waarin $\hbar = c = 1$, tenzij anderszins wordt vermeld.

Tot slot een opmerking over ‘pasklare’ college diktaten. Ik ben er geen voorstander van en geef er de voorkeur aan als de studenten zich de kennis m.b.v. boeken eigen maken. Het is dan ook voor een groot deel te danken aan de inzet en het doorzettingsvermogen van de heren Van Hecke, Wiersma en Van Eijck dat het er toch van is gekomen. Aangezien dit een eerste versie is van dit diktaat houdt de auteur zich aanbevolen voor correcties en/of suggesties welke de leesbaarheid kunnen verhogen.

Amsterdam, juli 1991

Hoofdstuk 1

Relativistische Quantummechanica

1.1 Inleiding

De relativiteits-theorie gaat uit van de volgende postulaten:

- (i) Het relativiteits beginsel, dat zegt dat fysische wetten in alle inertiaal stelsels dezelfde vorm hebben,
- (ii) De lichtsnelheid in vacuum is voor alle inertiaal waarnemers dezelfde.

Deze postulaten leiden tot de notie van de Minkowski ruimte tijd en tot de eis van Lorentz-covariantie voor de wiskundige vergelijkingen die de fundamentele fysische wetten beschrijven. In het eerste deel van dit hoofdstuk gaan we in op de notie van Lorentz-invariantie en analyseren de Lorentz-groep en algebra in detail.

Vervolgens beschouwen we het probleem van een relativistische quantummechanica. Een naieve implementatie van de Lorentz-covariantie, door het modificeren van de Schrödinger vergelijking tot de covariante Klein-Gordon vergelijking leidt tot problemen in de fysische interpretatie van de golffunctie en het spectrum. Ook voor de Dirac vergelijking is zulks het geval, zij het in mindere mate. Deze relativistische vergelijkingen komen uitgebreid aan bod, omdat zij wel degelijk het correcte uitgangspunt voor een relativistische quantumtheorie vormen. Zij dienen dan echter juist geïnterpreteerd te worden: niet als generalisatie van de Schrödinger vergelijking maar als vergelijkingen voor klassieke velden zoals bijvoorbeeld de Maxwell vergelijkingen dat zijn. Hiermee wordt het probleem van de relativistische quantummechanica vertaald in het probleem van de quantisatie van een veld in plaats van een deeltje. Deze vraag vormt de motivatie voor hoofdstuk 2 waarin ingegaan wordt op het klassieke Hamilton-Lagrange formalisme voor velden. De eigenlijke veld quantisatie wordt voltrokken in hoofdstuk 3 en verder ontwikkeld in de resterende hoofdstukken.

1.2 Lorentz covariantie

1.2.1 Covariante notatie

We gaan in de beschrijving van relativistische theorieën uit van een Minkowski ruimtetijd, waarin een ‘gebeurtenis’ (event) vastgelegd wordt door een *contravariante* viervector x met componenten x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$)

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (x^0, \vec{x}) \quad (1.2.1)$$

Het inwendig product tussen twee viervectoren x en y wordt gedefinieerd m.b.v. de metriek g als

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (1.2.2)$$

waarbij over herhaalde indices gesommeerd wordt (de zogenaamde Einstein conventie). Als matrix heeft g de vorm

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2.3)$$

Merk op dat de norm $y^2 = y \cdot y$ van een vector y niet positief hoeft te zijn, we spreken in dit verband van een indefiniete metriek. Vervolgens definiëren we een *covariante* vector als

$$x_\mu := g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\vec{x}) \quad (1.2.4)$$

zodat we het inproduct kunnen schrijven als

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu \quad (1.2.5)$$

We kunnen de inverse van de metriek g^{-1} met componenten $g^{\mu\nu}$ definiëren als

$$g^{\mu\nu} x_\nu = x^\mu \quad (1.2.6)$$

waaruit volgt dat als matrix $g^{-1} = g$. Verder hebben we de relatie

$$g^\nu{}_\mu := g^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} = \delta^\nu{}_\mu \quad (1.2.7)$$

Een belangrijk voorbeeld van een covariante vector wordt gevormd door de partiële afgeleiden naar de coördinaten

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.2.8)$$

1.2.2 Lorentz-transformaties

We beschouwen nu de Lorentz-transformaties in deze notatie. Als x de coördinaten zijn van een gebeurtenis in het inertiaalsysteem S en x' de coördinaten van hetzelfde voorval in een ander inertiaalsysteem S' , dan wordt het verband tussen S naar S' gegeven door een Lorentz-transformatie Λ :

$$x^{\mu'} := \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad (1.2.9)$$

In feite zijn we geïnteresseerd in alle lineaire transformaties die het interval $(x - y)^2$ invariant laten, deze zijn van de vorm

$$x^{\mu'} := \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \quad (1.2.10)$$

Deze worden de inhomogene Lorentz- of Poincaré-transformaties genoemd, en bevatten behalve de homogene Lorentz-transformaties ook nog de ruimtetijd translaties. We zullen in het nu volgende de Lorentz-groep en de bijbehorende algebra expliciet construeren uit de eis dat het interval invariant is, waaruit direct volgt dat de metrische tensor een invariante tensor is:

$$g_{\mu\nu}' = \Lambda^{\sigma}{}_{\mu} \Lambda^{\tau}{}_{\nu} g_{\sigma\tau} = g_{\mu\nu} \quad (1.2.11)$$

In matrix notatie heeft deze conditie de vorm $\Lambda^T g \Lambda = g$.

Opgave 1 *Laat zien dat uit de voorgaande conditie volgt dat een covariante vector transformeert als*

$$x_{\mu}' = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} x_{\nu} \quad (1.2.12)$$

waar $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ gedefinieerd wordt door de relatie

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\tau} = \delta^{\nu}{}_{\tau} \quad (1.2.13)$$

m.a.w. $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ zijn de componenten van de matrix $(\Lambda^{-1})^T$.

1.2.3 De Lorentz-groep

Een groep is een verzameling G waarop een vermenigvuldiging (\circ) is gedefinieerd met de eigenschappen:

1. Voor alle $c = a \circ b$ met a, b willekeurig uit de groep is c weer een element van de groep.
2. Er bestaat een eenheidselement $e \in G$ zodanig dat voor iedere a uit de groep geldt: $e \circ a = a \cdot e = a$.
3. De groepsvermenigvuldiging is associatief: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

4. Er bestaat een inverse van iedere a uit de groep waarvoor geldt: $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$.

Opgave 2 Laat zien dat de verzameling van alle Λ 's die aan de conditie (1.2.11) voldoen een groep vormen, waarbij (\circ) staat voor matrix vermenigvuldiging.

Deze groep van Λ -transformaties wordt de *Lorentz-groep* genoemd.¹ We kunnen afleiden dat:

$$\det \Lambda = \pm 1 \quad (1.2.14)$$

immers

$$\det g = \det (\Lambda^T g \Lambda) = \det \Lambda^T \det \Lambda \det g \quad (1.2.15)$$

zodat:

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \quad (1.2.16)$$

Uit het zojuist gegeven argument volgt ook dat de verzameling elementen van de Lorentz-groep met $\det \Lambda = +1$ een ondergroep vormt. Deze groep wordt de *zuivere* Lorentz-groep genoemd. Uit de conditie (1.2.11) vinden we verder dat:

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 \quad (1.2.17)$$

zodat:

$$(\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \quad (1.2.18)$$

en:

$$\Lambda^0_0 \geq 1 \quad \text{of} \quad \Lambda^0_0 \leq -1 \quad (1.2.19)$$

Het is verder zo dat als $\Lambda_3 = \Lambda_1 \Lambda_2$ er geldt dat

$$\text{sign} (\Lambda_3^0_0) = \text{sign} (\Lambda_1^0_0) \text{sign} (\Lambda_2^0_0) \quad (1.2.20)$$

Opgave 3 Bewijs dit m.b.v. de relatie 1.2.17.

Hieruit volgt dat ook de Lorentz-transformaties met $\Lambda^0_0 \geq 1$ een ondergroep vormen. Deze wordt de *orthochrone* Lorentz-groep genoemd. De homogene Lorentz-groep heeft dus de vier niet-samenhangende componenten:

¹We merken op dat onze terminologie niet geheel correct is, het is juister om te zeggen dat de door ons beschouwde Λ 's een *representatie* en wel de *definiërende* of *vector representatie* van de Lorentz-groep vormen. Hoewel deze opmerking van belang is omdat we later ook andere representaties zullen construeren, zullen we dit onderscheid niet nodeloos benadrukken in het belang van een economische notatie.

$\det \Lambda = +1$ $\Lambda^0_0 \geq 1$	L_+^\uparrow	$\det \Lambda = -1$ $\Lambda^0_0 \geq 1$	L_-^\uparrow	L_+^\uparrow beperkte Lorentz-groep	(1.2.21)
$\det \Lambda = +1$ $\Lambda^0_0 \leq -1$	L_+^\downarrow	$\det \Lambda = -1$ $\Lambda^0_0 \leq -1$	L_-^\downarrow	L^\uparrow orthochrone Lorentz-groep	

We kunnen de homogene Lorentz-groep genereren door aan de beperkte Lorentz-groep bepaalde discrete elementen toe te voegen. Definieer de elementen:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Pariteit of ruimtelijke spiegeling}$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Tijdomkering}$$
(1.2.22)

Daarmee krijgen we dan de volgende identificatie:

$$\begin{aligned}
 L^\uparrow &= \{L_+^\uparrow, PL_+^\uparrow\} \\
 L_+ &= \{L_+^\uparrow, PTL_+^\uparrow\} \\
 L &= \{L_+^\uparrow, PL_+^\uparrow, TL_+^\uparrow, PTL_+^\uparrow\}
 \end{aligned}$$
(1.2.23)

1.2.4 De Lorentz-algebra

We kunnen nu uit de zojuist gedefinieerde Lorentz-groep de bijbehorende Lorentz-algebra afleiden. (Zie ook de syllabus Symmetriebeschouwingen in de natuurkunde.) We bekijken daartoe eerst infinitesimale transformaties. Dat zijn elementen van de beperkte Lorentz-groep. Schrijf de transformatie in de vorm:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu$$
(1.2.24)

Uit de definiërende conditie (1.2.11):

$$\Lambda^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\nu = g_{\mu\nu}$$
(1.2.25)

kunnen we nu eigenschappen van $\varepsilon_{\mu\nu}$ afleiden. Uit (1.2.25) volgt dat

$$\Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda_{\alpha\nu} = g_{\mu\nu} \quad (1.2.26)$$

Zodat na invullen van de vorm (1.2.24):

$$(g^\alpha{}_\mu + \varepsilon^\alpha{}_\mu) (g_{\alpha\nu} + \varepsilon_{\alpha\nu}) = g_{\mu\nu} \quad (1.2.27)$$

en

$$g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu} + \varepsilon_{\nu\mu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = g_{\mu\nu} \quad (1.2.28)$$

Dit betekent dat

$$\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu} \quad (1.2.29)$$

We merken nu het volgende op:

- (i) Infinitesimale transformaties van de vorm $\Lambda_{\mu\nu}$ worden gegenereerd door anti-symmetrische matrices $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$. Hieruit volgt dat de homogene Lorentz-groep 6 parameters heeft.
- (ii) Voor $\varepsilon^\mu{}_\nu$ kunnen we schrijven:

$$\varepsilon^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} \varepsilon_{\alpha\nu} = -g^{\mu\alpha} \varepsilon_{\nu\alpha} = -g^{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \varepsilon^\beta{}_\alpha \quad (1.2.30)$$

zodat transformaties van de vorm $\Lambda^\mu{}_\nu$ worden gegenereerd door matrices waarvoor geldt:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0{}_i &= \varepsilon^i{}_0 & (i = 1, 2, 3) & \text{symmetrisch} \\ \varepsilon^i{}_j &= -\varepsilon^j{}_i & (i, j = 1, 2, 3) & \text{anti-symmetrisch} \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

We kunnen (1.2.24) nu herschrijven als:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \frac{i}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} (M_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \quad (1.2.32)$$

ofwel:

$$\Lambda = 1 + \frac{i}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \quad (1.2.33)$$

De matrices M vormen de infinitesimale generatoren (in de definiërende representatie) van de groep, en vormen een basis voor de raakruimte aan de groep in het eenheidselement. Zij worden gelabeld door twee indices α en β , met $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}$. Een voor de hand liggende keuze is dat de matrices M antisymmetrisch zijn in de indices $\alpha\beta$, d.w.z.:

$$M_{\alpha\beta} = -M_{\beta\alpha} \quad (1.2.34)$$

Omdat moet gelden:

$$\frac{i}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} (M_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = \varepsilon^\mu{}_\nu \quad (1.2.35)$$

kunnen we $(M_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu$ expliciet schrijven als:

$$(M_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = -i(g_\alpha{}^\mu g_{\beta\nu} - g_\beta{}^\mu g_{\alpha\nu}) \quad (1.2.36)$$

Uit het feit dat de Λ 's aan de groep eigenschap voldoen volgt dat de generatoren M een Lie-algebra vormen, in het onderhavige geval is dat de Lorentz-algebra $so_{1,3}$ ²:

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}] = i(g_{\alpha\gamma}M_{\beta\delta} + g_{\beta\delta}M_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\delta}M_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma}M_{\alpha\delta}) \quad (1.2.37)$$

Opgave 4 Laat zien dat dat uit (1.2.37) volgt dat de matrices $L_i := -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} M_{jk}$ aan de standaard impulsmoment commutatie relaties $[L_i, L_j] = i \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k$ voldoen, deze genereren de ondergroep van de ruimtelijke rotaties en vormen de algebra so_3 .

1.2.5 Eindige Lorentz-transformaties

We construeren nu de expliciete uitdrukking voor een eindige Lorentz-transformatie door deze te schrijven als het produkt van infinitesimale transformaties.

Neem als voorbeeld een infinitesimale rotatie om de z -as. We hebben dan de transformatie:

$$x' = \Lambda x = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \delta\theta & \\ & -\delta\theta & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} x \quad (1.2.38)$$

Zoals we hiervoor zagen wordt een rotatie om de z -as gegenereerd door M_{12} ; we kunnen de transformatie dan ook schrijven als:

$$\Lambda = \mathbb{1} - i\delta\theta M_{12} \quad (1.2.39)$$

We bouwen nu een rotatie over een eindige hoek θ op m.b.v. rotaties over infinitesimale hoeken $\delta\theta = \theta/N$:

$$\Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} - i \frac{\theta}{N} M_{12} \right)^N \quad (1.2.40)$$

Dit kunnen we omschrijven tot een exponent:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} - i \frac{\theta}{N} M_{12} \right)^N &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_k \binom{N}{k} \left(-i \frac{\theta}{N} M_{12} \right)^k \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_k \left(\frac{N(N-1) \cdots (N-k+1)}{k! N^k} (-i\theta M_{12})^k \right) \\ &= \sum_k \frac{1}{k!} (-i\theta M_{12})^k = e^{-i\theta M_{12}} \end{aligned} \quad (1.2.41)$$

² SO_N staat voor de orthogonale (rotatie) groep in N -dimensies, dat is de groep die het Euclidische inproduct $g = \delta_N$ invariant laat. $SO_{N,M}$ is de groep die het Lorentz inproduct $g_{N+M} = \delta_N \oplus (-\delta_M)$ invariant laat. De bijbehorende algebras worden met kleine letters aangegeven.

Dus:

$$\Lambda = \exp(-i\theta M_{12}) \quad (1.2.42)$$

We zien dat we een groeps-element terug krijgen door de exponentiële afbeelding toe te passen op een element van de bijbehorende Lie-algebra. Dit is mogelijk voor elementen van de samenhangende component van de groep (in dit geval dus de beperkte Lorentz-groep).

Vanwege het feit dat

$$(M_{12})^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & i & \\ & -i & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ en } (M_{12})^{2k} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} =: I \quad (1.2.43)$$

kunnen we (1.2.42) ook schrijven als

$$\Lambda(\theta) = \mathbb{1} - I + I \cos \theta - iM_{12} \sin \theta \quad (1.2.44)$$

Voor deze rotatie geldt dat $\Lambda^{-1}(\theta) = \Lambda(-\theta) = \Lambda^\dagger(\theta)$: deze is dus unitair in deze representatie.

Opgave 5 *Laat zien dat voor een echte Lorentz-transformatie, bijvoorbeeld een niet-infinitesimale “boost” langs de z-as de zojuist beschreven methode leidt tot*

$$\Lambda(\omega) = \mathbb{1} - I + I \cosh \omega - iM_{03} \sinh \omega \quad (1.2.45)$$

met:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad -iM_{03} = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 0 & \\ & & & 0 \\ 1 & & & \end{pmatrix} \text{ en } \omega = \text{arcth}(v/c) \quad (1.2.46)$$

Merk op dat deze transformaties niet unitair gerepresenteerd zijn, aangezien $\Lambda^{-1} \neq \Lambda^\dagger$.

1.3 De Klein-Gordon vergelijking

Aan de basis van de niet-relativistische quantummechanica ligt de Schrödinger-vergelijking:

$$i\partial_t \psi(\vec{x}, t) = H\psi(\vec{x}, t) \quad (1.3.47)$$

Voor een niet-relativistisch deeltje in een potentiaal V met hamiltoniaan:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) \quad (1.3.48)$$

geeft dat met de impuls operator $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ de vergelijking:

$$i\partial_t\psi = \left[-\frac{\vec{\nabla}^2}{2m} + V(\vec{x}) \right] \psi \quad (1.3.49)$$

De eerste poging die gedaan werd om een relativistische veldvergelijking te construeren bestond uit het invullen van de relativistische uitdrukking voor de energie van een deeltje in de bestaande Schrödinger vergelijking:

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (1.3.50)$$

Dit is een moeilijk te hanteren vergelijking; expansie van de wortel genereert hogere orde termen, waar weinig mee te beginnen valt. Een eenvoudig alternatief werd gegeven door Klein en Gordon (en eerder nog door Schrödinger zelf). Zij omzeilden het probleem van de hogere orde termen door het kwadraat van de energie te beschouwen. Hierdoor verdwijnt de wortel en hoeft geen machtreeksontwikkeling meer gemaakt te worden. Links en rechts kwadrateren van de operatoren in (1.3.47) geeft:

$$-\partial_t^2\varphi = H^2\varphi = E^2\varphi = (\vec{p}^2 + m^2)\varphi = (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\varphi \quad (1.3.51)$$

ofwel in covariante notatie

$$(\square + m^2)\varphi = 0 \quad (1.3.52)$$

waar de relativistische Laplace operator of d'Alembertiaan gegeven wordt door

$$\square := \partial_\mu\partial^\mu = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 \quad (1.3.53)$$

Deze Klein-Gordon vergelijking is Lorentz-invariant als we er van uitgaan dat φ een scalair veld is (met de transformatie eigenschap $\varphi'(x') = \varphi(x)$), omdat \square een invariante operator is.

Wanneer wij nu vasthouden aan de interpretatie van φ als een relativistische golf functie doen zich echter twee problemen voor. Allereerst blijkt het niet mogelijk een waarschijnlijkheidsinterpretatie te geven. Uit de Klein-Gordon vergelijking volgt dat

$$\varphi^*\square\varphi - \varphi\square\varphi^* = 0 \quad (1.3.54)$$

hetgeen we in analogie met het niet-relativistische geval kunnen herschrijven als een continuïteits vergelijking voor een stroom

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.3.55)$$

met

$$j^\mu = i(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*) \quad (1.3.56)$$

Dit suggereert om $\rho := j^0$ te interpreteren als de waarschijnlijkheidsdichtheid om het systeem in de toestand φ te vinden. Daar de uitdrukking

$$j^0 = i(\varphi^*\partial_t\varphi - \varphi\partial_t\varphi^*) \quad (1.3.57)$$

echter niet noodzakelijkerwijs positief is, kan deze niet als zodanig geïnterpreteerd worden.

Een ander probleem heeft te maken met het spectrum van de Hamiltoniaan. Voor een vrij deeltje correspondeert een energie-impuls eigentoestand met een vlakke golf oplossing

$$\varphi \sim e^{-ik_\mu x^\mu} = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \quad (1.3.58)$$

Invullen in (1.3.51) geeft de conditie $-\omega^2 + \vec{k}^2 + m^2 = 0$, zodat

$$\omega^2 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad (1.3.59)$$

Hieruit blijkt dat het energie spectrum niet naar beneden begrensd is. Dit is fysisch moeilijk te interpreteren omdat het systeem geen grondtoestand heeft.

Uit de voorgaande discussie blijkt dat een naieve implementatie van relativistische invariantie in de Schrödinger vergelijking niet het antwoord is op het probleem van een relativistische quantum mechanica. We zullen in latere hoofdstukken zien dat de Klein-Gordon vergelijking in een geheel andere interpretatie toch een oplossing biedt, we zullen echter eerst een andere relativistische golf vergelijking in detail bespreken.

1.4 De Dirac vergelijking

1.4.1 De Dirac vergelijking

Dirac onderzocht de mogelijkheid om een relativistische vergelijking van de vorm

$$i\partial_t\psi = H\psi \quad (1.4.60)$$

te construeren. Covariantie impliceert dat de Hamiltoniaan in dit geval slechts eerste orde ruimtelijke afgeleiden kan bevatten. Hij schreef daartoe een matrix vergelijking neer

$$i\partial_t\psi = \left(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + m\beta\right)\psi \quad (1.4.61)$$

Waarbij α^i en β in eerste instantie vier $N \times N$ matrices zijn en ψ een golffunctie met N componenten is. Wanneer wij zo dadelijk de eis van Lorentz covariantie opleggen zal blijken dat er een oplossing is waarbij $N = 4$ en waarbij ψ als een *spinor* transformeert. Alvorens in te gaan op de transformatie eigenschappen, zullen we eerst condities op de matrices α^i en β afleiden, door te eisen dat de componenten ψ_γ van de Dirac spinor ψ afzonderlijk aan de Klein-Gordon vergelijking voldoen. Hiermee garanderen we dat de energie impuls eigenwaarden van de spinoren voldoen aan de relativistische relatie $E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$. Wanneer we de operator $i\partial_t$ nogmaals op (1.4.61) laten werken vinden we de volgende vergelijking:

$$-\partial_t^2\psi_\gamma = H^2\psi_\gamma \quad (1.4.62)$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} (\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i)_{\gamma\delta} \partial_i \partial_j \psi_\delta \\
&\quad - im \sum_{j=1}^3 (\alpha^j \beta + \beta \alpha^j)_{\gamma\delta} \partial_j \psi_\delta + (\beta^2)_{\gamma\delta} m^2 \psi_\delta
\end{aligned} \tag{1.4.63}$$

Vergelijken we deze uitdrukking met de Klein-Gordon vergelijking

$$-\frac{\partial_t^2 \psi_\gamma}{\partial t^2} = (-\vec{\nabla}^2 + m^2) \psi_\gamma \tag{1.4.64}$$

dan volgt dat de Dirac-matrices aan de volgende relaties moeten voldoen

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij} \quad \{\alpha^i, \beta\} = 0 \quad \beta^2 = 1 \tag{1.4.65}$$

waarbij de anticommutator gedefinieerd is als $\{A, B\} := AB + BA$. Merk op dat deze relaties de matrices niet uniek vastleggen, ten eerste zijn ze invariant onder een gelijkvormigheids-transformatie en ten tweede leggen zij ook de dimensie van de matrices niet direct vast. Merk op dat de Dirac Hamiltoniaan in feite de matrix wortel is uit de operator $-\vec{\nabla}^2 + m^2$. Een verdere conditie op de matrices volgt uit de eis dat de Hamiltoniaan een zelf-geadjungeerde operator is, d.w.z.

$$\int \chi^\dagger H^\dagger \psi d^3x = \int \chi^\dagger H \psi d^3x \tag{1.4.66}$$

waar de geadjungeerde H^\dagger gedefinieerd is als

$$\int \chi^\dagger H^\dagger \psi d^3x = \int (H\chi)^\dagger \psi d^3x \tag{1.4.67}$$

Uitwerken van deze relatie geeft

$$\begin{aligned}
\int (H\chi)^\dagger \psi d^3x &= \int [[-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m] \chi]^\dagger \psi d^3x \\
&= \int (\vec{\nabla} \chi^\dagger (i\vec{\alpha}^\dagger \psi) + m \chi^\dagger \beta^\dagger \psi) d^3x \\
&= \int \chi^\dagger (-i\vec{\alpha}^\dagger \cdot \vec{\nabla} + \beta^\dagger m) \psi d^3x \\
&= \int \chi^\dagger (-i\vec{\alpha} \vec{\nabla} + \beta m) \psi d^3x
\end{aligned} \tag{1.4.68}$$

waaruit volgt dat de α^i en β matrices hermitisch moeten zijn:

$$\alpha^{i\dagger} = \alpha^i \quad \beta^\dagger = \beta \tag{1.4.69}$$

Opgave 6 Toon aan dat uit de relaties (1.4.65) en (1.4.69) volgt dat de dimensie van de matrices even en ≥ 4 moet zijn.

Het blijkt buitengewoon nuttig om een andere, covariante basis te kiezen voor de Dirac-algebra in termen van de zogenaamde γ -matrices:

$$\gamma^0 := \beta \quad \gamma^i = \beta\alpha_i \quad (1.4.70)$$

De Dirac-algebra krijgt dan de covariante vorm

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (1.4.71)$$

Opgave 7 Laat zien dat $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ en dat $\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$.

Een bijzondere rol speelt ook de matrix

$$\gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\tau \quad (1.4.72)$$

met $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$ de volledig antisymmetrische Levi-Civita tensor ($\varepsilon_{0123} = 1$).

Opgave 8 Laat zien dat $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$ en $(\gamma_5)^2 = 1$.

Ook is het zinvol om de Dirac-geconjugeerde van een γ -matrix te definiëren

$$\bar{\gamma}^\mu := \gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 \quad (1.4.73)$$

Tenslotte is het nuttig om de Feynman *slash* notatie in te voeren

$$\not{A} := \gamma^\mu A_\mu \quad (1.4.74)$$

Met deze conventies neemt de Dirac vergelijking de volgende compacte vorm aan:

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0 \quad (1.4.75)$$

We zullen nu enige expliciete realisaties van de Dirac matrices geven die veel gebruikt worden in de literatuur en die elk hun specifieke voordelen hebben.

(i) De Dirac- of standaard-representatie:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.76)$$

waar de σ 's staan voor de hermitische 2×2 Pauli-matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.4.77)$$

welke voldoen aan de relaties

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad (1.4.78)$$

(ii) De Majorana- of reële representatie:

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix} & \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^3 &= \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix} & \gamma^5 &= \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (1.4.79)$$

Alle γ -matrices zijn zuiver imaginair, hetgeen betekent dat de Dirac operator reëel wordt, met het gevolg dat we ons in principe tot een reële spinor ψ kunnen beperken. (Dit blijkt zeer nuttig bij toepassingen in supersymmetrische modellen)

(iii) De Weyl of Chirale representatie:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.4.80)$$

Deze realisatie is nuttig als we te doen hebben met massaloze spinoren.

Opgave 9 *Laat zien dat als $m = 0$ de Dirac-vergelijking reduceert tot een tweetal ongekoppelde vergelijkingen voor twee-componentige spinoren.*

Nu doet zich de vraag voor of de Dirac-golffunctie een interpretatie als waarschijnlijkheids amplitude toelaat. In analogie met de discussie die we voor de Klein-Gordon vergelijking gaven, kunnen we een behouden stroom construeren. Uit de relatie

$$\partial_t (\psi^\dagger \psi) = -\vec{\nabla} \cdot (\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi) \quad (1.4.81)$$

volgt dat $\partial_\mu j^\mu = 0$ met

$$j^\mu = (\psi^\dagger \psi, \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi) = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (1.4.82)$$

waar de Dirac-geconjugeerde spinor gedefinieerd wordt als $\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$. Nu is de tijdcomponent

$$j^0 = \psi^\dagger \psi = \sum_\gamma |\psi_\gamma|^2 \geq 0 \quad (1.4.83)$$

inderdaad positief en als waarschijnlijkheids dichtheid te interpreteren.

Het probleem van de negatieve energie toestanden blijft echter bestaan en zal pas in de context van de veldquantisatie in hoofdstuk 3 tot een bevredigende oplossing gebracht worden.

1.4.2 Covariantie van de Dirac-vergelijking

We zullen nu transformatie eigenschappen van ψ onder Lorentztransformaties nader analyseren. Uit deze analyse zal duidelijk worden dat we hier te maken hebben met een object dat weliswaar vier componenten heeft, maar dat des ondanks geen co- of contravariante vector is. We hebben hier, zoals we reeds opmerkten, te maken met de zogenaamde *spinor* representatie van de Lorentzgroep.

Uitgangspunt is dat de componenten ψ_α lineair transformeren

$$\psi'(x') = S\psi(x) \quad (1.4.84)$$

waar $S = S(\Lambda)$ de transformatie matrix in de spinor representatie is, die we willen bepalen. Covariantie betekent dat de Dirac vergelijking zelf ook als een spinor transformeert

$$(i\gamma^\nu \partial'_\nu - m) \psi'(x') = S (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) \quad (1.4.85)$$

Met behulp van de relatie $\partial'_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu$ en (1.4.84) kunnen we het rechterlid herschrijven tot

$$(iS\gamma^\mu S^{-1} \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu - m) \psi'(x') = 0 \quad (1.4.86)$$

Hieruit volgt dat S aan de relatie

$$S^{-1} \gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad (1.4.87)$$

moet voldoen, die S op een constante na vastlegt.

Opgave 10 *Bewijs dat S aan de groepseigenschap voldoet, d.w.z.*

$$S(\Lambda_2) S(\Lambda_1) = S(\Lambda_2 \Lambda_1) \quad (1.4.88)$$

waaruit volgt dat $S(\Lambda^{-1}) = S^{-1}(\Lambda)$.

Om een expliciete uitdrukking voor S te vinden is het wederom het eenvoudigst om vergelijking (1.4.87) eerst op te lossen voor infinitesimale Lorentztransformaties, en vervolgens de eindige S te vinden door het exponentieren van de infinitesimale generatoren van S . We gaan uit van een infinitesimale $\Lambda = 1 + \varepsilon$. Expansie van S in ε geeft in laagste orde

$$S(\varepsilon) = 1 + \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \tilde{M}^{\mu\nu} \quad (1.4.89)$$

waar de matrices $\tilde{M}^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ de generatoren van de Lorentzgroep in de spinor representatie zijn. Uit de definiërende relatie (1.4.87) voor S volgt na substitutie van (1.4.89):

$$[\tilde{M}^{\rho\sigma}, \gamma^\tau] = -i (g^{\tau\sigma} \gamma^\rho - g^{\tau\rho} \gamma^\sigma) \quad (1.4.90)$$

Het feit dat de $\tilde{M}^{\sigma\tau}$ antisymmetrisch zijn, suggereert een oplossing van de vorm

$$\tilde{M}^{\rho\sigma} = \lambda [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] \quad (1.4.91)$$

Substitutie in (1.4.90) geeft dat $\lambda = \frac{-i}{4}$.

Opgave 11 Verifieer dat de matrices (\tilde{M}) een representatie van de Lorentz-algebra (1.2.37) vormen.

Laten we nu terugkeren naar het probleem van de eindige transformaties. Met de definitie

$$\sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (1.4.92)$$

wordt de uitdrukking voor eindige S na exponentiatie

$$S = \exp\left(-\frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) \quad (1.4.93)$$

We zullen ter illustratie van de karakteristieke eigenschappen van de spinor nu eerst de rotaties over een hoek θ om de z -as beschouwen. In dat geval hebben we dat $\varepsilon_{\mu\nu} = \theta(\delta_{\mu 1}\delta_{\nu 2} - \delta_{\mu 2}\delta_{\nu 1})$. Substitutie levert in de standaard representatie van de gamma-matrices de volgende uitdrukking op:

$$S = \exp\left(-\frac{i}{2}\theta\sigma^{12}\right) = \exp\left[\frac{-i}{2}\theta\begin{pmatrix} \sigma_3 & \\ & \sigma_3 \end{pmatrix}\right] \quad (1.4.94)$$

We kunnen dit nog eenvoudiger schrijven als we de spin operatoren

$$\Sigma_i := \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma^{jk} = \begin{pmatrix} \sigma_i & \\ & \sigma_i \end{pmatrix} \quad (1.4.95)$$

invoeren, zodat de matrices $\frac{1}{2}\Sigma_i$ net als de matrices $\frac{1}{2}\sigma_i$ aan de standaard impuls-moment commutatierelaties voldoen. Voor de rotatie rond de z -as vinden we dan

$$S = 1 \cos \frac{\theta}{2} - i\Sigma_3 \sin \frac{\theta}{2} \quad (1.4.96)$$

We zien dat S periodiek is met periode 4π , m.a.w. na een rotatie over een hoek 2π verandert ψ in zijn tegengestelde. Verder is het duidelijk dat de eigenwaarden m van van de rotatie generator $L_3 := \frac{1}{2}\Sigma_3$ gelijk zijn aan $m = \pm\frac{1}{2}$, waarmee is aangetoond dat de vier-componentige spinor ψ vanuit het oogpunt van de rotatiegroep opgevat dient te worden als een som van twee spin $\frac{1}{2}$ representaties.

Tot slot berekenen we nu de transformatie matrix S die correspondeert met een boost langs de z -as. Deze wordt verkregen door als parameter te kiezen:

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \omega\left(\delta_\mu^0\delta_\nu^3 - \delta_\mu^3\delta_\nu^0\right) \quad (1.4.97)$$

waar $\omega = \text{arcth } \beta = \text{arcth } (v/c)$. Exponentiatie geeft de uitdrukking

$$S = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega\sigma^{03}\right) = \exp\left(\frac{\omega}{2}\gamma^0\gamma^3\right) \quad (1.4.98)$$

Voor een boost in een willekeurige \hat{p} -richting vinden we met $\gamma^0\vec{\gamma} = \vec{\alpha}$

$$S = \exp\left(\frac{\omega}{2}\hat{p} \cdot \vec{\alpha}\right) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\alpha}}{E+m}\right) \quad (1.4.99)$$

waar we gebruik hebben gemaakt van de relaties

$$\cosh \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \quad , \quad \sinh \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{E-m}{2m}} \quad (1.4.100)$$

We hebben in de eerste sectie van dit hoofdstuk opgemerkt dat de Lorentz-groep uit meerdere componenten bestaat. In het voorgaande hebben we de spinor representatie van de transformaties van de samenhangende component (de beperkte Lorentz-groep) expliciet geconstrueerd. Om de volledige Lorentz-groep te maken moeten we dus ook nog de spinor representatie van de ruimtelijke spiegeling en tijdomkering bepalen. Uit de definiërende relatie (1.4.87) voor $S(\Lambda)$ volgt dat voor $\Lambda = P = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ de matrix $S(P)$ moet voldoen aan

$$\begin{aligned} S\gamma^0 S^{-1} &= \gamma^0 \\ S\vec{\gamma} S^{-1} &= -\vec{\gamma} \end{aligned} \quad (1.4.101)$$

De oplossing is dat $S(P) = \eta_P \gamma^0$, omdat $(\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$ is aan de vergelijking voldaan vanwege de Dirac-algebra. De constante η_P is een willekeurige fase welke aan elk Dirac veld kan worden toegekend, deze wordt intrinsieke pariteit genoemd. De constructie van de tijdomkering operator is ietwat ingewikkelder en we verwijzen hiervoor naar de literatuur.

Nu we de transformatie eigenschappen van de spinor in detail hebben geanalyseerd is het nuttig om in te gaan op de fysische interpretatie van de verschillende spinorcomponenten ψ_α . We beschouwen daartoe de Fourier-expansie voor de algemene oplossing van de Dirac-vergelijking

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \left[c^{(+)}(\vec{p}) u(E, \vec{p}) e^{-i(Ex^0 - \vec{p}\cdot\vec{x})} + c^{(-)}(\vec{p}) u(-E, \vec{p}) e^{i(Ex^0 + \vec{p}\cdot\vec{x})} \right] \\ &= \psi^{(+)} + \psi^{(-)} \end{aligned} \quad (1.4.102)$$

In deze uitdrukking maken we expliciet onderscheid tussen $\psi^{(+)}$ - de positieve - en $\psi^{(-)}$ - de negatieve - energie componenten. De spinoren u vormen een basis van energie-impuls eigentoestanden voor een vrij Dirac-veld, waar we zodadelijk nader op in gaan. De expansie coëfficiënten $c^{(\pm)}(\vec{p})$ zijn willekeurige constanten. We kunnen de negatieve energie spinoren $u(-E, \vec{p})$ in een handzamere covariante vorm brengen door in de integraal uitdrukking eerst \vec{p} door $-\vec{p}$ te vervangen en vervolgens voor de negatieve energie spinoren een andere notatie te kiezen:

$$v(p) = v(E, \vec{p}) := u(-E, -\vec{p})$$

waarmee

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \left[b(p) u(p) e^{-ip\cdot x} + d^*(p) v(p) e^{ip\cdot x} \right] \quad (1.4.103)$$

Merk op dat in de aldus verkregen uitdrukkingen de energie altijd positief is, $p^0 = +E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, we kunnen dus volstaan met de notatie $u(p)$ en $v(p)$. Met deze covariante notatie lopen we vooruit op een natuurlijke interpretatie van de v -spinoren die na de quantisatie antideeltjes zullen blijken te beschrijven.

Wanneer wij de bovenstaande expansie in de Dirac-vergelijking invullen krijgen we algebraïsche vergelijkingen voor de u en v spinoren:

$$\begin{aligned}(\not{p} - m)u(p) &= 0 \\ (\not{p} + m)v(p) &= 0\end{aligned}\tag{1.4.104}$$

Het is nu verhelderend om eerst de oplossingen te construeren in het ruststelsel $p^\mu = (m, \vec{0})$. In de standaard representatie van de γ -matrices waar γ^0 diagonaal is vinden we dat de oplossing geschreven kan worden als

$$\begin{aligned}u(m, \vec{0}) &= \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} \\ v(m, \vec{0}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.4.105}$$

waar χ een willekeurige 2-componentige spinor is:

$$\chi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

We stellen dus vast dat zowel de u als de v spinoren nog tweevoudig ontaard zijn, deze ontaarding wordt opgeheven als wij kijken naar de eigenwaarden van de eerder besproken spin-operator Σ^3 .

Om de spinor oplossingen in een willekeurig stelsel te bepalen kunnen we een boost toepassen op de spinor in het rust stelsel, covariantie van de Dirac vergelijking garandeert dat de aldus verkregen spinor een oplossing is met impuls \vec{p} .

Het is echter nog eenvoudiger om uit te gaan van het gegeven dat iedere component van de Dirac spinor aan de Klein-Gordon vergelijking voldoet. Uit het feit dat

$$0 = (p^2 - m^2) = (\not{p} - m)(\not{p} + m) = (\not{p} + m)(\not{p} - m)\tag{1.4.106}$$

volgt dat de vergelijkingen (1.4.104) voor de spinoren oplossingen heeft van de volgende vorm:

$$\begin{aligned}u(p) \sim (\not{p} + m)u(m, \vec{0}) &\longrightarrow u(p, s = \pm) = N \begin{pmatrix} (E + m) & \chi_{\pm} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & \chi_{\pm} \end{pmatrix} \\ v(p) \sim (\not{p} - m)v(m, \vec{0}) &\longrightarrow v(p, s = \pm) = N \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & \chi_{\pm} \\ (E + m) & \chi_{\pm} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.4.107}$$

waarbij N een nog te bepalen normerings constante is en waar χ_{\pm} voldoen aan $\vec{\sigma} \cdot \hat{p}\chi_{\pm} = \pm\chi_{\pm}$. Zoals verwacht mengen nu alle componenten. We merken op dat

de spinoren $u_{\pm}(p)$ en $v_{\pm}(p)$ niet langer eigentoestanden van de operatoren Σ^3 zijn, maar wel van de zogenaamde *heliciteits-operator*

$$\lambda = \hat{p} \cdot \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & \\ & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \quad (1.4.108)$$

De operatoren $\frac{1}{2}(1 \pm \hat{p} \cdot \vec{\Sigma})$ geven de projecties van de spincomponent langs de impulsrichting welke behouden is omdat λ commuteert met de Hamiltoniaan.

Opgave 12 *Laat zien dat je het resultaat (1.4.107) ook krijgt als je een met een boost corresponderende Lorentz transformatie maakt op de spinoren in het ruststelsel.*

Tot slot nog een opmerking over de normering van de basis spinoren. Omdat de dichtheid $\psi^\dagger \psi$ correspondeert met de tijdcomponent van de vierstroom $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ kunnen we hem niet invariant normeren. Een geschikte normering is bijvoorbeeld die waarbij (we volgen hierin Bjorken en Drell)

$$N^2 = \frac{1}{2m(E + m)} \quad (1.4.109)$$

Hiermee voldoen de spinoren aan de volgende orthonormaliteits relaties

$$u^\dagger(p, s)u(p, s') = v^\dagger(p, s)v(p, s') = E/m\delta_{s,s'} \quad (1.4.110)$$

welke tot de eenheid reduceert in het ruststelsel en verder als de tijdcomponent van een viervector transformeert. De Dirac-geconjugeerde spinoren voldoen dan aan de volgende, invariante, relaties:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p, s)u(p, s') &= -\bar{v}(p, s)v(p, s') = \delta_{ss'} \\ \bar{v}(p, s)u(p, s') &= v^\dagger(p, s)u(-\vec{p}, s') = 0 \end{aligned} \quad (1.4.111)$$

Merk op dat met $u(-\vec{p}, s')$ bedoelt wordt dat alleen de ruimtelijke componenten van \vec{p} omklappen van teken, p_0 kiezen we steeds positief. De bewijzen van de orthonormaliteitsrelaties berusten op uitschrijven waarbij we gebruik maken van de Diracrepresentatie van de golffuncties. We laten één geval zien:

$$\begin{aligned} \bar{u}u &= u^\dagger \gamma^0 u = N^2((E + m)^2 - E^2 + m^2)\delta_{ss'} \\ &= \frac{1}{2m(E + m)}(2mE + 2m^2)\delta_{ss'} = \delta_{ss'} \end{aligned} \quad (1.4.112)$$

We hebben hierbij gebruik gemaakt van $\gamma^0 = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$, $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2$ en de Dirac-representatie van de spinoren u .

Tot slot geven we een aantal volledighedsrelaties voor de spinoren:

$$\begin{aligned} \sum_{s=\pm} u_{\alpha}(p, s) \bar{u}_{\beta}(p, s) &= \left(\frac{\not{p} + m}{2m} \right)_{\alpha\beta} \\ - \sum_{s=\pm} v_{\alpha}(p, s) \bar{v}_{\beta}(p, s) &= \left(\frac{-\not{p} + m}{2m} \right)_{\alpha\beta} \\ \sum_{s=\pm} (u_{\alpha}(p, s) \bar{u}_{\beta}(p, s) - v_{\alpha}(p, s) \bar{v}_{\beta}(p, s)) &= \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.4.113)$$

We geven het bewijs van de eerste relatie, de andere twee kunnen op een analoge wijze bewezen worden. Allereerst schrijven we het product uit:

$$\sum_{s=\pm} u_{\alpha}(p, s) \bar{u}_{\beta}(p, s) = \sum_{s=\pm} \left[(\not{p} + m)_{\alpha\gamma} u_{\gamma}(m, s) u_{\delta}^{\dagger}(m, s) (\not{p} + m)_{\delta\epsilon}^{\dagger} \gamma_{\epsilon\beta}^0 \right] \frac{1}{2m(E + m)} \quad (1.4.114)$$

We maken gebruik van:

$$\sum_{s=\pm} u_{\gamma}(m, s) u_{\delta}^{\dagger}(m, s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0, 0, 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0, 1, 0, 0) = \frac{1}{2} (1 + \gamma^0)_{\gamma\delta} \quad (1.4.115)$$

en

$$(\not{p} + m)_{\delta\epsilon}^{\dagger} \gamma_{\epsilon\beta}^0 = \gamma_{\delta\epsilon}^0 (\not{p} + m)_{\epsilon\beta} \quad (1.4.116)$$

Gebruiken we tevens dat $1/2(1 + \gamma^0)\gamma^0 = 1/2(1 + \gamma^0)$ dan vinden we dat (1.4.114) gelijk is aan:

$$[(\not{p} + m)^2 + (\not{p} + m)\gamma^0(\not{p} + m)]_{\alpha\beta} \frac{1}{4m(E + m)} \quad (1.4.117)$$

Vervolgens is het eenvoudig om na te gaan dat

$$(\not{p} + m)^2 = 2m(m + \not{p}) \quad (1.4.118)$$

en dat

$$(\not{p} + m)\gamma^0(\not{p} + m) = (\not{p} + m)(-\not{p}\gamma^0 + m\gamma^0 + 2p_0(\gamma^0)^2) \quad (1.4.119)$$

Hiermee vinden we uiteindelijk voor (1.4.114)

$$\sum_{s=\pm} u_{\alpha}(p, s) \bar{u}_{\beta}(p, s) = \left(\frac{\not{p} + m}{2m} \right)_{\alpha\beta} \quad (1.4.120)$$

Hoofdstuk 2

Klassieke veldentheorie

2.1 Het Hamilton-Lagrange formalisme

In het voorgaande hoofdstuk hebben we twee relativistische vergelijkingen bestudeerd, namelijk de Klein-Gordon en de Dirac vergelijking. Een poging om deze vergelijkingen op te vatten als relativistische generalisaties van de Schrödinger vergelijking faalde omdat de fysische interpretatie van de ‘golffuncties’ tot onoverkomelijke problemen aanleiding gaf. Bij beide vergelijkingen blijkt dat het energiespectrum van de oplossingen niet van onder begrensd is; bij de Klein-Gordon vergelijking is het bovendien niet mogelijk een behouden positieve waarschijnlijkheidsdichtheid te construeren.

Het alternatief dat we in dit hoofdstuk zullen uitwerken is om deze relativistische vergelijkingen op te vatten als vergelijkingen voor *klassieke* velden zoals bijvoorbeeld de Maxwell vergelijkingen dat zijn voor het electromagnetische veld. Dat wil zeggen dat de velden corresponderen met dynamische variabelen en niet langer als golffuncties geïnterpreteerd worden. We zullen in het volgende hoofdstuk laten zien dat we deze velden kunnen quantiseren en dat ze dan een bevredigende quantummechanische beschrijving geven van relativistische deeltjes met verschillende spins en massa’s. Bij deze zogenaamde kanonieke veld-quantisatie gaan we uit van een beschrijving van de klassieke velden in het Hamilton-Lagrange formalisme. In deze paragraaf zal dit formalisme uitgebreid besproken worden.

In een volgende paragraaf gaan we in op het verband tussen symmetrieën of invarianties van de Lagrangiaan en de daarmee corresponderende behouden grootheden die fysisch van groot belang zijn. Dit verband wordt gegeven door de stelling van Noether. Tal van belangrijke voorbeelden worden vervolgens in detail uitgewerkt in paragraaf 3.

Deze symmetrie beschouwingen spelen een belangrijke rol in de constructie en analyse van theorieën voor de fundamentele wisselwerkingen tussen elementaire deeltjes, met name kunnen ze als uitgangspunt dienen om een consistente *wisselwerking* tussen verschillende velden te introduceren. Het principe van de *lokale ijkinvariantie* wordt in de laatste sectie van dit hoofdstuk uiteengezet.

Ter inleiding beginnen we met een korte samenvatting van het Hamilton-Lagrange formalisme voor een klassiek, niet relativistisch puntdeeltje in een conservatief krachteveld. Het deeltje heeft als dynamische variabelen de positie $q(t)$ en de snelheid $\dot{q}(t)$. We definiëren de *Lagrangiaan* als

$$L(q(t), \dot{q}(t)) := \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q(t)) \quad (2.1.1)$$

deze is gelijk aan het verschil tussen de kinetische en de potentiële energie. Merk op dat in het onderhavige geval de Lagrangiaan alleen impliciet via de coördinaat van de tijd afhangt. Zouden we de Lagrangiaan expliciet van de tijd laten afhangen dan verandert het formalisme van vorm. Wij zullen ons beperken tot het geval van de impliciete tijdafhankelijkheid omdat dat voor de toepassingen die wij op het oog hebben toereikend is. De *actie* is gedefinieerd als tijdintegraal van de Lagrangiaan

$$S[q(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(q(t), \dot{q}(t)) \quad (2.1.2)$$

Deze heeft een functionele afhankelijkheid van de functies $q(t)$ en $\dot{q}(t)$.¹ Het is overbodig om zowel de coördinaatfunctie als zijn afgeleide naar de tijd als argument van de functionaal te nemen omdat als we de functie kennen voor alle t zijn afgeleide daarmee vastligt. We laten het overbodige argument $\dot{q}(t)$ daarom weg. Vaak laten we om de notatie te verlichten het argument t van $q(t)$ ook weg en noteren dan $S[q]$. Merk op dat de actie alleen afhangt van welke baan het deeltje door de q -ruimte beschrijft.

Het variatie principe van Hamilton stelt nu dat de actie extremaal is voor een baan die een aan de bewegingsvergelijking voldoet. Met andere woorden de conditie waaraan de baan moet voldoen opdat de actie voor die baan onder kleine variaties stationair is, is per definitie de bewegingsvergelijking. We leggen tevens op dat het beginpunt $q(t_0)$ en het eindpunt $q(t_1)$ van de baan vast is bij een dergelijke variatie van de baan. We ontwikkelen de actie voor een baan $q' = q + \delta q$ tot op eerste orde:

$$S' = S + \delta S = \int dt [L(q, \dot{q}) + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}] \quad (2.1.3)$$

Hieruit volgt voor de variatie van de actie:

$$\delta S = \int dt [\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}] \quad (2.1.4)$$

We kunnen de tweede term partiëel integreren:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt (-\partial_t \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial q}) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (2.1.5)$$

¹Een functionaal is een afbeelding van een functieruimte naar een andere ruimte, bijvoorbeeld de reële of complexe getallen \mathcal{R} respectievelijk \mathcal{C} , of een andere functieruimte. In onze notatie geven we dit aan door om het argument van een functionaal vierkante haken te zetten.

Omdat we opleggen dat aan de eindpunten de variatie nul is, verdwijnt de stokterm. Het variatie principe bepaalt aldus de conditie waaraan de baan $q(t)$ moet voldoen opdat de variatie van de actie nul is voor een willekeurige variatie van de baan. Deze conditie is de *Euler-Lagrange* vergelijking:

$$\partial_t \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (2.1.6)$$

met andere woorden, (2.1.6) is de algemene vorm voor de bewegingsvergelijking met Lagrangiaan L . Inderdaad, als wij voor L de uitdrukking (2.1.1) kiezen reproduceren we de vergelijkingen van Newton. Merk op dat de Euler-Lagrange vergelijking niet essentieel verandert wanneer wij bij L een constante optellen of deze met een constante vermenigvuldigen. Deze ambiguïteit in de keuze van de Lagrangiaan wordt gedeeltelijk opgeheven als we zodadelijk het verband tussen Lagrangiaan en Hamiltoniaan leggen. Het feit dat de Hamiltoniaan gelijk is aan de totale energie legt de multiplicatieve factor vast, de vrijheid om een constante op te tellen bij de Lagrangiaan reflecteert dan de keuze van het nulpunt van de energie.

Om het Hamilton formalisme te construeren definiëren we de *gegeneraliseerde* of *kanonieke impuls* p en de *Hamiltoniaan* H :

$$\begin{aligned} p &:= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \\ H(p, q) &:= p\dot{q} - L(q, \dot{q}) \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Hoewel in bovenstaande vergelijking de Hamiltoniaan schijnbaar een functie van p , q en \dot{q} is, bedoelen we met de Hamiltoniaan de functie waaruit met behulp van de definitie voor de gegeneraliseerde impuls \dot{q} geëlimineerd is. De Hamiltoniaan hangt dus alleen van de gegeneraliseerde coördinaat en impuls af. Dit is een van de cruciale verschillen tussen het Hamilton en Lagrange formalisme. In het Hamilton formalisme doorloopt het deeltje een baan in de *faseruimte* die door q en p geparametriseerd wordt. In het geval van een klassiek puntdeeltje in een conservatief krachtenveld vinden we voor de Hamiltoniaan:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (2.1.8)$$

Merk op dat de Hamiltoniaan gelijk is aan de totale energiefunctie. We willen nu de partiële afgeleiden van de Hamiltoniaan naar de gegeneraliseerde impuls en plaats coördinaat berekenen. We kunnen daarbij niet definitie (2.1.7) nemen en de afgeleide berekenen, omdat uit deze uitdrukking \dot{q} nog niet geëlimineerd is. Om de variatie van de Hamiltoniaan te bepalen die gegeneerd wordt door variaties in de coördinaat en de impuls, kunnen we echter wel uitgaan van de definitie (2.1.7).

$$\delta H(p, q) = \dot{q}\delta p + p\delta\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q}\delta q - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \quad (2.1.9)$$

De tweede en vierde term vallen vanwege de definitie van de impuls tegen elkaar weg. Het blijkt nu dat het er niet toe doet hoe de variatie van \dot{q} van de variaties van de coördinaat en impuls afhangt, precies zo als we zouden verwachten. Aangezien de variatie van de Hamiltoniaan ook gegeven wordt door

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial p} \delta p + \frac{\partial H}{\partial q} \delta q \quad (2.1.10)$$

volgt uit (2.1.9) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= \dot{q} \\ \frac{\partial H}{\partial q} &= -\dot{p} \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

omdat met gebruikmaking van de Euler-Lagrange vergelijking:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} = -\partial_t \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -\dot{p}. \quad (2.1.12)$$

Dit zijn de Hamilton vergelijkingen. Ze beschrijven de dynamica van het systeem, net zoals de Euler-Lagrange vergelijkingen dit doen. In het Euler-Lagrange formalisme vinden we één tweede orde differentiaal vergelijking per vrijheidsgraad, in het Hamilton formalisme twee eerste orde vergelijkingen. Er kan worden aangetoond dat de vergelijkingen ook gelden voor niet-conservatieve krachten of systemen waarin \dot{q} in de potentiaal of de tijd in de Lagrangiaan voorkomt. De Hamiltoniaan is dan in het algemeen echter niet gelijk aan de totale energie.

We zullen nu laten zien dat de Hamiltoniaan op een heel directe wijze de tijdevolutie van allerlei grootheden bepaalt. We beschouwen daartoe een willekeurige dynamische variabele A , die een functie is van de gegeneraliseerde coördinaat en impuls. Daar de coördinaat en impuls meestal functies van de tijd zijn, hangt A dus impliciet van de tijd af; we nemen echter aan dat A niet expliciet van de tijd afhangt. Voor de afgeleide naar de tijd van A geldt:

$$\partial_t A = \frac{\partial A}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p} \quad (2.1.13)$$

Met behulp van de Hamilton vergelijkingen kunnen we dit schrijven als:

$$\partial_t A = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \quad (2.1.14)$$

We definiëren het *Poissonhaakje* van twee dynamische grootheden als

$$\{A(p, q), B(p, q)\}_{pb} := \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} \quad (2.1.15)$$

Merk op dat dit haakje anti-symmetrisch is en voldoet aan de Jacobi identiteit. Met deze definitie kunnen we $\partial_t A$ schrijven als:

$$\partial_t A = \{A, H\}_{pb} \quad (2.1.16)$$

De tijdsevolutie van een willekeurige grootte wordt dus gegenereerd door de Poissonhaak met de Hamiltoniaan. Uit de Poissonhaak en de Hamiltoniaan volgen de Hamiltonvergelijkingen en andersom; beide formalismen zijn equivalent. Merk op dat als de Poissonhaak van een bepaalde grootte met de Hamiltoniaan gelijk is aan nul, deze grootte behouden is. In het bijzonder geldt dit voor de Hamiltoniaan zelf. Direct uit de definitie van de Poisson haak volgt ook nog dat $\partial_q A = \{A, p\}_{pb}$ en $\partial_p A = -\{A, q\}_{pb}$. Het is ook eenvoudig te verifiëren dat $\{q, p\} = 1$. Variabelen waarvoor dit laatste geldt noemen we *kanoniek toegevoegde variabelen*. Vooruit lopende op onze discussies in de volgende hoofdstukken is het zinvol om reeds hier op te merken dat het Poisson haakje een essentiële rol speelt bij de zogenaamde *kanonieke quantisatie*. Hierbij gaat men uit van het *correspondentie principe*; een voorschrift waarbij de klassieke kanonieke dynamische variabelen p en q vervangen worden door hermitische operatoren \hat{p} en \hat{q} op een Hilbertruimte van functies ψ , en het Poisson haakje door $1/i\hbar$ maal de commutatorhaak van de corresponderende operatoren.

We willen nu het Hamilton-Lagrange formalisme toepassen op klassieke velden. Met een veld ϕ wordt een continue afbeelding van de ruimtetijd (x, t) naar een beeldruimte bedoelt. We kunnen ons voorstellen dat we op de plaats (x, t) het beeld van de afbeelding neerzetten. In het geval van het Klein-Gordon veld is de beeldruimte \mathcal{R} of \mathcal{C} en spreken we over een reëel dan wel complex scalarveld. Bij het Dirac veld is het beeld een complexe vier-componentige spinor en bij het Maxwell veld een reële vector, dus spreken we over een spinor- respectievelijk vectorveld. Dat we de constructie van de Hamilton en Lagrange vergelijkingen voor velden in analogie aan een veeldeeltjes probleem kunnen aanpakken illustreren we aan de hand van een voorbeeld. We stellen ons voor dat we een kralenketting beschrijven die uit N kralen bestaat. Het Hamilton-Lagrange formalisme is heel eenvoudig voor N deeltjes af te leiden. De bewegingsvergelijkingen worden dan:

$$\begin{aligned} \partial_t \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

waarbij i de index van het deeltje is en van 1 tot N loopt. Merk op dat de Hamiltonvergelijkingen uit $2N$ eerste orde vergelijkingen bestaan en de Euler-Lagrange vergelijkingen uit N tweede orde vergelijkingen. Als we op een geschikte wijze N naar oneindig en de onderlinge afstand tussen de deeltjes naar nul laten gaan, beschrijven we een continue snaar. In plaats van een discrete index i hebben de p

en q een continue index, bijvoorbeeld de positie x op de snaar. We noteren p en q als $p(x, t)$ en $q(x, t)$. We kunnen de uitwijking van de snaar opvatten als een een-dimensionaal scalarveld met als coördinaat x , waar de waarde van het veld correspondeert met de uitwijking van de snaar. Dit heuristische argument laat zien dat een veld in feite een oneindig aantal vrijheidsgraden bevat. We laten de analogie met de snaar nu los, en vatten x verder op als de positievector in de fysische ruimte. Het ligt voor de hand dat we ook op deze "continue verzameling" van variabelen het Hamilton-Lagrange formalisme kunnen toepassen. De gegeneraliseerde variabelen zijn velden die van de coördinaat en de tijd afhangen. Om het formalisme te verkrijgen definiëren we analoog aan het geval van een puntdeeltje een Lagrangiaan en een actie, en passen het variatieprincipe toe op het veld. De eis dat de actie stationair is onder deze variatie leidt dan tot de bewegingsvergelijking voor het veld. Om dit programma kunnen uitvoeren is het nuttig het begrip van de *functionele afgeleide* in te voeren.

De functionele afgeleide Gegeven zij een functionaal F van een functie $f \in \mathcal{F}$:

$$F[f] : \mathcal{F} \rightarrow \omega \quad (2.1.18)$$

waar ω bijvoorbeeld een verzameling \mathcal{R} , \mathcal{C} of een functieruimte is. We gaan $f(x)$ nu infinitesimaal variëren en de functionaal tot op eerste orde ontwikkelen:

$$F[f + \epsilon g] = F[f] + \epsilon \Delta[f, g] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.1.19)$$

dan kunnen we de functionaal $\Delta[f, g]$ schrijven in de vorm

$$\Delta[f, g] = \int \frac{\delta F[f]}{\delta f(x')} g(x') dx' \quad (2.1.20)$$

en definiëert deze vergelijking de functionele afgeleide $\delta F/\delta f$. Aangezien de aard van de functionaal kan verschillen, kan de aard van de functionele afgeleide dit ook. Merk op dat bovenstaande definitie dit niet uitsluit, en dat de functionele afgeleide zowel een functie als een getal kan zijn.

Voorbeeld 1

$$\begin{aligned} F[f] &:= \int f^n(x) dx \\ F[f + \epsilon g] &= \int (f^n(x) + \epsilon n f^{n-1}(x) g(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)) dx \\ &\Rightarrow \frac{\delta F}{\delta f} = n f^{n-1} \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Voorbeeld 2

$$\begin{aligned}
F[f] &:= f(x) \\
\Delta[f, g] &= g(x) = \int \delta(x - x')g(x')dx' \\
&\Rightarrow \frac{\delta f(x)}{\delta f(x')} = \delta(x - x')
\end{aligned} \tag{2.1.22}$$

Voorbeeld 3

$$\begin{aligned}
F[f] &:= \frac{\partial f(x)}{\partial x} \\
\Delta[f, g] &= g'(x) = \int \delta(x - x')g'(x')dx' = \int -\partial_{x'}\delta(x - x')g(x')dx' \\
&\Rightarrow \frac{\delta f'(x)}{\delta f(x)} = -\partial_{x'}\delta(x - x')
\end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Gewapend met deze technische ingrediënt kunnen we het Hamilton-Lagrange formalisme voor velden ontwikkelen. We gaan uit van een scalarveld ϕ dat van x en t afhangt. Later zullen we laten zien dat het formalisme ook geldt voor een meercomponentig veld, zoals het Dirac of Maxwell veld. We gaan er van uit dat de Lagrangiaan voor het systeem bekend is en definiëren een actie functionaal S

$$S[\phi] := \int dt L[\phi, \dot{\phi}] \tag{2.1.24}$$

Deze uitdrukking in termen van L is niet manifest Lorentz-covariant. Het blijkt dat we een Lagrange dichtheid \mathcal{L} kunnen definiëren, zodanig dat

$$\int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) := L[\phi, \dot{\phi}] \tag{2.1.25}$$

waaruit volgt dat de actie dan in een manifest Lorentz covariante vorm te schrijven is als

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{2.1.26}$$

We merken op dat de Lagrange dichtheid een functie is van ruimtetijd coördinaten \vec{x} en t , maar dat die afhankelijkheid impliciet is als functie van de veldvariabelen ϕ , $\dot{\phi}$ en $\partial_i \phi$.² De actie is nu een functionaal van de functie ϕ , omdat we om S te berekenen ϕ voor alle \vec{x} en t moeten kennen, waarna de partiële afgeleiden $\partial_\mu \phi$ vastliggen en niet langer als onafhankelijke veldvariabelen opgevat moeten worden. Evenzo is L in (2.1.25) een functionaal van $\phi(\vec{x})$ en $\dot{\phi}(\vec{x})$ ten tijde t omdat deze onafhankelijk zijn, maar niet van $\partial_i \phi$. S zelf hangt niet van de ruimte tijdcoördinaten af en zal Lorentz invariant zijn. Dit is zo als de Lagrangedichtheid een Lorentz scalaire functie

²In onze notatie lopen de griekse indices zoals μ en ν van nul tot drie en latijnse indices zoals i en j van één tot drie.

is omdat het volume elementje dx^4 invariant is (het transformeert immers met de Jacobiaan $\det\Lambda$ van de transformatie Λ , die voor de beperkte Lorentzgroep gelijk aan de eenheid is). We gaan nu een infinitesimale variatie uitvoeren van het veld ϕ , en eisen vervolgens dat de actie stationair is onder deze variatie.

$$S[\phi + \delta\phi] = S + \delta S = S + \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \delta\phi \right] \quad (2.1.27)$$

Analoog aan het een-deeltjes geval voeren we in de tweede term een partiële integratie uit.

$$\delta S = \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \Big|_{-\infty}^{\infty} \quad (2.1.28)$$

Als we aannemen dat de variatie van het veld op oneindig nul is, verdwijnt de randterm. We vinden dus dat de variatie in S nul is voor een willekeurige variatie in het veld ϕ , als het veld aan de Euler-Lagrange vergelijking voldoet:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (2.1.29)$$

Op deze wijze verkrijgen we Lorentz-covariante veldvergelijkingen uit een invariante actie. Hangt de actie af van meerdere velden (of een veld met meerdere componenten) dan worden de Euler-Lagrange vergelijkingen op analoge wijze geconstrueerd door de verschillende velden onafhankelijk te variëren.

We kunnen ook het Hamilton formalisme voor velden construeren. We gaan uit van een bekende Lagrangiaan en definiëren dan het kanonieke impulsveld π , de Hamiltoniaan H en de Hamiltondichtheid \mathcal{H} achtereenvolgens als:

$$\begin{aligned} \pi &:= \frac{\delta L[\phi, \dot{\phi}]}{\delta \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial \dot{\phi}} \\ H[\pi, \phi] &:= \int \pi \dot{\phi} d^3x - L[\phi, \dot{\phi}] \\ \mathcal{H}(\pi, \phi, \partial_i \phi) &:= \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

Merk op dat de kanonieke impuls nu afhangt van ϕ en $\partial_\mu \phi$. We kunnen nu de Hamiltonvergelijkingen voor een actie die van een scalarveld afhangt verkrijgen door een variatie van de Hamiltoniaan te berekenen. Voor een spinor- of vectorveld kunnen we voor elke component van het veld identieke vergelijkingen afleiden. We gaan uit van een variatie van het veld die een variatie in de Lagrangiaan induceert waarvoor geldt:

$$\delta L[\phi, \dot{\phi}] = \int d^3x \left(\frac{\delta L}{\delta \phi} \Big|_{\dot{\phi}} \delta\phi + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \Big|_{\phi} \delta\dot{\phi} \right) \quad (2.1.31)$$

Per definitie geldt $\delta L/\delta \dot{\phi} = \pi$. We moeten nu dus nog de andere functionele afgeleide $\delta L/\delta \phi$ berekenen. Dit doen we door de Lagrangiaan in het eerste argument te

variëren, zodat de tijdafgeleide van deze variatie nul is en het tweede argument van de Lagrangiaan niet verandert. Er geldt dan dat

$$L[\phi + \delta\phi, \dot{\phi}] = \int d^3x \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu\phi + \partial_\mu\delta\phi) \quad (2.1.32)$$

We kunnen de integrand tot op eerste orde expanderen en een partiële integratie uitvoeren. Er volgt dan een uitdrukking voor de variatie in de Lagrangiaan waaruit we met de definitie van de functionele afgeleide $\delta L/\delta\phi$ kunnen bepalen. Deze uitdrukking kunnen we dan met de Euler-Lagrange vergelijking nog omwerken.

$$\begin{aligned} \delta L &= \int d^3x \delta\phi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \right) \\ \Rightarrow \frac{\delta L}{\delta \phi} &= \dot{\pi} \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

Keren we nu terug naar onze oorspronkelijke vergelijking voor de variatie van de Lagrangiaan dan vinden we een uitdrukking die we met behulp van een partiële integratie omwerken:

$$\begin{aligned} \delta L[\phi, \dot{\phi}] &= \int d^3x (\dot{\pi} \delta\phi + \pi \delta\dot{\phi}) \\ &= \int d^3x (\delta(\pi\dot{\phi}) + \dot{\pi} \delta\phi - \dot{\phi} \delta\pi) \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

Aangezien $(\pi\dot{\phi}) = \mathcal{H} + \mathcal{L}$ volgt hieruit een uitdrukking voor de variatie van de Hamiltoniaan die we kunnen vergelijken met de standaard eerste orde ontwikkeling van de Hamiltoniaan. De Hamiltonvergelijkingen volgen dan direct:

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \pi} &= \dot{\phi} \\ \frac{\delta H}{\delta \phi} &= -\dot{\pi} \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

We kunnen bovenstaande vergelijkingen ook schrijven in termen van de Hamiltondichtheid. Deze vergelijkingen hebben het voordeel dat er alleen partiële afgeleiden van de dichtheid in voorkomen en geen functionele afgeleiden van de Hamiltoniaan. Deze partiële afgeleiden zijn in het algemeen veel eenvoudiger te berekenen. Eerst tonen we aan dat de Hamiltondichtheid onafhankelijk van $\dot{\phi}$ is analoog aan het een-deeltjes probleem. We gaan daartoe uit van een variatie van $\dot{\phi} : \phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ waaruit volgt dat $\dot{\phi}$ geen argument van de Hamiltondichtheid is:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\pi, \phi, \dot{\phi} + \delta\dot{\phi}, \partial_i\phi) &= \mathcal{H} + \pi \delta\dot{\phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta\dot{\phi} \\ &= \mathcal{H} + (\pi - \pi) \delta\dot{\phi} \\ &= \mathcal{H}(\pi, \phi, \partial_i\phi) \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

We kunnen nu de partiële afgeleiden van H naar π , ϕ en $\partial_i\phi$ berekenen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi}\Big|_{\phi,\partial_i\phi} &= \dot{\phi} \\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}\Big|_{\pi,\partial_i\phi} &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\phi)}\Big|_{\phi,\dot{\phi}} &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\phi)}\end{aligned}\quad (2.1.37)$$

De laatste twee vergelijkingen geven gecombineerd met de Euler-Lagrange vergelijking:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} - \partial_i\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\phi)} = -\dot{\pi} \quad (2.1.38)$$

de eerste vergelijking geeft:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} = \dot{\phi} \quad (2.1.39)$$

Dit zijn de Hamiltonvergelijkingen in de Hamiltondichtheid uitgedrukt.

Ook het Hamilton formalisme is eenvoudig te ontwikkelen voor een meercomponentig veld, de variabelen π en ϕ krijgen dan een index s en de vergelijkingen luiden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi_s} - \partial_i\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\phi_s)} &= -\dot{\pi}_s \\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_s} &= \dot{\phi}_s\end{aligned}\quad (2.1.40)$$

We kunnen in analogie met het deeltje een Poissonhaak voor velden definiëren:

$$\begin{aligned}\{A[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x})] \quad , \quad B[\phi(\vec{y}), \pi(\vec{y})]\}_{pb} \\ := \int \frac{\delta A_{\vec{x}}}{\delta\phi(\vec{x}')} \frac{\delta B_{\vec{y}}}{\delta\pi(\vec{x}')} d^3x' - \int \frac{\delta B_{\vec{x}}}{\delta\phi(\vec{x}')} \frac{\delta A_{\vec{y}}}{\delta\pi(\vec{x}')} d^3x'\end{aligned}\quad (2.1.41)$$

Opgave 13 *Laat zien dat we met deze definitie van de Poissonhaak de volgende uitdrukkingen, analoog aan de uitdrukkingen voor het puntdeeltje, vinden.*

$$\begin{aligned}\partial_t A &= \{A, H\}_{pb} \\ \delta_\phi A &= \{A, \pi\}_{pb} \\ \delta_\pi A &= -\{A, \phi\}_{pb}\end{aligned}\quad (2.1.42)$$

2.2 Toepassingen op relativistische velden

We zullen nu het hierboven beschreven formalisme illustreren aan de hand van de in Hoofdstuk 1 bestudeerde Lorentz-covariante vergelijkingen. We bespreken achtereenvolgens de acties voor het Klein-Gordon, het Dirac en het Maxwell veld.

Het scalaire (Klein-Gordon) veld. Een vrij algemene vorm voor de Lagrange dichtheid en actie van een reëel scalarveld is:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - V(\phi) \\ S[\phi] &= \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - V(\phi) \right)\end{aligned}\quad (2.2.43)$$

De Euler-Lagrange vergelijkingen voor een dergelijke Lagrangedichtheid luiden:

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} = 0 \quad (2.2.44)$$

Vergelijken we dit met de Klein-Gordon vergelijking, dan vinden we een uitdrukking voor de Lagrangedichtheid voor deze vergelijking:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}((\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^2) \quad (2.2.45)$$

De kanonieke impuls en Hamiltoniaan volgen nu per definitie:

$$\begin{aligned}\pi &:= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi} \\ \mathcal{H} &:= \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2)\end{aligned}\quad (2.2.46)$$

We kunnen de eerste term van de Hamiltondichtheid interpreteren als een kinetische energiedichtheid van het veld en de laatste twee termen als een potentiële energiedichtheid; $(\vec{\nabla}\phi)^2$ beschrijft dan de interactie tussen het veld ϕ in twee naburige punten x en $x + \Delta x$. De specifieke vorm van deze interactie volgt dus uit de eis van Lorentz-covariantie.

Opgave 14 *Construeer de actie voor het Schrödinger veld, opgevat als een klassiek veld. Geef ook de Hamiltoniaan.*

Het Diracveld. De Lagrange dichtheid en de actie voor het Dirac veld worden als volgt gedefiniëerd:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &:= \bar{\psi}_\alpha(i(\gamma^\mu)^\alpha_\beta\partial_\mu - m\delta^\alpha_\beta)\psi^\beta \\ S[\psi, \bar{\psi}] &= \int d^4x \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi(x)\end{aligned}\quad (2.2.47)$$

We vatten ψ en $\bar{\psi}$ op als onafhankelijke variabelen (dit is eenvoudiger dan onafhankelijk te variëren naar het reële en imaginaire deel van ψ). We zullen zien dat deze

actie de correcte veldvergelijkingen oplevert. Voor de variatie van de actie vinden we zo de volgende uitdrukking:

$$\delta S = \int d^4x (\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\delta\psi + \delta\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi) \quad (2.2.48)$$

Met behulp van een partiële integratie waarbij de stokterm nul is, vinden we zo:

$$\delta S = \int d^4x [-i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\delta\psi - m\bar{\psi}\delta\psi + \delta\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi] + i(\bar{\psi}\gamma^\mu\delta\psi + \delta\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) |_\infty \quad (2.2.49)$$

Aangezien $\delta\psi$ en $\delta\bar{\psi}$ onafhankelijk zijn, vinden we de Euler-Lagrange vergelijkingen:

$$\begin{aligned} i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} &= 0 \\ (i\cancel{\partial} - m)\psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.50)$$

Deze twee vergelijkingen zijn elkaars geconjugeerde en dus consistent. We hebben zo de Diracvergelijking uit bovenstaande Lagrangedichtheid afgeleid. Voor de kanonieke impuls en de Hamiltondichtheid vinden we de volgende uitdrukkingen:

$$\begin{aligned} \pi_\alpha &:= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_\alpha} = i\psi_\alpha^\dagger \\ \mathcal{H} &:= \pi\dot{\psi} - \mathcal{L} = \psi^\dagger(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m)\psi \end{aligned} \quad (2.2.51)$$

De resulterende Hamiltonvergelijkingen zijn in dit geval identiek aan de Euler-Lagrange vergelijkingen omdat de Lagrange dichtheid lineair in afgeleiden van het veld is.

Het Maxwellveld. Voordat we het Hamilton-Lagrange formalisme beschouwen voor het electromagnetisch veld, geven we een korte samenvatting van enige algemene resultaten uit de klassieke electrodynamicica. We kiezen eenheden waarin de constanten c , ϵ en μ gelijk aan 1 zijn. De Maxwell vergelijkingen voor de \vec{E} en \vec{B} velden hebben in vacuum de volgende vorm:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} - \partial_t\vec{E} &= \vec{j} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.52)$$

Merk op dat hier in feite 8 vergelijkingen staan voor de 6 componenten van \vec{E} en \vec{B} . Consistentie van de vergelijkingen levert twee extra condities op. Een daarvan is de continuïteitsvergelijking $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \partial_t\rho = 0$ waar de bronnen aan moeten voldoen. Aan de ander is automatisch voldaan in de afwezigheid van magnetische ladingen

en stromen. We kunnen vervolgens de algemene oplossing van de eerste homogene vergelijking voor \vec{B} schrijven in termen van de vectorpotentiaal \vec{A} als

$$\vec{B} := \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.2.53)$$

Dit ingevuld in de tweede homogene Maxwell vergelijking geeft de algemene oplossing voor \vec{E} van die vergelijking in termen van \vec{A} en een scalarpotentiaal ϕ :

$$\vec{E} := -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} \quad (2.2.54)$$

Nu liggen voor gegeven \vec{E} en \vec{B} velden de potentialen niet uniek vast: het is namelijk eenvoudig na te gaan dat de potentialen vastliggen op een *ijktransformatie* na:

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \\ \phi' &= \phi - \partial_t \chi \end{aligned} \quad (2.2.55)$$

waar χ een willekeurige functie van de de ruimte-tijd coördinaten is. De ijkinvariantie van de fysische velden impliceert dat we een extra conditie aan de potentialen kunnen opleggen. Bekende ijkcondities zijn de Lorentzconditie $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \partial_t \phi = 0$ en de Coulombijk $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Deze ijkinvariantie zal bij de quantisatie van het electromagnetisch veld tot complicaties aanleiding geven. De Lorentzcovariantie van de Maxwell vergelijkingen is manifest als we deze schrijven in termen van de een vierstroom j^μ en een vierpotentiaal A^μ :

$$\begin{aligned} j^\mu &:= (\rho, \vec{j}) \\ A^\mu &:= (\phi, \vec{A}) \end{aligned} \quad (2.2.56)$$

Aan de homogene Maxwell vergelijkingen is identiek voldaan terwijl de resterende inhomogene vergelijkingen reduceren tot:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = j^\nu \quad (2.2.57)$$

In de covariante Lorentz-ijk $\partial_\mu A^\mu = 0$ nemen de Maxwellvergelijkingen de vorm van een golfvergelijking aan:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\kappa = \square A^\kappa = j^\kappa \quad (2.2.58)$$

De continuïteitsvergelijking is van de vorm $\partial_\mu j^\mu = 0$. De 6 componenten van \vec{E} en \vec{B} vormen tezamen het antisymmetrische tensorveld F dat natuurlijk ijkinvariant is.

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &:= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ F_{ij} &= -\epsilon_{ijk} B^k \\ F_{0i} &= E^i \end{aligned} \quad (2.2.59)$$

Als we de duale \tilde{F} van F definiëren als

$$\tilde{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\tau}F_{\rho\tau}. \quad (2.2.60)$$

dan kunnen we de Maxwell vergelijkingen ook schrijven in de volgende Lorentzcovariante ijk-invariante vorm:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.61)$$

Om met behulp van het Hamilton-Lagrange formalisme de Maxwellvergelijkingen af te leiden moeten we een geschikte uitdrukking voor de actie vinden. We veronderstellen dat de actie van de volgende algemene vorm is:

$$S[A_\mu] = \int \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A^\mu) d^4x \quad (2.2.62)$$

en eisen ten eerste dat de actie Lorentz-invariant is en ten tweede dat die ijk-invariant is. Dit betekent dat \mathcal{L} een ijk-invariante Lorentz-scalar moet zijn. Aangezien de veldvergelijkingen lineair in A_μ of $F^{\mu\nu}$ zijn moet de actie kwadratisch in A^μ en/of zijn afgeleiden zijn, immers de bewegingsvergelijkingen volgen uit $\delta S/\delta A^\mu = 0$. Dit betekent dat \mathcal{L} alleen nog maar een kwadratische vorm in F en \tilde{F} kan zijn. Nu zijn er in feite maar twee onderling onafhankelijke kwadratische scalaire functies, namelijk $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ en $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$.

Opgave 15 Ga na dat $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

Uitgedrukt in elektrische en magnetische velden hebben de invarianten de volgende vorm

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \\ F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} &= -4\vec{E} \cdot \vec{B} \end{aligned} \quad (2.2.63)$$

Een kleine berekening nu laat zien dat een correcte Lagrangedichtheid voor het vrije Maxwell veld gelijk is aan $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Om de Lagrangedichtheid van het niet vrije veld te vinden volstaat het om bij bovenstaande uitdrukking een term $-A_\mu j^\mu$ op te tellen, zoals blijkt als we de Euler-Lagrange vergelijkingen opschrijven. Voor een Lagrangedichtheid

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu \quad (2.2.64)$$

vinden we aldus de veldvergelijkingen:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (2.2.65)$$

Merk op dat de Euler-Lagrange vergelijkingen alleen de inhomogene Maxwell vergelijkingen opleveren, zoals eerder opgemerkt is aan de homogene vergelijkingen

automatisch voldaan vanwege de definitie van F in termen van A . Verder is het noemenswaardig dat de Euler-Lagrange vergelijking voor A_0 geen tijd afgeleide bevat omdat $F^{00} = 0$, dit is de wet van Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$ welke in feite geen *bewegingsvergelijking* maar een *constraint vergelijking* is (zie ook (2.2.57)). Deze vergelijking geeft een extra relatie tussen de veld variabelen, waaruit blijkt dat deze niet allemaal als onafhankelijke dynamische variabelen kunnen worden opgevat. Men zou er bijvoorbeeld A_0 ten tijde t uit kunnen oplossen in termen van de \dot{A}_i en ρ ten tijde t . Deze afhankelijkheid tussen de veld variabelen zegt dat er minder fysische vrijheidsgraden zijn dan men op grond van een viervectorveld A_μ zou verwachten en dit feit hangt ten nauwste samen met de (lokale) ijk-invariantie van het systeem.

Opgave 16 *Verifieer dat de Euler-Lagrange vergelijkingen behorende bij de Lagrange dichtheid (2.2.64) corresponderen met de inhomogene Maxwell vergelijkingen.*

Het is op dit punt interessant om ook de tweede vorm $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \propto \vec{E} \cdot \vec{B}$ nader te beschouwen. We merken eerst op dat $\vec{E} \cdot \vec{B}$ niet invariant is onder *pariteit* d.w.z. ruimtelijke spiegeling door de oorsprong. Bij spiegeling namelijk verandert het elektrische veld van teken terwijl het magnetische veld gelijk blijft, zodat het inproduct van deze twee velden ook van teken wisselt. We noemen $\vec{E} \cdot \vec{B}$ daarom een pseudo-scalar; deze is invariant onder de beperkte Lorentzgroep maar niet onder de volledige homogene Lorentzgroep. De Maxwell vergelijkingen zijn dat wel en de hierboven gegeven actie ook.

Opgave 17 *Verifieer bovenstaande uitspraken uitgaande van het feit dat A_μ en j_μ viervectoren zijn.*

Toch zijn deze argumenten niet doorslaggevend om $\vec{E} \cdot \vec{B}$ als term in de actie te mijden. Er is een andere curieuze eigenschap van deze term die er de reden van is dat deze meestal niet in de actie wordt opgenomen; het blijkt dat zij geen bijdrage levert aan de Euler-Lagrange vergelijkingen!

Opgave 18 *Ga dit na.*

Dit betekent dat deze term in de actie stationair is onder variaties δA voor *willekeurige* A (zolang $\delta A|_{\infty} = 0$), hetgeen ook direct volgt uit het feit dat $\vec{E} \cdot \vec{B}$ een totale afgeleide is:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\tau}F^{\rho\tau}F^{\mu\nu} \\ &= 2\epsilon_{\mu\nu\rho\tau}(\partial^\rho A^\tau)(\partial^\mu A^\nu) \\ &= 2\partial^\rho(\epsilon_{\mu\nu\rho\tau}A^\tau\partial^\mu A^\nu) \\ &:= \partial^\rho w_\rho \end{aligned} \tag{2.2.66}$$

De bijbehorende actie is dus een constante die alleen afhangt van de randvoorwaarden die we aan de potentialen opleggen. Omdat zo'n integraal uitdrukking

onafhankelijk is van continue deformaties in de velden wordt zij een *topologische invariant* genoemd.³

Laten we tot slot het electromagnetische veld als Hamilton systeem bekijken. Eerst berekenen we m.b.v. (2.2.64) de impulsen die kanoniek toegevoegd worden aan de vector potentialen.

$$\pi^k := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} = -\dot{A}^k + \partial^k A^0 = E^k \quad (2.2.67)$$

Voor de tijdcomponent vinden we echter

$$\pi^0 := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad (2.2.68)$$

Voor de Hamiltondichtheid volgt:

$$\mathcal{H} = \pi^k \dot{A}_k - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} A^0 + A_\mu j^\mu \quad (2.2.69)$$

Merk op dat deze dichtheid een functie is van \vec{A} , \vec{E} en A^0 , waarbij opgemerkt dient te worden dat het A^0 veld alleen maar als *multiplier* veld voor komt, het komt alleen zonder tijdafgeleiden als factor voor. De Hamiltonvergelijkingen voor de ruimtelijke componenten luiden:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^k &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_k} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i A_k)} \Rightarrow \partial_\mu (\partial^\mu A^k - \partial^k A^\mu) = j^k \\ \dot{A}^k &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k} = \dot{A}^k \end{aligned} \quad (2.2.70)$$

De laatste vergelijking is een identiteit en bevat geen dynamische informatie. De variatie van de Hamiltoniaan naar het veld A^0 levert de wet van Gauss,

$$\dot{\pi}^0 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_0} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i A_0)} = 0 \Rightarrow \partial_i (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) = j^0 \quad (2.2.71)$$

dit is zoals eerder opgemerkt werd geen bewegingsvergelijking maar een constraint-vergelijking. Voor A^0 vinden we geen bewegingsvergelijking, het is niet een dynamisch veld en verschijnt in dit formalisme alleen ten tonele als multiplier veld om de Gauss-constraint te implementeren. Hiermee hebben we laten zien hoe de inhomogene Maxwell vergelijkingen in het Hamilton formalisme verkregen worden. Merk op dat in de afwezigheid van bronnen en na gebruikmaking van de wet van Gauss de energie van het veld gegeven wordt door de bekende uitdrukking

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (2.2.72)$$

³Het blijkt dat deze topologische termen in de quantum theorie een subtiele maar fundamentele rol spelen, het valt buiten het kader van dit college om daar nader op in te gaan.

2.3 Symmetrieën en behoudswetten

Symmetriebeschouwingen spelen een fundamentele rol in de fysica. Niet alleen bij het oplossen van vergelijkingen maar ook bij het ontwerpen en analyseren van modellen voor elementaire deeltjes. Men dient wanneer men spreekt over symmetrie duidelijk onderscheid te maken tussen een aantal verschillende toepassingen van dat begrip in de fysica. We zijn in de context van de veldentheorie hoofdzakelijk geïnteresseerd in symmetrieën van de actie, en de fysische consequenties die dat heeft.

Met een symmetrie of invariantie is altijd een groep van transformaties op fysische variabelen d.w.z. velden en/of coördinaten geassocieerd. Zo'n groep kan *discreet* zijn zoals bij de symmetrieën van een kristal, of *continu* zoals de rotatiegroep bijvoorbeeld. Wij zullen ons hier hoofdzakelijk bezighouden met continue groepen. In de eerste plaats is er een belangrijk verschil tussen *globale* en *locale* symmetrieën. We spreken van een globale symmetrie wanneer de transformatie in alle ruimtetijd punten dezelfde is, d.w.z. dat de parameter van de transformatie niet van de coördinaten afhangt, een belangrijk voorbeeld zijn de Lorentztransformaties die we in hoofdstuk 1 uitgebreid bestudeerd hebben. In het geval van een locale symmetrie mag de transformatie op een gladde manier van de ruimtetijd coördinaten afhangen, zoals bijvoorbeeld het geval was bij de ijktransformaties van de vectorpotentiaal in de Maxwell theorie. We maken ook onderscheid tussen zogenaamde *ruimtetijd* symmetrieën zoals de Lorentztransformaties en *interne* of *ijk* symmetrieën. Bij al deze symmetrieën vormen de veldcomponenten een basis van een ruimte waar een specifieke representatie van de groep op werkt. In het vorige hoofdstuk schreven we bijvoorbeeld

$$\psi \rightarrow \psi' = S(\Lambda)\psi \quad (2.3.73)$$

waarmee we aangaven dat het Diracveld transformeert onder de spinor representatie S van de Lorentzgroep. Wellicht ten overvloede merken we op dat Lorentz invariantie een globale ruimtetijd symmetrie is omdat Λ niet van x^μ afhangt, ondanks het feit dat de transformatie S van het veld wel geïnduceerd wordt door een ruimtetijd transformatie $x' = \Lambda x$. Bij de ijk-invariantie van het Maxwell veld gaat het daarentegen om een lokale ijk-invariantie.

Een invariantie van de actie onder een continue groep van transformaties op de velden leidt, zoals we zullen zien, tot een behouden grootte voor iedere generator van de groep. Na kwantisatie impliceert dit het bestaan van een operator die commuteert met de Hamiltoniaan en dit zegt weer iets over hoe de symmetrie gerealiseerd kan worden in het spectrum van fysische toestanden. Immers om de energie eigentoestanden te karakteriseren labelen we deze met de eigenwaarden van een maximale set van onderling commuterende operatoren waarvan de Hamiltoniaan er één is. Laten we dit aan de hand van een voorbeeld nader toelichten. In het geval van het waterstof atoom bijvoorbeeld is de Hamiltoniaan sferisch symmetrisch, d.w.z. dat de impulsmoment operatoren $L_i := i\epsilon_{ijk}x^j \frac{\partial}{\partial x_k}$ en ook de operator $L^2 := \sum_i (L_i)^2$ met de Hamiltoniaan commuteren. Een maximale set van onderling

commuterende operatoren is dan bijvoorbeeld $\{H, L^2, L_3\}$, De eigentoestanden ψ^{nlm} zijn dan gelabelled met de getallen n, l en m die direct met de eigenwaarden van voornoemde operatoren gerelateerd zijn (te weten $E = -const./n^2, l(l+1)$ en m). We zeggen in dit geval dat de rotatiesymmetrie van de Hamiltoniaan *manifest* is in het spectrum van fysische toestanden, niet omdat elke toestand sferisch symmetrisch is, maar omdat de toestanden representaties vormen van de rotatiegroep en dat de verschillende toestanden die één representatie vormen *gedegeneerd* zijn (d.w.z. dezelfde energie hebben).⁴

Symmetrieën van de actie zijn echter niet altijd manifest in het spectrum van de theorie, in dat geval spreken we van een (spontaan) *gebroken* of *verborgen* symmetrie. Deze situatie doet zich voor als de grondtoestand, de toestand met laagste energie, niet alle symmetrieën van de actie respecteert. Dit is dus niet het geval voor het waterstof atoom omdat de unieke grondtoestand inderdaad sferisch symmetrisch is. Een voorbeeld van spontane symmetrie breking van rotatiesymmetrie is spontane magnetisatie zoals die optreedt in een ferromagneet; de laagste energie toestand is die waarbij alle atomaire magnetische dipolen in dezelfde richting staan waardoor een macroscopische magnetisatie $\vec{M} \neq 0$ ontstaat. Wanneer wij het materiaal verhitten boven de Curie temperatuur verdwijnt de magnetisatie, omdat de ordening van de atomaire dipolen door de thermische beweging ongedaan gemaakt wordt. Met het verdwijnen van de voorkeursrichting wordt de rotatie invariantie van de Hamiltoniaan weer manifest in de laagste energie toestand ($\vec{M} = 0$). Het gaat in beide fasen in wezen om dezelfde rotatie invariante Hamiltoniaan alleen de waarde van bepaalde parameters verandert als een functie van de temperatuur. Dit voorbeeld illustreert op eenvoudige wijze een principe dat een zeer algemene geldigheid lijkt te bezitten, namelijk dat wanneer wij materie bij steeds hogere energieën bekijken, we het aantreffen in een toestand die meer en meer de onderliggende verborgen symmetrieën van de natuur respecteert, d.w.z. manifest maakt. Wat de natuurkunde ons duidelijk heeft gemaakt is dat de wereld waarin wij leven in een toestand verkeert van ernstig geschonden symmetrie. Dit is allerminst betreurenswaardig aangezien symmetriebreking diversificatie en differentiatie betekent. Een opwindend aspect van de fundamentele natuurkunde is dat de onderliggende Hamiltoniaan een veel grotere symmetriegroep blijkt te bevatten dan men op grond van de naieve fenomenologie zou vermoeden. Men spreekt in dit kader van een *unificatie* in de beschrijving van de elementaire deeltjes en hun wisselwerkingen. Wij

⁴Op grond van de rotatie symmetrie verwacht men dus dat de energie eigenwaarden E niet van het magnetisch quantumgetal m afhangen, omdat m de verschillende toestanden van een representatie met impulsmoment l karakteriseert. Het feit dat E ook niet van l afhangt suggereert dat de Hamiltoniaan van het waterstof atoom een grotere symmetriegroep heeft dan de rotaties alleen. Dit blijkt ook het geval te zijn, Behalve het impulsmoment operator, is ook de zogenaamde Runge-Lenz vector

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{p} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{p}) - \frac{\vec{r}}{r}$$

een operator die met de Hamiltoniaan van het waterstof atoom commuteert. Degeneraties in het spectrum wijzen op symmetrieën van de onderliggende Hamiltoniaan.

zullen in dit college helaas niet toekomen aan een behandeling van het verschijnsel van symmetriebreking in de veldentheorie, hoewel dit vele toepassingen heeft in de fysica zowel van de elementaire deeltjes als van de gecondenseerde materie.

We merken tot besluit van deze inleiding op dat in veel gevallen symmetrieën in de natuur niet exact zijn, we kunnen ons voorstellen dat de actie een kleine term bevat die niet invariant is terwijl de andere termen dat wel zijn. Ook in die gevallen kan men veel leren van symmetrie beschouwingen. Het is een intrigerend feit dat alle exacte symmetrieën die wij in de natuur kennen locale symmetrieën zijn. We weten niet waarom dit zo is.

We zijn in symmetrieën geïnteresseerd omdat zij samenhangen met behouden grootheden en dien ten gevolge met spectrale eigenschappen. Voor we dit verband nauwkeuriger formuleren illustreren we het aan de hand van de symmetrieën van de actie van een puntdeeltje onder tijd- en ruimtetranslatie. We laten m.b.v. het Lagrange formalisme zien dat hieruit resp. energie- en impulsbehoud volgen. Onder een infinitesimale tijdtranslatie $t \rightarrow t + \epsilon$ verandert de Lagrangiaan L als een functie van t met

$$\delta L = L(t + \epsilon) - L(t) = \epsilon \partial_t L \quad (2.3.74)$$

Omdat we aannemen dat de Lagrangiaan alleen impliciet van t afhangt via de variabelen $q(t)$ en $\dot{q}(t)$ kunnen we anderzijds voor de verandering van L schrijven:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \partial_t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q + \partial_t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) \quad (2.3.75)$$

Wanneer we ons beperken tot een $q(t)$ die voldoet aan de Euler-Lagrange vergelijkingen vallen de eerste twee termen tegen elkaar weg. Voor $q(t)$ maken we vervolgens een eerste orde ontwikkeling ($q(t + \epsilon) = q(t) + \epsilon \partial_t q$). Dit geeft voor δL :

$$\delta L = \partial_t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \epsilon \dot{q} \right) = \epsilon \partial_t (p \dot{q}) \quad (2.3.76)$$

Combineren van (2.3.74) en (2.3.76) geeft ons een behouden grootheid:

$$\epsilon \partial_t (p \dot{q} - L) = \epsilon \partial_t H = 0 \quad (2.3.77)$$

We hebben nu het bekende feit dat energie behouden is voor een deeltje dat beweegt zoals voorgeschreven door de bewegings vergelijking, afgeleid uit een symmetrie argument.

We kunnen op soortgelijke wijze het impulsbehoud afleiden, als we de invariantie onder infinitesimale ruimte translaties $q \rightarrow q + \epsilon$ beschouwen, waarbij we aannemen dat deze tijdsafhankelijk is ($\partial_t \epsilon = 0$). Voor een deeltje impliceert deze invariantie dat de Lagrangiaan alleen van \dot{q} afhangt, en dus zelf invariant is:

$$\delta L = L(q + \epsilon) - L(q) = 0 \quad (2.3.78)$$

Anderzijds geldt voor δL weer algemeen (2.3.75). De verandering in q is eenvoudig $\delta q = \epsilon$ en wanneer $q(t)$ weer voldoet aan de Euler-Lagrange vergelijking betekent dit:

$$\delta L = \epsilon \partial_t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \partial_t p \quad (2.3.79)$$

Gelijkstellen van (2.3.78) en (2.3.79) geeft het gewenste resultaat $\partial_t p = 0$.

2.3.1 De stelling van Noether

Het verband tussen symmetrieën en behouden grootheden wordt nader gepreciseerd in de stelling van Noether:

Met ieder continue 1-parameter groep van invarianties van de actie correspondeert een behouden grootheid.

We zullen nu laten zien hoe we uit een bepaalde invariantie van de actie een behouden stroom construeren. Uit deze behouden stroom laat zich een behouden lading definiëren. Dit is de behouden grootheid die met de invariantie geassocieerd is. Merk op dat we uitgaan van een bepaalde invariantie van de actie. Waarom een dergelijke invariantie optreedt is nu niet aan de orde. Uit de definitie van de actie (zie (2.1.2)) blijkt dat de eis dat deze invariant is, equivalent is met de eis dat de Lagrangedichtheid voor en na de transformatie van de velden slechts een totale afgeleide verschilt. Voor een infinitesimale transformatie schrijven we

$$S' = \int d^4x (\mathcal{L} + \epsilon \partial_\mu \Omega^\mu) = S + \epsilon \int \Omega |_\infty \quad (2.3.80)$$

We zullen aannemen dat Ω^μ op oneindig snel genoeg afvalt naar nul, zodat de stokterm nul en de actie invariant is. Voor de verandering in de Lagrangedichtheid $\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ schrijven we dus enerzijds:

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon \partial_\mu \Omega^\mu \quad (2.3.81)$$

Anderzijds wordt de verandering in de Lagrangedichtheid gegeven door:

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right) \quad (2.3.82)$$

Als we eisen dat het veld voldoet aan de Euler-Lagrange vergelijkingen dan geeft combinatie van de twee bovenstaande uitdrukkingen een behouden stroom:

$$\partial_\mu J^\mu := \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi - \Omega^\mu \right) = 0 \quad (2.3.83)$$

De met deze behouden stroom geassocieerde behouden lading vinden we door deze lading te definiëren als de ruimtelijke integraal over de tijdcomponent van de stroom.

$$Q := \int d^3x J^0(x) \quad (2.3.84)$$

Met behulp van de behoudswet voor de stroom en de stelling van Gauss kunnen we eenvoudig laten zien dat de lading inderdaad behouden is:

$$\partial_0 Q = + \int d^3(x) \partial_0 J^0(x) = - \int d^3(x) \partial_i J^i = - \oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.3.85)$$

We hebben hierbij aangenomen dat de stroom snel genoeg afvalt naar nul op oneindig.

2.3.2 Translatie invariantie en energie-impuls behoud

We passen de stelling van Noether nu toe op enige voorbeelden in de klassieke velden theorie. Eerst beschouwen we ruimtetijd translatie invariantie voor een algemeen veld. De corresponderende behouden stromen vormen de zogenaamde *energie-impuls tensor*. We zullen deze vervolgens voor enkele gevallen expliciet uitrekenen en dan onder andere zien dat, net als bij het klassieke vrije puntdeeltje, de totale veld energie en impuls behouden zijn.

We gaan uit van een constante infinitesimale translatie in de ruimtetijd $x \rightarrow x' = x + \xi$ met ξ klein.

Aangezien onder een algemene coördinaten-transformatie

$$x'^\mu = f(x^\nu) \quad (2.3.86)$$

een algemeen tensorveld per definitie transformeert als

$$\phi_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}(x) \rightarrow \phi'_{\mu\nu\dots}{}^{\alpha\beta\dots}(x) = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} \dots \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\delta} \dots \phi_{\sigma\lambda\dots}^{\gamma\delta\dots}(x') \quad (2.3.87)$$

volgt voor een translatie simpelweg

$$\phi_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}(x) \rightarrow \phi'_{\mu\nu\dots}{}^{\alpha\beta\dots}(x) = \phi_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}(x') \quad (2.3.88)$$

omdat in dat geval

$$\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu \quad (2.3.89)$$

Als de actie invariant is onder bovenstaande transformatie volgt daaruit met de stelling van Noether dat er een behouden stroom is van de vorm

$$J^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi - \Omega^\mu \right) \quad (2.3.90)$$

waarbij $\delta \phi$ de verandering in het veld en $\partial_\mu \Omega^\mu$ de verandering in de Lagrangedichtheid is t.g.v. de translatie. Ontwikkelen we de variaties tot op eerste orde in ξ dan vinden we

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \mathcal{L}(x') - \mathcal{L}(x) = \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \\ \delta \phi &= \phi(x + \xi) - \phi(x) = \xi^\mu \partial_\mu \phi \end{aligned} \quad (2.3.91)$$

Hiermee kunnen we de behouden stroom voor een infinitesimale translatie schrijven als:

$$J^\mu = \xi^\nu T^\mu_\nu \quad (2.3.92)$$

waar

$$T^\mu_\nu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \quad (2.3.93)$$

per definitie de *energie-impuls tensor* is. Omdat ξ een willekeurige constante vector is hebben we in feite vier behouden stromen T^μ_ν met index ν :

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0 \quad (2.3.94)$$

De corresponderende behouden grootheden,

$$P_\nu := \int d^3x T^0_\nu \quad (2.3.95)$$

vormen de energie-impuls viervector van het systeem. Inderdaad, voor de tijd-component is het eenvoudig na te gaan dat deze gelijk is aan de Hamiltoniaan:

$$P_0 := \int d^3x T^0_0 = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial_0 \phi - \mathcal{L} \right) = \int d^3x \mathcal{H} = H \quad (2.3.96)$$

We werken het bovenstaande nu uit voor het Klein-Gordon, het Dirac en het Maxwell veld. Uitgaande van translatie-invariantie vinden we zo de de uitdrukkingen voor de energie en de impuls die bij deze velden hoort. Uit de Lagrangedichtheid van een veld kunnen we de vierimpuls voor dat veld dus direct uitrekenen. Voor een scalarveld met Lagrangedichtheid (zie 2.2.45):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2) \quad (2.3.97)$$

Geeft dit direct voor de vierimpuls van het Scalarveld:

$$P_0 = \int \frac{1}{2} (\pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2) d^3x = \int d^3x \mathcal{H} = H \quad (2.3.98)$$

$$\vec{P} = - \int \pi \vec{\nabla} \phi d^3x \quad (2.3.99)$$

Merk op dat we nu twee verschillende impulsen hebben, namelijk de gegeneraliseerde (kanonieke) impuls π en de fysische (meetbare) impuls P . Voor het Diracveld met de Lagrangedichtheid (zie 2.2.47):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi \quad (2.3.100)$$

geeft dit de vierimpuls:

$$P_0 = \int \bar{\psi}(-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m)\psi d^3x \quad (2.3.101)$$

$$\vec{P} = \int \psi^\dagger(-i\vec{\nabla})\psi d^3x \quad (2.3.102)$$

Voor het vrije Maxwell veld is de situatie ingewikkelder. Als we in de definitie van de energie-impuls tensor de uitdrukking voor de Lagrangedichtheid van het veld substitueren dan vinden we:

$$T_{\mu\nu} = -F_\mu^\rho \partial_\nu A_\rho + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (2.3.103)$$

Het ongelukkige is dat deze tensor is noch symmetrisch noch ijk invariant is vanwege de eerste term. Het blijkt echter dat het symmetrische deel van deze uitdrukking ook behouden is, en bovendien de bekende ijk invariante resultaten voor de energie en impuls van het Maxwellveld oplevert. We splitsen de tensor in een symmetrisch en een niet symmetrisch deel:

$$T_{\mu\nu} = \tilde{T}_{\mu\nu} - F_\mu^\rho \partial_\rho A_\nu \quad (2.3.104)$$

met

$$\tilde{T}_{\mu\nu} := -F_\mu^\rho F_{\nu\rho} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (2.3.105)$$

De symmetrische ijk invariante tensor $\tilde{T}_{\mu\nu}$ is ook behouden, immers:

$$\partial^\mu \tilde{T}_{\mu\nu} = \partial^\mu T_{\mu\nu} + (\partial_\rho A_\nu)(\partial^\mu F_\mu^\rho) + F^{\mu\rho}(\partial_\mu \partial_\rho A_\nu) = 0 \quad (2.3.106)$$

De eerste term is nul vanwege het feit dat T behouden is. De tweede term geldt $\partial^\mu F_\mu^\rho = 0$ vanwege de Maxwell vergelijkingen. De laatste term geeft geen bijdrage omdat $F^{\mu\rho}$ antisymmetrisch is en $\partial_\mu \partial_\rho A_\nu$ symmetrisch in de indices μ en ρ . Het blijkt dus dat zowel T als \tilde{T} behouden zijn. De behouden lading die we vinden als we de ruimte integraal over \tilde{T}_ν^0 nemen definiëren we als de vierimpuls van het Maxwellveld:

$$P_\nu := \int d^3x \tilde{T}_\nu^0 \quad (2.3.107)$$

Als we \tilde{T} invullen voor deze nulcomponent van de vierimpuls en gebruik maken van de definitie van F (zie 2.2.59) dan vinden we de veldenergie van het vrij Maxwell veld terug:

$$P_0 = \int d^3x \frac{1}{2}(E^2 + B^2) \quad (2.3.108)$$

Op analoge wijze blijken de overige drie componenten de Poynting vector te zijn:

$$\vec{P} = \int d^3x \vec{E} \times \vec{B} = \int d^3x \vec{S} \quad (2.3.109)$$

2.3.3 Lorentz invariantie en het behoud van impulsmoment

We kunnen de stelling van Noether ook gebruiken om behoud van impulsmoment af te leiden uit de Lorentzinvariantie van een gegeven actie. Beschouw een infinitesimale Lorentztransformatie:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^{\mu\nu} x_\nu \quad (2.3.110)$$

Het veld transformeert als volgt:

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x) = S_{rs}^{-1}(\epsilon)\phi_s(x') \quad (2.3.111)$$

De matrix $S_{rs}(\epsilon)$ is de transformatie matrix voor de infinitesimale Lorentztransformatie en is afhankelijk van de vorm van het veld. Voor een infinitesimale transformatie kunnen we S schrijven als

$$S_{rs}(\epsilon) = \delta_{rs} + \frac{1}{2}\Sigma_{rs}^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu} \quad (2.3.112)$$

waar $\Sigma_{rs}^{\mu\nu}$ de corresponderende matrix generatoren zijn in de representatie waaronder het veld ϕ transformeert. Voor een scalarveld zijn de Σ matrices gelijk aan nul, voor een spinorveld hebben ze de vorm

$$\Sigma_{rs}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_{rs} \quad (2.3.113)$$

Uit het feit dat \mathcal{L} een scalaire functie is volgt dat

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(x') - \mathcal{L}(x) = x_\nu\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\mathcal{L} =: \partial_\mu\Omega^\mu \quad (2.3.114)$$

zodat

$$\Omega^\mu = x_\nu\epsilon^{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (2.3.115)$$

Voor de verandering in het veld $\delta\phi_r(x) = \phi'_r(x) - \phi_r(x)$ schrijven we met het bovenstaande:

$$\delta\phi_r(x) = S_{rs}^{-1}(\epsilon)\phi_s(x') - \phi_r(x) = \phi_r(x') - \phi_r(x) - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}\Sigma_{rs}^{\mu\nu}\phi_s(x) \quad (2.3.116)$$

Ofwel na eerste orde ontwikkeling van de eerste term:

$$\delta\phi_r(x) = \epsilon_{\mu\nu}[x^\nu\partial^\mu\phi_r(x) - \frac{1}{2}\Sigma_{rs}^{\mu\nu}\phi_s(x)] \quad (2.3.117)$$

We kunnen de gevonden uitdrukkingen voor $\delta\phi_r(x)$ en Ω^μ voor een algemene Lorentztransformatie invullen in de hiervoor afgeleide algemene uitdrukking voor de behouden stroom (2.3.83). Dat geeft ⁵

$$j^\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}[x^\lambda\partial^\nu\phi_r(x) - x^\nu\partial^\lambda\phi_r(x)] - \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\Sigma_{rs}^{\nu\lambda}\phi_s(x) - \epsilon_{\nu\lambda}g^{\mu\lambda}x^\nu\mathcal{L} \quad (2.3.118)$$

Omdat $\epsilon_{\nu\lambda}$ in alle termen met dezelfde indices voorkomt kunnen we j^μ ook schrijven als:

$$j^\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\lambda}j^{\mu\nu\lambda} \quad (2.3.119)$$

⁵Er wordt gesommeerd over r . Om verwarring met $\Sigma_{rs}^{\mu\nu}$ te vermijden is het sommatieteken weggelaten.

We hebben dan vele behouden stromen $j^{\mu\nu\lambda}$:

$$j^{\mu\nu\lambda} = x^\lambda T^{\mu\nu} - x^\nu T^{\mu\lambda} - \Sigma_{rs}^{\lambda\nu} \phi_s(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \quad (2.3.120)$$

waarbij de energie-impuls tensor gedefiniëerd is als:

$$T^{\mu\nu} := \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \partial^\nu \phi_r - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.3.121)$$

Na het nemen van de ruimte-integraal vinden we uit de behouden stromen de behouden Noetherladingen:

$$M^{\nu\lambda} = \int d^3x (x^\nu T^{0\lambda} - x^\lambda T^{0\nu}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_r)} \Sigma_{rs}^{\nu\lambda} \phi_s(x) \quad (2.3.122)$$

Deze uitdrukking definiëren we als de gegeneraliseerde uitdrukking voor het impuls-moment. Merk op dat in het geval dat $\phi(x)$ een scalarveld is, de laatste term wegvalt en er met vgl.(2.3.95) de bekende uitdrukking voor het impulsmoment staat. Merk tevens op dat in de laatste term de verschillende componenten van het veld en de impuls mixen in tegenstelling tot hetgeen we tot nu toe hebben gezien.

Opgave 19 Schaaltransformaties

Als laatste voorbeeld van een ruimtetijd symmetrie beschouwen we de schaaltransformaties waarbij

$$x \rightarrow x' = \lambda x \quad , \quad \lambda \in R \quad , \quad \lambda > 0 \quad . \quad (2.3.123)$$

We gaan uit van een Lagrange dichtheid $\mathcal{L}(x)$ voor een veld $\phi(x)$ dat homogeen schaalt als

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \lambda^D \phi(x') \quad , \quad (2.3.124)$$

$D \in R$ wordt de schaaldimensie van ϕ genoemd.

- a) Bereken de variatie $\delta\phi$ in ϕ tengevolge van een infinitesimale schaaltransformatie ($\lambda = 1 + \epsilon$).
- b) Stel dat de actie $S = \int d^4x \mathcal{L}(x)$ invariant is onder schaaltransformaties, wat is dan de schaaldimensie van $\mathcal{L}(x)$? Laat zien dat $\delta\mathcal{L}(x)$ te schrijven is als een totale afgeleide.
- c) Beschouw de Lagrange-dichtheid

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - g \phi^4 \quad (2.3.125)$$

waar ϕ een schaaldimensie D heeft en m en g reële parameters zijn. Voor welke waarden van D, m en g is het model schaalinvariant.

- d) Bereken de met de schaal invariantie corresponderende stroom.

2.3.4 Globale ijk-invariantie en ladingsbehoud

We willen nu het Noethertheorema toepassen op een geval van een globale ijk-invariantie. We bekijken daartoe de Dirac Lagrangiaan

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi \quad (2.3.126)$$

deze is invariant onder een fase of ijktransformatie van het spinorveld van de vorm

$$\psi' = e^{i\alpha}\psi \quad (2.3.127)$$

Deze invariantie is globaal omdat zij alleen geldt als α niet van de coördinaten x^μ afhangt. Het is een interne symmetrie omdat alleen het veld transformeert maar de coördinaten niet. De ijkgroep is de groep U_1 van fase-transformaties. Als we de stelling van Noether toepassen, merken we op dat Ω^μ nul is omdat \mathcal{L} zelf invariant is en vervolgens dat de infinitesimale versie van de ijktransformatie geeft dat $\delta\psi = i\alpha\psi$. Dit ingevuld in de uitdrukking voor de Noetherstroom geeft dan de bekende uitdrukking uit hoofdstuk 1 voor de stroom van het Diracveld:

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (2.3.128)$$

2.4 Locale ijk-invariantie en interacties

We hebben in de voorafgaande paragraaf invarianties van een Lagrangiaan bestudeerd en uit deze invarianties behouden grootheden geconstrueerd. In deze paragraaf beschouwen we wat er gebeurt als we aan de Lagrangiaan van het Diracveld een *locale* ijksymmetrie opleggen. Dit blijkt alleen te kunnen als we Lagrangiaan modificeren en een zogenaamde *covariante afgeleide* met een ijkpotentiaal A_μ invoeren. De nieuwe invariante Lagrangiaan interpreteren we als de Lagrangiaan van een Diracveld dat aan de ijkpotentiaal koppelt.

De Lagrangiaan van het Diracveld $(\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi)$ is invariant onder een fase-transformatie van het spinorveld van de volgende vorm: $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha}\psi$. We gaan nu eisen dat de Lagrangiaan ook invariant is onder een dergelijke fase-transformatie, waarbij α van de ruimte-tijd coördinaten afhangt.

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi \quad (2.4.129)$$

De Lagrangiaan van het spinorveld is niet invariant onder bovenstaande transformatie, omdat $\partial_\mu\psi$ overgaat in $e^{i\alpha(x)}(\partial_\mu + i\partial_\mu\alpha(x))\psi$. We kunnen echter een nieuwe Lagrangiaan invoeren die wel invariant is onder de bovenstaande fase-transformatie. We voeren daartoe een *ijkpotentiaal* A_μ in en definiëren de *(ijk)covariante afgeleide* D_μ als:

$$D_\mu\psi := (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi \quad (2.4.130)$$

Als we in de Lagrangiaan de gewone afgeleide vervangen door de covariante afgeleide zien we dat de Lagrangiaan invariant is als D_μ covariant transformeert, waarmee het transformatie gedrag van A_μ vastgelegd wordt:

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &\rightarrow (D_\mu \psi)' = e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi \\ \Rightarrow A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \end{aligned} \quad (2.4.131)$$

Met bovenstaande transformatie eigenschap van A_μ is de Lagrangiaan

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi \quad (2.4.132)$$

invariant onder de fase-transformatie (2.4.129). We kunnen A_μ identificeren met de vectorpotentiaal uit de Maxwell theorie zoals gesuggereerd wordt door de vorm van de ijktransformatie (2.4.131).⁶ We zien dan ook dat de Lagrangiaan (2.4.132) de term

$$\mathcal{L}_{int} = -eA_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.4.133)$$

die de interactie tussen het Maxwell en het Dirac veld beschrijft. De koppeling is precies van de vorm $A_\mu j^\mu$ zoals in de Lagrangiaan (2.2.64) waar j^μ de met de ijk-invariantie geassocieerde behouden stroom (2.3.128) van het Dirac veld is. Opdat het veld A_μ inderdaad onafhankelijke fysische vrijheidsgraden beschrijft moeten we bij de Lagrangiaan (2.4.132) nog de Lagrangiaan van het vrije Maxwell veld optellen. Dit levert ons de Lagrangiaan van de Quantum Electrodynamica (QED)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi \quad (2.4.134)$$

die een geladen Dirac veld beschrijft dat op een ijk-invariante manier gekoppeld is aan het electromagnetische veld. Na quantisatie is dit de theorie van electronen, positronen en massaloze fotonen. Merk op dat als we een ‘massaterm’ voor A_μ zouden willen invoeren, deze van de vorm $-m^2 A_\mu A^\mu$ zou zijn. In de Lorentzijk krijgen de ‘Maxwell’ vergelijkingen dan de vorm $(\square + m^2)A^\mu = 0$. Deze massaterm is Lorentz- maar niet ijk-invariant en daarom niet toegestaan in de Lagrangiaan als we lokale ijk-invariantie opleggen. Uit de Lagrangiaan (2.4.134) volgt het volgende stelsel van bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= e\bar{\psi} \gamma^\nu \psi \\ (i\mathcal{D} - m)\psi &= -e\mathcal{A}\psi \end{aligned} \quad (2.4.135)$$

In hoofdstuk 3 zullen we de velden ψ en A^μ quantiseren. De bovenstaande vergelijkingen zijn dan een gekoppeld niet-lineair stelsel van operator-waardige velden.

⁶Het invoeren van de covariante afgeleide is niet zo vreemd. Als we $i\partial_\mu$ opvatten als de operator geassocieerd met p_μ , dan is het duidelijk dat we iD_μ kunnen beschouwen als een operator bij $p_\mu - eA_\mu$. Uit de klassieke mechanica is het bekend dat de correcte bewegingsvergelijkingen voor een geladen deeltje in een electromagnetisch veld precies verkregen worden door p_μ te vervangen door $p_\mu - eA_\mu$; de zogenaamde *minimale substitutie*.

De enige wijze waarop we dit (tot nog toe) kunnen oplossen is met behulp van storingsrekening. In hoofdstuk 4 zullen we daar een begin mee maken. We gaan dan uit van de vrij veld oplossingen die we vinden door de rechterleden (de brontermen) van bovenstaand stelsel vergelijkingen nul te nemen. Daarna construeren we de oplossing van de gekoppelde vergelijkingen door middel van een iteratieve procedure met behulp van Greenfuncties. De expansieparameter blijkt de *fijnstructuur constante* $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$ te zijn, een dimensieloze grootte die ongeveer gelijk is aan $\frac{1}{137}$. De numeriek kleine waarde van deze constante garandeert een snelle convergentie van de expansie.

Bovenstaande procedure om interacties in te voeren blijkt niet alleen tot het voorbeeld beperkt te blijven. Interacties kunnen in het algemeen beschreven worden door een ijktheorie, en de kracht wordt dan geassocieerd met een ijkpotentiaal. De veldsterkte $F_{\mu\nu}$ wordt in het algemeen gedefinieerd als $-\frac{i}{e}[D_\mu, D_\nu]$. Na quantisatie beschrijft het ijkveld massaloze deeltjes, die de dragers van de interactie zijn. Zo correspondeert de electromagnetische kracht tussen twee geladen deeltjes met de uitwisseling van massaloze fotonen. We merken op dat deze ijkdeeltjes zelf ook onderworpen kunnen zijn aan krachten; zo worden fotonen bijvoorbeeld afgebogen door de zwaartekracht.

De electromagnetische ijktransformaties zijn abels, d.w.z. dat ze met elkaar commuteren, en we kunnen ons afvragen of we ook theorieën met een invariantie onder niet-abelse ijktransformaties kunnen construeren. Als uitgangspunt beschouwen we eerst nog een abels voorbeeld. We nemen een geladen complex scalarveld met Lagrangiaan:

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger) = (\partial_\mu \phi) \cdot (\partial^\mu \phi^\dagger) - m^2 \phi \phi^\dagger \quad (2.4.136)$$

Als we nu invariantie eisen onder een fase-transformatie dan moeten we op een analoge wijze een covariante afgeleide invoeren.

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi \\ D_\mu \phi^\dagger &= (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^\dagger \end{aligned} \quad (2.4.137)$$

We kunnen bovenstaand voorbeeld ook in vectortaal uitwerken. Met de complexe scalar associëren we een reële vector:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (2.4.138)$$

De Lagrangedichtheid luidt dan in vector taal:

$$\mathcal{L}(\vec{\phi}) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\phi})(\partial^\mu \vec{\phi}) - \frac{m^2}{2}\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} \quad (2.4.139)$$

De covariante afgeleide is nu van de vorm:

$$D_\mu \vec{\phi} = (\partial_\mu + ie\tilde{A}_\mu)\vec{\phi} \quad (2.4.140)$$

met

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu T = A_\mu \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.141)$$

De ijktransformatie schrijven we als

$$\begin{aligned} \Omega &= e^{-i\alpha(x)T} \\ \vec{\phi} \rightarrow \vec{\phi}' &= \Omega \vec{\phi} \\ \tilde{A}_\mu \rightarrow \tilde{A}'_\mu &= \tilde{A}_\mu - \frac{i}{e} (\partial_\mu \Omega) \Omega^{-1} \end{aligned} \quad (2.4.142)$$

Met bovenstaande exercitie hebben we niet veel nieuws gedaan, behalve dan het invoeren van een matrixrepresentatie voor de transformatie. De fasetransformatie van het complexe veld komt overeen met een rotatie in het (ϕ_1, ϕ_2) vlak, in wiskundige termen is dat de uitspraak dat de groep U_1 isomorf is met de rotatiegroep in twee dimensies SO_2 . Het ligt nu voor de hand om een reëel scalarveld $\vec{\phi}$ met bijvoorbeeld drie componenten te bestuderen om zo een ijkgroep SO_3 te implementeren. De transformatie op het veld is dan weer van de vorm:

$$\begin{aligned} \vec{\phi} \rightarrow \vec{\phi}' &= \Omega \vec{\phi} \\ \Omega &= e^{-i\alpha(x)^b T_b} \end{aligned} \quad (2.4.143)$$

waar de matrices T_b de drie generatoren van de ijkgroep SO_3 zijn. Deze vormen een representatie van de bijbehorende niet-abelse Lie-algebra :

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad (2.4.144)$$

De structuurconstanten f_{abc} (voor de SO_3 algebra hebben we $f_{abc} = \epsilon_{abc}$) leggen de algebra geheel vast. Teneinde een invariante Lagrangiaan te construeren voeren we een covariante afgeleide van de vorm (2.4.140) in, nu met een Lie- algebra waardige ijkpotentiaal van de vorm $A_\mu = A_\mu^b T_b$. De ijk-covariantie van D_μ ,

$$D_\mu \vec{\phi} \rightarrow (D_\mu \vec{\phi})' = \Omega D_\mu \vec{\phi} \quad (2.4.145)$$

impliceert dat A_μ transformeert als:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \Omega A_\mu \Omega^{-1} + \frac{i}{e} (\partial_\mu \Omega) \Omega^{-1} \quad (2.4.146)$$

De veldsterkte wordt gedefiniëerd door

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^b T_b := -\frac{i}{e} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie [A_\mu, A_\nu] \quad (2.4.147)$$

en transformeert niet triviaal:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \Omega F_{\mu\nu} \Omega^{-1} \quad (2.4.148)$$

Het is interessant om het volgende op te merken:

- (i) Bovenstaande formules zijn correct voor een willekeurige half-enkelvoudige Lie algebra welke zich onderscheiden door de specifieke waarden welke de structuurconstanten aannemen. Het aantal ijkvelden is gelijk aan het aantal generatoren, d.w.z. de *dimensie*, van de ijkgroep G .
- (ii) Het niet-abelse karakter van de groep komt o.a. tot uiting in de uitdrukking voor de veldsterkte die ook weer $\dim(G)$ componenten heeft. We zien dat deze een term bevat die niet-lineair is in de potentialen, hetgeen betekent de ijkvelden met elkaar wisselwerken en dus zelf ‘geladen’ zijn. Dit in contrast met het foton dat zelf electrisch neutraal is. Een consequentie hiervan is dat een niet-abelse ijktheorie zelfs in de afwezigheid van bronnen of koppelingen aan andere velden al een uiterst niet-lineaire theorie is, met niet triviale ‘zelf-interacties’ die het oplossen van de theorie uitermate gecompliceerd maken.

Een realistisch voorbeeld van een niet-abels model is de theorie van de sterke wisselwerkingen tussen de quarks (Quantum Chromodynamica (QCD)). De ijkgroep van deze theorie is SU_3 (de groep van unitaire 3×3 matrices met determinant gelijk aan 1), deze heeft een dimensie 8. De Lagrangedichtheid is van de vorm:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^b F_b^{\mu\nu} + \sum_i \bar{\psi}_i (i\not{D} - m_i)\psi_i \quad (2.4.149)$$

Het model beschrijft acht ijkvelden A_μ^b die *gluonen* genoemd worden en een aantal quarkvelden ψ_i^α . ψ is een viercomponentige complexe spinor, met een extra index $\alpha = 1, 2, 3$ welke de ‘kleur’ van het quarkveld bepaalt (dit is de index die verwijst naar de ruimte waar de SU_3 matrices T op werken). De quarks vormen een *triplet* representatie van de ijkgroep SU_3 . De zogenaamde ‘smaak’ index $i = 1, 2, \dots, 6$ geeft de verschillende soorten quarkvelden aan. Voor zover wij weten zijn er zes typen quarks met de prozaische namen *up*, *down*, *strange*, *charm*, *bottom* en *top*. Het bestaan van de topquark is nog niet experimenteel bevestigd. Quarks worden niet afzonderlijk als vrije deeltjes in de natuur waargenomen; ten gevolge van de gecompliceerde niet-abelse wisselwerkingen treedt het verschijnsel van *quark-opsluiving* (*confinement*) op, hetgeen betekent dat quarks alleen in kleur-invariante combinaties voorkomen. Hetzij in de vorm van een *meson* (zoals het pion), een gebonden toestand van een quark en een anti-quark, of in de vorm van een *baryon* (zoals het proton of neutron) dat bestaat uit drie quarks.

Als historische kanttekening vermelden we dat een niet-abelse ijktheorie voor het eerst werd neergeschreven door Yang en Mills in 1954. Quarks werden in 1963 gepostuleerd door Gell-Mann en Zweig, maar de toepassing van een niet-abelse ijktheorie op het probleem van de sterke interacties werd pas in het begin van de zeventiger jaren gesuggereerd door Nambu.

Hoofdstuk 3

Quantisatie van vrije velden

3.1 Kanonieke quantisatie

3.1.1 Het puntdeeltje

Voordat we met de quantisatie van velden beginnen, herhalen we in het kort de kanonieke quantisatie van een klassiek puntdeeltje met een Hamiltoniaan H . De klassieke Hamilton vergelijkingen (zie paragraaf 2.1) hebben de vorm.

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

Ook kunnen we op de faseruimte (p, q) een Poissonstructuur aanbrengen door een Poissonhaak van twee dynamische grootheden A en B te definiëren als:

$$\{A(p, q), B(p, q)\}_{pb} := \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q}\tag{3.1.2}$$

De Hamilton vergelijkingen voor de kanoniek toegevoegde variabelen p en q kunnen we dan schrijven als:

$$\begin{aligned}\partial_t p &= \{p, H\}_{pb} \\ \partial_t q &= \{q, H\}_{pb}\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

Waaruit volgt dat de tijdsevolutie van een observabele $A(p, q)$ wordt gegeven door:

$$\partial_t A = \{A, H\}_{pb}\tag{3.1.4}$$

Merk op dat de dynamica van het systeem volledig bepaald wordt door de Hamiltoniaan die tijdonafhankelijk is, evenals de Poissonhaak van p en q

$$\{p(t), q(t)\}_{pb} = -1\tag{3.1.5}$$

De kanonieke quantisatie van dit systeem verloopt als volgt. In plaats van de klassieke variabelen q en p beschouwen we tijdsafhankelijke hermitische operatorwaardige variabelen \hat{q} en \hat{p} die werken op een geschikte Hilbertruimte. Een observable A die klassiek een functie was op de faseruimte (p, q) , zoals bijvoorbeeld de Hamiltoniaan, correspondeert nu met een operator functie van \hat{q} en \hat{p} werkend op dezelfde Hilbertruimte. De relaties waaraan de operatoren moeten voldoen volgen uit de klassieke relaties met dien verstande dat we de Poissonhaak uit het klassieke geval vervangen door een gelijktijd commutator van de corresponderende operatoren:

$$\{ \quad , \quad \}_{pb} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [\quad , \quad] \quad (3.1.6)$$

De fundamentele commutatie relatie (3.1.5) wordt dan:

$$[\hat{p}(t), \hat{q}(t)] = -i\hbar \quad (3.1.7)$$

terwijl $[\hat{p}(t), \hat{p}(t)] = [\hat{q}(t), \hat{q}(t)] = 0$ ¹. De tijdevolutie van deze fundamentele dynamische variabelen wordt vastgelegd door de commutator met de Hamilton-operator:²

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{p}(t)}{dt} &= i [H, \hat{p}(t)] \\ \frac{d\hat{q}(t)}{dt} &= i [H, \hat{q}(t)] \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Dit zijn voorbeelden van de *Heisenberg-bewegingsvergelijking* die in feite geldt voor een willekeurige operator \hat{A} ,

$$\frac{d}{dt} (\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})) = -i [\hat{A}(\hat{q}, \hat{p}), \hat{H}(\hat{q}, \hat{p})] \quad (3.1.9)$$

Voor een gegeven Hamiltoniaan definiëren bovenstaande vergelijkingen het quantummechanische probleem in het zogenaamde *Heisenberg-beeld*. Het gaat er dan in wezen om de vergelijkingen (3.1.8) op te lossen uitgaande van de relatie (3.1.7).

De relatie van deze formulering van het quantumprobleem met het wellicht meer bekende *Schrödinger-beeld* waarin de dynamica door de Schrödinger vergelijking voor de golffunctie wordt vastgelegd en waar de operatoren tijdonafhankelijk zijn, is evident als we de oplossing van het Heisenberg probleem als een beginvoorwaarde probleem opvatten. We gaan dan uit van een beginvoorwaarde die aan (3.1.7) voldoet. We nemen bijvoorbeeld

$$\hat{q}(0) = q \quad \hat{p}(0) = -i\frac{\partial}{\partial q} \quad (3.1.10)$$

¹Merk op dat een operator $\hat{A}(\hat{p}, \hat{q})$ niet altijd uniek volgt uit de klassieke variabele $A(p, q)$, immers als A producten van p en q bevat zal \hat{A} afhangen van de ordening van de verschillende \hat{p} en \hat{q} operatoren. We zullen hier niet verder ingaan op deze subtiliteit.

²Vanaf hier stellen we \hbar weer gelijk aan 1.

of

$$\hat{q}(0) = i \frac{\partial}{\partial p} \quad \hat{p}(0) = p \quad (3.1.11)$$

Uit de Heisenberg-vergelijking volgt dat de Hamilton-operator zelf tijdonafhankelijk is, d.w.z. $\hat{H}(\hat{q}(t), \hat{p}(t)) = \hat{H}(\hat{q}(0), \hat{p}(0))$ en dus is het mogelijk om de oplossing van de lineaire operator vergelijking (3.1.9) formeel te schrijven als

$$\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{A}(0) e^{-i\hat{H}t} \quad (3.1.12)$$

We kunnen nu de operatoren ten tijde $t = 0$ opvatten als de Schrödinger-operatoren, $\hat{A}_S = \hat{A}_H(0)$. Vergelijking (3.1.12) geeft de transformatie die de operatoren in de verschillende beelden in elkaar overvoert, deze is unitair omdat \hat{H} zelfgeadjungeerd is. Uit de invariantie van matrixelementen en daarmee verwachtingswaarden van fysische observabelen volgt dan dat de tijdafhankelijke Schrödinger golffunctie geschreven kan worden als

$$| \psi_S(t) \rangle := e^{-iHt} | \psi_H \rangle = e^{-iHt} | \psi_S(0) \rangle \quad (3.1.13)$$

Uit het eerste en laatste lid van bovenstaande vergelijking volgt dan de Schrödinger-vergelijking,

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | \psi(t) \rangle = i \partial_t | \psi(t) \rangle . \quad (3.1.14)$$

We zullen in een later hoofdstuk nog een ander unitair equivalent beeld van de quantummechanica geven, het zogenaamde *interactie beeld* dat als het ware tussen het Heisenberg- en het Schrödinger-beeld in ligt, en waar zowel de golffunctie als de operatoren tijdafhankelijk zijn.

3.1.2 De lineaire harmonische oscillator in het Heisenberg beeld

In deze paragraaf quantiseren we de lineaire harmonische oscillator in het Heisenbergbeeld, enerzijds als illustratie van het geen we zojuist hebben behandeld, anderzijds omdat dit voorbeeld een terugkeert bij de veldquantisatie. Klassiek kunnen we de lineaire harmonische oscillator met de volgende Hamiltoniaan beschrijven:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) \quad (3.1.15)$$

De bewegingsvergelijkingen voor de coördinaat en impuls zijn:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = p \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega^2 q \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

We quantiseren dit systeem door $p(t)$ en $q(t)$ te laten corresponderen met tijdsafhankelijke operatoren en H met de Hamilton-operator:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) \quad (3.1.17)$$

waarbij we eisen dat aan de fundamentele commutatierelatie (3.1.7) voldaan is. De bewegingsvergelijkingen voor $\hat{p}(t)$ en $\hat{q}(t)$ vinden we m.b.v. (3.1.8):³

$$\begin{aligned} \dot{q} &= i[H, q] = i \left[\frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), q \right] = p \\ \dot{p} &= i[H, p] = i \left[\frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), p \right] = -\omega^2 q \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Merk op dat deze operatorvergelijkingen dezelfde vorm hebben als de klassieke vergelijkingen. De oplossing verloopt analoog, we introduceren de lineaire combinaties van p en q operatoren, die het stelsel bewegingsvergelijkingen ontkoppelen. Dit leidt tot de volgende set *ladder- of stapoperatoren*:⁴

$$\begin{aligned} a(t) &:= \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\omega q(t) + ip(t)) \\ a^\dagger(t) &:= \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\omega q(t) - ip(t)) \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

De bewegingsvergelijkingen worden dan:

$$\begin{aligned} \partial_t a(t) &= i[H, a(t)] = -i\omega a(t) \\ \partial_t a^\dagger(t) &= i[H, a^\dagger(t)] = i\omega a^\dagger(t) \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

met de oplossingen:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 e^{-i\omega t} \\ a^\dagger(t) &= a_0^\dagger e^{+i\omega t} \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

waarbij a_0 en a_0^\dagger tijdsafhankelijke operatoren zijn die voldoen aan de uit (3.1.7) en (3.1.19) volgende commutatierelaties:

$$\begin{aligned} [a(t), a^\dagger(t)] &= [a_0, a_0^\dagger] = 1 \\ [a(t), a(t)] &= [a_0, a_0] = 0 \\ [a^\dagger(t), a^\dagger(t)] &= [a_0^\dagger, a_0^\dagger] = 0 \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

De Hamiltoniaan uitgedrukt in a en a^\dagger is als volgt:

$$H = \frac{1}{2}\omega(a^\dagger a + aa^\dagger) = \frac{1}{2}\omega(a_0^\dagger a_0 + a_0 a_0^\dagger) = \omega(N + \frac{1}{2}) \quad (3.1.23)$$

³We zullen vanaf hier de hoedjes voor operatoren achterwege laten.

⁴In de context van de veldentheorie worden a en a^\dagger annihilatie respectievelijk creatie operatoren genoemd.

waarbij de *teloperator* N gedefiniëerd is als:

$$N := a^\dagger a = a_0^\dagger a_0 \quad (3.1.24)$$

De hierboven gedefiniëerde operatoren werken op toestandsvectoren in een Hilbert-ruimte. We kunnen de toestandsruimte van het systeem volledig beschrijven met een volledige set van stationaire eigenvectoren van de Hamiltoniaan H . Dat betekent dat we een willekeurige toestandsvector $|\psi\rangle$ van het systeem kunnen ontwikkelen naar een orthogonale basis van eigenvectoren $\{|\psi_n\rangle\}$ van H . Om de eigenschappen van de harmonische oscillator te bestuderen is het dus voldoende om de eigenschappen van $|\psi_n\rangle$ te bekijken. Uit de commutatierelaties volgt:

$$[H, a_0] = -\omega a_0 \quad (3.1.25)$$

en

$$[H, a_0^\dagger] = \omega a_0^\dagger \quad (3.1.26)$$

Dit betekent dat als we een toestand bij energie E_n kennen:

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad (3.1.27)$$

we een toestand bij energie $E_n + \omega$ kunnen maken door de stap operator a_0^\dagger op de toestandsvector te laten werken. $a_0^\dagger |\psi_n\rangle$ is namelijk weer een eigenvector van H :

$$H(a_0^\dagger |\psi_n\rangle) = (E_n + \omega)(a_0^\dagger |\psi_n\rangle) \quad (3.1.28)$$

Dit proces kunnen we onbeperkt herhalen. Omgekeerd geldt dat als we een toestand met zekere energie E_n hebben we een toestand met lagere energie $E_n - \omega$ kunnen maken door de annihilatie operator a_0 op de toestands vector te laten werken. $a_0 |\psi_n\rangle$ is weer een eigenvector van H :

$$H(a_0 |\psi_n\rangle) = (E_n - \omega)(a_0 |\psi_n\rangle) \quad (3.1.29)$$

We kunnen dus vanuit iedere eigentoestand van H een willekeurige andere bereiken door een aantal malen a_0 of a_0^\dagger te laten werken. Dit verklaart voor a_0 en a_0^\dagger de naam stap-operator. Omdat $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$ een positief-semi-definiëte operator is, is er een ondergrens E_0 aan de energie. De bijbehorende toestand $|\psi_0\rangle$ is per definitie de grondtoestand van het systeem. Deze moet vanwege (3.1.29) voldoen aan

$$a_0 |\psi_0\rangle = 0 \quad (3.1.30)$$

Voor de energie-eigenwaarde E_0 van de grondtoestand volgt:

$$\begin{aligned} H |\psi_0\rangle &= \frac{1}{2}\omega a_0 a_0^\dagger |\psi_0\rangle = \frac{1}{2}\omega [a_0, a_0^\dagger] |\psi_0\rangle = \frac{1}{2}\omega |\psi_0\rangle \\ \Rightarrow E_0 &= \frac{1}{2}\omega \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

We kunnen een willekeurige eigentoestand van H met energie E_n opbouwen vanuit deze ‘vacuum’ toestand door n -maal de creatie operator te laten werken:

$$|\psi_n\rangle = c(a_0^\dagger)^n |\psi_0\rangle \Rightarrow E_n = (n + \frac{1}{2})\omega \quad (3.1.32)$$

waarbij c een nader te bepalen normalisatie constante is. Het spectrum van de harmonische oscillator is niet gedegeneerd en de eigenvectoren van H zijn dus orthogonaal:

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm} \quad (3.1.33)$$

De normalisatie constante c vinden we uit de eis dat $\langle \psi_n | \psi_n \rangle$ genormeerd is op 1:

$$\langle \psi_n | \psi_n \rangle = c_n^2 \langle \psi_0 | (a_0)^n (a_0^\dagger)^n | \psi_0 \rangle = 1 \quad (3.1.34)$$

Deze eis geeft voor c_n :

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \quad (3.1.35)$$

Opgave 20 Controleer dit m.b.v. de commutatierelaties van a_0 en a_0^\dagger .

Hiermee is de quantummechanische beschrijving van het probleem volledig. We beschrijven de harmonische oscillator met een volledige set van eigenvectoren van de Hamiltoniaan. Deze eigentoestanden kunnen opgebouwd worden vanuit een vacuum toestand door het laten werken van creatie operatoren:

$$|\psi_n\rangle = \frac{(a_0^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |\psi_0\rangle \quad (3.1.36)$$

De enige matrixelementen van de creatie en annihilatie operatoren niet gelijk aan nul zijn:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{n+1} | a_0^\dagger | \psi_n \rangle &= \sqrt{n+1} \\ \langle \psi_{n-1} | a_0 | \psi_n \rangle &= \sqrt{n} \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

Omdat we alle matrixelementen van a_0 en a_0^\dagger kennen, kunnen we alle verwachtingswaarden van fysische observabelen en overgangswaarschijnlijkheden berekenen.

Opgave 21 Een orthonormale basis voor de Hilbertruimte wordt gevormd door de set $\{|\psi_n\rangle\}$. Construeer $\psi_n(x) = \langle x | \psi_n \rangle$ voor $n = 0, 1$ en 2 m.b.v. de relaties (3.1.30) en (3.1.36), uitgaande van de operator uitdrukkingen $\hat{q} = x$ en $\hat{p} = -i\partial_x$.

3.1.3 Quantisatie van velden

In het vorige hoofdstuk hebben we de kanonieke formulering van klassieke velden afgeleid. Deze formulering gebruiken we als uitgangspunt voor de quantisatie van

velden. In het Euler-Lagrange formalisme wordt een veld beschreven door zijn Lagrangiaan L die afgangt van de dynamische variabelen ϕ en $\dot{\phi}$. De dynamica van het veld volgt uit het principe dat de actie extremaal is voor een veld dat aan de bewegingsvergelijkingen voldoet. Hieruit volgt de Euler-Lagrange vergelijking voor het veld. Om over te gaan naar het Hamilton-formalisme definiëerden we het kanonieke impulsveld π , de Hamiltoniaan H en de Hamiltondichtheid \mathcal{H} . π en ϕ voldoen aan de functionele Hamilton-vergelijkingen:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{\delta H}{\delta \pi} \\ \dot{\pi} &= -\frac{\delta H}{\delta \phi}\end{aligned}\tag{3.1.38}$$

We kunnen op de faseruimte een Poissonstructuur aanbrenge door het definiëren van het Poissonhaakje (2.1.41). De fundamentele Poissonhaak van π en ϕ wordt gegeven door:

$$\{\pi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)\}_{pb} = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\tag{3.1.39}$$

(Vergelijk 3.1.5) De bewegingsvergelijking (3.1.38) laten zich m.b.v. het Poissonhaakje schrijven als:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \{\phi, H\}_{pb} \\ \dot{\pi} &= \{\pi, H\}_{pb}\end{aligned}\tag{3.1.40}$$

Voor een translatie-invariante theorie kan met behulp van de definitie van de energie-impuls tensor P^μ (zie 2.3.95) de bewegingsvergelijkingen voor ϕ generaliseerd worden tot de volgende covariante set:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \phi &= \{\phi, P_\mu\}_{pb} \\ \partial_\mu \pi &= \{\pi, P_\mu\}_{pb}\end{aligned}\tag{3.1.41}$$

De behouden grootheden $P^\mu [\pi, \phi]$ hangen niet expliciet van de tijd af en commuteren dien tengevolge met de Hamiltoniaan.

De kanonieke veld-quantisatie verloopt nu volledig analoog aan het ééndeeltjes geval, d.w.z. dat we de velden als gewone functies van de ruimte tijd vervangen door operatorwaardige functies (veldoperatoren), en dat we de klassieke Poissonhaakjes op de in (3.1.6) aangegeven wijze vervangen door commutatoren van operatoren. We leggen dus de volgende fundamentele commutatie relaties op aan het veld en zijn kanoniek toegevoegde impuls ⁵:

$$\begin{aligned}[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] &= [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = 0 \\ [\pi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] &= -i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\end{aligned}\tag{3.1.42}$$

⁵We laten de hoedjes-notatie achterwege

De Heisenberg-vergelijkingen waar de operatoren aan moeten voldoen,

$$\begin{aligned}\dot{\pi} &= -i[\pi, H] \\ \dot{\phi} &= -i[\phi, H]\end{aligned}\tag{3.1.43}$$

geven de conditie dat de veldoperatoren aan de klassieke veldvergelijkingen voldoen ⁶.

We merken nu op dat de kanonieke quantisatie procedure niet bepaald recht doet aan de Lorentz-covariantie van de klassieke theorie, immers de tijd en de Hamiltoniaan (Energie) spelen daarin een bijzondere rol. We moeten dus verifiëren dat na het quantiseren met een methode die niet manifest covariant is de resulterende quantumtheorie wel degelijk covariant is. We moeten dan laten zien dat de operator uitdrukkingen voor de behouden ladingen die corresponderen met de Lorentz of Poincaré symmetrie aan de juiste commutatierelaties voldoen. Beschouw als voorbeeld de Hamiltoniaan. We hebben in het vorige hoofdstuk laten zien dat deze de behouden Noether-lading is die correspondeert met infinitesimale tijdtranslaties. Anderzijds zeggen de Heisenberg-vergelijkingen dat het effect van een infinitesimale tijdtranslatie op een (operator)veld gelijk is aan de commutator van dat veld met de Hamiltoniaan. Dit suggereert dat in het algemeen de infinitesimale symmetrie transformaties op velden gegenereerd worden door de operatoren die corresponderen met de behouden lading. Zo verwachten we dat de commutator met de energie-impuls operator P_μ infinitesimale ruimtetijd-translaties genereert, d.w.z. dat moet gelden

$$\begin{aligned}\partial_\mu \phi &= -i[\phi, P_\mu] \\ \partial_\mu \pi &= -i[\pi, P_\mu]\end{aligned}\tag{3.1.44}$$

Dezelfde opmerking is van toepassing op de gegeneraliseerde impulsmoment generatoren $M^{\mu\nu}$ en de infinitesimale Lorentztransformaties. Tenslotte kunnen we ook de commutatierelaties van P_μ en de $M_{\mu\nu}$ uitrekenen en verifiëren dat deze een representatie van de Poincaré algebra vormen. Hiermee is uiteen gezet hoe een symmetrie van de klassieke actie uiteindelijk in de quantumtheorie geïmplementeerd wordt door middel van de operator uitdrukkingen voor de behouden ladingen. ⁷. We zullen in de volgende paragrafen het bovenstaande programma uitvoeren voor de relativistische vrije velden.

3.2 Quantisatie van het Klein-Gordon veld

Als eerste voorbeeld van de quantisatie van een veld behandelen we de quantisatie van het reële scalarveld ofwel het Klein-Gordon veld. Dit voldoet aan de Klein-

⁶Hier kunnen afwijkingen optreden als er operator-ordering ambiguiteiten zijn.

⁷Het is echter niet zo dat men er bijvoorbeeld zeker van is dat alle symmetrieën van de klassieke actie tegelijkertijd in de corresponderende quantumtheorie gerealiseerd kunnen worden. Er zijn belangrijke voorbeelden waarbij dit niet het geval is, men spreekt dan van een *quantum anomalie*. Dit onderwerp valt buiten de context van dit college.

Gordon vergelijking:

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 \quad (3.2.45)$$

en wordt beschreven door de Lagrangedichtheid:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2) \quad (3.2.46)$$

De aan het veld toegevoegde impuls is:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x) \quad (3.2.47)$$

In de kanonieke quantisatie worden π en ϕ hermitische operatoren die aan de volgende gelijke-tijd commutatierelaties voldoen:

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] &= [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = 0 \\ [\pi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] &= -i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

We nemen nu de in hoofdstuk 2 afgeleide uitdrukkingen voor de vierimpuls en Hamiltondichtheid en beschouwen deze als operatoren:

$$\begin{aligned} P^0 &= H = \int d^3x \mathcal{H}(\pi, \phi) \\ \mathcal{H}(\pi, \phi) &= \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} [\pi^2(\vec{x}, t) + |\vec{\nabla} \phi(\vec{x}, t)|^2 + m^2 \phi^2(\vec{x}, t)] \\ \vec{P} &= - \int d^3x \pi \vec{\nabla} \phi \end{aligned} \quad (3.2.49)$$

De Heisenberg-vergelijking voor ϕ geeft:

$$\partial_t \phi(\vec{x}, t) = i [H, \phi(\vec{x}, t)] = i \int d^3x' \frac{1}{2} [\pi^2(\vec{x}', t), \phi(\vec{x}, t)] = \pi(\vec{x}, t) \quad (3.2.50)$$

waarbij gebruikt is van het feit dat:

$$[\vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}', t), \phi(\vec{x}, t)] = \vec{\nabla}_{x'} [\phi(\vec{x}', t), \phi(\vec{x}, t)] = 0 \quad (3.2.51)$$

Op soortgelijke wijze vindt men voor π de vergelijking

$$\partial_t \pi(\vec{x}, t) = i [H, \pi(\vec{x}, t)] = \vec{\nabla}^2 \phi - m^2 \phi \quad (3.2.52)$$

De Heisenberg-vergelijkingen leggen dus op dat het operator-veld ϕ aan de Klein-Gordon vergelijking voldoet.

We kunnen m.b.v. de commutatierelaties (3.1.42) nu ook laten zien dat met de uitdrukkingen voor P^μ de Heisenberg operatoren $\phi(\vec{x}, t)$ inderdaad voldoen aan de covariante generalisatie van de Heisenberg vergelijking (3.1.41). Voor \vec{P} volgt bijvoorbeeld:

$$-i [\vec{P}, \phi(\vec{x}, t)] = i \int d^3x' [\pi(\vec{x}', t), \phi(\vec{x}, t)] \vec{\nabla} \phi(\vec{x}', t) = \vec{\nabla}_x \phi(\vec{x}, t) \quad (3.2.53)$$

Opgave 22 Laat zien dat de uitdrukking voor het impulsmoment van het veld:

$$M^{\nu\lambda} = \int d^3x \left[(x^\nu T^{0\lambda} - x^\lambda T^{0\nu}) + \pi_r \Sigma_{rs}^{\nu\lambda} \phi_s \right] = \int d^3x (x^\nu T^{0\lambda} - x^\lambda T^{0\nu}) \quad (3.2.54)$$

(voor een scalarveld is $\Sigma_{rs}^{\nu\lambda}$ nul.) als volgt commuteert met $\phi(\vec{x}, t)$:

$$i [M^{\mu\nu}, \phi(\vec{x}, t)] = x^\mu \partial^\nu \phi - x^\nu \partial^\mu \phi \quad (3.2.55)$$

3.2.1 De fysische structuur van het Klein-Gordon veld

Om de fysische structuur van het gequantiseerde Klein-Gordon veld verder te onderzoeken willen we, met behulp van de door de commutatoren (3.1.42) vastgelegde algebra der veldoperatoren, een volledig systeem van toestandsvectoren $|\psi\rangle$ construeren. We kunnen daarvoor de volledige set van eigenvectoren van de energie- en impulsoperator nemen. Om die te vinden zullen we eerst een Fourier expansie ofwel "normal-modeontwikkeling van het reële scalarveld maken in termen van creatie (a^\dagger) en annihilatie (a) operatoren. Nadat we vervolgens de algebra hiervan bepaald hebben en \vec{P} en H geschreven hebben in termen van a en a^\dagger kunnen we het eigenwaarde probleem voor \vec{P} en H oplossen. Het zal hiervoor nodig blijken een nieuwe toestandsruimte te introduceren nl. de z.g. veeldeeltjes toestandsruimte ofwel Fockruimte. We kunnen uiteindelijk het Klein-Gordon veld beschrijven met een volledige set van eigenvectoren van de vierimpuls $P^\mu = (H, \vec{P})$ in de Fockruimte. We beginnen met het opschrijven van de klassieke vlakke golf oplossing van een reël scalarveld:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} \left[a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_k t)} + a^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_k t)} \right] \quad (3.2.56)$$

waar ω_k gegeven wordt door:

$$\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad (3.2.57)$$

Omdat $k_0 = \omega_k$ volledig vastligt in termen van \vec{k} kunnen we in plaats van $a(\vec{k})$ ook $a(k)$ schrijven, hetgeen we in het vervolg zullen doen. Voor het klassieke veld zijn $a(k)$ en $a^*(k)$ de complex toegevoegde amplituden. De quantisatie betekent weer dat we $a(k)$ en $a^*(k)$ laten corresponderen met operatoren $a(k)$ en $a^\dagger(k)$ met a^\dagger de hermitisch toegevoegde van a . We willen nu de algebra van a en a^\dagger bestuderen. Deze volgt uit de commutatierelaties (3.1.42). Definiëer daartoe eerst:

$$f_k(x) := \frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \quad \text{met } k = (\omega_k, \vec{k}) \text{ en } x = (t, \vec{x}) \quad (3.2.58)$$

waarmee we ϕ en π kunnen schrijven als:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int d^3k \left[a(k) f_k(x) + a^\dagger(k) f_k^*(x) \right] := \phi^+(x) + \phi^-(x) \\ \pi(x) &= \dot{\phi}(x) = \int d^3k (-i\omega_k) \left[a(k) f_k(x) - a^\dagger(k) f_k^*(x) \right] \end{aligned} \quad (3.2.59)$$

We kunnen dit omschrijven zo dat we expliciete uitdrukkingen voor $a(k)$ en $a^\dagger(k)$ krijgen:

$$\begin{aligned} a(k) &= \int d^3x f_k^*(\vec{x}, t) [\omega_k \phi(\vec{x}, t) + i\pi(\vec{x}, t)] \\ a^\dagger(k') &= \int d^3y f_{k'}(\vec{y}, t) [\omega_{k'} \phi(\vec{y}, t) - i\pi(\vec{y}, t)] \end{aligned} \quad (3.2.60)$$

hierbij hebben we gebruikt dat:

$$\begin{aligned} \int d^3x f_{k'}^* f_k &= \frac{1}{2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(k-k')x} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} = \frac{1}{2\omega_k} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned} \quad (3.2.61)$$

Merk op dat $a(k)$ en $a^\dagger(k)$ tijdsafhankelijk zijn. De tijdsevolutie zit volledig in de Fourier expansie die we van $\phi(\vec{x}, t)$ gemaakt hebben. Omdat we de commutatierelaties van ϕ en π voor gelijke tijden kennen, kunnen we nu de commutatierelaties van a en a^\dagger berekenen. Zo krijgen we de volgende algebra voor $a(k)$ en $a^\dagger(k)$:

$$\begin{aligned} [a(k), a(k')] &= [a^\dagger(k), a^\dagger(k')] = 0 \\ [a(k), a^\dagger(k')] &= \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned} \quad (3.2.62)$$

Om eigenvectoren van de Hamiltoniaan H en impulsoperator \vec{P} te kunnen vinden is het handig deze operatoren uit te drukken in a en a^\dagger . Voor \vec{P} gaat dat als volgt. Met (3.2.49) en (3.2.59) vinden we voor de impulsoperator:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= - \int d^3x \pi \vec{\nabla} \phi \\ &= - \int d^3x \int d^3k \int d^3k' (-i\omega_k)(i\vec{k}') [a(k)f_k(x) - a^\dagger(k)f_k^*(x)] \\ &\quad [a(k')f_{k'}(x) - a^\dagger(k')f_{k'}^*(x)] \end{aligned} \quad (3.2.63)$$

Als we het produkt van de twee blokhaken uit zouden schrijven zou dat vier termen geven. Dat de eerste term nul is zien we als volgt:

$$\begin{aligned} &- \int d^3x \int d^3k \int d^3k' (\omega_k)(\vec{k}') a(k)a(k') f_k(x)f_{k'}(x) = \\ &- \int d^3k \int d^3k' (\omega_k \vec{k}') a(k)a(k') \frac{1}{2\omega_k} \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') e^{-2i\omega_k t} = \\ &+ \int d^3k \left(\frac{1}{2}\vec{k}\right) e^{-2i\omega_k t} \frac{1}{2} [a(\vec{k}), a(-\vec{k})] = 0 \end{aligned} \quad (3.2.64)$$

Hierbij hebben we gebruikt:

$$\int d^3x f_{k'} f_k = \frac{1}{2\omega_k} \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') e^{-2i\omega_k t} \quad (3.2.65)$$

Op dezelfde manier kunnen we laten zien dat de laatste term nul is. Resten nog de kruistemen. Als we weer (3.2.61) gebruiken, krijgen we na uitrekenen van de kruistemen voor de impulsoperator \vec{P} in termen van a en a^\dagger :

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \int d^3k \vec{k} \left[a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) \right] \quad (3.2.66)$$

Op analoge wijze vinden we voor de Hamiltoniaan:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3k \omega_k \left[a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) \right] \quad (3.2.67)$$

Opgave 23 Leidt uitdrukking (3.2.67) voor H af op dezelfde manier als we dat voor \vec{P} gedaan hebben.

We zien dat de Hamiltoniaan een continue som van onderling commuterende termen $H_k = \frac{1}{2}\omega_k [a^\dagger a + a a^\dagger]$ is, die de vorm hebben van de Hamiltonoperator van een een-dimensionale harmonische oscillator met frequentie ω_k . Het Klein-Gordon veld is dus voor te stellen als de continue som van ongekoppelde harmonische oscillatoren. Dit resultaat is niet verwonderlijk omdat we voor het veld een Fourier expansie konden maken. Deze Fourier expansie kunnen we zien als een ontwikkeling naar "normal modes", waarbij iedere normal mode correspondeert met een harmonische oscillator $a(k)$ met frequentie ω_k . Wat we hier gedaan hebben is eigenlijk een quantisatie voor iedere oscillator $a(k)$ afzonderlijk. Als we periodieke randvoorwaarden in de x -ruimte op zouden leggen, wordt het energie-impuls spectrum discreet. Waardoor H een discrete som wordt van onderling commuterende operatoren H_k :

$$H = \sum_k H_k \quad (3.2.68)$$

met

$$H_k = \frac{1}{2}\omega_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) \quad (3.2.69)$$

Voor a_k en a_k^\dagger gelden de commutatierelaties:

$$\begin{aligned} [a_k, a_k^\dagger] &= \delta_{kk'} \\ [a_k, a_{k'}] &= [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \end{aligned} \quad (3.2.70)$$

We kunnen H ook schrijven in termen van de bezettingsgetal operatoren N_k gedefiniëerd als:

$$N_k := a_k^\dagger a_k \quad (3.2.71)$$

die als eigenwaarden het bezettingsgetal van een toestand heeft:

$$N_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle \quad (3.2.72)$$

Merk op dat N_k commuteert met H , dus behouden is:

$$[N_k, H] = 0 \quad (3.2.73)$$

In termen van N_k ziet H eruit als:

$$H = \sum_k \omega_k (N_k + \frac{1}{2}) \quad (3.2.74)$$

Omdat H de som is van onderling commuterende termen H_k , kunnen we de Hilbertruimte \mathcal{F} beschouwen als een direct produkt van de Hilbertruimten \mathcal{F}_k die opgespannen worden door de eigenfuncties $|\psi_n(k)\rangle$ van de afzonderlijke oscillatoren. De ruimte $\mathcal{F} = \otimes \mathcal{F}_k$ wordt dan opgespannen door de vectoren

$$|\{n_k\}\rangle = \otimes_k |\psi_n(k)\rangle \quad (3.2.75)$$

De ruimte die opgespannen wordt door de toestandsvectoren $|\{n_k\}\rangle$ noemen we een veeldeeltjes toestandsruimte ofwel Fock-ruimte.

De eigenwaarde vergelijking voor de Hamiltoniaan van het reële scalarveld ziet er als volgt uit:

$$H |\{n_k\}\rangle = \sum_k \omega_k (n_k + \frac{1}{2}) |\{n_k\}\rangle \quad (3.2.76)$$

We kunnen op dezelfde manier de impulsoperator opbouwen als som van impulsoperatoren \vec{P}_k van lineair harmonische oscillatoren. Omdat \vec{P}_k als operator dan precies dezelfde vorm heeft als H_k commuteren ze met elkaar en kunnen simultaan gediagonaliseerd worden. Voor de operator \vec{P}_k kiezen we dus dezelfde eigenvectoren gekarakteriseerd door het quantum getal n_k met eigenwaarden \vec{k} . Dit betekent dat we voor de vierimpuls $P^\mu = (H, \vec{P})$ van het Klein-Gordon veld de volgende eigenwaarde vergelijking mogen neerschrijven:

$$P^\mu |\{n_k\}\rangle = \sum_k k^\mu (n_k + \frac{1}{2}) |\{n_k\}\rangle \quad (3.2.77)$$

De grondtoestand (het vacuüm) correspondeert met de toestand waarbij alle bezettingsgetallen nul zijn ($|0\rangle := |\{0_k\}\rangle$). De eigenwaarde vergelijking voor deze toestand is:

$$H |0\rangle = \sum_k \frac{1}{2} \omega_k |0\rangle \quad (3.2.78)$$

Dit betekent dat de vacuüm energie divergeert:

$$E_0 = \sum_k \frac{1}{2} \omega_k = \infty \quad (3.2.79)$$

Dit is het eerste van een aantal divergentie problemen dat we bij de quantisatie van velden zullen tegenkomen. Het kan opgelost worden door van de totale energie een oneindige constante af te trekken, bijvoorbeeld door de operator uitdrukking voor P^μ normaal te ordenen (zie volgend intermezzo). Dit mag, omdat onder verwaarlozing van de zwaartekracht, absolute energieën geen meetbare observabelen zijn. Alleen energieverschillen hebben fysische betekenis.

Merk tenslotte nog op dat de veeldeeltjes golffunctie $|\{n_k\}\rangle$ symmetrisch is onder verwisseling van elk paar deeltjes:

$$|n_{k_1} = 1, n_{k_2} = 1\rangle := a^\dagger(k_1)a^\dagger(k_2)|0\rangle = a^\dagger(k_2)a^\dagger(k_1)|0\rangle := |n_{k_2} = 1, n_{k_1} = 1\rangle \quad (3.2.80)$$

Dit betekent dat de Klein-Gordon deeltjes een Bose-Einstein statistiek hebben.

Concluderend kunnen we zeggen dat de quantisatie van een vrij scalarveld ofwel Klein-Gordon veld een toestandsruimte $|\{n_k\}\rangle$ geeft die correspondeert met een willekeurig aantal deeltjes (met spin 0 en massa m) met een energie ω_k en impuls \vec{k} welke voldoen aan de relatie $\omega_k^2 = |\vec{k}|^2 + m^2$. In de quantummechanica correspondeert de quantisatie van een veld dus met het oplossen van een veeldeeltjes probleem.

Normaalordening van operatoren Het blijkt zinvol om het z.g. normaal geordend produkt van operatoren te definiëren. Dit geven we aan met 2 maal twee puntjes rondom de uitdrukking. Hiermee bedoelen we de operator uitdrukking die we verkrijgen door de annihilatie operatoren rechts van de creatie operatoren te plaatsen.

$$:a(k)a^\dagger(k')a(k'')a^\dagger(k'''):= a^\dagger(k')a^\dagger(k''')a(k)a(k'') \quad (3.2.81)$$

Dit betekent dat de vacuüm verwachtingswaarde van een normaal geordend produkt van creatie en annihilatie operatoren altijd nul is:

$$\langle 0 | : \dots a(k) \dots : | 0 \rangle = 0 \quad (3.2.82)$$

Merk op dat als we de energie en impuls definiëren als het normaalgeordend produkt van operatoren, de nulpuntsenergie verdwijnt:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_k \omega_k : a^\dagger(k)a(k) + a(k)a^\dagger(k) : = \sum_k \omega_k N_k \\ \vec{P} &= \sum_k \vec{k} N_k \end{aligned} \quad (3.2.83)$$

zodat

$$\begin{aligned} \langle 0 | H | 0 \rangle &= 0 \\ \langle 0 | \vec{P} | 0 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.84)$$

3.2.2 Greenfuncties en Propagatoren

Tot nu toe hebben we slechts het vrije Klein-Gordon veld beschouwd. Daarmee hebben we nog geen mogelijkheid om wisselwerkingen te beschrijven. Om de theorie van het Klein-Gordon veld uit te breiden met wisselwerkingen moeten we bronnen introduceren. De Klein-Gordon vergelijking krijgt dan de vorm:

$$(\square + m^2)\phi(x) = -j(x) \quad (3.2.85)$$

Er is een standaard methode om dit soort klassieke veldvergelijkingen op te lossen die gebruik maakt van Green-functies. Een Green-functie $G(x, x')$ kunnen we definiëren als een oplossing van:

$$(\square_x + m^2)G(x, x') = -\delta^4(x - x') \quad (3.2.86)$$

De oplossing van (3.2.85) kan nu m.b.v. (3.2.86) geschreven worden als:

$$\phi(x) = \phi^0(x) + \int d^4x' G(x, x')j(x') \quad (3.2.87)$$

waarbij $\phi^0(x)$ een oplossing is van de homogene vergelijking ($j(x) = 0$). Vergelijking (3.2.85) kunnen we oplossen door middel van een Fourier-transformatie:

$$G(x, x') = G(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')} \tilde{G}(p) \quad (3.2.88)$$

Dit geeft voor $\tilde{G}(p)$ de eis:

$$(-p^2 + m^2)\tilde{G}(p) = -1 \quad (3.2.89)$$

De oplossing

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2} \quad (3.2.90)$$

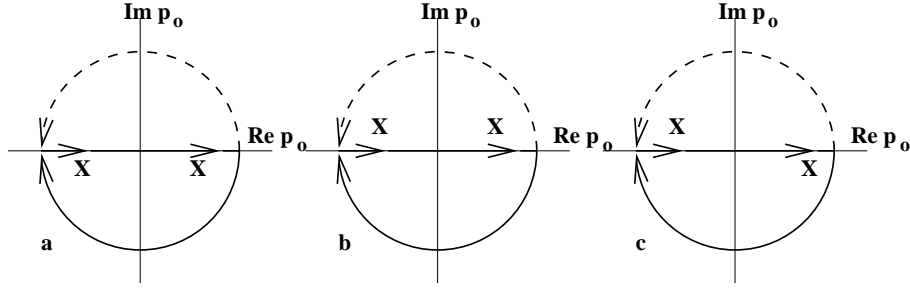
is niet gedefiniëerd op de massaschil. ($p^2 = m^2$ ofwel $p_0^2 - |\vec{p}|^2 - m^2 = 0$), hetgeen leidt tot een ambiguïteit in de definitie van $G(x - x')$. Men kan tot een bepaalde keuze van G komen door p^0 als complexe variabele te beschouwen en de p^0 -integraal in (3.2.88) uit te voeren langs een op oneindig gesloten contour in het p^0 -vlak, die op een afgesproken manier om de polen $p^0 = \pm\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$ loopt. Voor convergentie van de integraal (3.2.88) moet de afsluiting voor $x^0 - x'^0 > 0$ in het onderhalfvlak gebeuren en voor $x^0 - x'^0 < 0$ in het bovenhalfvlak. In plaats van een vervorming van de contour rond de polen kan men natuurlijk evengoed de polen over een infinitesimale afstand $i\epsilon$ verschuiven en de contour op de reële as laten. De verschillende mogelijkheden om dit te doen (zie bijvoorbeeld onderstaande figuur) corresponderen met verschillende oplossingen van dezelfde differentiaal vergelijking (3.2.86), deze zullen daarom met een oplossing van de homogene Klein-Gordon vergelijking van elkaar verschillen.

Door uit te gaan van

$$\tilde{G}_{ret}(p) = \frac{1}{(p_0 + i\epsilon)^2 - |\vec{p}|^2 - m^2} \quad (3.2.91)$$

schuift men de polen in het onderhalfvlak (Figuur 3.1a). Dit geeft met (3.2.88) de *geretardeerde* oplossing $G_{ret}(x - x')$, die gelijk is aan nul voor $x^0 - x'^0 < 0$ omdat er dan geen polen binnen de contour liggen. Met

$$\tilde{G}_{adv}(p) = \frac{1}{(p_0 - i\epsilon)^2 - |\vec{p}|^2 - m^2} \quad (3.2.92)$$



Figuur 3.1: *Contour integralen in het complexe p^0 -vlak voor $x^0 - x'^0 > 0$ (getrokken lijn) en $x^0 - x'^0 < 0$ (gestippelde lijn) en enkele mogelijkheden voor het verschuiven van de polen.*

correspondeert de *geavanceerde* oplossing $G_{adv}(x - x')$ die gelijk is aan nul voor $x^0 - x'^0 > 0$ omdat er dan geen polen binnen de contour liggen (Figuur 3.1b). Men kan ook uitgaan van

$$\tilde{G}_F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.2.93)$$

die één pool boven en één pool onder de reële as heeft (Figuur 3.1c). De bijbehorende Green-functie die hieruit met (3.2.88) volgt, wordt *Feynman* of *Stückelberg* oplossing genoemd:

$$G_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ip(x-x')}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.2.94)$$

Deze functie is complex en speelt daarom geen rol bij het klassieke reële scalarveld. In de quantumtheorie speelt deze oplossing echter een belangrijke rol omdat zij de propagatie van het vrije quantum Klein-Gordon veld beschrijft zoals we nu zullen laten zien.

De Feynman propagator

De operator algebra van het gequantiseerde Klein-Gordon veld wordt vastgelegd door de gelijk-tijd commutatierelaties (3.2.48). Wat we nog niet onderzocht hebben zijn commutatoren van veldoperatoren op ongelijke tijden. We kunnen deze uitrekenen door gebruik te maken van de Fourier-ontwikkeling (3.2.56) van het Klein-Gordon veld en de commutator algebra van a en a^\dagger . Laten we de commutator noteren als

$$\Delta(x - x') := [\phi(x), \phi(x')] \quad (3.2.95)$$

Als we de Fourier-ontwikkeling van $\phi(x)$ splitsen in het annihilatie- en creatie deel:

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) \quad (3.2.96)$$

met

$$\begin{aligned}\phi^+(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} a(\vec{k}) e^{-ikx} \\ \phi^-(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} a^\dagger(\vec{k}) e^{ikx}\end{aligned}\quad (3.2.97)$$

dan kunnen we de commutator schrijven als

$$\Delta(x-x') =: \Delta^+(x-x') + \Delta^-(x-x') \quad (3.2.98)$$

waar de functies $\Delta^+(x-x')$ en $\Delta^-(x-x')$ gelijk zijn aan

$$\begin{aligned}\Delta^+(x-x') &= [\phi^+(x), \phi^-(x')] \\ \Delta^-(x-x') &= [\phi^-(x), \phi^+(x')]\end{aligned}\quad (3.2.99)$$

We vinden aldus dat

$$\Delta^\pm(x-x') := \pm \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{\mp ik(x-x')} \quad (3.2.100)$$

Merk op dat voor $\Delta^+(x-x')$ en $\Delta^-(x-x')$ de relatie geldt:

$$-\Delta^+(y) = \Delta^-(y) \quad (3.2.101)$$

Het feit dat de commutator (3.2.95) ongelijk nul is ligt voor de hand, op grond van de speciale relativiteitstheorie verwacht men echter wel dat de commutator van het veld op twee verschillende punten x en x' nul is, als het interval $(x-x')$ ruimteachtig is (d.w.z. als $(x-x')^2 < 0$). Aan deze *causaliteits conditie* is inderdaad voldaan omdat we in dat geval een frame kunnen kiezen zodanig dat $x_0 = x'_0$ en we weten dat de gelijke-tijd commutatie relatie van $\phi(x)$ wel nul is.

Opgave 24 *Laat zien dat, alleen als het interval $(x-x')$ ruimteachtig is, je een frame kunt kiezen zó dat $x_0 = x'_0$.*

Nu we de niet-gelijke tijd commutatie relaties van het veld berekend hebben introduceren we de *Feynman-propagator*. Deze legt een verband tussen veldoperatoren op verschillende tijden en is te schrijven in termen van $\Delta^+(x-x')$ en $\Delta^-(x-x')$. De Feynman-propagator $\Delta_F(x-x')$ is gedefiniëerd als de vacuümverwachtingswaarde van het *tijdgeordende produkt* van twee veldoperatoren:

$$i\Delta_F(x-x') := \langle 0 | T(\phi(x)\phi(x')) | 0 \rangle \quad (3.2.102)$$

Waarbij het tijdgeordende produkt $T(\phi(x), \phi(x'))$ van twee veldoperatoren gegeven wordt door:

$$T(\phi(x)\phi(x')) = \begin{cases} \phi(x)\phi(x') & \text{als } x_0 \geq x'_0 \\ \phi(x')\phi(x) & \text{als } x_0 \leq x'_0 \end{cases}$$

De tijdordenings operator T kunnen we ook schrijven in termen van de stapfunctie θ die als volgt is gedefiniëerd:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } (x > 0) \\ 1/2 & (x = 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (3.2.103)$$

Daarmee is T te schrijven als:

$$T(\phi(x), \phi(x')) = \theta(x_0 - x'_0)\phi(x)\phi(x') + \theta(x'_0 - x_0)\phi(x')\phi(x) \quad (3.2.104)$$

Deze uitdrukking voor T gebruiken we om de Feynman-propagator te berekenen in termen van de functies $\Delta^+(x - x')$ en $\Delta^-(x - x')$. Met de definitie van de Feynman-propagator zien we dat dat neerkomt op het berekenen van de vacuüm verwachtingswaarde van twee termen $\phi(x)\phi(x')$ en $\phi(x')\phi(x)$. Die berekening gaat als volgt voor de eerste term:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x)\phi(x') | 0 \rangle &= \langle 0 | (\phi^+(x) + \phi^-(x)) (\phi^+(x') + \phi^-(x')) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \phi^+(x)\phi^-(x') | 0 \rangle = \langle 0 | [\phi^+(x), \phi^-(x')] | 0 \rangle \\ &= \Delta^+(x - x') \end{aligned} \quad (3.2.105)$$

en analoog vinden we voor de tweede term:

$$\langle 0 | \phi(x')\phi(x) | 0 \rangle = -\Delta^-(x - x') \quad (3.2.106)$$

Dit betekent dat we vanuit de definitie (3.2.102) via uitdrukking (3.2.104) de Feynman propagator kunnen schrijven als:

$$i\Delta_F(x - x') = \theta(x_0 - x'_0)\Delta^+(x - x') - \theta(x'_0 - x_0)\Delta^-(x - x') \quad (3.2.107)$$

We tonen vervolgens aan dat de Feynman propagator Δ_F gelijk is aan G_F (3.2.94), d.w.z.

$$\Delta_F(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.2.108)$$

Dit komt neer op het uitvoeren van de integraal over de tijdcomponent van k . Deze integraal

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0x^0}}{(k_0 - \omega_k + i\epsilon)(k_0 + \omega_k - i\epsilon)} \quad (3.2.109)$$

met

$$\omega_k = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} \quad (3.2.110)$$

berekenen we m.b.v. integratie langs een contour aangegeven in figuur 1c door gebruik te maken van de stelling van Cauchy, die zegt dat contourintegraal gelijk is aan de som van de residuen van de polen die binnen de contour liggen.

Voor $t = x_0 > 0$ sluiten we de contour in het onderhalfvlak. Dit geeft

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0x^0}}{(k_0 - \omega_k + i\epsilon)(k_0 + \omega_k - i\epsilon)} \\
&= -i \frac{2\pi}{2\pi} \text{Res} \left[\frac{e^{-ik_0x^0}}{(k_0 - \omega_k + i\epsilon)(k_0 + \omega_k - i\epsilon)} \right]_{k_0 = \omega_k - i\epsilon} \\
&= -i \frac{e^{-ix_0(\omega_k - i\epsilon)}}{2(\omega_k - i\epsilon)} = -i \frac{e^{-ix_0\omega_k}}{2\omega_k}
\end{aligned} \tag{3.2.111}$$

Voor $t < 0$ sluiten we de contour in het bovenhalfvlak. Zodat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0x^0}}{(k_0 - \omega_k + i\epsilon)(k_0 + \omega_k - i\epsilon)} = -i \frac{e^{+ix_0\omega_k}}{2\omega_k} \tag{3.2.112}$$

waarmee we de integraal m.b.v. (3.2.109) kunnen schrijven als :

$$-i\theta(x_0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-ik \cdot x} - i\theta(-x_0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{+ik \cdot x} \tag{3.2.113}$$

zodat m.b.v. de definities (3.2.100) en (3.2.107) inderdaad:

$$G^F = -i(\theta(x_0)\Delta^+(x) - \theta(-x_0)\Delta^-(x)) = \Delta_F(x) \tag{3.2.114}$$

3.3 Quantisatie van het vrije Diracveld

De quantisatie van het Diracveld verloopt wezenlijk anders dan de quantisatie van het Klein-Gordonveld. Aan de eis dat de energie van onderen begrensd is kan alleen voldaan worden als we aan de velden niet de kanonieke commutatierelaties opleggen, maar *anticommutatierelaties*. Dit heeft dan bovendien de fortuinlijke consequentie dat de Dirac-deeltjes aan het Pauli uitsluitings beginsel voldoen en dus fermionen zijn. Na quantisatie bevat de Fock-ruimte deeltjes en antideeltjes, beide met positieve energie maar met tegengestelde lading. Het probleem van de negatieve energietoestanden is dan opgelost en de Dirac-vergelijking kan bevredigend geïnterpreteerd worden. We gaan in deze discussie uit van de vlakke golfexpansie voor de operator velden ψ en $\bar{\psi}$:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \int \frac{d^3p}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \sum_{s=\pm} \left[b(p, s) u(p, s) e^{-ip \cdot x} + d^\dagger(p, s) v(p, s) e^{ip \cdot x} \right] \\
\bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3p}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \sum_{s=\pm} \left[b^\dagger(p, s) \bar{u}(p, s) e^{ip \cdot x} + d(p, s) \bar{v}(p, s) e^{-ip \cdot x} \right]
\end{aligned} \tag{3.3.115}$$

Een *Dirac-geconjugeerde* spinor zoals bijvoorbeeld \bar{u} is gedefinieerd als

$$\bar{u} := u^\dagger \gamma^0 \quad (3.3.116)$$

De spinoren voldoen aan de volledigheds en orthonormaliteits relaties die we in hoofdstuk 1 hebben afgeleid. De energie correspondeert met de positieve wortel

$$p_0 = E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (3.3.117)$$

We merken op dat in analogie met het scalarveld de expansie coëfficiënten b, d, b^\dagger en d^\dagger nu als operatoren opgevat dienen te worden. De algebraïsche relaties tussen deze operatoren volgen uit de covariante Heisenberg vergelijkingen waaraan het Diracveld moet voldoen:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi &= i[P_\mu, \psi] \\ \partial_\mu \bar{\psi} &= i[P_\mu, \bar{\psi}] \end{aligned} \quad (3.3.118)$$

Om deze relaties verder uit te werken, drukken we de energie-impuls vector uit in de annihilatie en creatie operatoren.

Beschouw de volgende in hoofdstuk 2 reeds berekende uitdrukkingen voor de energie-impuls van het Diracveld:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \bar{\psi}(-i\vec{\gamma}\vec{\nabla} + m)\psi \\ \vec{P} &= \int d^3x \psi^\dagger(-i\vec{\nabla})\psi \end{aligned} \quad (3.3.119)$$

In het geval van een vrij veld kunnen we op grond van de Diracvergelijking (3.3.119) schrijven als:

$$H = \int \psi^\dagger i\partial_t \psi d^3x \quad (3.3.120)$$

Gecombineerd levert (3.3.120) en (3.3.119) een covariante vorm voor de energie impuls op:

$$P^\mu = \int \psi^\dagger i\partial^\mu \psi d^3x \quad (3.3.121)$$

In deze uitdrukking substitueren we de vlakke golfexpansie van de velden ψ en ψ^\dagger :

$$\begin{aligned} P^\mu &= \int d^3x \sum_{s,s'} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{m}{\sqrt{E_p E_{p'}}} p^\mu \cdot \\ &\quad (b^\dagger(p', s')u^\dagger(p', s')b(p, s)u(p, s)e^{i(p'-p)x} + \dots) \end{aligned} \quad (3.3.122)$$

We schrijven niet de hele uitdrukking op, slechts de eerste van de vier termen geven we weer. De details van de berekening voor de andere termen laten we over aan de lezer. De e -machten geven vanwege de integratie over de ruimtelijke component van x aanleiding tot δ -functies in termen van \vec{p} en \vec{p}' . We herschikken de termen zo dat

de spinor en operator gedeeltes bij elkaar staan, en maken gebruik van de relatie $\bar{\psi}\gamma_0 = \psi^\dagger$. Aangezien $p_0 = f(|\vec{p}|)$ volgt dat $p_0 = p'_0$. Vervolgens integreren we de p' -afhankelijkheid uit met behulp van de δ -functies en vinden:

$$P^\mu = \sum_{s,s'} \int d^3p \frac{m}{E_p} p^\mu (b^\dagger(p, s')b(p, s)u^\dagger(p, s')u(p, s) + \dots) \quad (3.3.123)$$

Twee van de vier termen die we zo vinden zijn nul vanwege de orthogonaliteit tussen $u^\dagger(-\vec{p})$ en $v(\vec{p})$ en tussen $v^\dagger(-\vec{p})$ en $u(\vec{p})$. In de twee overblijvende termen maken we gebruik van de definitie van de norm, en vinden dan uiteindelijk de gewenste uitdrukking:

$$P^\mu = \sum_s \int d^3p p^\mu (b^\dagger(p, s)b(p, s) - d(p, s)d^\dagger(p, s)) \quad (3.3.124)$$

Opgave 25 Voer de hierboven geschetste berekening expliciet uit.

Het minteken dat in deze uitdrukking tevoorschijn komt is van essentieel belang. Als we het vacuum definieëren als de toestand die voldoet aan $b|0\rangle = 0$ en $d|0\rangle = 0$, en we zouden zoals bij het scalarveld gewone commutatierelaties opleggen aan de b en d operatoren, dan zou de uitdrukking voor de energie het verschil $N_b - N_d$ van de teloperatoren bevatten. Dit zou tot gevolg hebben dat de energie niet van onderen begrensd zou zijn, hetgeen een zinnige fysische interpretatie onmogelijk maakt. Het is hier dat het probleem van de negatieve energie toestanden wederom de kop op steekt, maar nu zijn we in een situatie dat er een oplossing voor handen is. We leggen aan de b en d operatoren de volgende anticommutatierelaties op

$$\{b(p, s), b^\dagger(p', s')\} = \{d(p, s), d^\dagger(p', s')\} = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')\delta_{ss'} \quad (3.3.125)$$

met de andere anticommutatoren gelijk aan nul. We kunnen dan de energie-impuls vector schrijven als

$$P^\mu = \sum_s \int d^3p p^\mu (b^\dagger(p, s)b(p, s) + d^\dagger(p, s)d(p, s)) + c \quad (3.3.126)$$

Waarbij c een (oneindige) constante is die we als vacuumenergie kunnen interpreteren en die we door een geschikte normaalordering kunnen wegwerken. Belangrijk is dat bovenstaande uitdrukking nu de som van de teloperatoren N_b en N_d bevat, zodat de eigenwaarden van de energie een spectrum hebben dat inderdaad van onderen begrensd is.

Alvorens verder in te gaan op de interpretatie van de b en d creatie en annihilatie operatoren, laten we eerst zien dat de anticommutatoren (3.3.125) kanonieke anticommutatierelaties impliceren voor het veld ψ_a en het toegevoegde impulsveld $\pi_b = i\psi_b^\dagger$. We schrijven daartoe de velden in de vlakke golfexpansie en vinden

$$\{\psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\delta^\dagger(\vec{x}', t)\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{s,s'} \frac{m}{\sqrt{E_p E_{p'}}}$$

$$\begin{aligned}
& (\{b(p, s), b^\dagger(p', s')\} u_\alpha(p, s) \bar{u}_\beta(p', s') \gamma_{\beta\delta}^0 e^{-ip \cdot x + ip' \cdot x'} + \\
& + \{b(p, s), d(p', s')\} u_\alpha(p, s) \bar{v}_\beta(p', s') \gamma_{\beta\delta}^0 e^{-ip \cdot x - ip' \cdot x'} + \\
& + \{d^\dagger(p, s), b^\dagger(p', s')\} v_\alpha(p, s) \bar{u}_\beta(p', s') \gamma_{\beta\delta}^0 e^{+ip \cdot x + ip' \cdot x'} + \\
& + \{d^\dagger(p, s), d(p', s')\} v_\alpha(p, s) \bar{v}_\beta(p', s') \gamma_{\beta\delta}^0 e^{+ip \cdot x - ip' \cdot x'}) \quad (3.3.127)
\end{aligned}$$

De tweede en derde term zijn nul op grond van de anticommutatierelaties. De eerste en laatste anticommutator leveren δ functies op, die we benutten om de integraal over p' uit te voeren. Maken we tevens gebruik van de volledighedsrelatie (1.4.114) dan vinden we:

$$\begin{aligned}
& \{\psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\delta^\dagger(\vec{x}', t)y\} \\
& = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_p} \left(\left(\frac{\not{p} + m}{2m} \right) \gamma^0 e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} + \left(\frac{\not{p} - m}{2m} \right) \gamma^0 e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \right)_{\alpha\delta} \\
& = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (p_0 \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + m + p_0 \gamma^0 + \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - m)_{\alpha\beta} \gamma_{\beta\delta}^0 e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \\
& = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2p_0}{2E_p} \delta_{\alpha\delta} e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \\
& = \delta_{\alpha\delta} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.3.128)
\end{aligned}$$

We zien aldus dat de veldoperatoren voldoen aan

$$\begin{aligned}
& \{\psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\vec{x}', t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \delta_{\alpha\beta} \\
& \{\psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta(\vec{x}', t)\} = \{\psi_\alpha^\dagger(\vec{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\vec{x}', t)\} = 0 \quad (3.3.129)
\end{aligned}$$

We moeten nu nagaan dat deze drastische ingreep van het invoeren van anticommutatoren consistent is met de covariantie eisen (3.3.118) die we aan het veld hebben opgelegd. Als we voor de energie-impuls en het veld de expansies in termen van de b enz. substitueren, dan vinden we vier relaties van de vorm:

$$\left[\sum_s (b^\dagger(p, s) b(p, s) - d(p, s) d^\dagger(p, s)), b(q, s') \right] = -\delta^3(q - p) b(q, s') \quad (3.3.130)$$

Uit de gepostuleerde anticommutatierelaties volgt dat de tweede commutator nul is en dat we voor de eerste term kunnen schrijven

$$\sum_s (b^\dagger(p, s) \{b(p, s), b(q, s')\} - \{b^\dagger(p, s), b(q, s')\} b(p, s)) = \delta^3(q - p) b(p, s') \quad (3.3.131)$$

zodat inderdaad aan de covariante Heisenberg-vergelijkingen voldaan is. Het is echter goed op te merken dat deze vergelijkingen de anticommutatie relaties niet dwingend opleggen, er wordt ook aan voldaan met commutatoren.

Opgave 26 *Verifieer bovenstaande bewering.*

De anticommutatie relaties hebben nog een andere fundamentele consequentie namelijk dat Dirac-deeltjes (die zoals we uit het vorige hoofdstuk weten spin $s = \frac{1}{2}$ deeltjes zijn) voldoen aan het Pauli uitsluitingsbeginsel. Uit de fundamentele anticommutatoren (3.3.129) volgt direct dat

$$\psi(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}', t) | 0 \rangle = -\psi(\vec{x}', t)\psi(\vec{x}, t) | 0 \rangle \quad (3.3.132)$$

d.w.z. dat een twee deeltjes toestand antisymmetrisch is onder verwisseling van de positie van de deeltjes met als consequentie dat twee Dirac-deeltjes niet in dezelfde toestand kunnen zitten (golffunctie is nul als $x = x'$). Hieruit volgt dat de deeltjes aan Fermi-Dirac statistiek moeten voldoen.

Wat is nu onze interpretatie van de b en d operatoren. Dit wordt duidelijk als we naar de uitdrukking voor de lading Q kijken die geassocieerd is met de behouden fermionstroom $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. Deze is van de vorm

$$Q = \sum_s \int d^3k (N_b(k) - N_d(k)) \quad (3.3.133)$$

waar N_b en N_d de bezettingsgetal operatoren voor de b en d quanta zijn. Het is duidelijk dat de d quanta een lading hebben die tegengesteld is aan die van de b quanta. Deze corresponderen met de zogenaamde *antideeltjes* die dezelfde spin en massa hebben als de deeltjes. Bijvoorbeeld als de b -toestanden electronen beschrijven, corresponderen de d -toestanden met positronen. We zien dat het bestaan van antideeltjes een wezenlijk gevolg is van de Dirac-theorie ⁸.

We besluiten de behandeling van de quantisatie van het Dirac-veld met de berekening van de Feynman-propagator S_F voor het Dirac-veld. Deze moet voldoen aan de vergelijking

$$(i\partial_x - m)S_{F\alpha\beta}(x, x') = \delta^4(x - x')\delta_{\alpha\beta} \quad (3.3.134)$$

We brengen de Feynman propagator voor het Klein-Gordon geval in herinnering:

$$\begin{aligned} (\square + m^2)G(x, x') &= -\delta^4(x - x') \\ \Rightarrow (i\partial_x - m)(i\partial_x + m)G(x, x') &= \delta^4(x - x') \end{aligned} \quad (3.3.135)$$

Vergelijken we deze uitdrukkingen, dan vinden we dat S_F gelijk is aan:

$$S_F(x - x') = (i\partial_x + m)\Delta_F(x - x') \quad (3.3.136)$$

⁸Dirac zelf gaf oorspronkelijk een iets andere interpretatie. Hij merkte op dat vanwege het Pauli-principe de negatieve-energie electron toestanden opgevuld konden worden (de zogenaamde Dirac-zee). De creatie van een antideeltje moet dan opgevat worden als de annihilatie van een deeltje met negatieve energie, waarbij inderdaad de lading afneemt en de energie minder negatief wordt en dus toeneemt. Paarcreatie is dan het proces waaruit een deeltje van een negatieve naar een positieve energie toestand overgaat en een 'gat' achterlaat. De 'gaten' beschrijving is volledig equivalent met de antideeltjes beschrijving.

We merken op dat we deze propagator ook kunnen verkrijgen als de vacuumverwachtingswaarde van het tijdgeordend product van de velden, te weten:

$$iS_{F\alpha\beta}(x-x') = \langle 0 | T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')) | 0 \rangle \quad (3.3.137)$$

We moeten er dan wel rekening mee houden dat in de definitie van tijdordening voor anticommuterende operatoren, net zoals bij normaalordening, elke verwisseling een minteken oplevert:

$$T_{\text{Fermi}}(ab) = a(x)b(x')\theta(t-t') - b(x')a(x)\theta(t'-t) \quad (3.3.138)$$

Opgave 27 *Ga na dat we als we de propagator definiëren als de vacuumverwachtingswaarde (3.3.137), dit hetzelfde resultaat oplevert als in (3.3.136).*

3.4 Covariante quantisatie van het Maxwellveld

Bij de quantisatie van het electro-magnetische veld doen zich in vergelijking met het scalarveld een aantal belangrijke complicaties voor die hun oorsprong hebben in de ijk-invariantie van de Maxwelltheorie.

Het object dat we op manifest covariante wijze gaan quantiseren is de ijkafhankelijke vierpotentiala A^μ . Een belangrijke reden hiervoor is dat de wisselwerking van het electromagnetische veld met een geladen deeltje beschreven wordt in termen van A^μ middels de covariante afgeleide zoals we in hoofdstuk 2 uiteengezet hebben. Anderzijds kiezen we niet voor een quantisatie van de veldsterkte $F^{\mu\nu}$ omdat deze afgeleides van de potentiala bevat en daarom niet lokaal is.

Localiteit gaat uit van een idealisatie van ruimte-tijd metingen in een arbitrair klein volume-elementje. De Lorentz-covariantie en een zwakke vorm van causaliteit zorgen er voor dat ruimte-achtig gescheiden metingen niet van invloed op elkaar zijn. Dat betekent dat lokale observabelen bestaan en dat operatoren die betrekking hebben op ruimte-achtig gescheiden gebeurtenissen commuteren.

De quantisatie geeft problemen als we bijvoorbeeld de Lorentzijk $\partial_\mu A^\mu = 0$ willen opleggen. Tijdens de quantisatie procedure die wij zullen volgen blijft namelijk Lorentz-covariantie gehandhaafd, maar de ijk-invariantie gaat verloren en het blijkt dat het opleggen van de Lorentzijk als operatorvergelijking inconsistent is met de gepostuleerde commutatierelaties van de gegeneraliseerde impulsen en coördinaten.

Iets algemener gezegd: het probleem is hoe we een systeem dat aan een constraint voldoet moeten quantiseren. We zullen de weg van Gupta & Bleuler volgen, die er op neerkomt dat we in plaats van de Maxwell theorie, een theorie met een gemodificeerde Lagrangiaan op manifest covariante wijze zullen quantiseren. Deze quantisatie geeft aanleiding tot een ‘‘Hilbertruimte’’ waarvan slechts een deelruimte te interpreteren is als de ruimte van fysische toestanden van het Maxwellveld. Deze fysische deelruimte \mathcal{H}_{ph} vinden we door de Lorentzijk aan toestanden van de Hilbertruimte op te leggen. Hierdoor sluiten we tevens de problematische negatieve

norm toestanden uit, die in de volle Hilbertruimte aanwezig blijken te zijn. Ijkinvariante operatoren zullen een fysische toestand nooit naar een toestand buiten de fysische deelruimte over voeren. In het bijzonder is de deelruimte behouden onder de tijdevolutie welke gegenereerd wordt door de ijkinvariante Hamiltoniaan.

Het is ook mogelijk om eerst een ijkconditie op te leggen en vervolgens de overblijvende fysische vrijheidsgraden te quantiseren. De procedure is dan niet manifest Lorentzcovariant en er moet dan achteraf gecontroleerd worden of de quantisatie een covariante theorie oplevert. Deze weg wordt onder andere bewandeld de boeken van Bjorken & Drell.

We gaan zoals eerder gezegd de covariante weg bewandelen die ontwikkeld is door Gupta & Bleuler en gaan daarbij uit van een gemodificeerde Lagrangiaan:

$$\mathcal{L} := -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (3.4.139)$$

Merk op dat deze Lagrangiaan niet dezelfde ijkinvariantie bezit als de Maxwell-Lagrangiaan en dat het enige verschil tussen de twee Lagrangianen een term is die in de Lorentzijk nul is. De (Euler-Lagrange) bewegingsvergelijkingen bij (3.4.139) luiden:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \quad (3.4.140)$$

Merk op dat de bewegingsvergelijking van (3.4.139) gelijk is aan die van het vrije electro-magnetisch veld in de Lorentzijk.

Of we nu het rechterlid van (3.4.140) gelijk aan nul nemen zoals in de vrije bewegingsvergelijkingen, of vervangen door de behouden stroom j^μ , in beide gevallen vinden we dat $\partial_\nu \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0$. Dat betekent dat $\partial_\mu A^\mu$ zich gedraagt als een vrij scalair veld en niet aan de bronterm van de Maxwellvergelijkingen koppelt. Na quantisatie betekent dit dat de excitaties die door $\partial_\mu A^\mu$ gegenereerd worden ontkoppelen van de rest van het spectrum. Op het klassieke niveau kan het opleggen van correcte randvoorwaarden op A er voor zorgen dat $\partial_\mu A^\mu$ overal gelijk aan nul is, zodat we de Maxwelltheorie in de Lorentz-ijk vinden. Dat we dit niet kunnen doen in het quantum mechanische geval blijkt uit de kanonieke impulsen die we uit (3.4.139) vinden:

$$\begin{aligned} \pi^\rho &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\rho)} = F^{\rho 0} - g^{\rho 0}(\partial_\mu A^\mu) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \pi^i = F^{i0} = E^i \\ \pi^0 = -\partial_\mu A^\mu \end{cases} \end{aligned}$$

Merk op dat de nulcomponent van de kanonieke impuls nu niet gelijk is aan nul (vergelijk dit met de discussie in Hoofdstuk 2). We leggen vervolgens aan de met de kanonieke coördinaten en impulsen geassocieerde operatoren de volgende gelijktijdige commutatierelaties opleggen (de metrische tensor is afkomstig van de eis van Lorentzcovariantie):

$$[A_\mu(x, t), A_\nu(x', t)] = 0$$

$$\begin{aligned} [\pi_\mu(x, t), \pi_\nu(x', t)] &= 0 \\ [A_\mu(\vec{x}, t), \pi_\nu(\vec{x}', t)] &= ig_{\mu\nu}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned} \quad (3.4.141)$$

We zien dat we de Lorentzconditie $\pi^0 = 0$ niet zondermeer kunnen opleggen omdat dit inconsistent is met de kanonieke commutatierelaties. We stellen het opleggen van de ijkconditie uit tot we de Hilbertruimte onderzocht hebben.

Merk op dat (3.4.141) eigenlijk de commutatierelaties van vier scalaire velden zijn, behalve dan dat de nulcomponent vanwege de metrische tensor het verkeerde teken heeft. We laten zien dat dit "verkeerde" teken tot een indefiniet inproduct op de volle Hilbert ruimte leidt, wat betekent dat de vereiste quantummechanische waarschijnlijkheidsinterpretatie niet mogelijk is. Het opleggen van de ijkconditie op de toestanden uit de Hilbertruimte levert de oplossing van dit probleem; omdat de ijkconditie een 'fysische' deelruimte definiëert en de toestanden in deze deelruimte blijken een (semi)definiet inproduct te hebben.

We kunnen ook zeggen dat het niet opleggen van een ijkconditie extra niet-fysische vrijheidsgraden introduceert, die later als we een goede interpretatie willen geven, weer moeten worden geëlimineerd.

We zullen de Hilbertruimte die door het operatorveld A_μ wordt opgespannen nader beschouwen door een vlakke golf expansie te maken:

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\lambda=0}^3 \left[\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)a(k, \lambda)e^{-ik \cdot x} + \epsilon_\mu^{*(\lambda)}(k)a^\dagger(k, \lambda)e^{ik \cdot x} \right]$$

met $k^\mu = (|\vec{k}|, \vec{k})$ (3.4.142)

Klassiek zijn a en a^\dagger complexe getallen, na quantisatie zijn het annihilatie respectievelijk creatie operatoren, met a^\dagger de hermitisch geconjugeerde van a . De sommatie over λ loopt over alle vier polarisatie richtingen, de $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ zijn voor iedere k een set van vier orthonormale polarisatie vectoren met als vectorindex μ . De polarisatievectoren kunnen zowel complex als reëel gekozen worden; kiezen we ze complex, dan is het veld circulair gepolariseerd. We kiezen ze reëel zodat de complexe conjugatie van de polarisatievector in (3.4.142) van geen belang is. $\epsilon^{(0)}$ is gedefinieerd als de tijdachtige eenheidsvector, $\epsilon^{(3)}$ is de eenheidsvector in de richting van \vec{k} , $\epsilon^{(1)}$ en $\epsilon^{(2)}$ zijn onderling loodrechte ruimte achtige eenheidsvectoren loodrecht op \vec{k} . Kiezen we een coördinaten-stelsel met $\vec{k} \parallel \hat{x}^3$ dan hebben de polarisatievectoren de volgende representatie:

$$\begin{aligned} \epsilon^{(0)} &= (1, 0, 0, 0) \\ \epsilon^{(1)} &= (0, 1, 0, 0) \\ \epsilon^{(2)} &= (0, 0, 1, 0) \\ \epsilon^{(3)} &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad (3.4.143)$$

Voor de polarisatievectoren geldt in ieder k -stelsel een orthonormaliteits respectievelijk volledigheds relatie:

$$\epsilon^{(\lambda)} \cdot \epsilon^{(\lambda')} = g^{\lambda\lambda'}$$

$$\sum_{\lambda, \lambda'} g_{\lambda\lambda'} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k) \epsilon_{\nu}^{(\lambda')}(k) = g_{\mu\nu} \quad (3.4.144)$$

Uit de commutatierelaties van A en π volgen, op een analoge wijze aan de berekening van de commutatierelaties van het scalarveld, de volgende commutatierelaties voor de annihilatie en creatie operatoren:

$$\begin{aligned} [a(k, \lambda), a(k', \lambda')] &= 0 \\ [a^\dagger(k, \lambda), a^\dagger(k', \lambda')] &= 0 \\ [a(k, \lambda), a^\dagger(k', \lambda')] &= -g^{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned} \quad (3.4.145)$$

Opgave 28 *Laat zien dat deze commutatierelaties inderdaad de commutatierelaties van A en π impliceren.*

We hebben het systeem dat bij de Lagrangiaan (3.4.139) hoort gequantiseerd. Om tot een interpretatie te komen onderzoeken we de Hilbertruimte die bovenstaande procedure ons oplevert. Allereerst definiëren we de grondtoestand $|0\rangle$ op de gebruikelijke manier:

$$\forall k, \lambda : a(k, \lambda)|0\rangle = 0 \quad (3.4.146)$$

Er doet zich vanwege de metrische tensor in (3.4.141) een probleem voor met de norm van bepaalde toestanden. Beschouw de toestand $a^\dagger(k, 0)|0\rangle := |1\rangle$. Voor de norm van $|1\rangle$ geldt:

$$\begin{aligned} \langle 1|1\rangle &= \langle 0|a(k, 0)a^\dagger(k', 0)|0\rangle \\ &= \langle 0|[a(k, 0), a^\dagger(k', 0)]|0\rangle \\ &= -\delta^3(k - k') \langle 0|0\rangle \leq 0 \end{aligned} \quad (3.4.147)$$

De toestandsruimte heeft dus een indefiniete metriek en bevat negatieve waarschijnlijkheidstoestanden! Het is belangrijk om op te merken dat we ons in feite niet met het Maxwellveld hebben beziggehouden omdat we expliciet de Lagrangiaan hebben veranderd. Om de Maxwell theorie terug te vinden moeten we op een of andere wijze de Lorentzconditie opleggen. We leggen daartoe een eis op aan de toestanden van de volle Hilbertruimte en definiëren zo een deelruimte \mathcal{H}_f die we als ruimte van fysische toestanden kunnen interpreteren.

$\partial^\mu A_\mu$ is een operator die we kunnen opsplitsen in een creatiedeel $(\partial^\mu A_\mu)^{(-)}$ en een annihilatiedeel $(\partial^\mu A_\mu)^{(+)}$:

$$\begin{aligned} (\partial^\mu A_\mu(x))^{(-)} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_k}} i \sum_{\lambda=0}^3 [\epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k) k^\mu a^\dagger(k, \lambda) e^{ik \cdot x}] \\ (\partial^\mu A_\mu(x))^{(+)} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_k}} (-i) \sum_{\lambda=0}^3 [\epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k) k^\mu a(k, \lambda) e^{-ik \cdot x}] \end{aligned} \quad (3.4.148)$$

Fysische toestanden voldoen aan de volgende eis:

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}|\psi\rangle = 0, \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_f \quad (3.4.149)$$

Deze conditie impliceert dat alle matrixelementen van de Lorentzconditie tussen fysische toestanden nul zijn:

$$\langle \psi' | \partial^\mu A_\mu | \psi \rangle = 0 \quad \forall |\psi \rangle, |\psi' \rangle \in \mathcal{H}_f \quad (3.4.150)$$

Laten we de conditie (3.4.149) nader beschouwen. Als we het coördinatenstelsel zo kiezen dat de polarisatievectoren de vorm (3.4.143) aannemen, dan is k^μ in componenten te schrijven als $k^\mu = (\omega_k, 0, 0, \omega_k)$. Hiermee wordt (3.4.148) van de vorm

$$(\partial_\mu A^\mu(x))^{(+)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_k}} (-i\omega) [a(k, 0) - a(k, 3)] e^{-ik \cdot x} \quad (3.4.151)$$

zodat eis (3.4.149) zich laat vertalen in:

$$\forall k : \quad (a(k, 0) - a(k, 3)) | \psi \rangle = 0 \quad (3.4.152)$$

Om dit te interpreteren merken we het volgende op. $a^\dagger(1)|0 \rangle$ en $a^\dagger(2)|0 \rangle$ corresponderen met transversaal gepolariseerde fotonen en $a^\dagger(0)|0 \rangle$ en $a^\dagger(3)|0 \rangle$ met tijdsrichtig respectievelijk longitudinaal gepolariseerde fotonen. Deze twee laatste soorten fotonen zijn niet fysisch, en eigenlijk zou men verwachten dat (3.4.152) impliceert dat zowel $a(0)|\psi \rangle$ als $a(3)|\psi \rangle$ nul zijn voor een fysische toestand. Dit is echter niet het geval.

We kunnen de fysische deelruimte echter wel goed interpreteren. Deze wordt opgespannen door basisvectoren die we kunnen schrijven als een direct product van transversale toestanden en toestanden waarin evenveel longitudinale als tijdsrichtige fotonen met impuls k voorkomen, niet-transversale toestanden dus die aan (3.4.152) voldoen.

$$|\psi \rangle_f := |\psi \rangle_{tr} \otimes |\phi \rangle \quad (3.4.153)$$

We kunnen volstaan met het bestuderen van basis-toestanden die we verkrijgen door geschikt gekozen creatie operatoren op het vacuum te laten werken. Het blijkt dat toestanden die niet zuiver transversaal zijn een norm gelijk aan nul hebben. Om dit te laten zien is het nuttig om operatoren te definiëren die bovenstaande niet-transversale toestanden annihilieren, creëren en tellen, welke we labelen we met een l :

$$\begin{aligned} a_l(k) &:= a(k, 0) - a(k, 3) \\ a_l^\dagger(k) &:= a^\dagger(k, 0) - a^\dagger(k, 3) \\ N_l(k) &:= a_l^\dagger(k) a_l(k) \\ |\phi \rangle &:= a_l^\dagger(k_1) \dots a_l^\dagger(k_n) |0 \rangle_l \end{aligned} \quad (3.4.154)$$

Het is eenvoudig met behulp van (3.4.145) te verifiëren dat $[a_l(k), a_l^\dagger(k')] = 0$. We bewijzen met volledige inductie dat deze niet zuiver transversale toestanden norm nul hebben. Beschouw daartoe allereerst een toestand van de vorm $a_l^\dagger(k) |\psi \rangle_{tr} |0 \rangle_l$. De norm van deze vector is vanwege bovenstaande commutatierelatie gelijk aan

$${}_l \langle 0 | {}_{tr} \langle \psi | a_l(k) a_l^\dagger(k) | \psi \rangle_{tr} |0 \rangle_l = {}_{tr} \langle \psi | a_l^\dagger(k) a_l(k) | \psi \rangle_{tr} = 0 \quad (3.4.155)$$

Toestanden met één niet-transversaal foton hebben dus norm nul. Stel dat $\langle \psi_n | \psi_n \rangle = 0$ met $\psi_n \in \mathcal{H}_{ph}$ en $N_l | \psi_n \rangle = n | \psi_n \rangle$. Maak een nieuwe toestand $|\psi_m \rangle = a_l^\dagger(k) | \psi_n \rangle$. Dan geldt ook voor de norm van deze vector dat deze gelijk is aan nul:

$$\begin{aligned} \langle \psi_m | \psi_m \rangle &= \langle \psi_n | a_l(k) a_l^\dagger(k) | \psi_n \rangle \\ &= \langle \psi_n | a_l^\dagger(k) a_l(k) | \psi_n \rangle \\ &= \langle \psi_n | N_l(k) | \psi_n \rangle \\ &= n \langle \psi_n | \psi_n \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.4.156)$$

Om aan te tonen dat het probleem van de indefiniete metriek werkelijk is opgelost moeten we ook nog aantonen dat zuiver transversale fotonen een norm ≥ 0 hebben. Schrijf een willekeurige transversale toestand als

$$|\psi \rangle_{tr} |0 \rangle_l = a^\dagger(k_1, \lambda_1) \dots a^\dagger(k_i, \lambda_i) |0 \rangle_{tr} |0 \rangle_l \quad \text{met } \lambda_j = 1, 2, \dots, \forall j \quad (3.4.157)$$

dan is de norm gelijk aan

$$\langle 0 | a(k_i, \lambda_i) \dots a(k_1, \lambda_1) a^\dagger(k_1, \lambda_1) \dots a^\dagger(k_i, \lambda_i) |0 \rangle \quad (3.4.158)$$

We halen met behulp van de commutatierelaties de annihilatieoperatoren naar rechts en de creatieoperatoren naar links. Uiteindelijk vinden we iets van de vorm:

$$\langle 0 | [a_1, a_1^\dagger] \dots [a_i, a_i^\dagger] |0 \rangle = \delta^3(\dots) \dots \delta^3(\dots) \langle 0 |0 \rangle \geq 0 \quad (3.4.159)$$

Vanwege het positieve teken van de deltafuncties afkomstig uit de commutatierelaties van a en a^\dagger is de norm niet-negatief.

Laten we samenvatten wat we gedaan hebben. We hebben de theorie met Lagrangiaan (3.4.139) op een covariante wijze gequantiseerd, en vonden een toestandruimte met een indefiniete metriek. Om toch een goede fysische interpretatie te verkrijgen, legden we een variant van de Lorentzijkconditie op aan toestanden uit de Hilbertruimte en definiëerden zo een fysische deelruimte. Basistoestanden uit deze deelruimte schreven we als een direct product van transversale en niet transversale toestanden. De fysische deelruimte bevatte nog steeds toestanden die op het eerste gezicht onfysisch waren, maar deze bleken een norm gelijk aan nul te hebben en dus geen rol te spelen in de berekening van overgangswaarschijnlijkheden. De vraag is hoe we moeten interpreteren dat met één fysische toestand meerdere toestanden in de Hilbertruimte zijn geassocieerd, hoewel al deze toestanden op één na een norm nul hebben. We zullen aantonen dat de arbitraire keuze van de $|\phi \rangle$ de residuele ijkvrijheid van de Maxwelltheorie in de Lorentzijk weerspiegelt en fysische observabelen niet beïnvloedt. We schrijven $|\phi \rangle$ als:

$$|\phi \rangle = c_0 |\phi_0 \rangle + c_1 |\phi_1 \rangle + c_2 |\phi_2 \rangle + \dots \quad (3.4.160)$$

waar $|\phi_0\rangle = |0\rangle_l$ de grondtoestand is en $|\phi_j\rangle$ een basistoestand van de ruimte met j tijd/longitudinale fotonen. Laten we de verwachtingswaarde $\langle \phi' | A_\mu | \phi \rangle$ berekenen. Aangezien A_μ lineair is in de creatie/annihilatie operatoren kan deze de index j in de ontwikkeling van $\langle \phi' |$ en $|\phi\rangle$ slechts met de waarde één kan verhogen of verlagen. De enige niet triviale bijdrage komt van de $|\phi_0\rangle$ en $|\phi_1\rangle$ componenten in $|\phi\rangle$ en dit geeft:

$$\langle \phi_0 | A_\mu | \phi_1 \rangle = [\epsilon_\mu^{(3)}(k) + \epsilon_\mu^{(0)}(k)] [c_0^* c_1 e^{-ik \cdot x} + c.c.] \quad (3.4.161)$$

waar c.c. staat voor de complex geconjugeerde van de eerste term. Met de definities van de de polarisatievectoren vinden we (met $n := \epsilon^{(0)}$)

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu^{(3)}(k) + \epsilon_\mu^{(0)}(k) &= \frac{k_\mu - n_\mu(k \cdot n)}{k \cdot n} + n_\mu = \frac{k_\mu}{k \cdot n} \\ &\Rightarrow \langle \phi' | A_\mu | \phi \rangle = \frac{1}{k \cdot n} k_\mu [c_0^* c_1 e^{-ik \cdot x} + c.c.] \\ &= \partial_\mu \Lambda(x) \end{aligned} \quad (3.4.162)$$

$\Lambda(x)$ is een scalarveld dat voldoet aan de vergelijking $\square \Lambda = 0$ en wordt vastgelegd door de keuze van $|\phi\rangle$. Deze ambiguïteit in de keuze van $|\phi\rangle$ weerspiegelt dus de residuele ijkvrijheid van de vectorpotentiaal in de Lorentzijk en is zonder consequenties voor de observabelen.

De energie-impuls van het Maxwellveld

We laten zien dat de arbitraire keuze van $|\phi\rangle$ de fysische observabele H niet beïnvloedt.

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x : \pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L} : \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x : \sum_{i=1}^3 (\dot{A}_i^2 + (\vec{\nabla} A_i)^2) - \dot{A}_0^2 - (\vec{\nabla} A_0)^2 : \end{aligned} \quad (3.4.163)$$

Opgave 29 *Laat de stappen tussen de eerste en tweede formule zien.*

We kunnen deze uitdrukking voor de energie verder uitwerken door voor A de vlakke golf expansie te substitueren. We krijgen dan vier termen, waarvan er twee identiek nul zijn. Deze termen hebben namelijk een factor van de vorm $k_0^2 - \vec{k}^2$ die vanwege een δ -functie gelijk aan nul is. De andere twee termen zijn niet triviaal en leveren voor H de volgende uitdrukking op:

$$H = \int d^3k \sum_\lambda \omega_k (-g_{\lambda\lambda} a^\dagger(k, \lambda) a(k, \lambda)) \quad (3.4.164)$$

Berekenen we de verwachtingswaarde van een toestand uit \mathcal{H}_{ph} dan volgt dat de bijdrage van $|\phi\rangle$ gelijk aan nul is vanwege de metrische tensor in (3.4.164). De berekening van \vec{P} verloopt analoog aan die van P_0 ; alleen wordt in de formules ω_k vervangen door \vec{k} . We zien dat niet alleen de negatieve norm toestanden verdwenen doordat we ons beperkten tot \mathcal{H}_{ph} , maar ook dat de tijdachtige en longitudinale fotonen geen bijdrage leveren aan de observabelen. Alleen de twee transversale polarisatie richtingen manifesteren zich.

Een Lorentz-covariante deelruimte van \mathcal{H}_{ph} kan gevormd worden door een quotiëntruimte te definiëren, namelijk door de elementen van de fysische deelruimte uit te delen naar $|\phi\rangle$. We definiëren dan een equivalentie relatie tussen twee vectoren door te zeggen dat ze equivalent zijn als hun verschil gelijk aan de nulvector is (namelijk niet transversaal). We kiezen dan bij elke klasse van golffuncties $|\psi_{tr}\rangle$ $|\phi_i\rangle$ de representant $|\psi_{tr}\rangle$ $|0\rangle$.

De fotonpropagator

Om de ruimte-tijd ontwikkeling van een toestand van het Maxwellveld te onderzoeken, construeren we de Feynman propagator. In analogie met de Klein-Gordon propagator definiëren we deze als de vacuum verwachtingswaarde van een tijdgeordend product van veldoperatoren.

Door nu gebruik te maken van de vlakke golf expansie van de velden, de volledighedsrelatie van de polarisatievectoren en de commutatierelaties van de creatie en annihilatie operatoren, kunnen we laten zien dat de berekening van de propagator volkomen analoog verloopt aan het Klein-Gordon geval met $m = 0$. De foton propagator luidt:

$$D_{F\mu\nu}(k) = \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (3.4.165)$$

Opgave 30 *Laat zien dat door uit te gaan van de definitie van de propagator als vacuumverwachtingswaarde van het tijd-geordende product van twee veldoperatoren, inderdaad deze uitdrukking wordt verkregen.*

Hoofdstuk 4

Velden met wisselwerking en de S-matrix

4.1 Inleiding

We hebben ons tot nog toe bezig gehouden met de quantisatie van vrije velden die een beschrijving geeft van vrije relativistische deeltjes. In dit hoofdstuk laten we zien hoe wisselwerkingen tussen de verschillende deeltjes op een systematische wijze in de beschrijving kunnen worden opgenomen. Hoewel de methode gebaseerd is op een benadering met behulp van storingstheorie met alle beperkingen van dien, wordt zij succesvol op een breed scala van problemen toegepast. Wij zullen ons in het hiernavolgende na een algemene inleiding beperken tot enige elementaire toepassingen in de Quantum Electrodynamica.

We zijn geïnteresseerd in het berekenen van elementaire verstrooiings en vervalsprocessen. Dat betekent dat we in eerste instantie overgangswaarschijnlijkheden willen berekenen uitgaande van matrixelementen van de verstrooiings- ofwel S-matrix tussen bepaalde ingaande en uitgaande deeltjestoestanden.

We gaan uit van de Heisenberg vergelijkingen voor de tijdevolutie van de operatorvelden welke nu gegenereerd wordt door een Hamiltoniaan H die ook interactie termen bevat. Aangenomen dat deze Hamiltoniaan tijdonafhankelijk is kunnen we de oplossing formeel schrijven als

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}, t) &= e^{iHt}\psi(\vec{x}, 0)e^{-iHt} \\ A_\mu(\vec{x}, t) &= e^{iHt}A_\mu(\vec{x}, 0)e^{-iHt}\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

waarbij we de operatoren ten tijde $t = 0$ kunnen ontwikkelen in een basis van vrije veldoperatoren. D.w.z. dat we voor $\psi(\vec{x}, 0)$ en $A_\mu(\vec{x}, 0)$ de in hoofdstuk drie gegeven vlakke golfexpansies voor $t = 0$ kiezen. Hierbij voldoen de operator coëfficiënten a, b etc. aan de bekende vrije veld commutatierelaties, vanzelfsprekend aangevuld met de conditie dat de Dirac- en Maxwell -veldoperatoren met elkaar commuteren:

$$[a, b] = [a^\dagger, b] = \dots = 0\tag{4.1.2}$$

Uit het bovenstaande volgt dat de gelijktijd (anti)commutatierelaties voor de wisselwerkende velden voor alle tijden hetzelfde zijn als die van de vrije velden, aangezien de exponentiële factoren tegen elkaar wegvallen bij het berekenen van de (anti)commutatoren. Men zou kunnen stellen dat het er in de veldentheorie nu om gaat de Heisenberg vergelijkingen voor de operatorvelden met wisselwerking expliciet op te lossen. Men kan laten zien dat dit in feite neerkomt op het berekenen van de vacuümverwachtingswaarden van willekeurige tijdgeordende producten van operatoren in de theorie. Om dit programma op een systematische wijze uit te voeren is het nuttig om eerst de zogenaamde *interactierepresentatie* voor de velden in te voeren. In het Schrödinger-beeld komt de tijdevolutie van het systeem in de golf functies tot uitdrukking en zijn de operatoren in het algemeen onafhankelijk van de tijd. De tijdevolutie wordt beschreven door de Schrödinger vergelijking:

$$i\partial_t|\psi_S(t)\rangle = H|\psi_S(t)\rangle \quad (4.1.3)$$

waarbij H voor de totale hamiltoniaan staat.

In het Heisenberg-beeld is de situatie juist omgekeerd: de golf functie is tijdonafhankelijk en de tijdevolutie van het systeem zit in de operatoren:

$$\begin{aligned} |\psi_H\rangle &= |\psi_S(0)\rangle \\ O_H(t) &= e^{iHt}O_S e^{-iHt} \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

De interactierepresentatie is in feite een combinatie van beide representaties. We splitsen de Hamiltoniaan H op in een vrij stuk H_0 en een interactie stuk H_{int} en definiëren vervolgens de golf functie, zoals die voorkomt in de Schrödinger-vergelijking, en operatoren, zoals de operatorvelden A_μ , in de interactie representatie als volgt: (grootheden in de interactierepresentatie geven we aan met een hoedje)

$$\begin{aligned} |\hat{\psi}(t)\rangle &:= e^{iH_0t}|\psi_S(t)\rangle \\ \hat{O}(t) &:= e^{iH_0t}O_S e^{-iH_0t} \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

In deze representatie zijn dus zowel de operatoren als de golf functies tijdafhankelijk. De tijdafhankelijkheid van de operatoren eenvoudig is omdat deze door de vrije hamiltoniaan wordt gegenereerd, terwijl de tijdafhankelijkheid van de golf functie door de interactie-hamiltoniaan wordt gegeven. Een kleine berekening laat namelijk zien dat:

$$i\partial_t|\hat{\psi}\rangle = \hat{H}_{int}(t)|\hat{\psi}\rangle \quad (4.1.6)$$

De (fysische) verwachtingswaarde van observabelen is natuurlijk in alle representaties gelijk:

$$\langle \hat{\psi}|\hat{A}|\hat{\psi}\rangle = \langle \psi_S|A_S|\psi_S\rangle = \langle \psi_H|A_H|\psi_H\rangle \quad (4.1.7)$$

hetgeen ook geldt voor de tijdafhankelijkheid van verwachtingswaarden:

$$\partial_t \langle \hat{\psi}|\hat{A}|\hat{\psi}\rangle = i \langle \hat{\psi}|[\hat{H}, \hat{A}]|\hat{\psi}\rangle \quad (4.1.8)$$

Opgave 31 *Ga na dat vergelijking (4.1.6) inderdaad volgt uit (4.1.5).*

Een reden om de interactie-representatie in te voeren is dat de operatorvelden in deze representatie aan de vrije golfvergelijking voldoen, omdat hun tijdevolutie gegeven wordt door de vrije Hamiltoniaan. De uitdrukking voor de veldoperatoren van de wisselwerkende theorie in de interactierepresentatie komt dus overeen met die van de Heisenbergoperatoren in de vrije theorie. Dien tengevolge kunnen we alle uitdrukkingen uit de voorgaande hoofdstukken, zoals die voor de propagatoren etc., zonder meer overnemen.

Laten we nu de tijdevolutie van de golffunctie in de interactierepresentatie bekijken. We voeren daartoe de tijdevolutie operator $U(t, t_0)$ in:

$$|\hat{\psi}(t)\rangle = U(t, t_0)|\hat{\psi}(t_0)\rangle \quad (4.1.9)$$

die voldoet aan $U(t, t) = 1$. Uit het feit dat norm van de toestandsvector tijdonafhankelijk is, volgt dat U een unitaire operator is:

$$U^\dagger(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0) = U(t_0, t) \quad (4.1.10)$$

Merk op dat ook de volgende relaties geldig zijn:

$$\begin{aligned} |\hat{\psi}(t)\rangle &= U(t, 0)|\psi_H\rangle \\ \hat{O}(t) &= U(t, 0)O_H(t)U^{-1}(t, 0) \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Uit (4.1.6) kunnen we een bewegingsvergelijking voor de evolutie-operator afleiden:

$$\begin{aligned} i\partial_t|\hat{\psi}(t)\rangle &= \hat{H}_{int}(t)|\hat{\psi}(t)\rangle = i\partial_t U(t, t_0)|\hat{\psi}(t_0)\rangle \\ \Rightarrow i\partial_t U(t, t_0) &= \hat{H}_{int}(t)U(t, t_0) \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Deze differentiaalvergelijking schrijven we, met gebruikmaking van de randvoorwaarde $U(t, t) = 1$, om naar een integraalvergelijking:

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_{int}(t')U(t', t_0) \quad (4.1.13)$$

Aangezien zowel in het linkerlid als in het rechterlid van bovenstaande uitdrukking de evolutie-operator voorkomt, kunnen we dit probleem formeel iteratief oplossen. We vinden dan na herhaalde iteratie de uitdrukking:

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}_{int}(t_1) \dots \hat{H}_{int}(t_n) \quad (4.1.14)$$

Zoals gezegd, dit is een formele oplossing in termen van een oneindige reeks. De vraag die men zich hier dient te stellen is of deze reeks convergeert. Het antwoord luidt dat dit van de theorie af zal hangen, en dat dit, als dit al het geval is, zeer moeilijk te bewijzen zal zijn. Hier prevaleert het fysisch pragmatisme boven de mathematische rigiditeit. Het blijkt dat in theorieën waar de interactie-Hamiltoniaan

een kleine parameter bevat, zoals bijvoorbeeld het geval is voor QED¹, opeenvolgende termen tot op hoge orde convergeren naar de experimenteel waargenomen waarden. De precisie die hiermee verkregen kan worden is dermate groot dat de vraag of de reeks in laatste instantie slechts convergeert in een asymptotische zin, geen directe relevantie meer heeft. Om deze reeks verder te vereenvoudigen maken we gebruik van de tijddordenings operator in het produkt van interactie hamiltonianen in (4.1.14). We kunnen eenvoudig laten zien dat we de tweede term $U^{(2)}$ in de som (4.1.14) als een tijdgeordend product kunnen weergeven:

$$\begin{aligned} U^{(2)}(t, t_0) &= - \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{int}(t_1) \hat{H}_{int}(t_2) \\ &= - \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \theta(t_1 - t_2) \hat{H}_{int}(t_1) \hat{H}_{int}(t_2) \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Verwisselen we in deze uitdrukking de variabelen t_1 en t_2 en wisselen we tevens de integratievolgorde om dan vinden we

$$U^{(2)}(t, t_0) = - \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \theta(t_2 - t_1) \hat{H}_{int}(t_2) \hat{H}_{int}(t_1) \quad (4.1.16)$$

Als we (4.1.15) en (4.1.16) optellen en door twee delen, dan vinden we dat

$$U^{(2)}(t, t_0) = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T(\hat{H}_{int}(t_1) \hat{H}_{int}(t_2)) \quad (4.1.17)$$

Het is eenvoudig na te gaan dat een dergelijke redenering ook voor hogere orde iteraties van de evolutie-operator opgaat:

$$U^{(n)}(t, t_0) = \frac{(-i)^n}{n!} \left(\prod_{i=1}^n \int_{t_0}^t dt_i \right) T(\hat{H}_{int}(t_1) \dots \hat{H}_{int}(t_n)) \quad (4.1.18)$$

We kunnen de reeks nu formeel sommeren en vinden:

$$U(t, t_0) = T \exp\left(-i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_{int}(t')\right) \quad (4.1.19)$$

Waarbij de exponent gedefinieerd wordt door zijn reeksontwikkeling en de tijddor-
dening op alle termen afzonderlijk wordt toegepast.

Beschouwen we nu ook nog de limiet waar t naar $+\infty$ en t_0 naar $-\infty$ gaan dan krijgen we de uitdrukking die in stringtheorie de S-matrix definieert:

$$S = T e^{-i \int dt \hat{H}_{int}(t)} = T e^{i \int d^4x \hat{\mathcal{L}}_{int}} \quad (4.1.20)$$

Deze uitdrukking is zoals men zou verwachten manifest Lorentzinvariant. Voor de QED wordt de definitie van de S-matrix:

$$S = T e^{-ie \int d^4x: \hat{\psi}(x) \hat{A}(x) \hat{\psi}(x):} \quad (4.1.21)$$

¹In QED is de effectieve dimensieloze parameter de *fijnstructuurconstante* $\alpha = e^2/(4\pi\hbar c) \approx 1/137$

Merk op dat we de interactie-Lagrangiaan normaalgeordend hebben, zoals we dat eerder ook voor de vrije Hamiltoniaan gedaan hebben om nodeloze complicaties tengevolge van de nulpuntsenergie te vermijden. Iets soortgelijks doen we voor de interactie hamiltoniaan. Aangezien $\mathcal{H}_{int} = eA_\mu j^\mu = e(\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-)A(\psi^+ + \psi^-)$ voor het Dirac-veld is de enige niet normaalgeordende term $eA_\mu \bar{\psi}^+(x)\gamma^\mu\psi^-(x)$ ². Per definitie is dit gelijk aan $eA_\mu : \bar{\psi}^+(x)\gamma^\mu\psi^-(x) : + eA_\mu \gamma_{\alpha\beta}^\mu \{\bar{\psi}_\alpha^+(x), \psi_\beta^-(x)\}$. Een soortgelijke anticommutator hebben we eerder berekend in hoofdstuk 3. Een analoge berekening geeft dat

$$\{\bar{\psi}_\alpha^+, \psi_\beta^-\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-m}{2E_p} \delta_{\alpha\beta} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\gamma_{\alpha\beta}^0}{2} \quad (4.1.22)$$

Hiermee wordt uiteindelijk

$$eA_\mu j^\mu = e : A_\mu j^\mu : + eA_0 \delta^3(\vec{0}) \quad (4.1.23)$$

De singuliere extra bijdrage kunnen we interpreteren als de lading van de grondtoestand, d.w.z. van het oneindig aantal gevulde negatieve energie electron toestanden. Door normaalordening van de interactie-hamiltoniaan trekken we dus de wisselwerkingsenergie met de (oneindige) ladingsdichtheid van het "vacuüm" (de Dirac-zee) ervan af.

4.2 Greenfuncties

De centrale grootheden welke men in de quantumveldentheorie wil bestuderen zijn de *Greenfuncties* ook wel *n-punts functies* genoemd, welke gedefinieerd worden als de vacuümverwachtingswaarde van het tijdgeordende produkt van een n-tal veldoperatoren.

$$\tau(x_1, \dots, x_n) := \langle 0_H | T(\psi_H(x_1) \dots \psi_H(x_n)) | 0_H \rangle \quad (4.2.24)$$

De Feynman propagatoren welke we in het voorgaande hoofdstuk bekeken hebben zijn dus voorbeelden van tweepunts functies. We gaan de n-punts functie nu omwerken naar een uitdrukking in termen van velden in de interactie representatie.

$$\langle 0_H | T(\psi_H(x_1) \dots \psi_H(x_n)) | 0_H \rangle = \langle 0_H | \psi_H(\tilde{x}_1) \dots \psi_H(\tilde{x}_n) | 0_H \rangle$$

waarbij we de operatoren chronologisch geordend hebben, d.w.z. dat $\tilde{t}_1 > \tilde{t}_2 \dots > \tilde{t}_n$ is. Vervolgens schrijven we de Heisenberg operatoren in termen van de operatoren in de interactie-representatie, m.b.v. de evolutie operator U.

$$\begin{aligned} &= \langle 0_H | U^{-1}(\tilde{t}_1, 0) \hat{\psi}(\tilde{x}_1) U(\tilde{t}_1, 0) U^{-1}(\tilde{t}_2, 0) \hat{\psi}(\tilde{x}_2) U(\tilde{t}_2, 0) \dots \\ &\quad \dots U^{-1}(\tilde{t}_n, 0) \hat{\psi}(\tilde{x}_n) U(\tilde{t}_n, 0) | 0_H \rangle = \\ &= \langle 0_H | U^{-1}(T, 0) U(T, \tilde{t}_1) \hat{\psi}(\tilde{x}_1) U(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) \hat{\psi}(\tilde{x}_2) \dots \hat{\psi}(\tilde{x}_n) U(\tilde{t}_n, T') U(T', 0) | 0_H \rangle \end{aligned}$$

²Merk op dat $\overline{\bar{\psi}^\pm} = \bar{\psi}^\mp$

We hebben gebruik gemaakt van de compositie eigenschap van twee U operatoren. Verder hebben we extra eenheidsoperatoren ($1 = UU^{-1}$) ingevoegd voor de tijdstippen $T > \tilde{t}_1$ en $\tilde{t}_n > T'$. Tenslotte kunnen we de operatoren weer in hun oorspronkelijke volgorde terugzetten onder de voorwaarde dat we de tijddordeningsoperator weer toevoegen. Het is dan mogelijk om het product van alle U factoren tot een enkele factor te reduceren:

$$\begin{aligned} = & \langle 0_H | U^{-1}(T, 0) T(\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2)\dots\hat{\psi}(x_n)U(T, \tilde{t}_1)U(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)\dots U(\tilde{t}_n, T'))U(T', 0) | 0_H \rangle = \\ & = \langle 0_H | U^{-1}(T, 0) T(\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2)\dots\hat{\psi}(x_n)U(T, T'))U(T', 0) | 0_H \rangle \end{aligned}$$

We maken nu nog de volgende aanname over het asymptotisch gedrag van de toestanden $|\hat{0}(t)\rangle := U(t, 0)|0_H\rangle$ namelijk dat,

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} |\hat{0}(T)\rangle &= \lambda_+ |\hat{0}_0\rangle \\ \lim_{T' \rightarrow -\infty} |\hat{0}(T')\rangle &= \lambda_- |\hat{0}_0\rangle \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

We nemen dus aan dat voor zeer lange tijden T en T' de interactie-representatie vacuümtoestanden evenredig worden met (tijdsafhankelijke) vacuümtoestand van de vrije theorie, waarvoor ook nog geldt dat $|\hat{0}_0\rangle = |0_{0H}\rangle$. We kunnen het product van de constanten $\lambda_+^* \lambda_-$ als volgt bepalen:

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{T' \rightarrow -\infty} \lambda_+^* \lambda_- \langle \hat{0}_0 | U(T, T') | \hat{0}_0 \rangle = \\ & = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{T' \rightarrow -\infty} \langle \hat{0}(T) | U(T, T') | \hat{0}(T') \rangle = \langle 0_H | 0_H \rangle = 1 \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

Hiermee verkrijgen we de gewenste uitdrukking voor de Greenfuncties in termen van interactie-representatie operatoren:

$$\tau(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{T' \rightarrow -\infty} \frac{\langle \hat{0}_0 | T(\hat{\psi}(x_1)\dots\hat{\psi}(x_n)U(T, T')) | \hat{0}_0 \rangle}{\langle \hat{0}_0 | U(T, T') | \hat{0}_0 \rangle} \quad (4.2.27)$$

4.3 S-matrix elementen

S-matrix elementen vormen een speciaal geval van de hierboven beschouwde n-punts functies, waarbij de tijdsargumenten van de operatoren zelf ook nog eens naar T dan wel T' gaan. Men kan dan via het zogenaamde LSZ reductie-formalisme laten zien dat onder bepaalde condities op de asymptotische eigenschappen van de theorie, dit neerkomt op het berekenen van matrixelementen tussen begin en eindtoestanden welke eigentoeestanden zijn van de vrije Hamiltoniaan (d.w.z. toestanden die door de velden in de interactie representatie worden gecreëerd en geannihileerd). We definiëren de waarschijnlijkheidsamplitude als:

$$S^{fi} = \frac{\langle f | S | i \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \quad (4.3.28)$$

waarbij S gedefinieerd is door (4.1.21).

We zullen nu het matrixelement $\langle f|S^{(n)}|i \rangle$ voor lage orde van n nader beschouwen. Van nu af aan nemen we aan dat de velden in de interactierepresentatie staan en laten het hoedje daarom weg. Tevens gaan we er vanuit dat we de interactie hamiltoniaan normaalgeordend hebben.

$S^{(0)} = 1$. Dit is de term die overblijft als we de interactie-hamiltoniaan gelijk aan nul nemen, deze term beschrijft geen interacties. De overgangswaarschijnlijkheid tussen een toestand $|f \rangle$ en een toestand $|i \rangle$ is gelijk aan $\delta_{f,i}$. De begin en eindtoestand zijn gelijk, omdat er geen interacties zijn.

$S^{(1)} = (-ie) \int d^4x : \bar{\psi}(x) \mathcal{A}(x) \psi(x) : \dots$ Deze operator kan een positron, electron of foton creëren of annihileren. Het matrixelement

$$\langle f|S^{(1)}|i \rangle = \int d^4x -ie \langle f| : \bar{\psi}(x) \mathcal{A}(x) \psi(x) : |i \rangle \quad (4.3.29)$$

kan in principe ongelijk nul zijn als we kijken naar de emissie of absorbtie van een foton door een electron en/of positron. Merk op dat de tijdordering nog geen rol speelt omdat er maar één interactiepunt is. We kunnen de expansies van de velden invullen en normaal ordenen, en de in- en uitgaande toestanden bijvoorbeeld kiezen als

$$|f \rangle = a^\dagger(\vec{k}, \lambda) b^\dagger(\vec{p}', s') |0 \rangle \quad (4.3.30)$$

en

$$|i \rangle = b^\dagger(\vec{p}, s) |0 \rangle \quad (4.3.31)$$

Dan komt de enige bijdrage aan het matrix element $\langle f|S|i \rangle$ van de term:

$$\begin{aligned} & -ie \sum_{r, \lambda', n} \int d^4x \int \frac{d^3l}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m}{E_l}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m}{E_q}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\omega'_k}} \cdot \\ & \quad \bar{u}(l, r) \not{\epsilon}^{(\lambda')} (k') u(q, n) e^{-i(q-k'-l)x} \cdot \\ & \langle 0|b(p', s') a(k, \lambda) b^\dagger(l, r) a^\dagger(k', \lambda') b(q, n) b^\dagger(p, s)|0 \rangle \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

waarbij l en r de impuls respectievelijk spin in de expansie van $\bar{\psi}$ is, q en n bij ψ horen en k' en λ' bij het \mathcal{A} -veld horen. Gebruik makend van de (anti)commutatierelaties van de expansie coëfficiënten, kunnen we het operatorstuk schrijven als:

$$\delta_{s', r} \delta^3(\vec{p}' - \vec{l}) (-g^{\lambda \lambda'}) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{n, s} \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) \quad (4.3.33)$$

Voeren we vervolgens de integraties uit dan volgt dat (4.3.32) gelijk is aan:

$$-ie \bar{u}(p', s') \not{\epsilon}^{(\lambda)} (k) u(p, s) \delta^4(p' + k - p) \frac{m}{\sqrt{4\pi E_p E_{p'} \omega_k}} \quad (4.3.34)$$

Vanwege de δ -functie geldt dat energie en impuls behouden moeten zijn $p' + k = p$. Hieruit volgt ook dat:

$$k^2 + p^2 - 2k \cdot p = p'^2 \Rightarrow k \cdot p = 0 \Rightarrow \omega E = \vec{k} \cdot \vec{p} \quad (4.3.35)$$

Kijken we in het ruststelsel van het electron dan geldt $p = (E, \vec{p}) = (m, \vec{0})$. Uit bovenstaande relatie volgt dan dat $\omega = 0$ en $\vec{k} = 0$. Uit van de wet van impulsbehoud volgt dan ook nog $\vec{p}' = 0$. Deze kleine berekening laat dus zien dat het matrixelement nul is en dat een electron (of positron) in eerste orde geen foton kan uitstralen, vanwege de kinematische eis van energie-impulsbehoud. In het volgende hoofdstuk laten zien dat in een vergelijkbare situatie van electron verstrooiing aan een klassieke Coulombpotentiaal de eerste orde bijdrage niet nul is omdat in dat geval impulsbehoud niet geldig is (immers de potentiaal is dan niet translatie invariant).

$S^{(2)}$. De tweede-orde term van de S-matrix wordt gegeven door:

$$S^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 T(: \bar{\psi}(x_1) \mathcal{A}(x_1) \psi(x_1) :: \bar{\psi}(x_2) \mathcal{A}(x_2) \psi(x_2) :) \quad (4.3.36)$$

We hebben hier te doen met het tijdgeordend product van twee normaalgeordende operatorprodukten. We merken op dat het produkt van normaalgeordende produkten zelf niet een normaalgeordend produkt hoeft te zijn. Voor tijdgeordende produkten zoals bovenstaande bestaat echter wel een systematische expansie in termen van normaalgeordende produkten en propagatoren, die gegeven wordt door het zogenaamde Wick-theorema, waar we nu in het kort op ingaan.

Beschouw het tijdgeordende product van twee willekeurige velden op t_1 en t_2 welke we aangeven met ψ_1 en ψ_2 . We kunnen de velden splitsen in een annihilatie en creatie gedeelte ψ^+ respectievelijk ψ^- en vervolgens voor gegeven tijdordening de normaalordening uitvoeren:

$$\begin{aligned} T(\psi_1 \psi_2) &= T(\psi_1^+ \psi_2^+ + \psi_1^+ \psi_2^- + \psi_1^- \psi_2^+ + \psi_1^- \psi_2^-) \\ &= \theta(t_1 - t_2)(\psi_1^+ \psi_2^+ \pm \psi_2^- \psi_1^+ + \psi_1^- \psi_2^+ + \psi_1^- \psi_2^- + [\psi_1^+, \psi_2^-]_{\mp}) \\ &\quad + \theta(t_2 - t_1)(\psi_2^+ \psi_1^+ \pm \psi_1^- \psi_2^+ + \psi_2^- \psi_1^+ + \psi_2^- \psi_1^- + [\psi_2^+, \psi_1^-]_{\mp}) \\ &= : \psi_1 \psi_2 : + f \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

waarbij $[\cdot, \cdot]_-$ een commutator voor boson- en $[\cdot, \cdot]_+$ een anticommutator voor fermionvelden voorstelt. f staat voor een commutator uitdrukking en correspondeert dus met een c-getal distributie. Deze kunnen we bepalen door van bovenstaande vergelijking de vacuümverwachtingswaarde te nemen

$$f = \langle 0 | T(\psi_1 \psi_2) | 0 \rangle = \underbrace{\psi_1 \psi_2} \quad (4.3.38)$$

omdat de vacuümverwachtingswaarde van een normaalgeordend product gelijk aan nul is. f is dus de propagator van het veld ψ zoals ook uit de expliciete uitdrukking

blijkt.³ We hebben laten zien dat:

$$T(\psi_1\psi_2) = : \psi_1\psi_2 : + \underbrace{\psi_1\psi_2} \quad (4.3.39)$$

Opgave 32 *Laat zien dat*

$$T(\psi_1\psi_2\psi_3) = : \psi_1\psi_2\psi_3 : + \psi_1 \underbrace{\psi_2\psi_3} + \underbrace{\psi_1\psi_2}\psi_3 + \underbrace{\psi_1\psi_2}\psi_3 \quad (4.3.40)$$

waarbij $\underbrace{\psi_1\psi_2\psi_3} := \pm \underbrace{\psi_1\psi_3}\psi_2$, afhankelijk van de statistiek van de velden. Bereken ook $T(\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4)$.

Voor het algemene geval kan met behulp van volledige inductie het theorema van Wick bewezen worden⁴:

Het tijdgeordend product van lineaire operatoren is gelijk aan de som van corresponderende normaalgeordende producten met alle mogelijke paarsgewijze contracties:

$$\begin{aligned} T(\psi_1 \dots \psi_n) = & : \psi_1 \dots \psi_n : + \sum_{i < j} : \psi_1 \dots \underbrace{\psi_i \dots \psi_j} \dots \psi_n : + \\ & + \sum_{i < j, k < l} : \psi_1 \dots \underbrace{\psi_i \dots \psi_j} \dots \underbrace{\psi_k \dots \psi_l} \dots \psi_n : + \dots \end{aligned} \quad (4.3.41)$$

Als we naar (4.3.36) kijken, dan zien we een tijdgeordend product van *normaalgeordende* operatoren. We passen Wicks theorema hierop toe, met de toevoeging dat contracties tussen termen in hetzelfde normaalgeordende product achterwege blijven.

Opgave 33 *Ga dit na voor $S^{(2)}$ en laat zien dat er acht termen overblijven.*

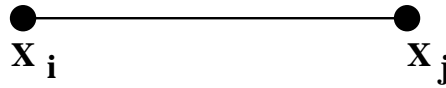
4.4 Feynmandiagrammen

Wanneer we het Wick-theorema toepassen op $S^{(n)}$ krijgen we een som van termen die ieder weer bestaat uit een het product van een aantal propagatoren en een normaalgeordend operatorproduct. We kunnen elke term uit deze expansie op eenvoudige wijze met een zogenaamd *Feynman-diagram* associëren. Deze diagrammen bevatten om te beginnen een aantal punten $x_1 \dots x_n$ die vertices (knooppunten) van het diagram vormen en corresponderen met de integratievariabelen van de operator $S^{(n)}(x_1 \dots x_n)$. Met elke contractie correspondeert een propagator die twee vertices verbindt.

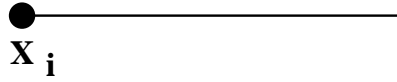
Met elke niet gecontraheerde operator correspondeert een externe lijn van de desbetreffende vertex naar buiten, deze kan dus zowel een inkomend als uitgaand deeltje representeren.

³Het onderhaakje $\underbrace{\psi \dots \psi}$ wordt een *contractie* tussen twee velden genoemd.

⁴We verwijzen voor dit bewijs naar bijvoorbeeld het boek van Bjorken & Drell.



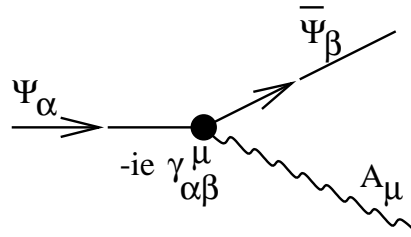
Figuur 4.1: Een propagator die twee vertices verbindt.



Figuur 4.2: Een externe lijn

De numerieke- en matrixfactoren die in de lokale interactie termen van de Lagrangiaan voorkomen associëren we met de vertices.

Hierdoor wordt elke vertex dus gekarakteriseerd door een verzameling lijnen aan de vertex, die elk corresponderen met een van de operatoren in de interactie-Lagrangiaan. In QED is er maar een unieke interactievertex welke de koppeling van het foton aan de fermionstroom beschrijft en deze ziet er als volgt uit:



Figuur 4.3: De interactievertex van QED

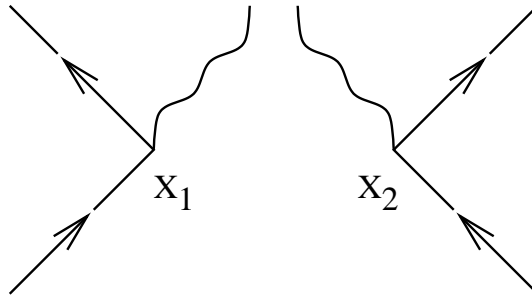
De rechte lijnen corresponderen met de Dirac-operatoren, de gegolfde lijnen representeren de operatoren van het electro-magnetische veld. Een lijn die een vertex inkomt correspondeert met de spinor ψ , terwijl een uitgaande lijn correspondeert met de geconjugeerde spinor $\bar{\psi}$. Het is duidelijk dat een externe ψ lijn kan corresponderen met een fermion (electron) dat inkomt en in de vertex geannihileerd wordt, of met een antifermion (positron) dat in de vertex wordt gecreëerd en uitgaat.

Ter illustratie beschouwen we $S^{(2)}$. Als Wick-expansie vonden we in voorgaande opgave:

$$\begin{aligned}
 S^{(2)} = & \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \cdot \\
 & (: \bar{\psi}_1 A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 A_2 \psi_2 : & \text{I} \\
 & + : \bar{\psi}_1 A_1 \underbrace{\psi_1 \bar{\psi}_2}_{\text{I}} A_2 \psi_2 : + : \bar{\psi}_1 \underbrace{A_1 \psi_1}_{\text{II}} \bar{\psi}_2 A_2 \psi_2 : & \text{II} \\
 & + : \bar{\psi}_1 \underbrace{A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2}_{\text{III}} A_2 \psi_2 : & \text{III} \\
 & + : \bar{\psi}_1 \underbrace{A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2}_{\text{IV}} A_2 \psi_2 : + : \bar{\psi}_1 \underbrace{A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2}_{\text{IV}} A_2 \psi_2 : & \text{IV}
 \end{aligned}$$

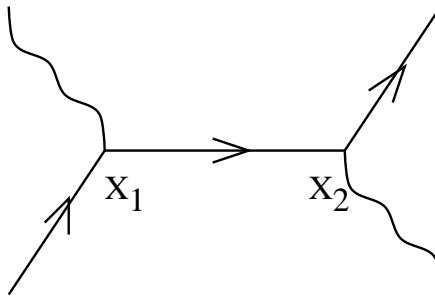
$$\begin{aligned}
 & + : \underbrace{\bar{\psi}_1 A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 A_2 \psi_2}_{\text{V}} : \\
 & + : \underbrace{\bar{\psi}_1 A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 A_2 \psi_2}_{\text{VI}} : \quad (4.4.42)
 \end{aligned}$$

Opgemerkt dient te worden dat nadat de integralen over x_1 en x_2 zijn uitgevoerd, de twee termen in II een identieke bijdrage leveren. Hetzelfde geldt voor de twee termen in IV. Elke afzonderlijke term kunnen we diagrammatisch weergeven, waaruit blijkt aan welke fysische processen het een bijdrage levert. De eigenlijk berekening van de corresponderende amplitude nemen we in het volgende hoofdstuk ter hand. De eerste term correspondeert met onderstaand diagram:



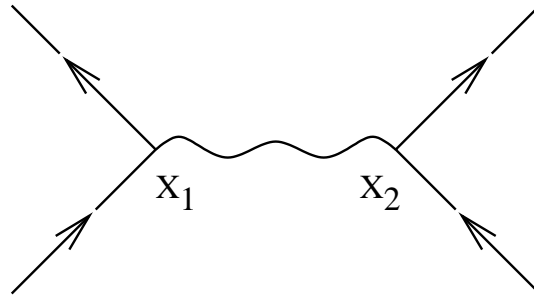
Figuur 4.4: *Bijdrage I*

Dit diagram is niet erg interessant omdat het twee afzonderlijke processen beschrijft, de bijbehorende amplitude is het produkt van twee van de eerder beschouwde triviale eerste orde amplituden, en is dus nul.



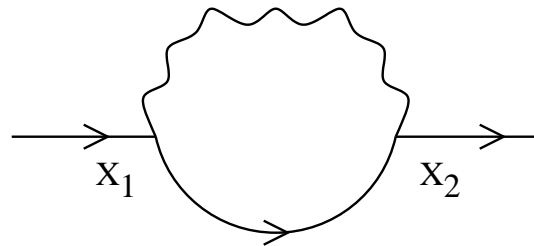
Figuur 4.5: *Bijdrage II*

Dit diagram levert bijdragen aan processen met een (anti)fermion en een foton in de begin- en eindtoestand. Dit kan bijvoorbeeld het proces $e^\pm + \gamma \rightarrow e^\pm + \gamma$ zijn, de zogenaamde Compton-verstrooiing. Deze term levert echter ook een bijdrage aan paarcreatie ($2\gamma \rightarrow e^+ + e^-$) of paar annihilatie ($e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$).

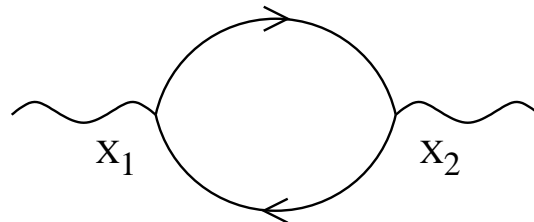
Figuur 4.6: *Bijdrage III*

Deze term beschrijft verstrooiing van twee geladen deeltjes aan elkaar, middels de uitwisseling van een foton.

De volgende diagrammen zijn *lusdiagrammen* omdat ze een dubbele propagator bevatten, d.w.z. de twee knooppunten zijn dubbel verbonden. Een naieve berekening van deze diagrammen laat zien dat deze divergeren, hetgeen een renormering van de parameters en velden in de theorie noodzakelijk maakt. Deze renormalisatie procedure komt in dit college echter verder niet ter sprake.

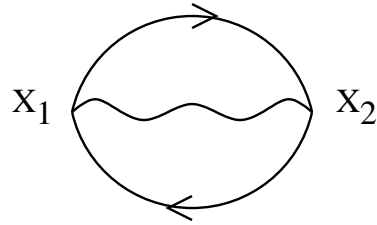
Figuur 4.7: *Bijdrage IV*

Deze diagrammen worden e^+ of e^- zelfenergie diagrammen genoemd en geven correcties op de e^\pm propagator. Ze geven aanleiding tot de zogenaamde massarenormalisatie.

Figuur 4.8: *Bijdrage V*

Term V is een lusdiagram met twee externe fotonlijnen. Dit diagram staat bekend

als vacuümpolarisatie. Het beschrijft het effect van virtuele fermion-antifermion paren op de fotonpropagator en geeft aanleiding tot ladingsrenormalisatie.



Figuur 4.9: *Bijdrage VI*

Het laatste diagram heeft geen in- of uitgaande toestanden. Het beschrijft een fluctuatie van het vacuüm en wordt daarom een vacuümdiagram genoemd. Een nadere beschouwing leert dat de som van al dit soort diagrammen van 0-de tot n -de orde factoriseert in orde n . De bijdrage van deze diagrammen valt na factorisatie weg tegen de noemer in de uitdrukking voor de greenfuncties en S-matrixelementen. In de berekening van S-matrix amplituden hoeven we de bijdragen van dit soort vacuümdiagrammen dus niet mee te nemen.

Hoofdstuk 5

Elementaire processen

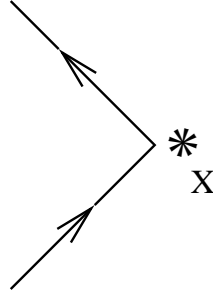
In dit hoofdstuk zullen we voor twee processen het matrixelement van de S-matrix in laagste niet triviale orde expliciet uitrekenen. Dat geeft ons een overgangswaarschijnlijkheid voor dat proces, (d.i. de kans op een bepaalde eindtoestand bij de gegeven begintoestand,) waarmee we de werkzame doorsnede voor de processen kunnen berekenen. Hoewel we de laagste orde bijdrage uitrekenen blijken de berekeningen toch tamelijk omvangrijk. Hierin wordt enige verlichting gegeven door de Feynmanregels die we zullen geven. Deze maken het mogelijk om het matrixelement meteen neer te schrijven. Maar de weg van het matrix element naar de uiteindelijke (relatief eenvoudige) uitdrukking voor de werkzame doorsnede valt soms tegen. Het wekt dan ook geen verbazing dat de professionals in dit vak omstandig gebruik maken van speciaal voor dit doel ontwikkelde symbolische manipulatieprogramma's zoals SCHOONSCHIP, REDUCE en FORM.

5.1 Mott verstrooiing

Als eerste voorbeeld van de berekening van een overgangswaarschijnlijkheid nemen we de Rutherford-verstrooiing van een electron aan een externe potentiaal. Dit is een van de weinige gevallen waarin de eerste-orde term van de S-matrix een niet-triviaal resultaat geeft. Allereerst zullen we de overgangsamplitude van dit proces berekenen door de eerste-orde term van het S-matrixelement expliciet uit te rekenen met als in- en uitgaande toestand een electron en voor het electromagnetisch veld het Coulomb-veld van een puntlading. Het veld A^μ is in dit geval een klassieke externe potentiaal en dus niet operator-waardig. We zullen de werkzame doorsnede introduceren en een middeling over de polarisatie toestanden uitvoeren. Dat leidt uiteindelijk tot de relativistische formule voor Coulomb-verstrooiing van electronen, de z.g. Mott-werkzame doorsnede.

5.1.1 De verstrooiingsamplitude

Het Feynman-diagram dat hoort bij Rutherford-verstrooiing, d.w.z. de verstrooiing van een electron aan een externe potentiaal, ziet er als volgt uit:



Figuur 5.1: *Verstrooiing van een electron aan een externe potentiaal.*

De eerste orde bijdrage aan de S-matrix (zie 4.1.21) wordt gegeven door:

$$S^{(1)} = -ie \int d^4x : \bar{\psi}(x) \mathcal{A}(x) \psi(x) : \quad (5.1.1)$$

Om de overgangswaarschijnlijkheid van dit proces te bepalen moeten we het juiste matrix element van deze eerste orde bijdrage aan de S-matrix berekenen:

$$S_{fi}^{(1)} = \langle f | S^{(1)} | i \rangle \quad (5.1.2)$$

Voor de inkomende toestand nemen we een electron met impuls p_i , voor de uitgaande toestand nemen we een electron met impuls p_f . In dit geval is het \mathcal{A} -veld geen operator veld maar eenvoudigweg het Coulomb-veld van een puntlading $-Ze > 0$:

$$A^\mu(x) = \left(\frac{-Ze}{4\pi|\vec{x}|}, \vec{0} \right) \quad (5.1.3)$$

Voor de ψ -velden nemen we de standaard expansie. Hiermee krijgen we voor het matrix element:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= -ie \sum_{ss'} \int d^4x \int d^3p \int d^3p' \\ &\quad \bar{u} \mathcal{A} u' e^{i(p-p')x} \langle 0 | b(p_f, s_f) b^\dagger(p, s) b(p', s') b^\dagger(p_i, s_i) | 0 \rangle \\ &= -ie \int d^4x \bar{\psi}_f(x) \mathcal{A}(x) \psi_i(x) \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

met

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_f &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_f}} \bar{u}(p_f, s_f) e^{ip_f x} \\ \psi_i &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_i}} u(p_i, s_i) e^{-ip_i x} \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Als we nu de bovenstaande uitdrukking voor het Coulomb-veld invullen kunnen we de integraal over x ook uitrekenen en vinden we:

$$S_{fi}^{(1)} = \frac{ie^2mZ}{(2\pi)^3\sqrt{E_iE_f}} \frac{\bar{u}_f\gamma^0u_i}{|\vec{q}|^2} 2\pi\delta(E_i - E_f) \quad (5.1.6)$$

waarbij $\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$. Hierbij is gebruik gemaakt van de welbekende Fourier-transformatie van de Coulomb-potentiaal:

$$\int d^3x \frac{e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{x}|} = \frac{4\pi}{|\vec{q}|^2} \quad (5.1.7)$$

5.1.2 De werkzame doorsnede

Als we het aldus gevonden matrixelement kwadrateren krijgen we de overgangswaarschijnlijkheid van dit proces; d.w.z. de kans dat bij de gegeven inkomende toestand de overgang naar de gekozen uitgaande toestand plaatsvindt. Vermenigvuldigen we dit met d^3p_f dan krijgen we de kans op een eindtoestand tussen \vec{p}_f en $\vec{p}_f + d^3p_f$ voor de gegeven inkomende toestand:

$$|S_{fi}^{(1)}|^2 d^3p_f = \frac{e^4Z^2m^2}{(2\pi)^6E_i} \frac{|\bar{u}_f\gamma^0u_i|^2}{|\vec{q}|^4} (2\pi\delta(E_i - E_f))^2 \frac{d^3p_f}{E_f} \quad (5.1.8)$$

Opvallend is dat in bovenstaande formule een δ -functie in het kwadraat voorkomt. Dit kunnen we interpreteren, als we voor één van de δ -functies gebruik maken van de volgende integraalvoorstelling van de deltafunctie:

$$\delta(E_{p'} - E_p) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(E_{p'} - E_p)t} dt \quad (5.1.9)$$

We kunnen dan de integraal voor $E_f = E_i$ formeel uitrekenen door over een groot maar eindig tijdsinterval T te integreren - met het resultaat $T/2\pi$ - en naderhand pas de limiet $T \rightarrow \infty$ te nemen. Hiermee kunnen we het kwadraat van de δ -functie in de limiet formeel schrijven als:

$$(2\pi\delta(E_{p'} - E_p))^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi T \delta(E_{p_f} - E_{p_i}) \quad (5.1.10)$$

Als we uitdrukking (5.1.8) delen door T vinden we de kans dR op een uitgaand deeltje met impuls tussen \vec{p}_f en $\vec{p}_f + d^3p_f$, per tijdseenheid voor de gegeven inkomende toestand:

$$dR = \frac{e^4Z^2m^2}{(2\pi)^6E_i} \frac{|\bar{u}_f\gamma^0u_i|^2}{|\vec{q}|^4} 2\pi\delta(E_f - E_i) \frac{d^3p_f}{E_f} \quad (5.1.11)$$

Deze formule geeft nog geen antwoord op de vraag: Als we een inkomend electron met impuls p_i hebben, wat is dan de kans na verstrooiing een electron te meten met impuls p_f ? Daartoe dienen we de zogenaamde *differentiële werkzame doorsnede* te

definiëren. Dan moeten we de bovenstaande uitdrukking nog delen door het aantal interacties per tijdseenheid.

Het aantal invallende deeltjes per tijdseenheid, per oppervlakte eenheid loodrecht op de invalrichting wordt gegeven door de drie-vector: $\vec{I} = \langle i | \vec{j} | i \rangle = \langle i | \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi | i \rangle$. Als de invalssnelheid gelijk is aan: $v^\mu = \frac{p_i^\mu}{E_i}$ dan geldt:

$$I^\mu = v^\mu \rho \quad (5.1.12)$$

Hierbij is ρ de deeltjesdichtheid en gelijk aan $\langle i | \bar{\psi} \gamma^0 \psi | i \rangle$. Aangezien $|i\rangle = b^\dagger(p_i, s_i) |0\rangle$ vinden we expliciet voor I^μ :

$$I^\mu = v^\mu \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_i} u^\dagger(p_i, s_i) u(p_i, s_i) = \frac{v^\mu}{(2\pi)^3} = \frac{p_i^\mu}{(2\pi)^3 E_i} \quad (5.1.13)$$

Hierbij is gebruik gemaakt v.d. normering $u^\dagger(p, s) u(p, s') = \frac{E_p}{m} \delta_{ss'}$. De differentiële werkzame doorsnede is gedefiniëerd als:

$$d\sigma = \frac{dR}{|\vec{I}|} \quad (5.1.14)$$

De differentiële werkzame doorsnede geeft dus de waarschijnlijkheid dat een deeltje met inkomende impuls p_i verstrooid wordt naar een eindtoestand in het impulsruimte interval $d^3 p_f$. Door over te gaan op de ruimtehoek $d\Omega$ ($d^3 p_f = |\vec{p}_f|^2 d|\vec{p}_f| d\Omega$), en te integreren over $|\vec{p}_f|$, vinden we de differentiële werkzame doorsnede per eenheid van ruimtehoek:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \int_{p_f=0}^{\infty} \frac{e^4 Z^2 m^2}{4\pi^2} \frac{|\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2}{|\vec{q}|^4} \delta(E_i - E_f) \frac{|\vec{p}_f|^2}{E_f} d|\vec{p}_f| \\ &= \frac{e^4 Z^2 m^2}{4\pi^2} \frac{|\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2}{|\vec{q}|^4} \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

waarbij we gebruikt hebben dat vanwege $E_f^2 = |p_f|^2 + m^2$ geldt: $2E_f dE_f = 2p_f dp_f$. Invoeren van de fijnstructuur constante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ geeft tenslotte:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\alpha^2 Z^2 m^2}{|\vec{q}|^4} |\bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 u(p_i, s_i)|^2 \quad (5.1.16)$$

(met $\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$.)

5.1.3 Middeling en sommatie over spins

De uitdrukking die we gevonden hebben is geldig voor gegeven begin- en eindpolarisatie van het electron. Meestal worden deze niet gemeten. We moeten daarom in dit geval (onbekende beginpolarisatie, onbelangrijke eindpolarisatie) middelen over de inkomende en sommeren over de uitgaande polarisaties. Daartoe moeten we de

laatste term in (5.1.16) vervangen door $\frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |\bar{u}(p_f, s_f)' \gamma^0 u(p_i, s_i)|^2$. Als we dit uitschrijven dan krijgen we:

$$\begin{aligned} & \sum_{s_i, s_f = \pm 1} |\bar{u}(p_f, s_f)' \gamma^0 u(p_i, s_i)|^2 = \\ & \sum_{s_i, s_f = \pm 1} \bar{u}_\alpha(p_f, s_f) \gamma_{\alpha\beta}^0 u_\beta(p_i, s_i) \bar{u}_\delta(p_i, s_i) \gamma_{\delta\sigma}^0 u_\sigma(p_f, s_f) \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

waarbij zoals gewoonlijk over dubbele indices gesommeerd wordt. We kunnen deze uitdrukking van de som over de spin overvoeren in een spooridentiteit. Als we de sommatie over de spin uitvoeren krijgen we:

$$\begin{aligned} \sum_{s_i, s_f = \pm 1} |\bar{u}(p_f, s_f)' \gamma^0 u(p_i, s_i)|^2 &= \gamma_{\alpha\beta}^0 \left(\frac{\not{p}_i + m}{2m} \right)_{\beta\delta} \gamma_{\delta\sigma}^0 \left(\frac{\not{p}_f + m}{2m} \right)_{\sigma\alpha} \\ &= \left(\gamma^0 \frac{\not{p}_i + m}{2m} \gamma^0 \frac{\not{p}_f + m}{2m} \right)_{\alpha\alpha} \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

Deze uitdrukking is niets anders dan het spoor van de matrix in kwestie, zodat we voor de ongepolariseerde werkzame doorsnede krijgen:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{2|\vec{q}|^4} Tr(\gamma^0(\not{p}_i + m)\gamma^0(\not{p}_f + m)) \quad (5.1.19)$$

Inderdaad bij de berekeningen van werkzame doorsneden zullen we in het algemeen sporen over producten van γ -matrices moeten berekenen. In de tweede orde berekening van electron-electron verstrooiing bijvoorbeeld komen we ingewikkeldere sporen tegen. Om deze vlot uit te kunnen rekenen zullen we ons eerst bezighouden met het afleiden van een aantal spooridentiteiten.

Spooridentiteiten

We geven een aantal spooridentiteiten, met de opmerking dat de bewijzen neerkomen op het handig gebruiken van de definierende relaties van de Dirac algebra en de cyclische invariantie van het spoor van een produkt van matrices.

1.

$$\begin{aligned} Tr(a\mathbf{I}) &= 4a \\ Tr(\gamma^5) &= 0 \end{aligned}$$

2.

$$Tr(\gamma^{\alpha_1} \dots \gamma^{\alpha_{2n+1}}) = 0$$

3.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 4g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

4.

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma})$$

5.

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -2\gamma^\nu \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4g^{\rho\nu} \\ \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma_\mu \gamma^\beta \gamma_\nu &= -2\gamma^\beta \gamma_\mu \gamma^\alpha \end{aligned}$$

Toelichting

ad 2 Deze uitdrukking vinden we door de eenheidsmatrix $\gamma^5 \gamma^5 = 1$ en gebruikte maken van de relatie:

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$$

ad 4 Voor deze uitdrukking gebruiken we de volgende afleiding:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= \text{Tr}((2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma^\rho \gamma^\sigma) \\ &= 2g^{\mu\nu} \text{Tr}(\gamma^\rho \gamma^\sigma) - \text{Tr}(\gamma^\nu (2g^{\mu\rho} - \gamma^\rho \gamma^\mu) \gamma^\sigma) \\ &= 8g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 8g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\rho (g^{\mu\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\mu)) \\ &= 8(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma}) - \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) \end{aligned}$$

Met behulp van bovenstaande spooridentiteiten vinden we voor de werkzame doorsnede:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{2|q|^4} (8E_i E_f - 4p_i p_f + 4m^2) \quad (5.1.20)$$

Deze formule is nog om te werken naar een herkenbaardere vorm als we de verstrooiingshoek θ invoeren. Deze is gedefinieerd als de hoek tussen de baan van het ingaande en het uitgaande deeltje en is dus gelijk aan de hoek tussen \vec{p}_i en \vec{p}_f .

Opgave 34 *Laat zien dat*

$$8E_i E_f - 4p_i p_f + 4m^2 = 8E^2 \left(1 - \beta^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad (5.1.21)$$

en

$$|\vec{q}|^4 = 16|p|^4 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.1.22)$$

(met $\beta = v/c$.)

Met behulp van de relaties uit bovenstaande opgave schrijven we de werkzame doorsnede om van een uitdrukking in \vec{p}_i en \vec{p}_f naar een uitdrukking in de verstrooiingshoek θ . Uiteindelijk vinden we zo de formule voor de zogenaamde Mott werkzame doorsnede (1929):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{4p^2\beta^2 \sin^4(\frac{\theta}{2})} (1 - \beta^2 \sin^2(\frac{\theta}{2})) \quad (5.1.23)$$

We merken op dat in de niet-relativistische limiet ($\beta \rightarrow 0$) we de bekende Rutherford verstrooiingsformule terugvinden. Op analoge wijze kunnen we ook positron-verstrooiing berekenen.

5.2 Møller verstrooiing

Als voorbeeld van een berekening van een tweede-orde proces zullen we in deze paragraaf de werkzame doorsnede voor elastische electron-electron verstrooiing in detail berekenen. Dit proces werd voor het eerst in 1932 door Møller berekend.

We zullen de berekening stapsgewijze uitvoeren. Allereerst zullen we de vorm van de overgangsamplitude beschouwen (a). De in deze uitdrukking voorkomende operatoren kunnen we wegwerken door gebruik te maken van de (anti)commutatierelaties (b). De uitdrukking die we zo vinden bevat nog een aantal integralen die we moeten uitvoeren (c). Hieruit volgt het tweede orde matrix element (d). Door dit te kwadrateren en met de geëigende factoren te vermenigvuldigen vinden we de werkzame doorsnede in zijn ruwe vorm (e). Spin-middeling en uitintegreren van de kinematische constraints geeft dan het gewenste resultaat.

5.2.1 De amplitude

De uit te rekenen amplitude is van de vorm $\langle f|S^{(2)}|i \rangle$. Zoals eerder opgemerkt, maken we de inkomende en uitgaande toestand door creatie operatoren op het vacuüm te laten werken. Als inkomende toestand nemen we twee electronen: $b^\dagger(p_1, s_1)b^\dagger(p_2, s_2)|0 \rangle$, als uitgaande toestand nemen we $\langle 0|b(p'_2, s'_2)b(p'_1, s'_1)$. De enige term van de tweede orde S-matrix die relevant is voor dit proces is de term III uit (4.4.42), we schrijven:

$$S_M^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 : \bar{\psi}(x_1) \underbrace{A(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)A(x_2)} \psi(x_2) : \quad (5.2.24)$$

Als we de operatorexpansies van het Dirac-veld in $\langle f|S_M^{(2)}|i \rangle$ substitueren, dan is het duidelijk dat we van de Diracvelden alleen het electron creatie- of annihilatiestuk nodig hebben.

Opgave 35 Controleer dat alleen $\bar{\psi}^-(x_1)$, $\psi^+(x_1)$, $\bar{\psi}^-(x_2)$ en $\psi^+(x_2)$ nodig zijn voor de berekening van de amplitude, waarbij:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^-(x_1) &= \int \frac{d^3 k'_1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_{k'_1}}} \sum_{r'_1} b^\dagger(k'_1, r'_1) \bar{u}(k'_1, r'_1) e^{ik'_1 x_1} \\ \psi^+(x_1) &= \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_{k_1}}} \sum_{r_1} b(k_1, r_1) u(k_1, r_1) e^{-ik_1 x_1}\end{aligned}\quad (5.2.25)$$

De contractie tussen de twee foton velden $A(x_1)$ en $A(x_2)$ is, op de γ -matrices na, de foton-propagator:

$$\underbrace{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x_1-x_2)} \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \quad (5.2.26)$$

We hebben nu alle ingrediënten in handen om de uitdrukking voor de amplitude op te schrijven.

5.2.2 Het wegwerken van de operatoren

Als we bovenstaande kennis gebruiken kunnen we de amplitude schrijven als een aantal integralen over een operator-uitdrukking die we m zullen noemen.

$$m = \langle 0 | b(p'_2, s'_2) b(p'_1, s'_1) : b^\dagger(k'_1, r'_1) b(k_1, r_1) b^\dagger(k'_2, r'_2) b(k_2, r_2) : b^\dagger(p_1, s_1) b^\dagger(p_2, s_2) | 0 \rangle$$

\vec{k}'_1 en r'_1 zijn de impuls respectievelijk spin die voorkomen in de expansie van $\bar{\psi}^-(x_1)$. Zo horen k_1 en r_1 bij $\psi^+(x_1)$, k'_2 en r'_2 bij $\bar{\psi}^-(x_2)$ en k_2 en r_2 bij $\psi^+(x_2)$.

Opgave 36 Voer de normaalordering in bovenstaande uitdrukking uit, en werk de uitdrukking om naar een uitdrukking van de vorm $\langle l | r \rangle$, waarbij

$$\langle l | = | r' \rangle^\dagger \quad (5.2.27)$$

(het accent bij $|r\rangle$ betekent dat alle argumenten in de expansie van $|r\rangle$ een accent krijgen.)

Voor $|r\rangle$ vinden we:

$$|r\rangle = b(k_1, r_1) b(k_2, r_2) b^\dagger(p_1, s_1) b^\dagger(p_2, s_2) |0\rangle \quad (5.2.28)$$

Opgave 37 Laat zien met behulp van de anticommutatiereLATIES dat dit gelijk is aan:

$$(-\delta_{r_1, s_1} \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{p}_1) \delta_{r_2, s_2} \delta^3(\vec{k}_2 - \vec{p}_2) + \delta_{r_2, s_1} \delta^3(\vec{k}_2 - \vec{p}_1) \delta_{r_1, s_2} \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{p}_2)) |0\rangle$$

Aangezien $|r\rangle$ nu te schrijven is als een distributie maal de grondtoestand, is vanwege (5.2.27) en gebruik makend van $\langle 0|0\rangle = 1$, m te schrijven als een uitdrukking in produkten van δ -functies:

$$m = \left(-\delta_{r'_1 s'_1} \delta_{r'_2 s'_2} \delta^3(\vec{k}'_1 - \vec{p}'_1) \delta^3(\vec{k}'_2 - \vec{p}'_2) + \delta_{r'_2 s'_1} \delta_{r'_1 s'_2} \delta^3(\vec{k}'_2 - \vec{p}'_1) \delta^3(\vec{k}'_1 - \vec{p}'_2) \right) \\ \left(-\delta_{r_1 s_1} \delta_{r_2 s_2} \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{p}_1) \delta^3(\vec{k}_2 - \vec{p}_2) + \delta_{r_2 s_1} \delta_{r_1 s_2} \delta^3(\vec{k}_2 - \vec{p}_1) \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{p}_2) \right) \quad (5.2.29)$$

5.2.3 Het uitvoeren van de impulsintegralen

We kunnen de integralen over k_1, k'_1, k_2, k'_2 en de sommatie over de r_1, r'_1, r_2 en r'_2 gebruiken om de δ -functies uit te integreren en sommeren. We vinden dan:

$$\langle f | S_M^{(2)} | i \rangle = \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 W \quad (5.2.30)$$

waarbij

$$W = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{\sqrt{E_{p_1} E_{p'_1} E_{p_2} E_{p'_2}}} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-ie^{-iq(x_1-x_2)}}{q^2 + i\varepsilon} \cdot \\ \left\{ \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\mu u(p_2, s_2) e^{i(p'_1-p_1)x_1} e^{i(p'_2-p_2)x_2} \right. \\ - \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\mu u(p_2, s_2) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\mu u(p_1, s_1) e^{i(p'_1-p_2)x_1} e^{i(p'_2-p_1)x_2} \\ - \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma^\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma_\mu u(p_2, s_2) e^{i(p'_2-p_1)x_1} e^{i(p'_1-p_2)x_2} \\ \left. + \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma^\mu u(p_2, s_2) \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma_\mu u(p_1, s_1) e^{i(p'_2-p_2)x_1} e^{i(p'_1-p_1)x_2} \right\}$$

Het ligt voor de hand om achtereenvolgens de integralen over x_1, q en x_2 uit te voeren, aangezien deze vanwege de e -machten aanleiding geven tot δ -functies voor de impulsen p .

Opgave 38 Voer deze integralen uit.

We zien dat alle termen aanleiding geven tot $2\pi^4 \delta^4(p'_2 - p_2 + p'_1 - p_1)$ zoals te verwachten is vanwege impulsbehoud. Ook zien we dat de integraal over q bij de eerste en vierde term aanleiding geeft tot de voorwaarde $q = p'_1 - p_1$ en bij de tweede en derde term tot $q = p'_1 - p_2$.

5.2.4 De overgangsamplitude

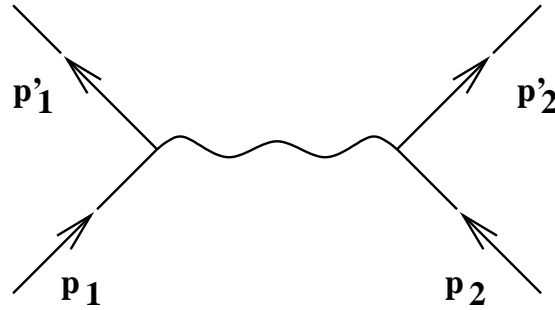
Uit bovenstaande berekeningen volgt het door ons gezochte matrix element.

$$\langle f | S_M^{(2)} | i \rangle = \frac{m^2}{(2\pi)^6 \sqrt{E_{p_1} E_{p_2} E_{p'_1} E_{p'_2}}} (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) A \quad (5.2.31)$$

waarbij A een Lorentzinvariante amplitude is:

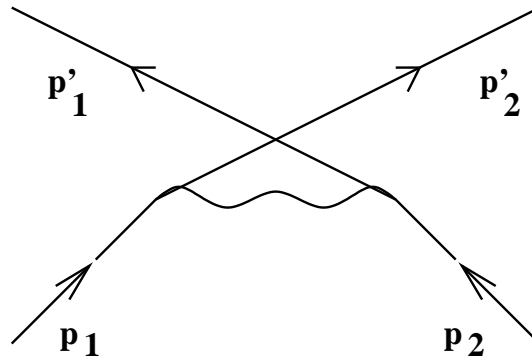
$$A = \frac{2(-ie)^2}{2!} \left\{ \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\mu u(p_2, s_2) \frac{-i}{(p'_1 - p_1)^2} \right. \\ \left. - \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma^\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma_\mu u(p_2, s_2) \frac{-i}{(p'_2 - p_1)^2} \right\} \quad (5.2.32)$$

De eerste term is de som van de eerste en laatste term in (5.2.31) en we kunnen deze aangeven met onderstaand Feynman-diagram I.



Figuur 5.2: Diagram voor eerste term van verg. (5.2.32)

De tweede term is de som v.d. tweede en derde term in (5.2.31) en staat weergegeven in het volgende Feynman-diagram.



Figuur 5.3: Diagram voor tweede term van verg. (5.2.32)

Merk op dat voor de tweede term een relatief minteken staat. Dit teken is terug te voeren op de Fermi-statistiek van de electronen. We kunnen hiermee de overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid per eenheid van volume opschrijven:

$$W_{fi} = \frac{|S_{fi}|^2}{VT} = \frac{m^4}{(2\pi)^{12} E_{p_1} E_{p'_1} E_{p_2} E_{p'_2}} |A|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \quad (5.2.33)$$

waarbij het kwadraat van de deltafunctie weer wordt geïnterpreteerd zoals in in paragraaf 4.1. Het 'ruimte-tijdvolume' VT dat voorkomt wordt meteen weer weggedeeld.

5.2.5 De werkzame doorsnede

De kans op een eindtoestand met impuls \vec{p}'_1 in het impulsruimte interval $d\vec{p}'_1$ en impuls \vec{p}'_2 in het impulsruimte interval $d\vec{p}'_2$ is gelijk aan:

$$dR = \frac{W_{fi}}{2!} d^3\vec{p}'_1 d^3\vec{p}'_2 \quad (5.2.34)$$

Over de factor $2!$ valt het volgende op te merken. Omdat in de quantummechanica geen onderscheid te maken is tussen identieke deeltjes, moeten we in het geval er m identieke deeltjes in de uitgaande toestand zitten delen door het aantal permutaties van deze deeltjes, d.w.z. $m!$ Omdat we in het onderhavige geval twee uitgaande electronen hebben geeft dat een extra factor $2!$

Om tot een werkzame doorsnede te komen moeten we delen door het aantal interacties per eenheid van tijd en eenheid van volume. Dit aantal wordt gegeven door $\rho_1\rho_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}{(2\pi)^6}$. Zo krijgen we voor de differentiële werkzame doorsnede:

$$d\sigma = \frac{m^4}{2!(2\pi)^6 E_{p_1} E_{p'_1} E_{p_2} E_{p'_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} |A|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) d^3p'_1 d^3p'_2 \quad (5.2.35)$$

5.2.6 De middeling over spins

Wanneer we echter niet geïnteresseerd zijn in de polarisatie van de electronen moeten we middelen over de mogelijke spin-toestanden van de ingaande deeltjes en sommeren over de mogelijke spin-toestanden van de uitgaande deeltjes:

$$d\bar{\sigma} = \frac{1}{2} \sum_{s_1} \frac{1}{2} \sum_{s_2} \sum_{s'_1} \sum_{s'_2} d\sigma \quad (5.2.36)$$

Bij deze berekening maken we gebruik van de spooridentiteiten uit paragraaf 5.1. Het gaat om de sommatie en middeling over spins van $|A|^2$, welke gegeven wordt door:

$$\begin{aligned} |A|^2 &= e^4 \left[\frac{1}{(p_1 - p'_1)^4} \bar{u}'_1 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_1 \gamma^\nu u'_1 \bar{u}'_2 \gamma_\mu u_2 \bar{u}_2 \gamma_\nu u'_2 \right. \\ &\quad - \frac{1}{(p_1 - p'_1)^2 (p_1 - p'_2)^2} \bar{u}'_1 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_1 \gamma^\nu u'_2 \bar{u}'_2 \gamma_\mu u_2 \bar{u}_2 \gamma_\nu u'_1 \\ &\quad \left. + (p'_1 \leftrightarrow p'_2) \right] \quad (5.2.37) \end{aligned}$$

waarin met $(p'_1 \leftrightarrow p'_2)$ bedoeld wordt dat we dezelfde twee termen herhalen met p'_1 en p'_2 verwisseld.

Opgave 39 *Laat zien dat net als in paragraaf 5.1 "middelen over spins" het resultaat als volgt geschreven kan worden in termen van sporen:*

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} |A|^2 = \frac{e^4}{4(2m)^4} \left[\frac{1}{(p_1 - p'_1)^4} T_1 - \frac{1}{(p_1 - p'_2)^2 (p_1 - p'_1)^2} T_2 + (p'_1 \leftrightarrow p'_2) \right] \quad (5.2.38)$$

waarbij

$$\begin{aligned} T_1 &= \text{Tr}[(\not{p}'_1 + m)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{p}'_2 + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\nu] \\ T_2 &= \text{Tr}[(\not{p}'_1 + m)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}'_2 + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\nu] \end{aligned} \quad (5.2.39)$$

M.b.v. de spooridentiteiten uit paragraaf 5.1 kunnen deze sporen T_1 en T_2 uitgerekend worden.

Opgave 40 Laat zien dat T_1 geschreven kan worden als:

$$\begin{aligned} T_1 &= 4(p_1'^\mu p_1^\nu + p_1'^\nu p_1^\mu - g^{\mu\nu}(p_1' \cdot p_1) + m^2 g^{\mu\nu}) \\ &\quad 4(p_2'^\mu p_2^\nu + p_2'^\nu p_2^\mu - g_{\mu\nu}(p_2' \cdot p_2) + m^2 g_{\mu\nu}) \\ &= 32 \left[2(p_1 \cdot p_2)^2 + 2(p_1 \cdot p_2')^2 + 4m^4 - 4m^2(p_1 \cdot p_1') \right] \end{aligned} \quad (5.2.40)$$

waarbij gebruikt is dat $p_1 \cdot p_2 = p_1' \cdot p_2'$; $p_1 \cdot p_1' = p_2 \cdot p_2'$; $p_1 \cdot p_2' = p_1' \cdot p_2$ vanwege de relaties $p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$ en $p^2 = p'^2 = m^2$.

Opgave 41 Laat zien dat op analoge wijze T_2 geschreven kan worden als:

$$T_2 = 32 \left(2m^2(p_1 \cdot p_2) - (p_1 \cdot p_2)^2 \right) \quad (5.2.41)$$

We krijgen hiermee de volgende uitdrukking voor de werkzame doorsnede, gesommeerd en gemiddeld over de spins:

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma} &= \frac{e^4}{4(2\pi)^6 E_{p_1} E_{p_1'} E_{p_2} E_{p_2'}} d^3 p_1' d^3 p_2' (2\pi)^4 \delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) \cdot \\ &\quad \left[\frac{1}{(p_1 - p_1')^4} \left((p_1 \cdot p_2)^2 + (p_1 \cdot p_2')^2 + 2m^4 - 2m^2(p_1 \cdot p_1') \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(p_1 - p_2')^2 (p_1 - p_1')^2} \left(2m^2(p_1 \cdot p_2) - (p_1 \cdot p_2)^2 \right) + (p_1' \leftrightarrow p_2') \right] \end{aligned} \quad (5.2.42)$$

Dit is een covariante uitdrukking dus geldig in elk inertiaal stelsel. We kunnen de werkzame doorsnede in een herkenbare vorm brengen door over te gaan naar een stelsel waar het massa middelpunt van de inkomende deeltjes in rust is. Dit betekent dat $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$; $\vec{p}_1' = -\vec{p}_2'$ (vanwege impuls behoud) en $E_1 = E_2 = E_1' = E_2' = E$; $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}_1'| = |\vec{p}_2'| = p$ (vanwege energie en impuls behoud), omdat we te doen hebben met elastische verstrooiing. Voeren we de verstrooiingshoek θ in, als de hoek tussen de ingaande en uitgaande baan van een electron (dus tussen \vec{p}_1 en \vec{p}_1'), dan zijn E en θ de enige kinematische variabelen waar de werkzame doorsnede van af kan hangen. De zojuist genoemde kinematische constraints worden geïmplementeerd door in de uitdrukking (5.2.42) over vier variabelen te integreren en zo de vierdimensionale δ -functie te elimineren. We integreren over $d^3 p_2'$ en over $d|p_1'|$ nadat we voor p_1' overgegaan zijn op polaire coördinaten ($d^3 p_1' = |\vec{p}_1'|^2 d|\vec{p}_1'| d\Omega$, met

$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$). Voor de verschillende variabelen die in (5.2.42) voorkomen vinden we de volgende uitdrukkingen in termen van E en θ :

$$\begin{aligned} (p_1 - p'_1)^2 &= -4p^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & (p_1 - p'_2)^2 &= -4p^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ p_1 \cdot p'_1 &= 2E^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + m^2 \cos(\theta) & p_1 \cdot p'_2 &= 2E^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - m^2 \cos(\theta) \\ p_1 \cdot p_2 &= E^2 + p^2 = 2E^2 - m^2 & \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^4} &= 2Ep \end{aligned} \quad (5.2.43)$$

Nadat deze bewerkingen zijn uitgevoerd vinden we tenslotte de differentiële werkzame doorsnede in termen van de verstrooiingshoek θ :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} &= \frac{\alpha^2}{64E^2 p^4} \left\{ \frac{2}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} (2E^2 - m^2)(2p^2 - m^2) \right. \\ &\quad + \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[(E^2 + p^2)^2 + (E^2 + p^2 \cos \theta)^2 - 2m^2(E^2 - p^2 \cos \theta) + 2m^4 \right] \\ &\quad \left. + \frac{1}{\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[(E^2 + p^2)^2 + (E^2 - p^2 \cos \theta)^2 - 2m^2(E^2 + p^2 \cos \theta) + 2m^4 \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.2.44)$$

Hier is α de fijnstructuurconstante ($\alpha = e^2/4\pi = 1/137$), de dimensieloze expansie parameter van de storingsreeks. Merk op dat er symmetrie is t.o.v. $\theta \rightarrow \pi - \theta$ (voorwaarts-achterwaarts symmetrie). We zien dat de werkzame doorsnede singulier is voor $\theta = 0$ waardoor de totale geïntegreerde doorsnede divergeert. Dit is zoals eerder opgemerkt een gevolg van het langedrachts karakter van de wisselwerking.

Opgave 42 Bestudeer de niet-relativistische limiet van de bovenstaande formule, waar $p = \beta E \ll E$ en $E \approx m$. Vergelijk het resultaat voor kleine θ met de Mott werkzame doorsnede.

Opgave 43 Ga na wat er verandert in de berekening als we elastische electron-positron verstrooiing beschouwen.

5.3 Algemene uitdrukkingen en Feynman-regels

Nu we het voorbeeld van Møller verstrooiing in detail bekeken hebben, is het zinnig om de procedure te geven voor het berekenen van de werkzame doorsnede voor processen met twee inkomende en n uitgaande deeltjes. De formule voor de werkzame doorsnede is dan:

$$d\sigma = \frac{m_1 m_2}{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}} |A|^2 (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_{i=1}^n p_i'^2 - p_1^2 - p_2^2\right) dR_n \quad (5.3.45)$$

Hier is A de Lorentzinvariante amplitude (zoals in vergelijking (5.2.32) welke met behulp van de zodadelijk te geven Feynman-regels direct kan worden neergeschreven.

De grootheid dR_n geeft effectief de dichtheid van toestanden voor de uitgaande deeltjes:

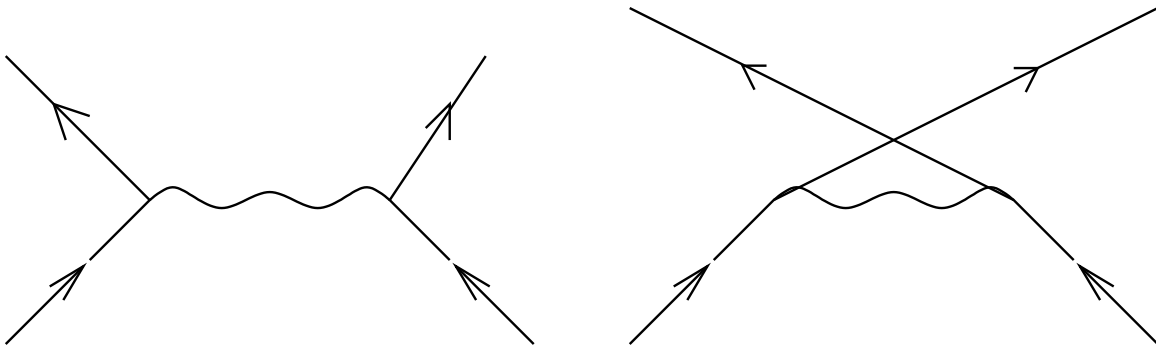
$$dR_n = \prod_{i=1}^n \frac{m_i}{E_i} \frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^3} S \quad (5.3.46)$$

waarbij opgemerkt moet worden dat de *statistische factor* S een factor $1/m!$ bevat voor iedere set van m *identieke* uitgaande deeltjes. De factor m/E is afkomstig van onze normalisatie van de spinorvelden, en dient in geval er sprake is van een uitgaand foton vervangen te worden door $1/2\omega$. Wanneer we de doorsnede voor een volledig ongepolariseerd experiment willen berekenen, moeten we nog middelen over de spintoestanden van de inkomende deeltjes en sommeren over die van de uitgaande deeltjes:

$$d\bar{\sigma} = \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} \sum_{s'_1, \dots, s'_n} d\sigma \quad (5.3.47)$$

Het blijkt dat een berekening zoals we die expliciet hebben uitgevoerd aanzienlijk vereenvoudigt wanneer we gebruik maken van de Feynman-regels die ons in staat stellen om meteen de diagrammen en de daarbij behorende uitdrukking voor de Lorentzinvariante amplitude A op te schrijven. Voor Quantum Electrodynamica zijn de regels de volgende:

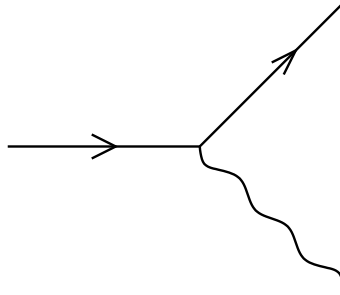
1. Om de amplitude A tot op $n - de$ orde te berekenen moeten we eerst alle topologisch verschillende, samenhangende diagrammen tekenen, met $p \leq n$ vertices, waarbij een vertex het knooppunt is waar twee fermion-lijnen en één foton-lijn samenkomen. Het aantal externe lijnen moet overeenkomen met het aantal in- en uitgaande lijnen. We labelen alle lijnen in het diagram met georiënteerde vierimpulsen waarbij impulsbehoud bij elke vertex in acht genomen wordt. $A^{(n)}$ is dan de som over deze diagrammen, waarbij diagrammen welke uit elkaar verkregen worden door een oneven permutatie van externe fermion-lijnen een relatief minteken krijgen. Zo zijn de volgende diagrammen topologisch verschillend en krijgen een relatief minteken:



Figuur 5.4: Deze diagrammen hebben een relatief minteken.

2. Voor elke vertex krijgen we een vier-vector

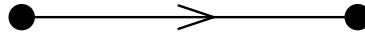
$$-ie\gamma_\mu$$



Figuur 5.5: De vertex.

3. Voor iedere interne fermion-lijn een factor

$$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$



Figuur 5.6: De fermion-propagator.

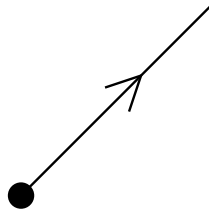
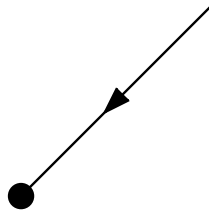
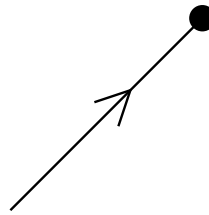
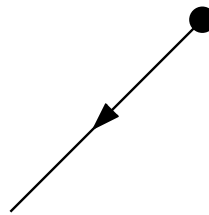
4. Voor iedere interne foton-lijn een factor

$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$



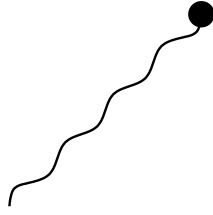
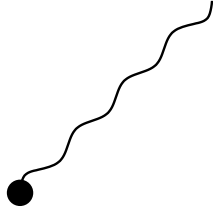
Figuur 5.7: De foton-propagator.

5. Langs een ononderbroken fermion-lijn staan de pijlen in dezelfde richting. Deze pijl geeft de richting aan waarin de fermionlading loopt. Voor elke gesloten fermionlijn krijgen we een factor -1 .
6. Bij elke vertex is er impulsbehoud. D.w.z. dat de som van de impulsen van de inkomende lijnen is gelijk aan de som van de impulsen van de uitgaande lijnen. Een integraal over $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ wordt uitgevoerd voor de impulsen van interne lijnen die nog niet vastliggen na toepassen van bovenstaande regel. Dit komt alleen voor bij lusdiagrammen.
7. Voor de externe lijnen krijgen we de volgende factoren:

Figuur 5.8: $\bar{u}(\vec{p}, s)$ voor een uitgaand electronFiguur 5.9: $v(\vec{p}, s)$ voor een uitgaand positronFiguur 5.10: $u(\vec{p}, s)$ voor een inkomend electronFiguur 5.11: $\bar{v}(\vec{p}, s)$ voor inkomend positron

Met deze Feynman-regels kunnen we zoals gezegd uit de Feynman-diagrammen voor een proces meteen de amplitude halen. Als voorbeeld hiervan zullen we de berekening van de Møller-verstrooiing herhalen, maar nu m.b.v. Feynman-regels. De topologisch verschillende Feynman-diagrammen hebben we eerder in dit hoofdstuk al gegeven.

Om een diagram om te zetten in een formule voor een amplitude handelen we als volgt:

Figuur 5.12: $\varepsilon^{(\lambda)\mu}(\vec{k})$ voor een inkomend fotonFiguur 5.13: $\varepsilon^{*(\lambda)\mu}(\vec{k})$ voor een uitgaand foton

1. Het diagram bevat twee vertices, dat geeft een voorfactor $(-ie)^2$.
2. We volgen nu de externe fermion lijnen tegen de richting van de pijlen in dus van het eind naar het begin als het ware. Op deze wijze komen de spinoren en de γ -matrices van de vertices in de juiste volgorde te staan. Dit geeft voor het eerste diagram

$$A_I = (-ie)^2 \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma_\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\nu u(p_2, s_2) \quad (5.3.48)$$

en voor het tweede

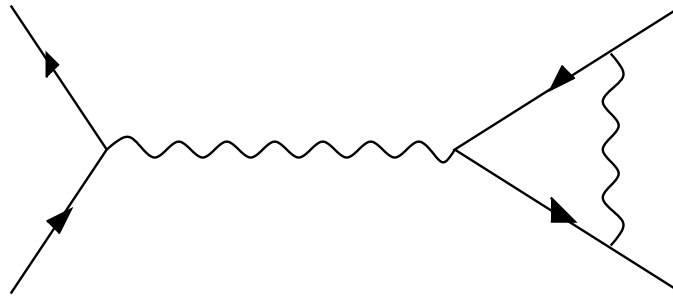
$$A_{II} = (-ie)^2 \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma_\nu u(p_2, s_2) \quad (5.3.49)$$

3. Voeg de fotonpropagator toe.
4. De enige andere Feynmanregel die we in dit eenvoudige geval nog moeten toepassen is het relatieve minteken tussen de bijdragen van beide diagrammen.

Als we nu beide bijdragen samenvoegen vinden we inderdaad de uitdrukking voor A uit (5.2.32) terug. Hiermee kunnen we vervolgens op dezelfde manier weer tot een werkzame doorsnede komen. We zien dat we met deze methode ook voor heel ingewikkelde processen snel de amplitude kunnen berekenen.

Opgave 44 Geef de amplitude behorende bij het volgende diagram:

Bovenstaande amplitude bevat een viervoudige integraal over een impuls die ‘rondloopt’ in de lus en die niet door impulsbehoud vastligt in termen van de externe momenta. Deze integraal divergeert en dit leidt tot aanzienlijke complicaties in het



berekenen en interpreteren van hogere orde diagrammen. Deze problematiek wordt opgelost middels de zogenaamde *renormalisatie* procedure. Hoewel dit aspect een essentieel onderdeel uitmaakt van de quantum veldentheorie, kunnen we er in dit inleidende college niet verder op ingaan.