SYLLABUS LOGISCHE ANALYSE

FRANK VELTMAN
(MET BIJDRAGEN VAN KAREN KWAST EN EMAR MAIER)
AFDELING WIJSBEGEERTE
FACULTEIT DER GEESTESWETENSCHAPPEN
UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

2004-2007

Inhoudsopgave

Vooraf

In de propedeuse heeft U kennis gemaakt met één logische theorie, de klassieke predikatenlogica. Het belangrijkste dat U daarbij geleerd heeft, is die theorie als analyse-instrument te gebruiken, zodat U filosofische teksten waarin die theorie zo gebruikt wordt op hun waarde kan schatten. In deze cursus wordt de aandacht gericht op andere aspecten van de logica-beoefening:

- **Metalogica**, oftewel onderzoek naar de eigenschappen van logische theorieën.
- **Logische Analyse**, i.e. het ontwikkelen en vergelijken van logische theorieën.

De eerstgenoemde activiteit staat centraal in Hoofdstuk 1 en in mindere mate hoofdstuk 2, de laatsgenoemde in Hoofdstuk 3 en 4. Hoofdstuk 2 heeft voornamelijk tot doel u in te leiden in de wiskundige theorie die binnen de logica zelf het meest gebruikt wordt, de verzamelingenleer.

De hoofddoelstellingen van deze cursus zijn (i) U de vaardigheden bij te brengen die een rol spelen in de verschillende fasen van het proces van logische analyse en (ii) U kennis te laten met het soort produkten waar zo'n analyse toe leidt.

Voor de specifieke invulling van het programma zijn een aantal factoren medebepalend geweest:

Om louter didactische redenen wordt de stof van Hoofdstuk 1 en Hoofdstuk 2 vóór die van Hoofdstuk 3 en Hoofdstuk 4 behandeld. Je moet een een metalogisch gezichtspunt kunnen innemen, i.e. een beetje 'van buiten af' tegen de theorie aan kunnen kijken, voordat je een logische theorie kunt evalueren, amenderen etc.

Hoofdstuk 1 sluit aan op het propedeuseblok Logica 1 zodat de eerste metalogische stellingen die U onder ogen krijgt betrekking hebben op een al enigszins vertrouwd systeem. Hier leert U belangrijke metalogische bewijsmethoden (formule-inductie, inductie naar de lengte van het bewijs) toepassen, en maakt U kennis met begrippen als axiomatiseerbaarheid en consistentie. Een en ander mondt uit in een behandeling van de volledigheidstelling voor het natuurlijk deductiesysteem uit L.T.F. Gamut *Logic, Language, and Meaning. Volume 1: Introduction to Logic*.

In hoofdstuk 2 zult U aan den lijve ondervinden wat het is om axiomatisch te werk te gaan. De belangrijkste wiskundige noties (verzameling, relatie, functie, getal), worden uit een vijftal axioma's over de ϵ-relatie ontwikkeld. Een en ander mondt uit in een analyse van het oneindigheidsbegrip, waarbij het onderscheid tussen aftelbaar oneindig en overaftelbaar oneindig het sluitstuk vormt. In de resterende hoofdstukken wordt het verzamelingtheoretische begrippenapparaat voortdurend gebruikt.

Het onderwerp van Hoofdstuk 3 is *Vaagheid*. Dit niet zozeer omdat het onderwerp zelf zo van centraal belang is, maar omdat er over vaagheid verschillende theorieën op de markt zijn, geen van alle erg moeilijk te doorzien, en daarom zeer geschikt om te leren wat het is om een logische theorie kritisch te evalueren, en zelf eventueel alternatieven te ontwikkelen. De belangrijkste filosofische les die uit dit hoofdstuk te leren valt is dat de natuurlijke taal niet zomaar vaag is — zomaar omdat de sprekers ervan bij wijze van spreken te lui zijn om precies te zijn. Nee, vaagheid is een intrinsieke eigenschap van de natuurlijke taal; we kúnnen soms niet precies zijn, ook al zouden we willen.

In hoofdstuk 4 en 5 maakt U kennis met enkele *intensionele logica's*. Dit soort logica's wordt momenteel het meest toegepast, zowel binnen de filosofie als in de informatica en linguistiek. Daarbij wordt begonnen met tijdslogica omdat deze filosofisch het makkelijkst te motiveren is. De theorie der ordeningen, die wordt behandeld in aansluiting op Hoofdstuk 2, geeft een goed uitgangspunt bij beantwoording van de de vraag hoe we verschillende ideeën over de 'Tijd' in een mathematisch model vorm kunnen geven. Epistemische logica, het onderwerp van hoofdsuk 5, is vanuit technisch oogpunt een stuk minder gecompiceerd dan tijdslogica, maar de filosofische complicaties zijn des te groter.

Uit het bovenstaande zal duidelijk geworden zijn dat het niet de pretentie van deze cursus is om een encyclopedisch overzicht te geven van het vak logica. Het voornaamste doel is duidelijk te maken wat voor *aktiviteiten* de beoefening van het vak met zich meebrengt. Dat lijkt de beste manier om U in staat te stellen te beslissen of U zich verder in de logica wil en kan specialiseren. De onderwerpen zijn daarbij zo gekozen dat de rol van de logica binnen wetenschap en filosofie duidelijk wordt: de logica is er om begripsverheldering aan te brengen daar waar begripsverwarring heerst. (Merk op dat in elk van de hoofdstukken 2, 3, 4, en 5 een of meerdere paradoxen behandeld worden).

Werkwijze

Er zijn twee bijeenkomsten per week. Deze hebben de vorm van een gemengd hoor/werkcollege.

Toetsing

Er zij drie toetsmomenten. Één van de collegebijeenkomsten wordt gereserveerd voor een schriftelijke tentamen waarin basisvaardigheden als het maken van natuurlijke deducties en het rekenen met verzamelingen getoetst worden. Verder is er een meeneemtentamen dat bestaat uit een aantal opgaven die testen inhoeverre U zich de metalogische aanpak heeft eigen gemaakt. Tenslotte worden ook de meer filosofische vaardigheden getoetst met een meeneemtentamen.

De data waarop de toetsingen plaatshebben worden in overleg vastgesteld.

Data

Collegetijden:

- dinsdag, 15.15-17.00, OMP C123.
- donderdag, 09.15-11.00, OMP C123.

Hoofdstuk 1

Metalogica

1.1 Inleiding

Als het goed is, begint u dit te lezen na kennis gemaakt te hebben met het natuurlijke deductiesysteem voor talen van de propositielogica. U heeft daarbij geleerd afleidingen te maken *in* dat systeem, en een aantal opgaven gemaakt van het volgende soort:

Opgave 1 Maak afleidingen die aantonen dat
(a) $\vdash (p \rightarrow \neg p) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow \neg q)$
(b) $(q \vee p) \wedge (q \vee \neg p) \vdash q$
(c) $\vdash (p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow \neg q)$
(d) $p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg(p \rightarrow s), \neg q \rightarrow s, (r \wedge q) \rightarrow s \vdash \bot$

Misschien zijn er ook wel enige stellingen *over* dat systeem bewezen, het soort stellingen als vermeld in de volgende opgave.

Opgave 2 Zij Δ een verzameling premissen. Dan geldt:
(a) Als er een afleiding bestaat van φ uit Δ, dan bestaat er een afleiding van φ uit Δ waarin nergens de herhalingsregel gebruikt wordt.
(b) Als er een afleiding bestaat van φ uit Δ, dan bestaat er een afleiding van φ uit Δ waarin nergens de regel $EFSQ$ gebruikt wordt.

In dit hoofdstuk gaan we meer stellingen *over* het natuurlijk deductiesysteem bewijzen. Daarbij gaat het er vooral om het syntactische *afleidbaarheids*-begrip, zoals dat in dit natuurlijke deductiesysteem is vastgelegd, te vergelijken met het semantische *geldigheids*-begrip, waarmee u in het propedeuseblok kennis heeft gemaakt.
In het volgende schrijven we

$$\Delta \vdash \varphi$$

als afkorting van 'Er bestaat een natuurlijke deductie uitmondend in de conclusie φ' waarin als premissen alleen zinnen uit de verzameling Δ worden gebruikt . Iets minder precies zeggen we in dat geval ook wel kortweg 'φ is afleidbaar uit Δ'.
U dient die afkorting niet te verwarren met deze:

$$\Delta \models \varphi$$

Dit laatste betekent dat φ *logisch volgt* uit Δ in semantische zin, oftewel dat voor elke interpretatie $\mathcal{I}$ voor de atomaire zinnen geldt: als $V_{\mathcal{I}}(\psi) = 1$ voor elke $\psi \in \Delta$, dan geldt ook $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = 1$.

Voornaamste doel in dit hoofdstuk is te laten zien dat de relaties '$\vdash$' en '$\models$', hoewel ze een verschillende betekenis hebben, toch op hetzelfde neerkomen. Met andere woorden: we willen laten zien dat het natuurlijk deductiesysteem zó in elkaar zit dat de notie van 'afleidbaarheid' de notie van 'geldigheid' precies dekt. De correctheidsstelling verzekert ons dat wat syntactisch afleidbaar is ook semantisch geldig is. De volledigheidsstelling beweert het omgekeerde.

Er worden in dit hoofdstuk nog meer stellingen bewezen behalve deze. Daarbij is de keuze geleid door overwegingen van didactische aard. Het gaat om stellingen die met dezelfde methoden bewezen kunnen worden als de methoden die we gebruiken in de bewijzen van correctheidssteling en volledigheidsstelling.

1.2 Propositielogica

1.2.1 De correctheidsstelling

De correctheidsstelling voor de propositielogica stelt dat als een formule ϕ in het systeem van natuurlijke deductie afleidbaar is uit een verzameling premissen Δ, ϕ ook semantisch uit Δ volgt.

Stelling 1 (Correctheidsstelling) $\Delta \vdash \varphi \Rightarrow \Delta \models \varphi$

Voordat we kunnen overgaan tot het bewijs van deze stelling zullen we ons een precies beeld moeten vormen van wat een *afleiding* eigenlijk is. Een afleiding bestaat uit een eindig aantal stappen. Deze stappen kunnen we nummeren. Met het maken van zo'n stap kun je één van de volgende drie dingen doen.

1. Een *premisse* opvoeren.
2. Een *assumptie* invoeren. De bedoeling is dat elke assumptie in de loop van de afleiding weer wordt ingetrokken middels een toepassing van een van de regels $I_{\rightarrow}$, of $I_{\neg}$. Een met een bepaalde stap ingevoerde assumptie mag pas worden ingetrokken als alle na die stap ingevoerde assumpties zijn ingetrokken. Als een bepaalde assumptie, opgevoerd vóór of met stap k, op stap k nog niet is ingetrokken, dan zeggen we dat die assumptie *werkzaam* is op stap k. De verzameling assumpties die werkzaam zijn op stap k duiden we aan met Γ_k.

3. Een van de regels $I_\wedge$, $E_\wedge$, $I_\vee$, $E_\vee$, $I_\rightarrow$, $E_\rightarrow$, $I_\neg$, $E_\neg$, $EFSQ$, $\neg\neg$ of $Herhaling$ toepassen.

Om de correctheidsstelling te bewijzen moeten we laten zien dat voor elke afleiding geldt dat de met de laatste stap in die afleiding verkregen zin φ logisch volgt uit de in die afleiding opgevoerde premissen. We bewijzen iets sterkers, namelijk:

Bewering 1 Beschouw een willekeurige afleiding. Dan geldt voor elke stap n in die afleiding dat de zin die met stap n verkregen wordt, logisch volgt uit de premissen die in die afleiding gebruikt worden *plus* de assumpties die op stap n werkzaam zijn.

Opgave 3 Beredeneer dat de correctheidsstelling volgt uit bewering 1.

Bewering 1 bewijzen we met inductie naar n. Dat is een bewijsmethode die we in deze syllabus nog vele malen zullen gebruiken en het is van het grootste belang dat u deze methode begrijpt en kunt toepassen. Net als nu is het doel steeds om te laten zien dat een bepaalde bewering opgaat voor alle stappen n in een willekeurige afleiding. En dat doel bereiken we door twee dingen aan te tonen:

Basisstap We bewijzen dat de bewering in kwestie opgaat voor stap 1.

Inductiestap We laten zien dat voor alle stappen n het volgende geldt: *Als* de bewering in kwestie opgaat voor alle $k \leq n$, *dan* gaat hij ook op voor stap $n + 1$.

Wanneer het gelukt is de basisstap en de inductiestap te bewijzen, dan achten we daarmee aangetoond dat de bewering in kwestie inderdaad opgaat voor *alle* stappen n. (Gegeven de basisstap gaat de bewering op voor $n = 1$; de inductiestap leert dat hij dan ook opgaat voor $n = 2$; nogmaals toepassen van de inductiestap leert dat hij dan ook opgaat voor $n = 3$, enzovoorts.)

In dit specifieke geval ziet het bewijs er zo uit:

Basisstap: $n = 1$. In de eerste stap van het bewijs kun je maar twee dingen doen:

1. Een premisse opvoeren.
2. Een assumptie invoeren.

In beide gevallen volgt het gestelde onmiddellijk.

Inductiestap: $n + 1$. Neem aan dat het gestelde juist is voor alle stappen tot en met stap n (inductiehypothese). Beschouw stap $n+1$. De volgende mogelijkheden doen zich voor:

1. Op stap $n + 1$ wordt een premisse opgevoerd.
2. Op stap $n + 1$ wordt een assumptie ingevoerd. In deze twee gevallen volgt het gestelde net als hierboven onmiddellijk.
3. Op stap $n + 1$ wordt $\perp$ ingevoerd middels een toepassing van $E_\neg$. In dit geval zal er voor zekere $j \leq n$ en $k \leq n$ gelden dat
   i. Op stap j een bepaalde zin ψ en op stap k de zin $\neg\psi$ verkregen is,

terwijl we er verder zeker van kunnen zijn dat:

ii. Alle assumpties die op de stappen j en k werkzaam zijn ook werkzaam zijn op stap $n+1$. Anders zou $I_\perp$ niet toegepast kunnen zijn.

Er geldt dus $\Gamma_j \subseteq \Gamma_{n+1}$ en $\Gamma_k \subseteq \Gamma_{n+1}$. Laat Δ nu de verzameling in de afleiding gebruikte premissen zijn. De inductiehypothese verzekert ons ervan dat $\Delta \cup \Gamma_j \models \psi$ en $\Delta \cup \Gamma_k \models \neg\psi$. Het is niet moeilijk in te zien dat nu, gegeven het feit dat $\Gamma_j \cup \Gamma_k \subseteq \Gamma_{n+1}$, ook moet gelden dat $\Delta \cup \Gamma_{n+1} \models \perp$.

4. Op stap $n+1$ wordt een zin ψ ingevoerd middels een toepassing van $EFSQ$. In dit geval zal er voor zekere $k \leq n$ gelden dat

   i. Op stap k het falsum $\perp$ verkregen is, terwijl we er verder zeker van kunnen zijn dat:

   ii. Alle assumpties die op de stap k werkzaam zijn ook werkzaam zijn op stap $n+1$. Anders zou $EFSQ$ niet toegepast kunnen zijn.

   Er geldt dus $\Gamma_k \subseteq \Gamma_{n+1}$. Laat Δ nu de verzameling in de afleiding gebruikte premissen zijn. De inductiehypothese verzekert ons ervan dat $\Delta \cup \Gamma_k \models \perp$. Het is niet moeilijk in te zien dat nu, gegeven het feit dat $\Gamma_k \subseteq \Gamma_{n+1}$, ook moet gelden dat $\Delta \cup \Gamma_{n+1} \models \psi$.

5. Op stap $n+1$ wordt een zin van de vorm $\neg\psi$ ingevoerd middels een toepassing van $I_\neg$. In dit geval geldt dat:

   i. $\Gamma_n = \Gamma_{n+1} \cup \{\psi\}$; immers als $\neg\psi$ verkregen wordt met $I_\neg$, dan wordt er bij de toepassing van die regel een assumptie ψ ingetrokken en geen nieuwe assumptie toegevoegd.

   ii. Op regel n is de zin $\perp$ verkregen. De inductiehypothese leert dat $\Delta \cup \Gamma_n \models \perp$; d.w.z. $\Delta \cup \Gamma_{n+1} \cup \{\psi\} \models \perp$. Het is niet moeilijk in te zien dat hieruit volgt dat $\Delta \cup \Gamma_{n+1} \models \neg\psi$.

6. Op stap $n+1$ wordt $I_\wedge$ toegepast. Doe zelf.
7. Op stap $n+1$ wordt $E_\wedge$ toegepast. Doe zelf.
8. Op stap $n+1$ wordt $I_\vee$ toegepast. Doe zelf.
9. Op stap $n+1$ wordt een zin ψ afgeleid middels een toepassing van $E_\vee$. In dat geval zijn er stappen $i \leq n$, $j \leq n$ en $k \leq n$ in de afleiding te vinden zodanig dat:

   i. Bij stap i een zin van de vorm $(\chi \vee \theta)$ verkregen is, bij stap j de zin $(\chi \to \psi)$, en bij stap k de zin $(\theta \to \psi)$, terwijl

   ii. $\Gamma_i \cup \Gamma_j \cup \Gamma_k \subseteq \Gamma_{n+1}$. Op grond van de inductiehypothese mogen we aannemen dat $\Delta \cup \Gamma_i \models (\chi \vee \theta)$, $\Delta \cup \Gamma_j \models (\chi \to \psi)$ en $\Delta \cup \Gamma_k \models (\theta \to \psi)$. Hier volgt zonder veel omslag uit dat $\Delta \cup \Gamma_{n+1} \models \psi$

Opgave 4 In het bovenstaande bewijs staan diverse passages die beginnen met de woorden 'Het is niet moeilijk in te zien dat…'. Misschien had u daar wèl moeite mee. Daarom zetten we ze hier bij elkaar tesamen met een aantal andere die u in de oplossing van de volgende opgave van pas zullen komen. Het geheel kunt u beschouwen als een een lemma, een hulpstelling, die misschien het best vóór de correctheidsstelling bewezen had kunnen worden.

(a) Als $\Delta \models \psi$ en $\Delta \models \neg\psi$, dan $\Delta \models \perp$;
(b) Als $\Delta \models \perp$, dan $\Delta \models \psi$;
(c) Als $\Delta \models \psi$, dan $\Delta \models \psi$;
(d) Als $\Delta, \psi \models \perp$, dan $\Delta \models \neg\psi$;
(e) Als $\Delta \models \psi$ en $\Delta \models \chi$, dan $\Delta \models \psi \wedge \chi$;
(f) Als $\Delta \models \psi \wedge \chi$, dan $\Delta \models \psi$ en $\Delta \models \chi$;
(g) Als $\Delta \models \psi$, dan $\Delta \models \psi \vee \chi$;
(h) Als $\Delta \models (\chi \vee \theta)$ en $\Delta \models (\chi \to \psi)$ en $\Delta \models (\theta \to \psi)$, dan $\Delta \models \psi$;
(i) Als $\Delta, \psi \models \chi$, dan $\Delta \models \psi \to \chi$;
(j) Als $\Delta \models \psi$ en $\Delta \models \psi \to \chi$, dan $\Delta \models \chi$;
(k) Als $\Delta \models \neg\neg\psi$, dan $\Delta \models \psi$;

Opgave 5 Ga na welke stappen in het bewijs van stelling 1 ontbreken en doe van deze tenminste die die in het bewijs zelf als opgave worden genoemd, alsmede de gevallen $I_\to$, $E_\to$ en $\neg\neg$).

1.2.2 Klassieke en intuitionistische logica

Het natuurlijke deductiesysteem dat in stelling 1 aan de orde was staat bekend als het natuurlijke deductiesysteem voor *klassieke* logica. Het natuurlijke deductiesysteem voor *intuitionistische* logica wordt verkregen door uit het klassieke systeem de $\neg\neg$-regel weg te laten. Aan de hand van de volgende stelling zullen we deze twee systemen met elkaar vergelijken.

Stelling 2 Als er een klassieke afleiding voor φ uit Δ bestaat, dan bestaat er een intuitionistische afleiding voor $\neg\neg\varphi$ uit Δ.

Merk op dat de omgekeerde stelling triviaal is. Merk verder op dat de stelling zelf dat niet is. Er volgt onder andere uit dat je, wanneer je dat per se wilt, in elke klassieke afleiding van een zin φ uit een verzameling premissen Δ, het aantal toepassingen van de $\neg\neg$-regel tot hoogstens één kunt beperken.

Voordat we overgaan tot het bewijs van stelling 2 zullen we eerst een hulpstelling (lemma) bewijzen:

Lemma 1 Laat "$\Delta \vdash_i \psi$" staan voor "er is een intuïtionistische afleiding van ψ uit Δ." Er geldt:
(i) $\neg\neg \perp \vdash_i \perp$
(ii) $\neg\neg\varphi, \neg\neg\psi \vdash_i \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$
(iii) $\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash_i \neg\neg\psi$
$\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash_i \neg\neg\varphi$
(iv) $\neg\neg\varphi \vdash_i \neg\neg(\varphi \vee \psi)$; $\neg\neg\psi \vdash_i \neg\neg(\varphi \vee \psi)$
(v) $\neg\neg(\varphi \vee \psi), \neg\neg(\varphi \to \chi), \neg\neg(\psi \to \chi) \vdash_i \neg\neg\chi$
(vi) $\varphi \to \neg\neg\psi \vdash_i \neg\neg(\varphi \to \psi)$

(vii) $\neg\neg\varphi, \neg\neg(\varphi \to \psi) \vdash_i \neg\neg\psi$
(viii) $\neg\neg\neg\neg\varphi \vdash_i \neg\neg\varphi$

Bewijs van lemma 1. We doen als voorbeeld (ii) en (viii).
Bewijs van (viii).

1.	$\neg\neg\neg\neg\varphi$	prem.
2.	$\neg\varphi$	ass.
3.	$\neg\neg\varphi$	ass.
4.	$\bot$	$E_\neg$ 2, 3
5.	$\neg\neg\neg\varphi$	$I_\neg$
6.	$\bot$	$E_\neg$ 1, 5
7.	$\neg\neg\varphi$	$I_\neg$

Bewijs van (ii).

1.	$\neg\neg\varphi$	prem.
2.	$\neg\neg\psi$	prem.
3.	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	ass.
4.	φ	ass.
5.	ψ	ass.
6.	$\varphi \wedge \psi$	$I_\wedge$ 4, 5
7.	$\bot$	$E_\neg$ 3, 6
8.	$\neg\psi$	$I_\neg$
9.	$\bot$	$E_\neg$ 2,8
10.	$\neg\varphi$	$I_\neg$
11.	$\bot$	$E_\neg$ 1, 10
12.	$\neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	$I_\neg$

Opgave 6 Voltooi het bewijs van lemma 1.

We zijn nu voldoende toegerust om tot het bewijs van stelling 2 over te gaan.

Bewijs van stelling 2.
Beschouw een klassieke afleiding van ψ uit Δ. We bewijzen dat de volgende bewering juist is:

Bewering 2 Als ψ de bij stap n verkregen zin is dan geldt:
$\Delta \cup \Gamma_n \vdash_i \neg\neg\psi$

Stelling 2 volgt hieruit onmiddellijk aangezien bij de laatste stap in de klassieke afleiding geen assumpties werkzaam zijn.

Het bewijs van bewering 2 geschiedt met inductie naar n.

Basisstap: $n = 1$. Er doen zich twee mogelijkheden voor:

1. ψ is een assumptie. Het gestelde volgt dan onmiddellijk.
2. $\psi \in \Delta$. Het gestelde volgt dan uit het feit dat $\psi \vdash_i \neg\neg\psi$

Inductiestap: $n = k + 1$. Neem aan dat het gestelde juist is voor alle $n \leq k$. We moeten laten zien dat het gestelde ook juist is voor $n = k + 1$. De volgende mogelijkheden doen zich voor:

1. ψ is een assumptie. Zie boven.
2. $\psi \in \Delta$. Wederom zie boven.
3. $\psi =\perp$ wordt op regel $k + 1$ ingevoerd middels een toepassing van $E_\neg$. In dit geval geldt voor zekere $i, j \leq k$ dat opstap i een bepaalde zin θ en op stap j de zin $\neg\theta$ verkregen is, terwijl we er verder zeker van kunnen zijn dat $\Gamma_i \cup \Gamma_j = \Gamma_{k+1}$. De inductiehypothese leert dat:

$$\Delta \cup \Gamma_i \vdash_i \neg\neg\theta$$

en

$$\Delta \cup \Gamma_j \vdash_i \neg\neg\neg\theta$$

Op grond hiervan kunnen we er zeker van zijn dat:

$$\Delta \cup \Gamma_{k+1} \vdash_i \perp$$

En dus ook dat:

$$\Delta \cup \Gamma_{k+1} \vdash_i \neg\neg \perp$$

4. ψ wordt op regel $k+1$ ingevoerd middels een toepassing van $EFSQ$. Dan geldt dat voor zekere $i \leq k$ met $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{k+1}$ de zin $\perp$ verkregen is. De inductiehypothese leert dat:

$$\Delta \cup \Gamma_i \vdash_i \neg\neg \perp$$

Op grond van lemma 1 (i) kunnen we er dan zeker van zijn dat:

$$\Delta \cup \Gamma_i \vdash_i \perp$$

En hieruit volgt zonder veel omhaal dat

$$\Delta \cup \Gamma_{k+1} \vdash_i \neg\neg\psi$$

5. $\psi = \neg\theta$ wordt op regel $k + 1$ verkregen door een toepassing van $I_\neg$. Doe deze (en de volgende vier) zelf. (**Opgave 7**)
6. Op stap $k + 1$ is $I_\wedge$ toegepast. Gebruik lemma 1 (ii).
7. Op stap $k + 1$ is $E_\wedge$ toegepast. Gebruik lemma 1 (iii).
8. Op stap $k + 1$ is $I_\vee$ toegepast. Gebruik lemma 1 (iv).
9. Op stap $k + 1$ is $E_\vee$ toegepast. Gebruik lemma 1 (v).

10. $\psi = \theta \to \zeta$ wordt op stap $k+1$ verkregen met een toepassing van $I_{\to}$. In dat geval geldt dat $\Gamma_k = \Gamma_{k+1} \cup \{\theta\}$. Op grond van de inductiehypothese mag worden aangenomen dat:

$$\Delta \cup \Gamma_k \vdash_i \neg\neg\zeta$$

Met andere woorden:

$$\Delta \cup \Gamma_{k+1} \cup \{\theta\} \vdash_i \neg\neg\zeta$$

Dan geldt:

$$\Delta \cup \Gamma_{k+1} \vdash_i \theta \to \neg\neg\zeta$$

Gebruikmakend van lemma 1 (vi) mogen we dan ook besluiten tot:

$$\Delta \cup \Gamma_{k+1} \vdash_i \neg\neg(\theta \to \zeta)$$

11. Op stap $k+1$ is $E_{\to}$ toegepast. Gebruik lemma 1 (vii).
12. ψ wordt op stap $k+1$ verkregen middels een toepassing van de $\neg\neg$ -regel. Dan geldt dat voor zekere $i \leq k$ met $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{k+1}$ de zin $\neg\neg\psi$ verkregen is. De inductiehypothese leert dat:

$$\Delta \cup \Gamma_i \vdash_i \neg\neg\neg\neg\psi$$

Op grond van lemma 1 (viii) kunnen we er dan zeker van zijn dat ook geldt dat:

$$\Delta \cup \Gamma_{k+1} \vdash_i \neg\neg\psi$$

■

1.2.3 Axiomatische systemen

Naast natuurlijke deductiesystemen bestaan er ook andere soorten van afleidingssystemen. Op één van die soorten, de axiomasystemen, zal in deze paragraaf nader worden ingegaan. We zullen beginnen met een definitie waarin we precies vastleggen wat we onder een axiomasysteem verstaan. Daarna zullen we bepalen wat een *afleiding* is in een axiomatisch systeem. Het belang hiervan voor de opbouw van bepaalde metalogische bewijzen zult U zich nog herinneren uit § 1.2.1, waar we intensief gebruik maakten van de notie van *afleiding* in het systeem van natuurlijke deductie om de correctheid van dit systeem voor de propositielogica te bewijzen. Ook in deze paragraaf zult U gebruik moeten maken van het begrip ‘afleiding’ zoals dat in beide systemen inhoud wordt gegeven, met name bij het bewijs van de bewering dat een formule φ axiomatisch afleidbaar is uit een verzameling premissen Δ dan en slechts dan als er een natuurlijke deductie bestaat van φ uit Δ.

Maar voordat we ons hieraan wagen zullen we de aandacht richten op het werken met axiomatische systemen — dat wil zeggen op het opstellen van axiomatische afleidingen — en in het bijzonder op de rol die daarbij is weggelegd voor het deductietheorema.

Definitie 1 Zij $\mathcal{L}$ een taal met $\perp$, $\neg$ en $\to$ als logische constanten. Dan geldt: θ is een *axioma* van $\mathcal{L}$ dan en slechts dan als θ aan een van de volgende voorwaarden voldoet:
(i) $\theta = (\varphi \to (\psi \to \varphi))$
(ii) $\theta = ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
(iii) $\theta = (\neg\varphi \to (\varphi \to \perp))$
(iv) $\theta = ((\varphi \to \perp) \to \neg\varphi))$
(v) $\theta = (\perp \to \varphi)$
(vi) $\theta = (\neg\neg\varphi \to \varphi)$

Een *axiomatische afleiding* van een zin φ uit de premissenverzameling Δ bestaat, net als een natuurlijke deductie, uit een eindig aantal *stappen* die we nummeren: $1, 2, 3, \ldots, n$. Bij elke stap k hoort een zin ψ, de zin die bij die stap *verkregen* is. En voor elke stap k geldt dat de zin die bij deze stap verkregen is aan een van de volgende voorwaarden moet voldoen:
1. $\psi \in \Delta$
2. ψ is een axioma
3. ψ kan uit twee zinnen die bij eerdere stappen verkregen zijn worden afgeleid middels een toepassing van *modus ponens*, een regel die U ook kent onder de naam $E_{\to}$.

De zin, tenslotte, die bij de laatste stap verkregen is wordt ook wel de *conclusie* van de afleiding genoemd. Het spreekt vanzelf dat in een axiomatische afleiding van de zin φ uit Δ, de zin φ de conclusie van de afleiding dient te zijn.

Voorbeeld Als voorbeeld volgt een axiomatische afleiding van $(p \to p)$ uit de lege premissenverzameling:

1.	$(p \to ((p \to p) \to p))$	axioma (i)
2.	$((p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p)))$	axioma (ii)
3.	$((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$	1, 2, mp
4.	$(p \to (p \to p))$	axioma (i)
5.	$(p \to p)$	3, 4, mp

Hopelijk heeft U verder geen voorbeelden nodig om ervan overtuigd te raken dat het *ab ovo* opschrijven van axiomatische afleidingen aardig ingewikkeld kan worden. Wat het opstellen van axiomatische afleidingen zo ingewikkeld maakt, is dat er *geen* extra *assumpties* ingevoerd mogen worden. En *toch* is dat axiomasysteem even sterk als het natuurlijke deductiesysteem voor talen met als logische constanten $\rightarrow$, $\neg$ en $\perp$ dat bestaat uit de regels $E_{\rightarrow}$, $I_{\rightarrow}$, $E_{\neg}$, $I_{\neg}$, $EFSQ$, $\neg\neg$ en *Herhaling*. Om deze bewering te kunnen bewijzen zullen we dankbaar gebruik maken van de stelling die bekend staat onder de naam 'deductietheorema'. We zullen daarom eerst deze stelling bewijzen. Daarbij zullen we gebruik maken van de notatie '$\Delta \vdash_a \varphi$', ofwel: 'er bestaat een axiomatische afleiding van φ uit Δ'.

Stelling 3 (Deductietheorema) $\Delta, \varphi \vdash_a \psi \Rightarrow \Delta \vdash_a (\varphi \rightarrow \psi)$

Bewijs Neem aan dat $\Delta, \varphi \vdash_a \psi$. Beschouw de kennelijk bestaande afleiding voor ψ uit $\Delta \cup \{\varphi\}$. Laat χ de zin zijn die verkregen is bij stap k. We bewijzen met inductie naar k dat $\Delta \vdash_a (\varphi \rightarrow \chi)$. A fortiori volgt dan dat $\Delta \vdash_a (\varphi \rightarrow \psi)$. Immers, ψ is de zin die in de laatste stap van de afleiding verkregen is.

Basisstap: $k = 1$. We moeten de volgende mogelijkheden onder ogen zien:

1. de zin χ die bij stap 1 verkregen is, is een element van Δ.
2. de zin χ die bij stap 1 verkregen is, is φ.
3. de zin χ die bij stap 1 verkregen is, is een axioma.

Elk van deze mogelijkheden komt hieronder opnieuw ter sprake. Zie daar voor een bewijs.

Inductiestap: $n = k + 1$. Neem aan dat voor alle $i \leq k$ geldt dat $\Delta \vdash_a (\varphi \rightarrow \chi)$ voor χ de zin die verkregen is bij stap i. We moeten laten zien dat dan ook geldt dat $\Delta \vdash_a (\varphi \rightarrow \chi)$ voor χ, de zin die verkregen is bij stap $k + 1$. Welnu, de volgende mogelijkheden doen zich voor:

1. De zin χ die bij stap $k + 1$ verkregen is, is een axioma. Om in te zien dat $\Delta \vdash_a (\varphi \rightarrow \chi)$ hebben we dan de inductiehypothese niet nodig (daarom geldt het bewijs ook voor het geval dat $k = 1$). Om te beginnen kunnen we er zeker van zijn dat er een axiomatische afleiding van χ uit Δ bestaat. Voeg daar nu in een tweede stap het axioma $(\chi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ en in een derde stap de zin $(\varphi \rightarrow \chi)$ —uit stap 1 en 2 verkregen middels modus ponens— aan toe en er ontstaat vanzelf een axiomatische afleiding voor $(\varphi \rightarrow \chi)$ uit Δ.
2. De zin χ die bij stap $k + 1$ verkregen is, is een element van Δ. In dit geval gaan we op dezelfde wijze te werk als bij 1.
3. $\chi = \varphi$. Ook dan hebben we de inductiehypothese niet nodig. We weten immers al (zie pagina 15) dat $\vdash_a (\varphi \rightarrow \varphi)$, en daarmee ook dat $\Delta \vdash_a (\varphi \rightarrow \varphi)$.
4. De zin χ is bij stap $k + 1$ verkregen middels een toepassing van modus ponens. In dat geval besaan er $i, j \leq k$ zodanig dat bij stap i een zin van de vorm $\theta \rightarrow \chi$ en bij j de zin θ verkregen zijn. Op grond van de inductiehypothese mogen we aannemen dat $\Delta \vdash_a (\varphi \rightarrow \theta)$ en $\Delta \vdash_a (\varphi \rightarrow (\theta \rightarrow \chi))$. Een axiomatische afleiding voor $(\varphi \rightarrow \chi)$ uit Δ verkrijgen we door een afleiding te maken waarin uit Δ zowel $(\varphi \rightarrow \theta)$ als $(\varphi \rightarrow (\theta \rightarrow \chi))$ worden afgeleid. Zo'n afleiding bestaat; je hoeft alleen de kennelijk bestaande

afleidingen voor $(\varphi \to \theta)$ en $(\varphi \to (\theta \to \chi))$ "onder elkaar" te zetten en daaraan de volgende stappen toe te voegen:

$n+1$	$((\varphi \to (\theta \to \chi)) \to ((\varphi \to \theta) \to (\varphi \to \chi)))$	axioma (ii)
$n+2$	$((\varphi \to \theta) \to (\varphi \to \chi))$	mp
$n+2$	$(\varphi \to \chi)$	mp

■

Aan de hand van een voorbeeld zullen we nu laten zien hoe het deductietheorema aangewend kan worden om te bewijzen *dat* er een axiomatische afleiding bestaat voor een zin φ.

Voorbeeld Laat zien dat $(p \to q), (q \to r) \vdash_a (p \to r)$.

Bewijs Op grond van het deductietheorema is het voldoende te laten zien dat $(p \to q), (q \to r), p \vdash_a r$. Beschouw de volgende afleiding:

1.	p	prem.
2.	$p \to q$	prem.
3.	q	1, 2, mp
4.	$q \to r$	prem.
5.	r	3, 4, mp

Opgave 8 Laat zien dat $p \to (q \to r) \vdash_a q \to (p \to r)$.

Opgave 9 Laat zien dat voor talen $\mathcal{L}$ met $\bot$, $\neg$ en $\to$ als logische constanten geldt dat: $\Delta \vdash_a \varphi \Longleftrightarrow \Delta \vdash_n \varphi$.

Opgave 10 Verzin extra axioma's zodanig dat de stelling uit opgave 9 niet alleen van toepassing is op talen $\mathcal{L}$ met $\mathrm{LOG}_{\mathcal{L}} = \{\bot, \neg, \to\}$ maar ook op talen $\mathcal{L}$ met $\mathrm{LOG}_{\mathcal{L}} = \{\bot, \neg, \to, \wedge, \vee\}$. (Hint: probeer uw bewijs van stelling 3 door te trekken naar het algemene geval. De axioma's suggeren zich dan vanzelf.)

1.2.4 De volledigheidsstelling

Direct geformuleerd luidt de volledigheidsstelling als volgt:

$$\Delta \models \varphi \Rightarrow \Delta \vdash \varphi$$

De meest gebruikte methode om de volledigheidsstellingen te bewijzen is afkomstig van L. Henkin. De Henkin-methode berust op een aantal ideeën die we hieronder informeel schetsen. De volgende paragrafen geven een preciese, formele behandeling.

Merk op dat de volledigheidsstelling equivalent is met de volgende bewering:

$$\Delta \nvdash \varphi \Rightarrow \Delta \nvDash \varphi$$

Zo bezien stelt deze stelling eenieder die hem wil bewijzen voor de volgende opgave: Gegeven een verzameling Δ en een formule φ die niet uit Δ afleidbaar is; laat zien dat er een interpretatie $\mathcal{I}$ betaat zodanig dat $V_{\mathcal{I}}(\psi) = 1$ voor alle $\psi \in \Delta$ en $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = 0$.

Hoe vinden we die interpretatie $\mathcal{I}$? Drie ideeën helpen ons hierbij.

Het eerste idee heeft te maken met het begrip *consistentie*, waarop we in de volgende paragraaf nader in gaan. We noemen een verzameling formules consistent als het falsum $\perp$ er niet uit afleidbaar is. Stel nu dat een formule φ niet afleidbaar is uit een verzameling formules Δ. Dit betekent dat we $\neg\varphi$ zonder problemen bij Δ kunnen stoppen, d.w.z., dat $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ consistent is. (Dat dat zo is, is makkelijk in te zien: Zou $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ wèl inconsistent zijn, dan betekent dit dat het falsum $\perp$ er uit kan worden afgeleid. En als dat het geval is kunnen we uit de oorspronkelijke Δ zelf ook φ afleiden, hetgeen in tegenspraak is met onze aanname).

Het tweede idee betreft de relatie tussen consistentie en *vervulbaarheid*. We noemen een verzameling formules Δ vervulbaar als er een interpretatie $\mathcal{I}$ is zodanig dat $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = 1$ voor elke $\varphi \in \Delta$. Als we nu zouden kunnen laten zien dat consistentie vervulbaarheid impliceert, dan hebben we daarmee ook de volledigheidsstelling bewezen. Dat is als volgt in te zien. Bekijk de consistente verzameling $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$. Als consistentie vervulbaarheid impliceert, dan is er een $\mathcal{I}$ zodanig dat $V_{\mathcal{I}}(\psi) = 1$ voor alle $\psi \in \Delta$ en $V_{\mathcal{I}}(\neg\varphi) = 1$, d.w.z., $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = 0$. En daaruit volgt dat $\Delta \nvDash \varphi$. Het bewijs van de volledigheidsstelling is zo dus 'teruggebracht' tot een bewijs van de zogeheten *consistentiestelling* (Henkin): als Δ consistent is, dan is er een interpretatie $\mathcal{I}$ zodanig dat $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = 1$ voor alle $\varphi \in \Delta$.

Voor het bewijs van de consistentiestelling is nog een hulpbegrip nodig, dat van een *maximaal consistente* verzameling. Als we moeten laten zien dat de consistentie van Δ impliceert dat er een interpretatie is die alle $\varphi \in \Delta$ waar maakt, dan willen we het liefst die interpretatie als het ware 'aflezen' uit Δ. Het probleem is dat er bij een gegeven consistente Δ vaak meer dan één interpretatie is die alle $\varphi \in \Delta$ waar maakt. Het idee is nu Δ zó uit te breiden dat een *maximaal consistente* verzameling Δ' resulteert: elke toevoeging van een formule aan Δ' resulteert in inconsistentie. Als we kunnen laten zien dat elke consistente Δ uit te breiden is tot een maximaal consistente Δ', dan hoeven we vervolgens nog slechts te bewijzen dat met zo'n maximaal consistente Δ' een interpretatie correspondeert die φ precies dan waar maakt als $\varphi \in \Delta'$.

Het bewijs van de volledigheidsstelling

We definiëren *consistentie* en bewijzen de consistentie-stelling van Henkin.

Definitie 2 ((Maximaal) Consistent) Zij Δ een verzameling zinnen.
(i) Δ is *consistent* desda $\Delta \nvdash \bot$
(ii) Δ is *maximaal consistent* desda $\Delta \nvdash \bot$, en voor elke Δ' met $\Delta' \supseteq \Delta$ en $\Delta' \neq \Delta$ geldt dat $\Delta' \vdash \bot$

Merk het volgende op:
1. Δ is *inconsistent* desda $\Delta \vdash \varphi$ voor alle φ.
2. Als $\Delta \nvdash \varphi$ dan geldt: $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ is consistent.
3. $\emptyset$ is consistent.

Opgave 11 Laat zien dat de bovenstaande opmerkingen inderdaad correct zijn.

We zijn nu toe aan de consistentiestelling.

Stelling 4 (Henkin) Laat Δ een consistente verzameling zinnen zijn. Er is een interpretatie $\mathcal{I}$ zodanig dat $V_{\mathcal{I}}(\psi) = 1$ voor alle $\psi \in \Delta$.

Voordat we overgaan tot het bewijs van deze stelling, zullen we eerst laten zien dat de volledigheidsstelling, waar het ons uiteindelijk om te doen is, er zonder veel omwegen uit volgt:

Corollarium 1 $\Delta \models \varphi \Rightarrow \Delta \vdash \varphi$

Bewijs Neem aan dat $\Delta \nvdash \varphi$. Op grond van opmerking 2 (zie boven) geldt dan dat $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ consistent is. Gebruikmakend van stelling 4 volgt dat er een $\mathcal{I}$ bestaat zodanig dat $V_{\mathcal{I}}(\psi) = 1$ voor alle $\psi \in \Delta \cup \{\neg\varphi\}$, d.w.z. $V_{\mathcal{I}}(\psi) = 1$ voor alle $\psi \in \Delta$, terwijl $V_{\mathcal{I}}(\varphi) = 0$. Maar dan $\Delta \not\models \varphi$ ■

Rest ons de stelling van Henkin te bewijzen. Dat gaat niet zo maar. We moeten namelijk als het ware uit een willekeurige consistente Δ een interpreatatie $\mathcal{I}$ aflezen waaronder alle zinnen van Δ waar zijn. Natuurlijk kunnen we ervoor zorgen dat alle atomaire zinnen in Δ waar worden. Dat kan door te *stipuleren* dat $\mathcal{I}(p) = 1$ voor alle atomaire $p \in \Delta$. Maar het is zeker niet zo dat voor *elke* $\mathcal{I}$ zodanig dat $\mathcal{I}(p) = 1$ voor alle $p \in \Delta$ ook geldt dat $V_{\mathcal{I}}(\psi) = 1$ voor alle niet-atomaire $\psi \in \Delta$. Stel eens dat Δ helemaal geen atomaire zinnen bevat.

Om deze moeilijkheden te overwinnen bewijzen we het volgende:

Lemma 2 (Lindenbaum) Elke consistente verzameling Δ kan worden uitgebreid tot een maximaal consistente verzameling Δ'

Bewijs Laat f een één-éénduidige functie zijn met als domein de natuurlijke getallen $\{1, 2, 3, \ldots\}$ en als bereik de verzameling zinnen. Met andere woorden, We zetten alle zinnen op een oneindig lange rij en kennen aan elke zin precies één (natuurlijk) getal toe. De verzamelingentheorie (zie hoofdstuk 2) vertelt ons dat dit zomaar kan. Uitgaande van f definiëren we nu bij gegeven consistente Δ een maximaal consistente uitbreiding Δ' als volgt:

$$\Delta' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$$

waarbij elke Δ_n als volgt inductief bepaald is:

$$\Delta_1 = \begin{cases} \Delta \cup \{f(1)\} & \iff \Delta \cup \{f(1)\} \text{ is consistent.} \\ \Delta & \iff \Delta \cup \{f(1)\} \text{ is inconsistent.} \end{cases}$$

En algemeen:

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{f(n+1)\} & \iff \Delta_n \cup \{f(n+1)\} \text{ is consistent.} \\ \Delta_n & \iff \Delta_n \cup \{f(n+1)\} \text{ is inconsistent.} \end{cases}$$

We controleren dat op deze wijze verkregen Δ' inderdaad een maximaal consistente verzameling is:

1. Δ' is *consistent*. Merk allereerst op dat elke Δ_n consistent is. Neem nu aan dat Δ' inconsistent is. Dan is er een *eindige* deelverzameling Δ'' van Δ' die al inconsistent is (waarom?). We kunnen er zeker van zijn dat $\Delta'' \subseteq \Delta_n$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$. Maar als Δ'' inconsistent zou zijn, dan zou ook Δ_n inconsistent zijn. Contradictie.
2. Δ' is *maximaal*. Neem aan van niet. Dan is er (minstens) een ψ zodanig dat $\Delta' \cup \{\psi\}$ consistent is en $\psi \notin \Delta'$. Neem aan dat $\psi = f(n)$. Beschouw Δ_{n-1}. Als $\Delta' \cup \{\psi\}$ consistent is, dan is $\Delta_{n-1} \cup \{\psi\}$ dat ook. Daaruit volgt echter dat $\psi \in \Delta_n$ en daaruit zou weer volgen dat $\psi \in \Delta'$. Contradictie. ■

Het lukte ons niet om bij een willekeurige consistente Δ een $\mathcal{I}$ te definiëren zodanig dat $V_{\mathcal{I}}(\psi) = 1$ voor alle $\psi \in \Delta$. Een 'zomaar' consistente Δ geeft ons te weinig informatie over hoe die $\mathcal{I}$ precies gekozen moet worden. Met een maximaal consistente verzameling Δ ligt dat eenvoudiger. En bovensaande hulpstelling leert dat we ons eigenlijk best kunnen beperken tot het definiëren van een goede $\mathcal{I}$ bij alleen maximaal consistente Δ's.

Eerst nog een hulpstelling over maximaal consistente verzamelingen. Als U wilt kunt U deze stelling even overslaan en meteen naar het bewijs van de stelling van Henkin bekijken. U ziet daar dan wel waarom het volgende lemma hier niet voor niets staat.

Lemma 3 Laat Δ maximaal consistent zijn. Dan geldt:
(i) $\psi \in \Delta$ desda $\Delta \vdash \psi$
(ii) $\neg\psi \in \Delta$ desda $\psi \notin \Delta$

(iii) $\psi \wedge \chi \in \Delta$ desda $\psi \in \Delta$ en $\chi \in \Delta$
(iv) $\psi \vee \chi \in \Delta$ desda $\psi \in \Delta$ of $\chi \in \Delta$
(v) $\psi \rightarrow \chi \in \Delta$ desda $\psi \notin \Delta$ of $\chi \in \Delta$

Bewijs

(i) $\Rightarrow$: triviaal
$\Leftarrow$: Neem aan dat $\psi \notin \Delta$. Dan is $\Delta \cup \{\psi\}$ inconsistent. Dat wil zeggen: $\Delta, \psi \vdash \perp$. Maar als er een afleiding van $\perp$ uit $\Delta \cup \{\psi\}$ bestaat, dan bestaat er een afleiding van $\neg\psi$ uit Δ. Afleiding van $\perp$ uit $\Delta \cup \{\psi\}$:

$$\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{array}\right\} & \text{premissen uit } \Delta \\ \psi & \text{premisse} \\ \vdots & \\ \perp & \end{array}$$

Afleiding van $\neg\psi$ uit Δ:

$$\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{array}\right\} & \text{premissen uit } \Delta \\ \left[\begin{array}{l} \psi \\ \vdots \\ \perp \end{array}\right. & \text{assumptie} \\ \neg\psi & I_\neg \end{array}$$

En als er een afleiding van $\neg\psi$ uit Δ bestaat, en Δ bovendien consistent is, dan kan er geen afleiding van ψ uit Δ bestaan. En dus $\Delta \nvdash \psi$.

(ii) $\Rightarrow$: triviaal
$\Leftarrow$: Neem aan dat $\neg\psi \notin \Delta$. Dan is $\Delta \cup \{\neg\psi\}$ inconsistent. Met andere woorden: $\Delta, \neg\psi \vdash \perp$. Maar als er een afleiding van $\perp$ uit $\Delta \cup \{\neg\psi\}$ bestaat, dan bestaat er een afleiding van ψ uit Δ. Afleiding van $\perp$ uit $\Delta \cup \{\neg\psi\}$:

$$\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{array}\right\} & \text{premissen uit } \Delta \\ \neg\psi & \text{premisse} \\ \vdots & \\ \perp & \end{array}$$

Afleiding van ψ uit Δ:

$$
\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{l}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_n\end{array}\right\} & \text{premissen uit } \Delta\\
\begin{array}{|l}\neg\psi \\ \vdots \\ \bot \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l}\text{assumptie}\\ \\ \\ \end{array}\\
\neg\neg\psi & I_\neg\\
\psi & \neg\neg\text{-regel}
\end{array}
$$

En als $\Delta \vdash \psi$ dan, op grond van het zojuist bewezen lemma i, geldt: $\psi \in \Delta$.

(iii) Opgave 12.a.
(iv) Opgave 12.b.
(v) Opgave 12.c.

Het bewijs van de stelling van Henkin is nu niet meer zo moeilijk:

Bewijs van stelling 4. Laat Δ een consistente verzameling zinnen zijn. Beschouw een maximale uitbreiding Δ' van Δ. *Kies* $\mathcal{I}$ zo dat voor alle atomaire p geldt:

$$\mathcal{I}(p) = 1 \Longleftrightarrow p \in \Delta'$$

We bewijzen nu met inductie naar de complexiteit van ψ dat voor elke zin ψ geldt:

$$V_{\mathcal{I}}(\psi) = 1 \Longleftrightarrow \psi \in \Delta'$$

Daarmee hebben we ruimschoots aan de vereisten voldaan.

Basisstap: ψ is atomair. Dat in dit geval geldt dat $V_{\mathcal{I}}(\psi) = 1$ desda $\psi \in \Delta'$ komt eenvoudig doordat we $\mathcal{I}$ zo gekozen hebben.

Inductiestap. Neem aan dat het gestelde juist is voor alle zinnen φ en χ die een lagere complexiteit hebben dan ψ. Beschouw ψ. De volgende mogelijkheden doen zich voor:

1. $\psi = \neg\chi$. Er geldt:

$$
\begin{array}{lcll}
V_{\mathcal{I}}(\neg\chi) = 1 & \Longleftrightarrow & V_{\mathcal{I}}(\chi) \neq 1 & \text{(semantiek)}\\
V_{\mathcal{I}}(\chi) \neq 1 & \Longleftrightarrow & \chi \notin \Delta' & \text{(inductiehyp.)}\\
\chi \notin \Delta' & \Longleftrightarrow & \neg\chi \in \Delta' & \text{(lemma 3 (ii))}
\end{array}
$$

2. $\psi = (\varphi \to \chi)$. Er geldt:

$$
\begin{array}{lcll}
V_{\mathcal{I}}(\varphi \to \chi) = 1 & \Leftrightarrow & V_{\mathcal{I}}(\varphi) \neq 1 \text{ of } V_{\mathcal{I}}(\chi) = 1 & \text{(semantiek)}\\
V_{\mathcal{I}}(\varphi) \neq 1 \text{ of } V_{\mathcal{I}}(\chi) = 1 & \Leftrightarrow & \varphi \notin \Delta' \text{ of } \chi \in \Delta' & \text{(inductiehyp.)}\\
\varphi \notin \Delta' \text{ of } \chi \in \Delta' & \Leftrightarrow & (\varphi \to \chi) \in \Delta' & \text{(lemma 3 (v))}
\end{array}
$$

3. $\psi = (\varphi \wedge \chi)$. Analoog.
4. $\psi = (\varphi \vee \chi)$. Analoog. ■

1.3 Predikatenlogica

1.3.1 Grammatica

Een taal $\mathcal{L}$ van de predikatenlogica is gegeven met zes verzamelingen van symbolen die respectievelijk de (individuele) *constanten*, de (individuele) *variabelen*, de *predikaten*, de *functiesymbolen*, de *logische constanten* en de *interpunctietekens* van de taal $\mathcal{L}$ in kwestie bevatten. Op één uitzondering na (zie onder) worden deze verzamelingen geacht geen enkel symbool gemeen te hebben. Verder valt bij elk van deze verzamelingen het volgende op te merken:

Individuele constanten Dit zijn de namen van objecten in de domeinen van modellen. In onze metataal zullen we de letters a, b, c — eventueel met natuurlijke getallen als indices — gebruiken om naar individuele constanten te verwijzen.

Individuele variabelen de verzameling individuele variabelen van elke taal $\mathcal{L}$ is aftelbaar oneindig. We gebruiken de letters u, v, w, x, y en z om naar variabelen in de objecttaal te verwijzen, ook hier soms voorzien van natuurlijke getallen als indices, bijvoorbeeld x_1.

Predicaten Bij elk predikaat van een taal $\mathcal{L}$ hoort een natuurlijk getal. Dit getal geeft de zogenoemde *plaatsigheid* (het aantal argumenten) van dat predikaat aan. We laten geen 0-plaatsige predikaten toe. We gebruiken de letters P, Q en R om naar predikaten van een taal $\mathcal{L}$ te verwijzen. We nemen de conventie aan dat we de letter P zullen gebruiken voor één-plaatsige predikaten, en de letter R voor twee-plaatsige predikaten.

Functiesymbolen Bij de behandeling van de predikatenlogica in de propedeuse is dit soort symbolen buiten beschouwing gebleven. Vanwege het belang dat functies toekomt in tal van wetenschappelijke theorieën —denk bijvoorbeeld aan de optellings-, en vermenigvuldigingsoperatie uit de rekenkunde, of aan de massafunctie uit de mechanica die bij elk object de massa van dat object aangeeft— zullen we voor onze talen een voorziening treffen waarmee functies kunnen worden uitgedrukt. We gebruiken de letters f, g en h om naar functiesymbolen te verwijzen. Evenals bij predikaten geven we de plaatsigheid van functiesymbolen aan met een natuurlijk getal en evenmin staan we 0-plaatsige functies toe.

Logische constanten Naast de logische constanten die U kent uit het vorige hoofdstuk (met name $\perp, \neg, \vee, \wedge$, en $\rightarrow$) beschikken de talen van de predikatenlogica nog over een *universele kwantor* die we zullen aangeven met

"$\forall$", en een *existentiële kwantor* "$\exists$". Verder zullen we ook het identiteitsteken dat in principe gewoon een twee-plaatsig predikaat is, als logische constante behandelen. We verwijzen ernaar met het symbool "$=$".

Interpunctietekens U kent het *linkerhaakje* "(" en het *rechterhaakje* ")" al. We voegen daar de *komma* "," aan toe.

Tot zover de symbolen van een taal $\mathcal{L}$ van de predikatenlogica. Door de symbolen van een taal $\mathcal{L}$ te concateneren kunnen we *uitdrukkingen* van $\mathcal{L}$ vormen. Maar niet alle uitdrukkingen van $\mathcal{L}$ zijn *welgevormd*. Welgevormd zijn alleen de *termen* en de *formules* van $\mathcal{L}$.

Definitie 3 (TERM$_\mathcal{L}$, FORM$_\mathcal{L}$) Zij $\mathcal{L}$ een taal van de predikatenlogica. De verzameling termen van $\mathcal{L}$, TERM$_\mathcal{L}$, is dan de kleinste verzameling X van uitdrukkingen van $\mathcal{L}$ die aan de volgende voorwaarden voldoet:

(i) Als a een constante van $\mathcal{L}$ is, dan $a \in X$.
(ii) Als x een variabele van $\mathcal{L}$ is, dan $x \in X$.
(iii) Als f een n-plaatsig functiesymbool van $\mathcal{L}$ is, en $t_1, \ldots, t_n \in X$, dan $f(t_1, \ldots, t_n) \in X$.[1]

De verzameling formules van $\mathcal{L}$, FORM$_\mathcal{L}$, is de kleinste verzameling X van uitdrukkingen van $\mathcal{L}$ die aan de volgende voorwaarden voldoet:

(i) $\perp \in X$
(ii) Als Q een n-plaatsig predikaat van $\mathcal{L}$ is, en $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{TERM}_\mathcal{L}$, dan $Q(t_1, \ldots, t_n) \in X$.[2]
(iii) Als $\varphi, \psi \in X$, dan ook $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \in X$.
(iv) Als $\varphi \in X$, dan $\forall x\varphi \in X$ en $\exists x\varphi \in X$, voor elke variabele x.

Definitie 4 (Vrije en gebonden variabelen) Zij $\mathcal{L}$ een taal van de predikatenlogica. Zij x een variabele van $\mathcal{L}$ en $\varphi \in \mathrm{FORM}_\mathcal{L}$. We zeggen dat x in φ *gebonden* optreedt op plaats k dan en slechts dan als:

(i) x optreedt op plaats k in φ.
(ii) Noch $\exists$, noch $\forall$ optreedt op plaats $k-1$ in φ.
(iii) Er een $\psi \in \mathrm{FORM}_\mathcal{L}$ bestaat die in φ optreedt op plaats $k-j$ t/m $k+i$ (voor zekere $i, j \geq 0$), terwijl $\psi = \forall x\chi$ of $\psi = \exists x\chi$.

We zeggen dat x in φ *vrij* optreedt op plaats k dan en slechts dan als:

(i) x optreedt op plaats k in φ.
(ii) Noch $\forall$, noch $\exists$ optreedt op plaats $k-1$ in φ.
(iii) Er geen $\psi \in \mathrm{FORM}_\mathcal{L}$ is, die in φ optreedt op plaats $k-j$ t/m $k+i$ (voor zekere $i, j \geq 0$) en die van de vorm $\forall x\chi$ of $\exists x\chi$ is.

---

1. "$f(t_1, \ldots, t_n)$" dient U te lezen als "de concatenatie van achtereenvolgens f, het linkerhaakje, t_1, de komma, t_2, de komma, enz. tot en met t_n, het rechterhaakje."
2. We schrijven $t_1 = t_2$ in plaats van $= (t_1, t_2)$

Definitie 5 (ZIN$_\mathcal{L}$) Laat $\mathcal{L}$ een taal van de predikatenlogica zijn. Een formule φ van $\mathcal{L}$ is een *zin* — notatie: $\varphi \in \mathrm{ZIN}_\mathcal{L}$ — dan en slechts dan als geen enkele vrije variabele van $\mathcal{L}$ ergens in φ vrij optreedt.

Definitie 6 (Theorie) Zij $\mathcal{L}$ een taal van de predikatenlogica. Een *theorie* in $\mathcal{L}$ is een verzameling zinnen van $\mathcal{L}$.

Voorbeelden van Theorieën

Ordeningstheorieën
Zij $\mathcal{L}$ een taal van de predikatenlogica met één binair predikaat "$<$". In plaats van "$< (x, y)$ schrijven we "$x < y$". De volgende theorie staat bekend als de theorie van de (strikt) partiële ordeningen.

1. $\forall x \neg x < x$ irreflexiviteit.
2. $\forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$ transitiviteit.

De theorie der lineaire ordeningen wordt verkregen door er de volgende zin aan toe te voegen:

3. $\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow (x < y \vee y < x))$ samenhangendheid.

Peano's rekenkunde
Deze theorie is geformuleerd in een taal met als constanten:
- De individuele constante 0.
- Het één-plaatsige functiesymbool S. (Lees "$S(x)$" als "de opvolger van x"; we schrijven steeds "Sx" in plaats van "$S(x)$".)
- De twee-plaatsige functiesymbolen $+$ en $\bullet$. (We schrijven "$(x + y)$" en '$(x \bullet y)$" in plaats van "$+(x, y)$" en "$\bullet(x, y)$".)

De axioma's van Peano's rekenkunde zijn:
$\forall x (Sx \neq 0)$
$\forall x (Sx \neq x)$
$\forall x \forall y (Sx = Sy \rightarrow x = y)$
$\forall x (x + 0 = x)$
$\forall x \forall y ((x + Sy) = S(x + y))$
$\forall x (x \bullet 0 = 0)$
$\forall x \forall y ((x \bullet Sy) = (x \bullet y) + x)$
En verder alle zinnen van de vorm:

$$([0/x]\varphi \wedge \forall x (\varphi \rightarrow [Sx/x]\varphi)) \rightarrow \forall x \varphi$$

Deze formule drukt het principe van de volledige inductie uit.[3]

De *axiomatische verzamelingenleer*, die in het volgende hoofdstuk behandeld wordt, kan als een derde voorbeeld dienen.

---

3. Zie ook blz. 53

1.3.2 De regels

Voordat we overgaan tot de introductie-, en gebruiksregels van de kwantoren nog één definitie:

Definitie 7 (Substitutie van termen voor variabelen) Zij $\varphi \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$, x een variabele, en $t \in \text{TERM}_{\mathcal{L}}$. We definiëren $[t/x]\varphi$ als die formule φ' die uit φ verkregen wordt door t voor x te substitueren telkens als x vrij optreedt in φ. We zeggen dat *t vrij is voor x in φ* dan en slechts dan als geen van de variabelen die optreden in t gebonden wordt bij substitutie van t voor x in φ.

Voorbeelden
i) $[y/x]\forall xPx = \forall xPx$
ii) $[x/y]\exists xRxy = \exists xRxx$
iii) $[x/y]\exists zRzy = \exists zRzx$
iv) $[y/x](\forall xPx \to Px) = \forall xPx \to Py$
x is niet vrij voor y in $\exists xRxy$, y is vrij voor x in Ryz.

Gebruiksregel voor de universele kwantor

$$\begin{array}{lll} & \vdots & \\ m. & \forall x\varphi & \\ & \vdots & \\ n. & [t/x]\varphi & E_{\forall}, m \end{array}$$

Condities voor toepassing:
1. t is vrij voor x in φ.

Opgave 13 Leg aan de hand van een voorbeeld uit waarom bovengenoemde conditie aan de toepassing van $E_{\forall}$ moet worden opgelegd.

Introductieregel voor de universele kwantor

$$\begin{array}{lll} & \vdots & \\ m. & [y/x]\varphi & \\ & \vdots & \\ n. & \forall x\varphi & I_{\forall}, m \end{array}$$

Condities voor toepassing:
1. y is vrij voor x in φ.
2. y komt niet vrij voor in $\forall x\varphi$.
3. y komt niet vrij voor in een premisse of in een op regel m nog werkzame assumptie.

De introductie van een universele kwantor gegeven een formule φ is natuurlijk alleen dan gerechtvaardigd als *alle* objecten uit het domein de eigenschap die door φ wordt uitgedrukt ook daadwerkelijk toekomt. Maar deze constatering kan niet als basis dienen voor de introductieregel voor de universele kwantor, eenvoudigweg omdat het lang niet altijd mogelijk om van elk object uit het domein te bepalen of dat object die eigenschap heeft of niet. Zeker in het geval van oneindige domeinen kan dat problematisch zijn. Bovenstaande introductieregel is dan ook gebaseerd op een enigzins andere benadering; ze stelt dat generalisatie over een variabele — y in het bovenstaande schema — is toegestaan, mits deze variable kan verwijzen naar een *willekeurig* object uit het domein. De condities op de regel waarborgen dat.

Opgave 14 Verzin voorbeelden waaruit blijkt dat er zonder de condities 2 en 3 afleidingen mogelijk zijn die semantisch niet correct zijn.

Introductieregel voor de existentiële kwantor

De regel $I_\exists$ is als het ware het spiegelbeeld van $E_\forall$. Het schema ziet er als volgt uit:

$$\begin{array}{lcl} & \vdots & \\ m. & [t/x]\varphi & \\ & \vdots & \\ n. & \exists x\varphi & I_\exists, m \end{array}$$

Condities voor toepassing:

1. t is vrij voor x in φ.

Gebruiksregelregel voor de existentiële kwantor

$$\begin{array}{lcl} & \vdots & \\ k. & \exists x\varphi & \\ & \vdots & \\ m. & [y/x]\varphi \to \psi & \\ & \vdots & \\ n. & \psi & E_\exists, k, m \end{array}$$

Condities voor toepassing:

1. y is vrij voor x in φ.
2. y komt niet vrij voor in $\exists x\varphi$.
3. y komt niet vrij voor in een premisse of in een op regel n nog niet vervallen assumptie.
4. y komt niet vrij voor in ψ

Opgave 15 Laat zien dat conditie 4 onontbeerlijk is.

Opgave 16 Laat zien dat:
(a) $\forall x Axx \vdash Aaa$
(b) $\forall x \forall y Axy \vdash Aab$
(c) $\forall x \forall y Axy \vdash Aaa$
(d) $\forall x(Ax \wedge Bx) \vdash \forall x Ax \wedge \forall x Bx$
(e) $\forall x Ax \wedge \forall x Bx \vdash \forall x(Ax \wedge Bx)$
(f) $\forall x(Ax \rightarrow Bx), \forall x Ax \vdash \forall x Bx$
(g) $\neg \exists x Ax \vdash \forall x \neg Ax$
(h) $\neg \exists x \neg Ax \vdash \forall x Ax$
(i) $\exists x(Ax \wedge Bx) \vdash \exists x Ax \wedge \exists x Bx$
(j) $\forall x(Ax \rightarrow Bx), \exists x Ax \vdash \exists x Bx$
(k) $\exists x \neg Ax \vdash \neg \forall x Ax$
(l) $\forall x \neg Ax \vdash \neg \exists x Ax$
(m) $\neg \forall x Ax \vdash \exists x \neg Ax$
(n) $\forall x(Ax \vee Bx), \exists x \neg Bx \vdash \exists x Ax$

Opgave 17 Maak afleidingen die aantonen dat
(a) $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx) \vdash \forall x \neg Rxx$
(b) $\forall x \exists y Rxy$, $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$, $\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz) \vdash \forall x Rxx$
(c) $\neg \exists x((Sx \wedge Mx) \wedge Px)$, $\forall x(Sx \rightarrow Mx)$, $\forall x(Mx \rightarrow Px) \vdash \neg \exists x Sx$
(d) $\exists x(Fx \rightarrow Gxx)$, $\forall x(Fx \wedge Hx)$, $\forall x(\neg Hx \vee \neg \exists y Gyx) \vdash \perp$

1.3.3 Regels voor het identiteitsteken

In deze paragraaf zullen we ons bezighouden met de vraag hoe we ons systeem van natuurlijke deductie moeten uitbreiden als we naast $\forall, \exists, \rightarrow, \wedge, \vee$ en $\neg$ ook het identiteitsteken $=$ als logische constante willen behandelen. Dit betekent dat we ons in het nu volgende zullen verdiepen in de logica van identiteit.

Introductieregel voor het identiteitsteken:

$$\begin{array}{ll} & \vdots \\ n. & t = t \quad I_= \end{array}$$

Op grond van deze regel mag je altijd zonder meer in een stap n van een bewijs de formule $t = t$ toevoegen, wat t ook voor een term is. Daarbij hoeft niet verwezen te worden naar een voorafgande stap.

Gebruiksregelregel voor het identiteitsteken

$$\begin{array}{lll} & \vdots & \\ k. & s = t & \\ & \vdots & \\ m. & [s/x]\varphi & \\ & \vdots & \\ n. & [t/x]\varphi & E_=, k, m \end{array}$$

Condities voor toepassing:
1. s en t vrij voor x in φ.

In woorden: als je op stap k hebt bewezen dat s identiek is met t, en op stap m hebt geconcludeerd dat $[s/x]\varphi$, dat wil zeggen s heeft de eigenschap uitgedrukt door φ, dan mag je daarna besluiten dat ook t de eigenschap uitgedrukt door φ bezit; $[t/x]\varphi$.

Voorbeeld We laten zien dat $\vdash \forall x \forall y(x = y \to y = x)$:

$$\begin{array}{lll} 1. & x = y & \text{ass.} \\ 2. & x = x & I_= \\ 3. & y = x & 1, 2, E_= \ (!) \\ \hline 4. & x = y \to y = x & I_\to \\ 5. & \forall y(x = y \to y = x) & 4, I_\forall \\ 6. & \forall x \forall y(x = y \to y = x) & 5, I_\forall \end{array}$$

Merk op dat de formule afgeleid op regel 2 te schrijven is als $[x/z]z = x$: aan x komt de eigenschap toe identiek te zijn met x. Met $E_=$ kun je dan hieruit op grond van het feit dt x identiek is met y concluderen dat ook aan y die eigenschap toekomt.

Opgave 18 Bewijs:
(a) $\vdash \forall x(x = x)$
(b) $\vdash \forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \to x = z)$

Opgave 19 Laat zien: Als $\Delta \vdash [a/x]\varphi$ voor een constante a die nergens in de formules $\psi \in \Delta$ optreedt, dan $\Delta \vdash \forall x\varphi$.

Het principe van Leibniz

De introductie-, en gebruiksregel voor = komen natuurlijk niet zomaar uit de lucht vallen. We kunnen ze motiveren met behulp van Leibniz' Principe: de objecten aangeduid met "t", respectievelijk "s" zijn identiek dan en slechts dan ls ze al hun eigenschappen gemeen hebben. De gebruiksregel voor $=$, $E_=$, is niets meer of minder dan een formele formulering van het informele principe van Leibniz.

Met $I_=$ ligt de zaak moeilijker: Leibniz Principe suggereert een introductieregel van de volgende vorm: Je mag in een bewijs een formule van de vorm $s = t$ introduceren als je van te voren hebt laten zien dat *elke eigenschap die toekomt aan s ook toekomt aan t, en omgekeerd*. Maar hoe verwoord je de cursief geschreven conditie formeel? De volgende manier is fout: Je mag een formule van de vorm $s = t$ introduceren als je van te voren voor elke formule φ waarin de variabele x vrij optreedt hebt afgeleid dat $[s/x]\varphi \to [t/x]\varphi$ en dat $[t/x]\varphi \to [s/x]\varphi$. Dit is fout om twee redenen. In de eerste plaats krijg je op deze wijze een introductieregel die je pas zou mogen toepassen nadat je *oneindig* veel eerdere stappen hebt gedaan; je moet immers voor *elke* formule φ waarin x als vrije variabele optreedt —en dat zijn er nogal wat— laten zien dat $[s/x]\varphi \to [t/x]\varphi$ en dat $[t/x]\varphi \to [s/x]\varphi$. Daarnaast is het, zelfs als je dat oneindige aantal stappen zou kunnen nemen, nog steeds de vraag of er wel voldoende evidentie is om tot $s = t$ te concluderen. Misschien zijn er na een *uitbreiding* van de taal in kwestie wel formules ψ te vinden zodanig dat het niet bewijsbaar is dat $[s/x]\psi \to [t/x]\psi$ of $[t/x]\psi \to [s/x]\psi$. Anders gezegd, het zou best kunnen dat binnen de taal $\mathcal{L}$ waarin je de afleiding maakt het verschil tussen s en t niet uitdrukbaar is, terwijl er wel degelijk een verschil bestaat tussen beide.

Deze moeilijkheden kunnen we in één klap oplossen door een werkwijze te kiezen analoog aan die die ten grondslag ligt aan de regel $I_\forall$ (Zie ook opgave 14, blz. 27.): Laat P een predikaatsymbool zijn dat niet in de premissen of een nog niet vervallen assumptie voorkomt — P drukt als het ware een *willekeurige* eigenschap uit. Je mag nu in de afleiding die je aan het maken bent concluderen dat $s = t$ als je eerst hebt laten zien dat voor deze "willekeurige" P geldt dat $(P(s) \to P(t)) \wedge (P(t) \to P(s))$. Schematisch:

Alternatieve introductieregel voor het identiteitsteken

$$\begin{array}{lcr} & \vdots & \\ m. & (P(s) \to P(t)) \wedge (P(t) \to P(s)) & \\ & \vdots & \\ n. & s = t & I'_= \end{array}$$

Condities voor toepassing:

1. P komt niet voor in premisse of nog niet vervallen assumptie.

De bovenstaande *alternatieve* introductieregel $I'_=$ voor de identiteit verschilt nogal van de introductieregel $I_=$ die we *officieel* hebben ingevoerd. Het zal duidelijk zijn dat $I'_=$ de regel $I_=$ impliceert. Maar ook omgekeerd blijkt $I'_=$ een afgeleide regel te zijn in ons systeem met $I_=$. Om precies te zijn, de volgende bewering is juist:

Bewering 3 Als $\Delta \vdash ((P(s) \to P(t)) \wedge (P(t) \to P(s)))$ voor een predikaat P dat nergens in de formules uit Δ optreedt, dan $\Delta \vdash s = t$.

Opgave 20 Bewijs bewering 3.
(Aanwijzing: Vervang in het kennelijk bestaande bewijs van

$$((P(s) \to P(t)) \wedge (P(t) \to P(s))$$

elke (sub)formule van de vorm $P(t')$ door de formule $s = t'$.[4]Het is niet al te moeilijk om aan te tonen dat wat dan ontstaat weer een correcte afleiding is, maar nu van de formule

$$(s = s \to s = t) \wedge (s = t \to s = s)$$

Deze afleiding kan als basis dienen voor een afleiding van de formule $s = t$ *zonder* toepassing van $I'_{=}$, maar *met* toepassing van $I_{=}$.)

4. Zolang er in s geen variabelen optreden, kan de vervanging probleemloos geschieden. Bekijk voorlopig alleen dat geval. (Wat kan er mis gaan als er in s wel variabelen optreden en hoe moeten de moelijkheden die dan ontstaan worden opgelost?)

Hoofdstuk 2

Verzamelingenleer

2.1 Inleiding

Het begrip oneindigheid heeft filosofen en wiskundigen eeuwenlang voor hoofdbrekens geplaatst. Pas in de jaren '70 van de vorige eeuw formuleerde Georg Cantor (1845-1918) een theorie die beschouwd kan worden als grondleggend. Cantor werd bij zijn onderzoek voor fundamentele problemen gesteld die hij niet kon oplossen zonder te breken met de op dat moment algemeen aanvaarde filosofische uitgangspunten.

In 1874 publiceerde Cantor een beroemd geworden artikel[1] waarin hij aantoonde dat het aantal punten op de reëele rechte, zich laat onderscheiden van het aantal elementen in de reeks die gevormd wordt door de natuurlijke getallen. Deze ontdekking heeft als onmiddellijke consequentie dat er tenminste twee 'oneindigheden' zijn, omdat er oneindig veel natuurlijke, maar ook oneindig veel reëele getallen zijn.

Tegenwoordig wekt Cantors benadering geen verbazing meer, maar ze werd zeker aan het einde van de vorige eeuw zeer problematisch gevonden. De critici verzetten zich hevig tegen het idee dat verzamelingen met oneindig veel elementen als 'afgeronde gehelen' met een absolute, welbepaalde omvang konden worden beschouwd: "... der endliche Mensch sich nicht vermisst, etwas Unendliches als etwas gegebenes und vor ihm mit seinen gewohnten Anschauung zu Umspannendes betrachten zu wollen", had de beroemde wiskundige Gauss geschreven, een opvatting die werd onderschreven door bijna alle wiskundigen uit die tijd.

Het verzet tegen Cantor's opvattingen kan begrepen worden tegen de achtergrond van de in die tijd dominante filosofische uitgangspunten. Alhoewel de meningen op andere punten sterk uiteen liepen, was er bijna niemand die het Aristotelische onderscheid tussen potentiële en actuele oneindigheid en de ontologische onderbouwing daarvan in twijfel trok. Aristoteles onderkende dat er vele

1. [4]. Ook in [6], blz. 19-33.

aspecten aan de wereld zijn die schijnen te wijzen in de richting van de actualiteit van het oneindige (apeiron). Het lijkt, bijvoorbeeld, mogelijk dat de tijd alsmaar doorgaat zonder ooit op te houden. Of dat ruimte oneindig deelbaar is, zodanig dat elk lijnstuk een oneindig aantal punten bevat. Al eerder had de filosoof Zeno van Elea op slimme wijze gebruik gemaakt van deze constateringen om er de naar hem vernoemde paradoxen mee af te leiden. Aristoteles probeerde deze valkuilen te omzeilen door erop te wijzen dat het weliswaar zo is dat een lijnstuk in een oneindig aantal delen *kan* worden opgedeeld, maar dat hieruit niet volgt dat een lijnstuk in een oneindig aantal delen *is* opgedeeld. Aristoteles veronderstelde dat in werkelijkheid een lijnstuk niet uit een oneindig aantal punten bestaat, alhoewel het wel zo gedacht kan worden. Het komt dan ook niet de essentiële eigenschap van actuele oneindigheid toe, maar het bezit wel potentiële oneindigheid, die door Aristoteles beschouwd werd als een accidentele eigenschap.[2]

Hoewel Cantor gebruik maakte van de begrippen waarin de aristotelische onderscheidingen geformuleerd waren, verwierp hij hun ontologische interpretatie. Naar zijn inzicht kwam het actueel oneindige wel degelijk een ontologische status toe. Bovendien diende er een onderscheid gemaakt te worden tussen twee sub-categoriën: die van transfiniet oneindige en die van het absoluut oneindige. Waar Aristoteles de mening was toegedaan dat er sprake was van potentiële oneindigheid "when one thing can be taken after another endlessly, each thing taken being finite", bracht Cantor naar voren dat: "... in Wahrheit das potentiale Unendliche nur eine geborgte Realität hat, indem es stets auf ein aktual Unendliches hinweist, durch welche es erst möglich wird."[3] Het actueel oneindige wordt door Cantor beschreven als "... ein Quantum, das einerseits *nicht veränderlich*, sondern vielmehr in allen seinen Teilen fest und bestimmt, eine richtige *Konstante* ist, zugleich aber andrerseits *jede endliche Größe* derselben Art an Größe übertrifft"[4] Volgens Cantor volgt uit deze definitie niet dat het actueel oneindige zelf niet in grootte overschreden zou kunnen worden. Integendeel. Cantor dacht op overtuigende wijze te hebben aangetoond dat er tenminste twee van elkaar in grootte verschillende oneindigheden zijn. Om deze reden sprak hij van het "vermehrbar aktual Unendliches oder *Transfinitum*" dat hij onderscheidde van het "unvermehrbar aktual Unendliches oder *Absolutum*".[5] Het was met name de aanname van het Transfinitum waarop de kritiek zich richtte. Maar volgens Cantor was de aanname van het Transfinitum onontkoombaar en hij zag in de actualiteit ervan de ontologische onderbouwing van zijn theoretische bevindingen.

Geruime tijd zag het er naar uit dat Cantor er in was geslaagd een theorie van het actueel oneindige te ontwikkelen die op grond van haar schijnbare consistentie het Aristotelische en scholastische bewijs van de onmogelijkheid van zo'n theorie onderuit haalde. Toch zou Cantor's theorie in haar oorspronkelijke

2. Physica, i.h.b. Bk. VI, §§1,2.
3. [6], p. 404.
4. [6], p. 401.
5. [6], p. 405.

vorm de tand des tijds niet doorstaan. De eerste haarscheurtjes tekenden zich af rond 1895 toen Cantor, op de voet gevolgd door Burali-Forti, de eerste paradox ontdekte. Omdat het probleem betrekking had op een vrij technisch aspect van de theorie van wel-geordende verzamelingen werd deze zogenoemde Burali-Forti paradox niet als een grote bedreiging beschouwd, ook al was er niet direct een antwoord voorhanden.

De hoop dat de theorie gered zou kunnen worden door kleine locale aanpassingen werd echter volledig de bodem ingeslagen toen Russell in 1902 zijn ontdekking van de Russell-paradox in de openbaarheid bracht. Deze paradox gaf op dwingende wijze aanleiding tot de gedachte dat Cantor's conceptie van wat een verzameling is, serieus tekort schoot.

De paradoxen hebben aanleiding gegeven tot verschillende axiomatiseringen van de verzamelingentheorie waarmee de paradoxen vermeden konden worden. In dit hoofdstuk wordt de bekendste axiomatisering van de verzamelingenleer behandeld. Naar haar grondleggers wordt ze de Zermelo-Fraenkel verzamelingentheorie genoemd. De ZF-verzamelingenleer *kan* helemaal geformuleerd worden in een eerste-orde predikatentaal met identiteit. De enige niet logische constante die we aan deze taal toevoegen is het twee-plaatsige predikaat "$\in$". De formule "$x \in y$" lezen we als: "x is een element van y". De ZF-theorie kan beschouwd worden als een verzameling zinnen die zo goed en zo kwaad als mogelijk de betekenis van het predikaat "is een element van" vastlegt.

Voor de goede orde: het domein waarover in de ZF-verzamelingentheorie gekwantificeerd wordt, wordt geacht geheel uit verzamelingen te bestaan; alles, maar dan ook alles, is een verzameling. De logica veronderstelt dat het domein minstens één element bevat, en dus kunnen we ervan uitgaan dat er minstens één verzameling bestaat. Maar dat is dan ook alles.

We beginnen de theorie met het vastleggen van een identiteitscriterium voor verzamelingen.

Axioma 1 (Extensionaliteit) $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

Dit axioma zegt: als twee verzamelingen x en y precies dezelfde elementen z hebben, dan zijn x en y identiek. De achterliggende gedachte die door dit axioma wordt verwoordt is dat elke verzameling volkomen bepaald is met zijn elementen.

Ook het omgekeerde van dit axioma gaat op:

$$\forall x \forall y(x = y \rightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y))$$

Dit op grond van het substitutieprincipe voor identiteit.

Opgave 21 Werk deze laatste opmerking uit in een natuurlijke deductie.

2.2 De paradox van Russell

Cantor hanteerde in zijn verzamelingentheorie het principe dat elke eigenschap een verzameling bepaalt: de verzameling van alle objecten met die eigenschap. Formeel zouden we dat principe als volgt onder woorden kunnen brengen:

Comprehensieprincipe
Laat $\varphi(x)$ een formule zijn waarin x de enige vrije variabele is. Dan geldt: $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$

Met dit principe is niet één, maar een oneindig aantal axioma's gegeven: voor elke formule $\varphi(x)$ één. We spreken dan ook van een *axioma-schema*. Het comprehensie principe zegt dat er bij gegeven $\varphi(x)$ *minstens* een verzameling y bestaat zodanig dat etc. Met behulp van het extensionaliteitsaxioma is eenvoudig in te zien dat er ook ten hoogste een zo'n verzameling kan bestaan.

Opgave 22 Werk deze laatste opmerking uit.

Het comprehensieprincipe is op het eerste gezicht heel plausibel. Maar als we het echt als axiomaschema in de theorie zouden opnemen, dan zou deze onmiddellijk inconsistent worden, zoals Russell inzag. *Prima facie* lijkt het geenszins onzinnig om je van een willekeurige verzameling af te vragen of die verzamelingen een element is van zichzelf of niet. De verzameling van alle planeten, bijvoorbeeld, is zelf geen planeet en dus ook geen element van zichzelf. De verzameling van alle verzamelingen die meer dan één element bevatten daarentegen, is zelf wel een verzameling en bevat bovendien meer dan één element. Al met al lijkt de vraag of *de verzameling van alle verzamelingen die geen element zijn van zichzelf* een element is van zichzelf of niet, dan ook niet onredelijk.

Wel, laat a de verzameling zijn die door de cursief gedrukte formulering wordt omschreven. Als a een element is van zichzelf, dan volgt dat a geen element is van zichzelf. Immers "geen element zijn van zichzelf" is de eigenschap die de elementen van a gemeenschappelijk hebben. Maar als a geen element is van zichzelf, dan heeft a precies die eigenschap op grond waarvan a een element van zichzelf behoort te zijn. Kortom, we kunnen niets anders dan de conclusie trekken dat a een element is van zichzelf dan en slechts dan als a geen element is van zichzelf.

We kunnen deze redenering ook voltrekken in de vorm van een natuurlijke deductie. We krijgen dan:

1	$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \notin x))$	comprehensie
2	$\forall x(x \in a \leftrightarrow x \notin x)$	assumptie
3	$a \in a \leftrightarrow a \notin a$	$G_{\forall}$, 2
4	$a \in a \rightarrow a \notin a$	$G_{\wedge}$, 3
5	$a \notin a \rightarrow a \in a$	$G_{\wedge}$, 4
6	$a \in a$	assumptie
7	$a \notin a$	$G_{\rightarrow}$, 4, 6
8	$\perp$	$G_{\neg}$, 6, 7
9	$a \notin a$	$I_{\neg}$
10	$a \in a$	$G_{\rightarrow}$, 5, 9
11	$\perp$	$G_{\neg}$, 9, 10
12	$\forall x(x \in a \leftrightarrow x \notin x)) \rightarrow \perp$	$I_{\rightarrow}$
13	$\perp$	$G_{\exists}$, 1, 12

N.B. $\varphi \leftrightarrow \psi$ beschouwen we steeds als afkorting van: $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

De manier[6] waarop wij zullen voorkomen dat dergelijke contradicties optreden is afkomstig van de wiskundige Ernst Zermelo (1871-1953). Hij zwakte het Comprehensieprincipe af tot het volgende axiomaschema:

Axioma 2 (Aussonderung) Laat $\varphi(x)$ een formule zijn waarin x de enige vrije variabele is. Dan geldt: $\forall z \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x)))$

Volgens het comprehensieprincipe bepaalt elke eigenschap een verzameling. Dat is volgens het Aussonderungsprincipe niet zonder meer het geval: alleen *binnen* een reeds voorhanden verzameling z kunnen we een verzameling y afbakenen met als elementen precies die objecten waaraan de eigenschap φ toekomt.

Het Aussonderungsprincipe en het Comprehensieprincipe zouden equivalent zijn als er een verzameling zou bestaan waarvan elk object een element is: een universele verzameling. Zo'n verzameling bestaat echter niet, zoals U zelf kunt bewijzen.

Opgave 23 Laat zien:
(a) $\forall z \exists y(y \notin z)$
(b) $\neg \exists z \forall x(x \in z)$

De universele verzameling bestaat niet. Wat wèl bestaat, gegeven dat er überhaupt een verzameling bestaat, is de lege verzameling. Het bewijs daarvan is een toepassing van het Aussonderungsprincipe. Wanneer we voor φ een tegenstrijdige eigenschap nemen, bijvoorbeeld "niet gelijk zijn aan zichzelf", dan kunnen we de volgende stelling bewijzen:

6. Er zijn ook andere manieren, die elk tot een andere verzamelingentheorie leiden. Russell zelf ontwikkelde de typentheorie.

Stelling 5 $\exists x \forall y (y \notin x)$

Bewijs

1	$\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge x \neq x))$	axioma
2	$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x \in a \wedge x \neq x))$	$G_\forall$, 1
3	$\forall x (x \in b \leftrightarrow (x \in a \wedge x \neq x))$	assumptie
4	$c \in b$	assumptie
5	$c \in b \leftrightarrow (c \in a \wedge c \neq c))$	$G_\forall$, 3
6	$c \in b \rightarrow (c \in a \wedge c \neq c))$	$G_\wedge$, 5
7	$c \in a \wedge c \neq c$	$G_\rightarrow$, 4, 6
8	$c \neq c$	$G_\wedge$, 7
9	$c = c$	$I_=$
10	$\perp$	$G_\neg$, 8, 9
11	$c \notin b$	$I_\neg$
12	$\forall y (y \notin b)$	$I_\forall$, 11
13	$\exists x \forall y (y \notin x)$	$I_\exists$, 12
14	$\forall x (x \in b \leftrightarrow (x \in a \wedge x \neq x)) \rightarrow \exists x \forall y (y \notin x)$	$I_\rightarrow$
15	$\exists x \forall y (y \notin x)$	$G_\exists$, 2, 14

Deze eerste toepassing van het Aussonderungsprincipe leert ons dat er minstens één verzameling bestaat zonder elementen. Met behulp van het extensionaliteitsprincipe kunnen we afleiden dat er ook maar hoogstens één zo'n verzameling bestaat. En daarmee hebben we dan op unique wijze een verzameling geïdentificeerd: de verzameling zonder elementen, die we de *lege verzameling* zullen noemen.

Definitie 8 (Lege verzameling) $\forall x (x = \emptyset \leftrightarrow \forall y (y \notin x))$

Het Aussonderungsschema rechtvaardigt ook nog de volgende notatiewijze voor *de* verzameling y die gegeven is met de verzameling z en de eigenschap $\varphi(x)$.

Definitie 9 $\forall z \forall y (y = \{x \in z \mid \varphi(x)\} \leftrightarrow \forall x (x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x))))$

$\{x \in z \mid \varphi(x)\}$ is niet meer dan de naam van de verzameling die als elementen precies die elementen van z heeft waaraan de eigenschap uitgedrukt door $\varphi(x)$ toekomt.

2.3 Basisoperaties

In de vorige paragraaf is bewezen dat één verzameling in ieder geval niet bestaat, de universele verzameling en, daarnaast, dat er een verzameling is die wel bestaat: de lege verzameling. Zijn er nog meer verzamelingen? Een eerste stap op weg naar een bevestigend antwoord bestaat in het vastleggen van enkele operaties die we kunnen toepassen op willekeurige verzamelingen om nieuwe verzamelingen te genereren.

Axioma 3 (Paaraxioma) $\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y))$

Dit axioma zegt dat er bij twee willekeurige verzamelingen x en y een verzameling bestaat met als elementen precies de objecten x en y. Gegeven het extensionaliteitsaxioma kunnen we er opnieuw zeker van zijn dat het hier precies één zo'n verzameling betreft. En die kunnen we dan ook een naam geven:

Definitie 10 (i) $\forall x \forall y \forall z (z = \{x, y\} \leftrightarrow \forall u (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y)))$
(ii) $\forall x \forall y (y = \{x\} \leftrightarrow y = \{x, x\})$

Beschouw de lege verzameling $\emptyset$. Op grond van het Paaraxioma bestaat er een verzameling die we op grond van definitie 10 (i) aanduiden met $\{\emptyset, \emptyset\}$. We kunnen hiertoe besluiten, omdat het Paaraxioma ons er niet toe verplicht verschillende objecten voor x en y te kiezen. De verzameling $\{\emptyset, \emptyset\}$ heeft natuurlijk maar één element. Immers, alle elementen van $\{\emptyset, \emptyset\}$ zijn identiek. Vandaar dat we in 10 (ii) een eenvoudiger notatiewijze invoerden: $\{\emptyset\}$, oftewel de verzameling met als enige element de verzameling zonder elementen.

Stelling 6 $\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow (u \in x \wedge u \in y))$

Bewijs Volgens de regels van het spel zou bovenstaande stelling bewezen moeten worden middels een keurige natuurlijke deductie. We zullen ons hier echter tevreden stellen met een informeel bewijs. Een praktijk waartoe we ons ook in het navolgende zullen bekennen. Belangrijk is evenwel dat het duidelijk is dat we — als we dat zouden willen — ook een formeel bewijs zouden kunnen geven.

Stelling 6 is een eenvoudige consequentie van het Aussonderungsprincipe: bij gegeven verzamelingen x en y kunnen we op basis van dat principe en gegeven onze notatie wijze de verzameling $\{u \in x \mid u \in y\}$ vinden, de verzameling die als elementen precies die elementen van x heeft die ook element van y zijn. ■

De verzameling, waarvan hierboven sprake is, wordt ook wel de doorsnede van x en y genoemd:

Definitie 11 (Doorsnede)

$$\forall x \forall y \forall z (z = (x \cap y) \leftrightarrow \forall u (u \in z \leftrightarrow (u \in x \wedge u \in y)))$$

Opgave 24 Definiëer de stelling en het bewijs die tot definitie 12 leiden.

Definitie 12 (Complement)

$$\forall x \forall y \forall z (z = (x \setminus y) \leftrightarrow \forall u (u \in z \leftrightarrow (u \in x \land \neg u \in y)))$$

We noemen $(x \setminus y)$ het complement van y in x.
Ongetwijfeld heeft U al eens kennis gemaakt met doorsnedes en complementen. U heeft zich waarschijnlijk nooit gerealiseerd wat voor werk het is om te bewijzen dat er bij elke twee verzamelingen zoiets als een doorsnede bestaat. U heeft vast ook wel eens de *vereniging* van een verzameling x met een verzameling y bepaald. Dat is 'de verzameling met als elementen precies die entiteiten die elementen van x en/of y zijn'. Om te bewijzen dat deze verzameling bestaat hebben we een geheel nieuw axioma nodig.

Axioma 4 (Somaxioma) $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists u (u \in x \land z \in u))$

Definitie 13 (Vereniging) $\forall x \forall y (y = \bigcup x \leftrightarrow \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists u (u \in x \land z \in u)))$

In woorden: de vereniging van x, '$\bigcup x$', is de verzameling van precies die objecten die element zijn van een element van x.

Opgave 25 Bepaal $\bigcup \emptyset$, $\bigcup \{\emptyset\}$, $\bigcup \{\{\emptyset\}\}$ en specifeer een verzameling x zodanig dat $\bigcup x = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Met behulp van van axioma 4 zijn we nu in staat te bewijzen dat gegeven twee willekeurige verzamelingen x en y er een verzameling z bestaat met als elementen precies die entiteiten die element van x en/of y zijn.

Stelling 7 $\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow (u \in x \lor u \in y))$

Bewijs Neem aan dat x en y twee willekeurige verzamelingen zijn. Op grond van het paaraxioma bestaat de verzameling $\{x, y\}$ waarvan de elementen x en y zijn. Op grond van het somaxioma bestaat dan ook de verzameling $\bigcup \{x, y\}$. Merk op dat geldt:

$$z \in \bigcup \{x, y\} \Longleftrightarrow \exists u (u \in \{x, y\} \text{ en } z \in u)$$

Dit kan vereenvoudigd worden tot:

$$z \in \bigcup \{x, y\} \Longleftrightarrow z \in x \text{ of } z \in y$$

De gezochte verzameling is dus $\bigcup \{x, y\}$. ∎

Definitie 14 $\forall x \forall y \forall z(z = x \cup y \leftrightarrow z = \bigcup\{x, y\})$

Definitie 15 Beschouw $x_1, \ldots, x_n$ als willekeurige objecten. Er geldt:

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \{x_1, x_2\} \cup \{x_3\}$$

En in het algemeen:

$$\{x_1, \ldots, x_n\} = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cup \{x_n\}$$

De volgende opgave biedt U de gelegenheid enigszins vetrouwd te raken met de begrippen ‘doorsnede’, ‘vereniging’ en ‘complement’.

Opgave 26 Zij x een willekeurige verzameling. Bepaal:

(a)	$x \cap \emptyset$	(d)	$\emptyset \cap x$	(g)	$x \cap x$
(b)	$x \cup \emptyset$	(e)	$\emptyset \cup x$	(h)	$x \cup x$
(c)	$x \setminus \emptyset$	(f)	$\emptyset \setminus x$	(i)	$x \setminus x$

Opgave 27 Vindt eenvoudiger benamingen voor de volgende verzamelingen:
(a) $\emptyset \cap \{\emptyset\}$
(b) $\{\emptyset\} \cap \{\emptyset\}$
(c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \emptyset$
(d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}$
(e) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\{\emptyset\}\}$

We hebben nog niet bewezen dat er verzamelingen bestaan die zich gedragen als de natuurlijke getallen $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. En evenmin dat dat die natuurlijke getallen samen een verzameling — zeg $\mathbb{N}$ — bepalen. Toch doen we in de volgende opgave net alsof we al zover zijn, en ook alsof we de optelling ‘+’, de notie ‘kleiner dan’ en alle andere U bekende rekenkundige bewerkingen al netjes gedefiniëerd hebben.

Opgave 28 Beschouw de verzamelingen a, b en c met $a = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 10\}$, $b = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is even }\}$ en $c = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is een drievoud }\}$. Bepaal:

(a)	$a \cup b$	(d)	$b \setminus a$
(b)	$a \cap b$	(e)	$b \cap c$
(c)	$a \setminus b$	(f)	$(b \cup c) \setminus a$

Stelling 8 Neem aan dat a, b en c willekeurige verzamelingen zijn. We noteren de volgende eigenschappen van “$\cap$” en “$\cup$”:

$a \cap b = b \cap a$	$a \cup b = b \cup a$
$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$	$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$
$a \cap a = a$	$a \cup a = a$
$a \cap \emptyset = \emptyset$	$a \cup \emptyset = a$
$(a \cup b) \cap c = (a \cap c) \cup (b \cap c)$	$(a \cap b) \cup c = (a \cup c) \cap (b \cup c)$

Bewijs Doe zelf. (**Opgave 29**).

Definitie 16 $\forall x \forall y (x \subseteq y \leftrightarrow \forall z (z \in x \rightarrow z \in y))$

Merk op: Voor alle verzamelingen x, y en z geldt:

i. $x \subseteq x$
ii. $x = y$ desda $x \subseteq y$ en $y \subseteq x$
iii. als $x \subseteq y$ en $y \subseteq z$ dan $x \subseteq z$

Het is van het uiterste belang dat U '$\in$' en '$\subseteq$' niet met elkaar verwart.

Voorbeelden
$\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$, maar niet: $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$
$\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$, maar niet: $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

Stelling 9 $\forall x (\emptyset \subseteq x)$

Opgave 30 Bewijs stelling 9.

Opgave 31

(a) Specificeer een niet lege verzameling a waarvoor geldt: alle elementen van a zijn ook deelverzameling van a
(b) Specificeer drie verzamelingen a, b, en c zodanig dat geldt: $a \in b$, $b \in c$ en $a \subseteq b$.
(c) Specificeer twee verzamelingen a en b zodanig dat $a \in b$, $a \subseteq b$ en $a \cap b = \emptyset$
(d) Leg uit wat er mis is met de volgende formule:
$\forall x \forall y (((x \cap y) \wedge (x \subseteq y)) \rightarrow y = \emptyset)$

Opgave 32 Welke van de volgende beweringen zijn juist voor alle verzamelingen a, b en c? Als de bewering juist is geef dan een (informeel) bewijs, of geef een tegenvoorbeeld als de bewering onjuist is.

(a) Als $a \in b$ en $b \in c$ dan $a \in c$
(b) Als $a \in b$ en $b \subseteq c$ dan $a \in c$
(c) Als $a \subseteq b$ en $b \in c$ dan $a \in c$
(d) Als $a \in b$ en $b \subseteq c$ dan $a \subseteq c$

Opgave 33 Bewijs dat voor alle verzamelingen a en b geldt:

(a) $(a \cup b) \subseteq a \Longleftrightarrow b \subseteq a$
(b) $b \subseteq (a \cap b) \Longleftrightarrow b \subseteq a$
(c) $(a \cap b) \subseteq a$
(d) $b \subseteq (a \setminus b) \Longleftrightarrow b = \emptyset$
(e) $(a \setminus b) = (b \setminus a) \Longleftrightarrow a = b$

Axioma 5 (Machtsaxioma) $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$

In woorden: bij elke verzameling x bestaat er een verzameling y die als elementen precies alle deelverzamelingen van x heeft.

Definitie 17 (Machtsverzameling) $\forall x \forall y (y = \wp(x) \leftrightarrow \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x))$

Voorbeelden

i) $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$

ii) $\wp(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

iii) $\wp(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Opgave 34 Laat zien dat:

(a) $x \subseteq y \rightarrow \wp(x) \subseteq \wp(y)$

(b) $\wp(x) \subseteq \wp(y) \rightarrow x \subseteq y$

(c) $\wp(x) = \wp(y) \rightarrow x = y$

(d) $\wp(x) \in \wp(y) \rightarrow x \in y$

(e) Geef een tegenvoorbeeld tegen: $x \in y \rightarrow \wp(x) \in \wp(y)$

2.4 Relaties en functies

2.4.1 Geordende paren en relaties

We beginnen deze paragraaf met een stelling over paren.

Stelling 10 Neem aan dat x, y, u en v entiteiten zijn. Dan geldt:
$\{x, y\} = \{u, v\}$ desda aan minstens één van de volgende voorwaarden is voldaan:

(i) $x = u$ en $y = v$

(ii) $x = v$ en $y = u$

Bewijs Doe zelf. (**Opgave 35**)

Uit stelling 10 volgt onder andere dat het paar $\{x, y\}$ en het paar $\{y, x\}$ identiek zijn. Blijkbaar doet de *volgorde* waarin we 'x' en 'y' tussen de accolades '{' en '}' schrijven er niet toe. Om deze reden zullen we in het volgende dikwijls spreken van het *ongeordende* paar $\{x, y\}$.

Een vraag die we nu dan ter hand zullen nemen is de volgende. Kunnen we op basis van de axioma's die we tot nu toe behandeld hebben vorm geven aan de notie 'volgorde'? Als we deze vraag toespitsen op tweetallen, dan luidt deze vraag: is het mogelijk om een 'soort' van verzamelingen aan te wijzen die zich gedragen zoals je dat van *twee objecten gegeven in een bepaalde volgorde* mag verwachten?

We kunnen deze vraag natuurlijk niet beantwoorden zonder enig idee van het onderscheidende kenmerk van een geordend paar. En dus moeten we ons een beeld vormen van precies datgene waarin een geordend paar — een tweetal objecten gegeven in een bepaalde volgorde — zich onderscheidt van een ongeordend paar. We zouden deze karakteristieke eigenschap kunnen formuleren in termen van een apart identiteitscriterium voor geordende paren, bijvoorbeeld als volgt. Twee geordende paren zijn indentiek dan en slechts dan als:

1. Beide paren dezelfde entiteiten bevatten, en
2. deze entiteiten in dezelfde volgorde gegeven worden.

Formeel:

$$\langle x, y\rangle = \langle a, b\rangle \leftrightarrow x = a \wedge y = b.$$

Deze eigenschap kunnen we natuurlijk opvoeren als axioma en daarmee de notie een ‘geordend paar’ brandmerken als een primitief begrip. Maar het is ook mogelijk om een geordend paar te definiëren in termen van verzamelingen, waarbij we geen nieuwe axioma’s aannemen, maar gebruik maken van die, die we al hebben aangenomen. Ockham’s scheermes (neem niet meer primitieven aan dan strikt noodzakelijk) indachtig zullen we er de voorkeur aan geven de tweede weg te bewandelen.

Er zijn verschillende mogelijkheden om de notie van een geordend paar te definiëren in termen van verzamelingen. De wijze waar wij gebruik van zullen maken is geïntroduceerd door C. Kuratowski.[7]

Definitie 18 (Geordend paar) $\forall x \forall y(\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\})$

De truc is deze: het eerste element van het geordende paar wordt in het definiëns alléén vermeld, het tweede samen met het eerste.

Nu moeten we nog controleren of de zo gedefiniëerde ‘geordende paren’ zich inderdaad als geordende paren gedragen, d.w.z., of een verzameling $\{\{x\}, \{x, y\}\})$ ook precies die eigenschap heeft die we eerder karakteristiek hebben genoemd voor een geordend paar $\langle x, y\rangle$. Dit doen we in de volgende stelling:

Stelling 11 Neem aan dat x, y, u en v entiteiten zijn. Dan geldt:
$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$ dan en slechts dan als $x = u$ en $y = v$.

Bewijs $\Leftarrow$ Dit is zo op grond van de logische eigenschappen van ‘=’.
$\Rightarrow$ Neem aan dat: $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$. Dan geldt: $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$. Op grond van stelling 10 is in dit geval minstens één van de volgende beweringen juist:

1. $\{x\} = \{u\}$ en $\{x, y\} = \{u, v\}$
2. $\{x\} = \{u, v\}$ en $\{x, y, \} = \{u\}$

Ad 1 Uit $\{x\} = \{u\}$ volgt dat $x = u$. Als $\{x, y\} = \{u, v\}$ dan geldt dat minstens één van de volgende beweringen juist is:

i. $x = u$ en $y = v$
ii. $x = v$ en $y = u$

7. [21].

In geval (i) geldt dus $x = u$ en $y = v$, hetgeen te bewijzen was. In geval (ii) geldt $x = u = y = v$ en dus ook $x = u$ en $y = v$.

Ad 2 Uit $\{x\} = \{u, v\}$ volgt $x = u = v$. Uit $\{x, y\} = \{u\}$ volgt $x = y = u$. Ergo $x = u = y = v$; dus ok $x = u$ en $y = v$. ∎

Merk ook het volgende op. Als $x \in u$ en $y \in v$, dan $\langle x, y\rangle \in \wp\wp(u \cup v)$. Immers, als $x \in u$, dan $\{x\} \subseteq u \cup v$; dus: $\{x\} \in \wp(u \cup v)$. Net zo: $\{x, y\} \in \wp(u \cup v)$. Zo zien we: $\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \wp(u \cup v)$. Met andere woorden: $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \wp\wp(u \cup v)$.

Op basis van bovenstaande observatie kunnen we de stap maken van een geordend paar naar een verzameling van geordende paren.

Definitie 19 (Cartesisch product) Laten u en v twee verzamelingen zijn. Dan geldt: $u \times v = \{z \in \wp\wp(u \cup v) \mid z = \langle x, y\rangle$ voor zekere $x \in u$ en $y \in v\}$

We noemen $u \times v$ het cartesisch product van u met v. Merk op dat het cartesisch product van u met v per definitie de verzameling van alle geordende paren $\langle x, y\rangle$ met $x \in u$ en $y \in v$ is. Merk ook op dat we er zeker van kunnen zijn dat bij elke twee verzamelingen u en v het cartesisch product van u met v bestaat. Dit op grond van respectievelijk het verenigingsaxioma, het machtsaxioma en Aussonderung.

Voorbeelden

i) $\{a, b\} \times \{c\} = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$
ii) $\{c\} \times \{a, b\} = \{\langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle\}$
iii) $\{a, b\} \times \{c, d\} = \{\langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle\}$

Opgave 36 Bewijs dat:
(a) $u \times v = \emptyset$ desda $u = \emptyset$ of $v = \emptyset$.
(b) $u \times v = v \times u$ desda $u = \emptyset$ of $v = \emptyset$ of $u = v$.

Met de notie van een geordend paar als uitgangspunt kunnen we op eenvoudige wijze uitleggen wat een geordend drietal, een geordend viertal, en in het algemeen een geordend n-tal is. Daarmee hebben we dan zo goed als vastgesteld dat het begrip 'volgorde' — althans voor eindige verzamelingen — voor ons geen problemen met zich meebrengt.

Definitie 20 Laten $x_1, \ldots, x_n$ entiteiten zijn. Dan geldt:

$$\langle x_1, x_2, x_3\rangle = \langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle$$

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle = \langle\langle x_1, x_2, x_3\rangle, x_4\rangle$$

en in het algemeen:

$$\langle x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\rangle = \langle\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle$$

Relaties

De notie van een geordend paar, en in het algemeen de notie van een geordend n-tal, is vooral daarom zo van belang, omdat we met behulp ervan heel precies kunnen spreken over relaties die er tussen de elementen van een verzameling bestaan.

Definitie 21 (Relatie) Een verzameling x is een *n-plaatsige relatie* dan en slechts dan als alle elementen van x geordende n-tallen zijn.

In het volgende zijn we vooral geïnteresseerd in *binaire* relaties, d.w.z. verzamelingen van geordende paren. Met 'relatie' zullen we dan ook altijd 'binaire relatie' bedoelen, tenzij expliciet vermeld wordt dat we een andere relatie op het oog hebben.

Opgave 37 Laat r een (binaire) relatie zijn. Bewijs dat er een verzameling z bestaat zodanig dat $x \in z$ desda er is een y zodanig dat $\langle x, y\rangle \in r$

De verzameling z uit bovenstaande opgave wordt het *domein* van de relatie r genoemd. Onder het *bereik* (codomein) van een relatie r verstaan we de verzameling z zodanig dat:

$$x \in z \text{ desda er is een } y \text{ zodanig dat } \langle y, x\rangle \in r.$$

Het bewijs dat er bij elke relatie zoiets als het bereik bestaat is bijna hetzelfde als het bewijs voor het bestaan van het domein.

Definitie 22 (Equivalentierelatie) Beschouw r als een relatie en v als het veld van r. We noemen r een *equivalentierelatie* desda aan de volgende voorwaarden is voldaan:

(i) r is *reflexief*, d.w.z.:
$\forall x(x \in v \rightarrow \langle x, x\rangle \in r)$

(ii) r is *symmetrisch*, d.w.z.:
$\forall x \forall y(x, y \in v \rightarrow (\langle x, y\rangle \in r \rightarrow \langle y, x\rangle \in r))$

(iii) r is *transitief*, d.w.z.:
$\forall x \forall y \forall z(x, y, z \in v \rightarrow ((\langle x, y\rangle \in r \wedge \langle y, z\rangle \in r) \rightarrow \langle x, z\rangle \in r)))$

N.B.: Hierboven wordt '$x, y, z \in v$' gebruikt als afkorting voor '$(x \in v) \wedge (y \in v) \wedge (z \in v)$'.

Voorbeelden van equivalentierelaties kunt U aantreffen in het dagelijks leven: alle relaties uitgedrukt door een predikaat van de vorm 'even ... als', waarbij U voor ... een willekeurig adjectief (lang, koud, etc.) mag invullen, zijn equivalentierelaties.

Definitie 23 (Equivalentieklasse) Neem aan dat r een equivalentierelatie is met veld v. Voor een x, $x \in v$ definiëren we: $[x]_r = \{y \in v \mid \langle y, x \rangle \in r\}$

$[x]_r$ is de verzameling — is het wel een verzameling? — van alle entiteiten uit het veld van r die met x in de relatie r staan. $[x]_r$ wordt de *equivalentieklasse* gegenereerd door x genoemd.

Stelling 12 Laat r een equivalentierelatie zijn met veld v. Stel $x, y \in v$. Dan geldt:
(i) $\langle x, y \rangle \in r$ desda $[x]_r = [y]_r$
(ii) $[x]_r = [y]_r$ òf $[x]_r \cap [y]_r = \emptyset$

Opgave 38 Bewijs stelling 12.

Stelling 12 verwoordt een abstractiebeginsel. Ze stelt ons in staat objecten die in een bepaalde equivalentierelatie met elkaar staan tot op zekere hoogte te identificeren. Vergelijk de zinnen in de linkerkolom met die uit de rechterkolom:

Jan is even lang als Piet	de lengte van Jan = de lengte van Piet
Jan is even zwaar als Piet	het gewicht van Jan = het gewicht van Piet
lijn l is evenwijdig met lijn m	de richting van l = de richting van m
$\triangle$ ABC is congruent met $\triangle$ DEF	de gedaante van $\triangle$ ABC = de gedaante van $\triangle$ DEF
'vrijgezel' is synoniem met 'ongehuwde volwassene'	de betekenis van 'vrijgezel' = de betekenis van 'ongehuwde volwassene'
Algemeen:	
x is even A als y	de A-heid van x = de A-heid van y

In de linkerkolom worden *concrete* objecten met elkaar vergeleken: Jan en Piet, de lijn l met de lijn m, driehoek ABC en driehoek DEF, de uitdrukking 'vrijgezel' en de uitdrukking 'ongehuwde volwassene'. Van deze paren van objecten wordt beweerd dat ze in een bepaalde equivalentierelaie met elkaar staan: ze zijn even ....

De zinnen uit de rechterkolom drukken alle een identiteit uit. Maar het zijn geen concrete objecten die aan elkaar gelijk worden gesteld: de lengte van Jan en de lengte van Piet, het gewicht van Jan en het gewicht van Piet, de richting van l en de richting van m; kortom, in de rechterkolom gaat het om *abstracte* begrippen als lengte, gewicht, gedaante, betekenis.

De zinnen uit de linkerkolom en de corresponderende zinnen uit de rechterkolom zijn onderling verwisselbaar. We hebben ze hier naast elkaar hebben gezet, omdat ze aangeven langs welke weg abstracte begrippen tot stand gebracht kunnen worden. En het is precies het abstractiebeginsel uit stelling 12 dat de overstap van zinnen uit de linkerkolom naar zinnen uit de rechterkolom mogelijk maakt. Uitgaande van een equivalentierelatie 'even A als' kunnen we altijd een abstract begrip 'A-heid' invoeren, waarbij we ons de A-heid van een object a kunnen voorstellen als de verzameling objecen die even A zijn als a.

Merk op dat 'abstraheren' in deze zin niets te maken heeft met 'weglaten', 'wegdenken', of 'verontachtzamen'. In de traditionele pre-fregeaanse logica werd abstractie wel in deze laatste zin opgevat. Het beeld dat men had van het introduceren van abstrace begrippen als 'lengte' was dit: laat a een willekeurig fysisch object zijn. Als we nu de dikte, de kleur, het gewicht, het materieel en zo nog een stel kenmerken van a — de moeilijkheid met de traditionele opvatting is nu juist dat men niet precies kon aangeven welke kenmerken allemaal — wegdenken, dan houden we een object a' over dat nog maar één kenmerk heeft. Dit object noemen we de lengte van a.

Tegenwoordig denken we geen dingen meer weg. We denken er dingen bij: neem alle objecten die even lang zijn als a. De verzameling die dan ontstaat gedraagt zich precies zo als je dat van de lengte van a zou willen.

2.4.2 Functies

Functies zijn een bijzonder soort relaties. Een relatie r is een functie als er bij elke x uit het domein van r precies één element y uit het bereik van r hoort:

Definitie 24 (Functie) Zij r een relatie. Dan geldt: r is een *functie* dan en slechts dan als: $\forall x \forall y \forall z((\langle x, y\rangle \in r \wedge \langle x, z\rangle \in r) \rightarrow y = z)$

Merk op dat we binnen de hier gehanteerde werkwijze voor de definite van het functiebegrip geen ander begrip nodig hebben dan het verzamelingenbegrip. Dit omdat een functie bepaald is als een bijzondere relatie, relaties gedefiniëerd zijn in termen van geordende paren, en deze op hun beurt weer herleid zijn tot verzamelingen.

Als r een functie is en $\langle x, y\rangle \in r$, dan wordt y de *waarde* genoemd die de functie r aanneemt voor het *argument* x. Er wordt ook wel gezegd dat y het *beeld* van x onder r is, of kortweg dat y het r-beeld van x is. We schrijven dan vaak: $r(x) = y$. Merk op dat we deze notatie niet kunnen gebruiken voor relaties die geen functies zijn. In dat geval zullen er namelijk entiteiten x, y en z te vinden zijn, zodanig dat $\langle x, y\rangle \in r$ en $\langle x, z\rangle \in r$, terwijl $y \neq z$. Zouden we dan toch schrijven dat $r(x) = y$ en $r(x) = z$, dan zou dat impliceren dat $y = z$.

Opgave 39 Beschouw $a = \{1, 2\}$, $b = \{\emptyset\}$ en $f = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, \emptyset\rangle\}$. Welke van de volgende beweringen zijn juist?

(a) $f \subseteq a \times b$
(b) $\text{dom}(f) \subseteq a$
(c) $\text{ran}(f) \subseteq b$

Opgave 40 Stel dat $a = \{10, 20, 30, 40\}$, $b = \{5, 10, 15, 20\}$ en $f = \{\langle x, y\rangle \in b \times a \mid x = \frac{1}{2}y\}$. Specificeer f volledig.

Opgave 41 Neem aan dat $\mathbb{R}$, de verzameling der reële getallen bestaat. Welke van de volgende relaties zijn functies?

(a) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x > y\}$
(b) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}$
(c) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$
(d) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x + 2y = 0\}$
(e) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 4\}$
(f) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = y^2 = 0\}$
(g) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$

We reserveren de symbolen f, g en h voor functies. Ook zullen we gebruik maken van de notatie "$f : x \to y$" die we zullen lezen als: "f is een functie van x naar y," dat wil zeggen, f is een functie met $\mathrm{dom} f = x$ en $\mathrm{ran}(f) \subseteq y$.

Een functie $f : x \to y$ is gedefiniëerd als een relatie die aan elk element uit het de verzameling x precies een beeld uit de verzameling y toekent. Deze definitie sluit niet uit dat de functie in kwestie aan twee verschillende elementen uit x hetzelfde beeld toekent, noch wordt uitgesloten dat de verzameling y elementen bevat die van geen enkel element uit x het beeld zijn.

Definitie 25 (Injectief) Zij $f : x \to y$ een functie. Deze functie is injectief dan en slechts dan als:$\forall u, v((u \in x \wedge v \in x \wedge u \neq v) \to f(u) \neq f(v))$

Definitie 26 (Surjectief) Zij $f : x \to y$ een functie. Deze functie is surjectief dan en slechts dan als: $\forall u(u \in y \to \exists v(v \in x \wedge f(v) = u))$

Van bijzonder belang zijn de bijectieve functies:

Definitie 27 (Bijectief) Een functie f is bijectief dan en slechts dan als f zowel injectief als surjectief is.

Een bijectieve functie $f : x \to y$ geeft een een-eenduidige correspondentie tussen de elementen van x en y: bij iedere $a \in x$ hoort precies één $b \in y$ (f is een functie) en bij iedere $b \in y$ hoort één (f is surjectief) en precies één (f is injectief) $a \in x$). Het gebruik van een-eenduidige correspondenties om de relatieve grootte van verzamelingen te meten was een van de uitgangspunten van Cantor's theorie en is sindsdien tot een karakteristiek geworden van elke (mathematische) theorie van oneindigheid. Deze 'vanzelfsprekendheid' heeft niet altijd bestaan. Bernard Bolzano (1781-1848), bijvoorbeeld, onderkende de mogelijkheid van een een-eenduidige correspondentie tussen twee oneindige verzamelingen, maar weigerde op basis hiervan te concluderen dat de twee betreffende verzamelingen 'even groot' zouden zijn:[8]

> Ich behaupte nämlich: zwei Mengen, die beide unendlich sind, können in einem solchen Verhältnisse zueinander stehen daß es einerseits möglich ist, jedes der einen Menge gehörige Ding mit einem der anderen zu einem Paare zu verbinden mit dem Erfolge, daß kein einziges Ding in beiden Mengen ohne Verbindung zu einem Paare bleibt, und auch kein einziges in zwei oder mehreren Paaren vorkommt; und dabei ist es doch andererseits möglich, daß in eine dieser Mengen die andere als einen bloßen Teil in sich faßt, so daß die Vielheiten, welche sie vorstellen, wenn wir die Dinge derselben alle als gleich d.h. als Einheiten betrachten, die mannigfaltigsten Verhältnisse zueinander haben.

Bolzano doet deze bewering vergezeld gaan door een 'bewijs'. Een bespreking daarvan valt buiten het kader van deze syllabus. We verwijzen de geïnteresseerde lezer naar §20 van het boek waaraan bovenstaand citaat is onleend.

Nog een laatste opmerking over uitdrukkingswijzen. Als $f : x \to y$ een injectieve functie is, dan wordt wel gezegd dat f een injectie is van x *in* (Engels: *in/into*) y. In het geval dat f een surjectieve functie is, dan wordt f ook wel een surjectie van x *op* (Engels: *onto*) y genoemd.

2.5 Gelijkmachtigheid en oneindigheid

We bekennen ons tot het uitgangspunt dat het mogelijk is de relatieve grootte van verzamelingen te bepalen op basis van de notie van een-eenduidige correspondentie en komen tot de volgende definitie.

Definitie 28 (Gelijkmachtigheid) Voor verzamelingen x en y geldt dat x *gelijkmachtig* is met y dan en slechts dan als er een bijectie $f : x \to y$ is. Notatie: $x =_1 y$

Stelling 13 Neem aan dat x, y en z verzamelingen zijn.
(i) x is gelijkmachtig met x
(ii) Als x gelijkmachtig is met y, dan is y gelijkmachtig met x
(iii) Als x gelijkmachtig is met y en y is gelijkmachtig met z, dan is x gelijkmachtig met z

Met het begrip 'machtigheid' kunnen we de grootte van een verzameling ten opzichte van een andere verzameling bepalen. Dat twee verzamelingen van gelijke machtigheid zijn wil zoveel zeggen als dat de twee verzamelingen in kwestie 'even groot' zijn, of 'evenveel elementen hebben'. De notie zegt evenwel niets over de

8. [3], p. 28.

'absolute grootte' — het aantal elementen (kardinaliteit) — van deze verzamelingen.

Het begrip 'gelijkmachtigheid' werd door Cantor in eerste instantie ingevoerd als de theoretische uitwerking van precies die notie van 'even groot'. Maar Cantor, met Frege in zijn voetsporen, ging één stap verder. Hij wilde uitgaande van het begrip van gelijkmachtigheid tot het abstracte begrip 'aantal' komen. De wijze waarop hij dacht deze doelstelling te realiseren is globaal de volgende.

Uit stelling 13 blijkt dat de gelijkmachtigheidsrelatie de eigenschappen heeft van een equivalentierelatie. Bij de bespreking van equivalentierelaties hebben we gezien hoe je uitgaande van, bijvoorbeeld, de notie 'groter dan' het abstracte begrip 'lengte' kan invoeren; door de relatie 'even groot als' te beschouwen als een equivalentierelatie, kan de 'lengte' van een object a worden voorgesteld als de verzameling ojecten die 'even lang' zijn als 'a'.

Op precies dezelfde wijze dacht Cantor het begrip 'aantal' (kardinaalgetal) te kunnen invoeren. Hij begreep het *aantal* elementen van een verzameling x als "the general concept which by means of our active faculty of thought arises from the aggregate x when we make abstraction of the nature of its various elements and of the order in which they are given." En dit "general concept" of kardinaalgetal, zo werd verondersteld, kan begrepen worden als de equivalentieklasse die door x onder de gelijkmachtigheidsrelatie wordt gegenereerd. Met andere woorden, het kardinaalgetal van een verzameling x is de verzameling van alle verzamelingen die gelijkmachtig zijn met x. Het getal 1 kan dan gelijkgesteld worden met de "verzameling" van alle verzamelingen die gelijkmachtig zijn met $\{\emptyset\}$; het getal 2 met de verzameling van alle verzamelingen die gelijkmachtig zijn met $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc.

Een briljant idee, maar helaas paradoxaal zoals al spoedig bleek. De extensie van het gelijkmachtigheidspredikaat is geen verzameling en de kardinaalgetallen van Cantor en Frege bestaan dan ook niet. U kunt dat zelf bewijzen (zie volgende opgave). Dit alles noodzaakt ons ook tot de volgende nuancering. In het bovenstaande werd wel gesproken van de gelijkmachtigheids*relatie*. U begrijpt dat dit strikt genomen incorrect is; de gelijkmachtigheidsrelatie is geen relatie.

Opgave 42 Laat zien: $\neg\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow y$ is gelijkmachtig met $\{\emptyset\})$

Het werk van Cantor en Frege mag dan niet tot de gewenste resultaten hebben geleid, het heeft zeker heuristische waarde gehad. We zullen er nog gebruik van maken, zij het impliciet.

In deze syllabus zullen we het probleem van 'absolute grootte' verder laten voor wat het is en verwijzen de geïnteresseeerde lezer naar de bibliografie. We kunnen dit probleem laten rusten, omdat we voor de notie's 'eindig' en 'oneindig' en voor het bewijs dat er meerdere 'oneindigheden' zijn de notie van 'absolute grootte' niet nodig hebben en kunnen volstaan met 'relatieve grootte'.

Axioma 6 (Oneindigheidsaxioma) Er bestaat (minstens) een opvolgersverzameling.

Een van de basisprincipes van verzamelingentheorie is de aanname van oneindige verzamelingen. Strikt genomen zouden we gewoon de bewering “Er bestaan oneindige verzamelingen” als axioma in onze theorie kunnen opnemen, vooropgesteld dat we zouden aangeven wat met ‘oneindig’ bedoeld is. We kiezen hier voor een iets andere benadering: we postuleren het bestaan van een bijzondere soort verzamelingen, opvolgersverzamelingen, en zullen later laten zien dat deze verzamelingen oneindig zijn.

Wat is een opvolgersverzameling? In de volgende definitie wordt gebruik gemaakt van de volgende notatie: Als x een verzameling is, dan is $x^+ = x \cup \{x\}$

Definitie 29 (Opvolgersverzameling) Een verzameling x is een opvolgersverzameling als:
(i) $\emptyset \in x$; en
(ii) $\forall y(y \in x \to y^+ \in x)$

Stelling 14 Er bestaat een unieke ‘kleinste’ opvolgersverzameling.

Bewijs Precieser geformuleerd luidt de stelling: Er is precies één opvolgersverzameling die deelverzameling is van alle opvolgersverzamelingen.

1. Dat er *minstens* één kleinste is zien we als volgt in. Het oneindigheidsaxioma verzekert ons ervan dat er een opvolgersverzameling — zeg x — is. Beschouw nu de doorsnede van alle deelverzamelingen van x die zelf opvolgersverzamelingen zijn. Precieser, stel:

$$y = \{z \in x \mid \forall u((u \subseteq x \wedge u \text{ is een opvolgersverzameling }) \to z \in u)\}$$

   Op grond van het Aussonderungsaxioma kunnen we er zeker van zijn dat y bestaat. Ook is het niet moeilijk in te zien dat y een opvolgersverzameling is. Immers:
   i. $\forall u(u \text{ is een opvolgersverzameling} \to \emptyset \in u)$. Dus ook:
   $\forall u((u \subseteq x \wedge u \text{ is een opvolgersverzameling }) \to \emptyset \in u)$. Dus: $\emptyset \in y$.
   ii. Stel dat $z \in y$. Dan $z \in u$ voor alle opvolgersverzamelingen u. Dan ook $z^+ \in u$ voor alle opvolgersverzamelingen $u \subseteq x$. Ergo $z^+ \in y$ ■

   Merk nu op dat als u een willekeurige opvolgersverzameling is, de doorsnede van u met x ook een opvolgersverzameling is. Daarmee kunnen we er zeker van zijn dat y niet alleen een deelverzameling is van x, maar van elke opvolgersverzameling u. Immers $u \cap x \subseteq x$

2. Op grond van het extensionaliteitsaxioma is ook duidelijk dat er *ten hoogste* één kleinste opvolgersverzameling is.

Definitie 30 (Natuurlijke getal) Zij $\omega =$ de kleinste opvolgersverzameling.

(i) x is een natuurlijk getal dan en slechts dan als $x \in \omega$.

(ii) $0 = \emptyset$
$1 = \emptyset^{+} = \{\emptyset\}$
$2 = \emptyset^{++} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$3 = \emptyset^{+++} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
etc.

Het is niet zo dat we met bovenstaande definitie pretenderen een antwoord the geven op de vraag wat een natuurlijk getal is. Het enige dat de definitie pretendeert is dat de genoemde verzamelingen *de rol* van de natuurlijke getallen kunnen spelen. Dit moet uiteraard nog worden waargemaakt. Onder andere zullen we moeten laten zien dat er functies van $\omega \times \omega$ in ω bestaan die zich precies zo gedragen als de optelling en de vermenigvuldiging, en dat ook anderszins $\emptyset$ en haar successievelijke opvolgers aan onze verlangens kunnen voldoen.

Dit programma zullen we hier niet uitvoeren. Het enige dat we zullen bewijzen is dat het principe van volledige inductie opgaat voor ω

Stelling 15 (Volledige inductie) Laat $\varphi(x)$ een formule zijn waarin de variabele x vrij optreedt. Dan geldt:

$$(\varphi(0) \wedge \forall x((x \in \omega \wedge \varphi(x)) \to \varphi(x^{+}))) \to \forall x(x \in \omega \to \varphi(x))$$

N.B.: $\varphi(0)$ en $\varphi(x^{+})$ zijn de formules die je krijgt als je 0 respectievelijk x^{+} substitueert voor x in $\varphi(x)$ telkens als x vrij optreedt in $\varphi(x)$.

Bewijs Stel:

$$\varphi(0) \wedge \forall x((x \in \omega \wedge \varphi(x)) \to \varphi(x^{+})) \qquad \text{(a)}$$

Merk op dat op grond van Aussonderung

$$\{x \in \omega \mid \varphi(x)\}$$

een verzameling is. Gegeven (a) is $\{x \in \omega \mid \varphi(x)\}$ zelfs een opvolgersverzameling. Aangezien ω de kleinste opvolgersverzameling is geldt:

$$\omega \subseteq \{x \in \omega \mid \varphi(x)\}$$

Met andere woorden:

$$\forall x(x \in \omega \to \varphi(x))$$

■

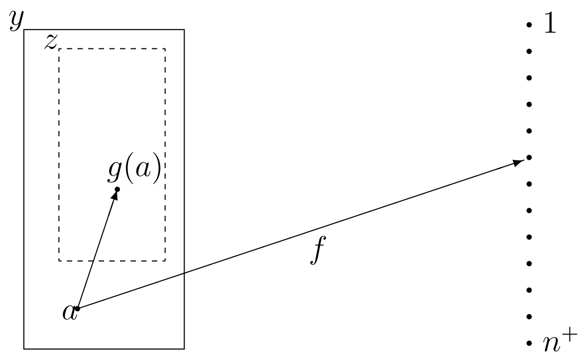
Definitie 31 (Eindige verzameling) Een verzameling x is *eindig* d.e.s.d.a. er een $n \in \omega$ is zodanig dat x gelijkmachtig is met n.

Stelling 16 Als x een eindige verzameling is, dan is er geen echte deelverzameling die gelijkmachtig is met x.

Bewijs (Cantor) We moeten voor een willekeurige verzameling y en een willekeurige $n \in \omega$ laten zien: Als y gelijkmachtig is met n, dan is er geen echte deelverzameling z van y zodanig dat y gelijkmachtig is met z. We bewijzen dit met inductie naar n, wat is toegestaan op grond van stelling 15.

Basisstap: $n = 0$. In dit geval geldt: $y = \emptyset$. Aangezien $\emptyset$ geen echte deelverzamelingen heeft, volgt de stelling op triviale wijze.

Inductiestap: Stel dat de bewering juist is voor alle verzamelingen met ten hoogste n elementen. Neem aan dat dat de verzameling y n^+ elementen heeft, dat wil zeggen er bestaat een bijectie f van y op n^+. Veronderstel nu dat er een $z \subseteq y$ met $z \neq y$ bestaat zodanig dat y gelijkmachtig is met z. Laat g een bijectie zijn van y op z.



Beschouw een $a \in y$ zodanig dat $a \notin z$. Zo'n a is er, want $z \neq y$. Nu geldt dat:

1. $y \setminus \{a\}$ is gelijkmachtig met n; De gezochte bijectie kunt U zo uit f aflezen.
2. $y \setminus \{a\}$ is gelijkmachtig met $z \setminus \{g(a)\}$.

Op grond van de inductiehypothese zijn (1) en (2) strijdig. Contradictie. ■

Uit stelling 16 volgt onmiddellijk dat ω niet eindig is in de precieze zin van het woord. Immers, ω is gelijkmachtig met $\omega \setminus \{\emptyset\}$, een echte deelverzameling van ω; de functie g die aan elke $n \in \omega$ n^+ als waarde toekent is een bijectie tussen ω en $\omega \setminus \{\emptyset\}$.

Opgave 43 Bewijs de volgende beweringen:

(a) De verzameling van de natuurlijke getallen, $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, is gelijkmachtig met de verzameling van de even natuurlijke getallen; $\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$.

(b) De verzameling van de gehele getallen, $\{\ldots, -3 - 2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$, is gelijkmachtig de verzameling van de natuurlijke getallen.

Stelling 17 $\mathbb{N}^2 =_1 \mathbb{N}$

Bewijs We moeten een bijectie $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ construeren. Beschouw het volgende plaatje:

$$\begin{array}{ccccccc}
9 & & & & & & \\
\langle 0,3\rangle & & & & & & \\
 & \nwarrow & & & & & \\
5 & & 8 & & & & \\
\langle 0,2\rangle & & \langle 1,2\rangle & & & & \\
 & \nwarrow & & \nwarrow & & & \\
2 & & 4 & & 7 & & \\
\langle 0,1\rangle & & \langle 1,1\rangle & & \langle 2,1\rangle & & \\
 & \nwarrow & & \nwarrow & & \nwarrow & \\
0 & & 1 & & 3 & & 6 \\
\langle 0,0\rangle & & \langle 1,0\rangle & & \langle 2,0\rangle & & \langle 3,0\rangle
\end{array}$$

Wanneer we nu $\mathbb{N}^2$ doorlopen op de wijze die de pijlen aangeven dan verkrijgen we een bijectie $f : \mathbb{N}^2 :\longrightarrow \mathbb{N}$.

Het punt $\langle m, n\rangle$ ligt op de $(m + n + 1)^e$ antidiagonaal, de nulde-diagonaal meegeteld. Voor een willekeurig punt $\langle m, n\rangle$ zijn er dus $(m+n)$ complete antidiagonalen. Op deze diagonalen liggen $1+2+\ldots+(m+n)$, ofwel $\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)$ punten. Het punt $\langle m, n\rangle$ wordt op zijn eigen antidiagonaal nog voorafgegaan door n punten. En dus wordt $\langle m, n\rangle$ voorafgegaan door precies $\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+n$ punten. Wanneer we nu f definiëren als: $f(\langle m, n\rangle) = \frac{1}{2}(m_2 + 2mn + n_2 + m + 3n)$ dan is f een bijectie van $\mathbb{N}^2$ op $\mathbb{N}$. Deze bijectie beeldt een willekeurig punt $\langle m, n\rangle$ af op het aantal punten dat aan $\langle m, n\rangle$ vooraf gaat als we $\mathbb{N}^2$ ordenen op de wijze die in bovenstaande figuur wordt weergegeven. ■

Na het bovenstaande rijst de vraag of er überhaupt oneindige verzamelingen bestaan die niet gelijkmachtig zijn met ω. Zijn er meerdere soorten van oneindigheid of is er maar één? De volgende stelling geeft hier uitsluitsel over.

Stelling 18 Zij x een willekeurige verzameling. Er is geen bijectie tussen x en $\wp(x)$.

Bewijs Met contrapositie. Neem aan dat er een bijectie f bestaat van x naar $\wp(x)$. We leiden een tegenspraak af als volgt. Beschouw de verzameling y gedefiniëerd als volgt:

$$y = \{z \in x \mid z \notin f(z)\}$$

Er geldt dat $y \subseteq x$, en omdat f een bijectie is moet gelden dat er een $u \in x$ bestaat zodanig dat $f(u) = y$. Maar dan geldt op grond van de definitie van y dat:

$$u \in y \Longleftrightarrow u \notin f(u)$$

En op grond van het feit dat $f(u) = y$ dat:

$$u \in y \Longleftrightarrow u \in f(u)$$

Contradictie. ∎

Definitie 32 (Kleinere of gelijke machtigheid) Laten x en y twee verzamelingen zijn. De verzameling x is *van kleinere of gelijke machtigheid* dan en slechts dan als er een injectie $f : x \to y$ is. Notatie: $x \preceq_1 y$.

Definitie 33 (Kleinere machtigheid) Als x en y verzamelingen zijn dan is x van *kleinere machtigheid* dan y dan en slechts dan als:

(i) Er is een injectie $f : x \to y$.
(ii) Er is geen bijectie $g : x \to y$.

Notatie: $x \prec_1 y$.

Twee verzamelingen zijn gelijkmachtig als er een bijectieve functie is die een van de twee verzamelingen als domein en de andere als bereik neemt. Meestal is het niet zo eenvoudig om een dergelijke bijectie te construeren. In deze en ook in andere gevallen kan de volgende beroemde stelling, die we hier niet zullen bewijzen, goede diensten bewijzen:

Stelling 19 (Schröder-Bernstein) Als $x \preceq_1 y$ en $y \preceq_1 x$, dan $x =_1 y$.

Bewijs Beschouw twee willekeurige verzamelingen a en b. Neem aan dat $a \preceq_1 b$ en dat $b \preceq_1 a$. Dit betekent dat er een injectie $f : a \to b$ is zodanig dat dom(f)=a en ran(f)= $c \subseteq b$, en dat er een injectie $g : b \to a$ bestaat met dom(g)=b en ran(g)= $d \subseteq a$ (zie figuur 1). Gebruikmakend van deze twee functies zullen we een bijectie h construeren, met andere woorden een een-eenduidige functie h waarvan het domein samenvalt met a en het bereik met b.

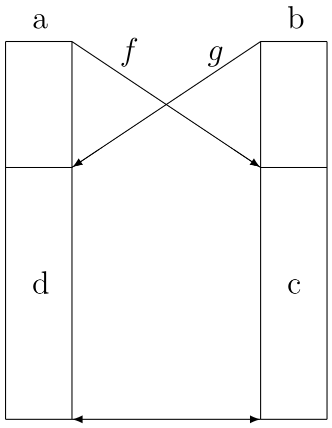


fig. 1

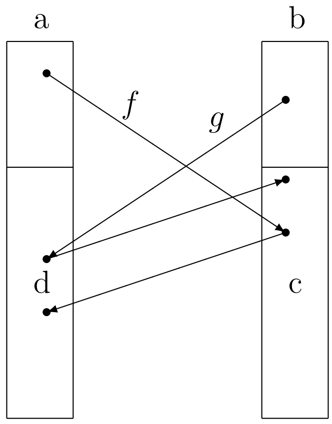


fig. 2

Wat niet volstaat is h te bepalen als $f \cup \breve{g}$. In dat geval kunnen we er niet eens zeker van zijn dat h een functie is. Beschouw een $y \in b \setminus c$. Uit $y \in b$ volgt dat $g(y) \in d$. Stel dat $g(y) = x$, m.a.w., dat $\breve{g}(x) = y$. Uit $x \in d$ volgt dat $x \in a$, en daarmee dat $f(x) \in c$. We hebben aangenomen dat $y \in b \setminus c$, wat wil zeggen dat $y \notin c$. Hieruit volgt dat $y \neq f(x)$. Wanneer nu $h = f \cup \breve{g}$, dan is zowel $\langle x, y\rangle$ als $\langle x, f(x)\rangle$ een element van h. Omdat $y \neq f(x)$ zou dit betekenen dat h twee beelden toekent aan x (zie figuur 2).

Ook als er niet zo'n y bestaat, in het geval dat $b \setminus c$ de lege verzameling is, is het allerminst zeker dat h de vereiste eigenschappen bezit. In dat geval hebben we redenen om te betwijfelen dat h een injectie is. Neem een $x \in a \setminus d$. Dan geldt: $f(x) \in b$ en dus: $\langle x, f(x)\rangle \in h$. Omdat $f(x) \in b$ geldt verder dat $g(f(x)) \in d$ en dat $\langle g(f(x)), f(x)\rangle \in h$. Uit $x \in a \setminus d$ volgt dat $x \notin d$. Omdat $g(f(x)) \in d$ geldt dus dat $g(f(x)) \neq x$, en daarmee dat h aan twee verschillende elementen uit a hetzelfde beeld toekent (figuur 2).

Een probleem dat zoëven naar voren kwam is dat het heel goed mogelijk is dat een f-beeld van een of ander element x in a vervolgens door g wordt afgebeeld op een element x', terwijl $x \neq x'$. We zouden dit kunnen voorkomen door ons bij de constructie bepaalde beperkingen op te leggen. We zouden ons, bijvoorbeeld, kunnen beperken tot dat deel van het domein van g waarvan we zeker weten dat het geen enkele f-beeld bevat samen genomen met dat deel van het domein van f dat geen g-beelden bevat. Geformuleerd in termen van f en $\breve{g}$; we zouden h kunnen definiëren als $h_0 = f \restriction (a \setminus d) \cup \breve{g} \restriction (b \setminus c)$. Dit is een een-eenduidige functie, omdat we disjuncte stukken van f en $\breve{g}$ gebruiken (figuur 3). Wat we ons nu moeten afvragen is of de beperking die we ons hebben opgelegd niet te stringent is. Wat we willen is een functie h met een domein dat samenvalt met a en een bereik dat samenvalt met b. Van de functie h_0 kunnen we niet zeker zijn dat ze aan deze voorwaarden voldoet; er hoeft maar een $x \in d$ te zijn zodanig at $\breve{g}(x) \in c$ en er geldt al dat $x \notin \mathrm{dom}(h_0)$. Op analoge wijze kan worden ingezien dat het bereik van h_0 niet hoeft samen te vallen met b.

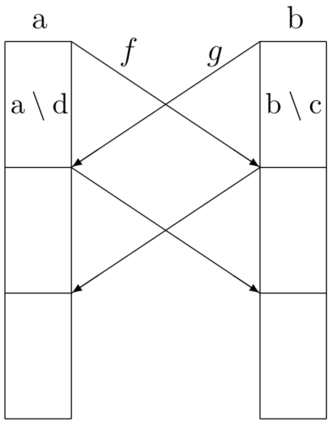


fig. 3

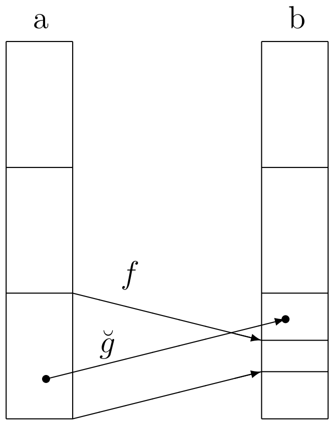


fig. 4

We zullen onze h_0 dus moeten aanvullen. Maar op welke wijze? Een manier is om voor elk overgebleven element $x \in a \setminus \mathrm{dom}(h_0)$ het paar $\langle x, f(x)\rangle$ toe te voegen aan h_0. In dat geval geldt voor elk van deze x dat $f(x) \in b \setminus \mathrm{ran}(h_0)$ (ga dit na) en daarmee dat de functionaliteit van h_0 niet wordt verstoord, maar we kunnen er niet zeker van zijn dat er voor *alle* $y \in b \setminus \mathrm{ran}(h_0)$ een $x \in a \setminus \mathrm{dom}(h_0)$ is, zodanig dat $f(x) = y$ (figuur 4). En wat moeten we dan met de overschietende y doen? Het hele domein x is al opgebruikt, dus elke verdere aanvulling zal de functionele eigenschappen aantasten.

Een andere manier is om voor alle $x \in a \setminus \mathrm{dom}(h_0)$ onze functie h_0 uit te breiden met het paar $\langle x, \breve{g}(x)\rangle$. Maar ook deze weg brengt ons niet waar we willen zijn. We kunnen er in dit geval niet eens zeker van zijn dat $\breve{g} \in b \setminus \mathrm{ran}(h_0)$ (zie figuur 4).

De mogelijkheid die nu nog open staat is om zowel f als $\breve{g}$ paren toe te voegen aan onze h_0. En dat werkt. Tenminste als we dat zodanig doen dat f tenslotte beperkt kan worden tot een domein e met $a \setminus d \subset e \subset a$ en $\breve{g}$ tot het stuk $a \setminus e$, terwijl $\breve{g}''(a \setminus e) = b \setminus f''e$. Wanneer we dan h definiëren als:

$$h =_{\mathrm{df}} f \restriction e \cup \breve{g} \restriction (a \setminus e)$$

dan verkrijgen we een relatie met de gewenste eigenschappen, want $\mathrm{dom}(h) = e \cup (a \restriction e) = a$ en $\mathrm{ran}(h) = f''e \cup \breve{g}''(a \setminus e) = f''e \cup (b \setminus f''e) = b$. De relatie h is een functie, want als $x \in \mathrm{dom}(h)$, dan geldt dat ofwel $x \in e$ in welk geval $h(x) = f(x)$ eenduidig vastligt, dan wel $x \in a \setminus e$ in welk geval $h(x) = \breve{g}(x)$, waarvoor hetzelfde geldt. De relatie h is ook een-eenduidig, want als $y \in \mathrm{ran}(h)$ dan geldt dat $y \in f''e$, òf dat $y \in b \setminus f''e = \breve{g}''(a \setminus e)$. En aangezien zowel f als g een-eenduidig zijn is er voor h geen enkel probleem (figuur 5).

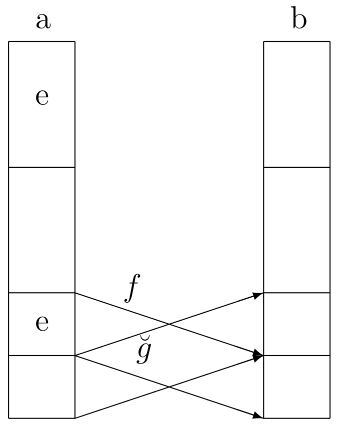


fig. 5

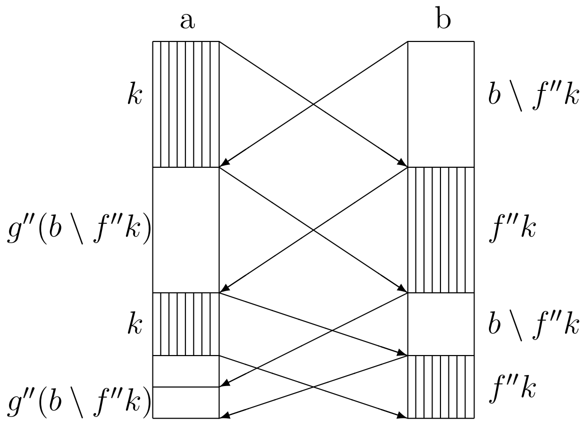


fig. 6

We hoeven dus 'alleen nog maar' te bewijzen dat er zo'n e met $a \setminus d \subset e \subset a$ en $\breve{g}''(a \setminus e) = b \setminus f''e$ — ofwel $g''(b \setminus f''e) = a \setminus e$ — bestaat. We zullen bewijzen dat je zo'n e kunt krijgen door de vereniging te nemen van alle k met $(a \setminus d) \subset k \subset a$ waarvoor geldt dat $g''(b \setminus f''k) = a \setminus k$ (figuur 6).

Bewering Zij $q = \{k \in \wp(a) \mid a \setminus \subset k \subset a \& g''(b \setminus f''k) \subset a \setminus k\}$ en $e = \bigcup q$. Dan geldt:

$$a \setminus d \subset e \subset a \text{ en } g''(b \setminus f''e) = a \setminus e$$

Bewijs

1. $a \setminus d \subset e$, want als $x \in a \setminus d$, dan is x een element van elke $k \in q$ en x hoeft maar in een $k \in q$ te zitten om een element van $\bigcup q$ te zij.
2. $e \subset a$. Dat $x \in e$ impliceert dat er een $k \in q$ is met $x \in k$. Voor alle $k \in q$ geldt dat $k \subset a$ en dus geldt ook dat $x \in a$.
3. $g''(b \setminus f''e) \subset a \setminus e$. Aangezien $g''(b \setminus f''e) \subset a$ en $e \subset a$ kunnen we net zo goed bewijzen dat $e \subset a \setminus g''(b \setminus f''e)$. Zij $x \in e$. Dan is er een $k \in q$ zodanig dat $x \in k$. Er geldt: $k \subset a \setminus g''(b \setminus f''k)$, en dus ook: $x \in a \setminus g''(b \setminus f''k)$. We laten zien dat $a \setminus g''(b \setminus f''k) \subset a \setminus g''(b \setminus f''e)$. Daartoe volstaat het te laten zien dat $g''(b \setminus f''k) \subset g''(b \setminus f''e)$. Welnu, er geldt dat $k \subset e$, en dus $f''k \subset f''e$, derhalve $b \setminus f''e \subset b \setminus f''k$, en daarmee $g''(b \setminus f''e) \subset g''(b \setminus f''k)$.
4. $a \setminus e \subset g''(b \setminus f''e)$. Het is voldoende om te bewijzen dat $a \setminus g''(b \setminus f''e) \subset e$. Noem $a \setminus g''(b \setminus f''e)$ gemakshalve e_0. We weten al dat $e \subset e_0$. Dan geldt: $a \setminus g''(b \setminus f''e) \subset a \setminus g''(b \setminus f''e_0)$ (zie boven). Met andere woorden, $e_0 \subset a \setminus g''(b \setminus f''e_0)$. Maar dan geldt dat $e_0 \in q$. En aangezien $e = \bigcup q$, geldt dan ook dat $e_0 \subset e$. ■

Opgave 44 Gebruik de Schröder-Bernstein stelling om te bewijzen dat $\mathbb{Q}$, de verzameling van de rationale getallen, dat zijn alle getallen die geschreven kunnen worden in de vorm $\frac{n}{m}$, met $n, m \in \mathbb{N}$, even groot is als de verzameling natuurlijke getallen.

De natuurlijke getallen, de gehele getallen en de rationale getallen zijn verzamelingen die even groot zijn; ze zijn allen gelijkmachtig met ω. De machtsverzameling van ω, $\wp(\omega)$, heeft meer elementen dan ω, en de machtsverzameling van die machtsverzameling nog meer.

De de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen is gelijkmachtig met machtsverzameling van ω. We zullen dat hier niet bewijzen, maar de aandacht richten op het volgende. Met $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ zijn twee oneindige verzamelingen gegeven die in grootte van elkaar verschillen. Je kunt je nu afvragen of er oneindige verzameling is die meer elementen heeft dan $\mathbb{N}$, maar minder dan $\mathbb{R}$. Deze vraag is het voor het eerst opgeworpen in [5], waarin Cantor het vermoeden uitte dat dat niet zo is. Dit vermoeden is bekend geworden als de *continuüm hypothese*.

Zeker nadat Hilbert in 1900 zijn lijst met belangrijke, nog open wiskundige vraagstellingen had gepubliceerd, een lijst waarop de continuüm hypothese bovenaan stond, groeide de vraag naar de juistheid van Cantor's vermoeden uit tot een van de nijpendste problemen in de wiskunde. In 1938 bewees Kurt Gödel dat de continuüm-hypothese consistent is met de ZFC-verzamelingenleer.[9] Maar in 1963 werd door Cohen bewezen dat de continuüm hypothese *onafhankelijk* is van ZFC.[10], met andere woorden, Cohen bewees dat noch de continuüm hypothese, noch haar negatie kan worden bewezen in ZFC.

De onafhankelijkheid van de continuüm hypothese raakt ogenblikkelijk aan de status van de verzamelingleer. De vraag rijst of de verzamelingleer zich zal opslitsten in een theorie met en een theorie zonder de continuüm hypothese, zoals in de meetkunde de onafhankelijkheid van het parallellen axioma aanleiding heeft gegeven tot de Euclidische meetkunde, die het parallellen axioma aanvaardt, en de niet-Euclidische meetkunde die dat niet doet. Gödel dacht daar het volgende over:[11]

> Only someone who (like the intuitionist) denies that the concepts and axioms of classical set theory have any maning (or any well-defined meaning) could be statisfied with such a solution, not someone who believes them to describe some well-determined reality. For in this reality Cantor's conjecture must be either true or false, and its undecidability from the axioms as know today can only mean that these axioms do not contain a complete description of this reality.

9. [11]. De ZFC-verzamelingenleer is de Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer aangevuld met het keuze-axioma.
10. [7].
11. [12].

Een definitief antwoord op de vraag naar de continuüm hypothese, zo hoopte Gödel, zou gegeven kunnen worden wanneer we op basis van een dieper inzicht in de notie 'verzameling' axioma's zouden kunnen toevoegen aan de verzamelingenleer. Tot op heden zijn deze axioma's nog niet gevonden.

Hoofdstuk 3

Vaagheid

3.1 Inleiding

In dit hoofdstuk stellen we ons ten doel een semantiek voor vage predikaten te ontwikkelen. Minimumeis: De zogeheten *Sorites Paradox* moet bevredigend worden opgelost.

Vele versies van de *Sorites* kunnen in de volgende vorm gegoten worden:

1.	Pa_0
2.	$Pa_0 \to Pa_1$
3.	$Pa_1 \to Pa_2$
	$\ldots$
	$\ldots$
n+1.	$Pa_{n-1} \to Pa_n$
Derhalve	Pa_n

In de originele Sorites verwijst elke a_i naar een hoeveelheid zand bestaande uit i zandkorrels; P staat voor de eigenschap 'vormen geen hoop'. Het spreekt vanzelf dat nul korrels zand geen hoop vormen terwijl het moeilijk te ontkennen is — welk getal i ook mag zijn — dat als i korrels zand geen hoop vormen, $i+1$ korrels dat ook niet doen. Kies nu voor n een willekeurig getal. Door n maal Modus Ponens toe te passen, kunnen we uit de premissen afleiden dat n korrels zand geen hoop vormen. We kunnen dat voor willekeurige n, dus hopen zand bestaan niet.

Andere voorbeelden:
(1) Laat a_0 de naam zijn van een basketballspeler van 2,25m; kies voor a_{i+1} een basketballspeler die 1 mm kleiner is dan a_i; laat P staan voor 'is lang'. Je zou zeggen dat als a_i lang is, a_{i+1} dat ook is. Aangezien elke basketballspeler van 2,25m lang is, volgt voor elke n die we maar willen nemen, dat een basketballspeler van 2,25m$-n$ mm lang is. Maar dat is niet zo.

(2) P staat voor 'is rood'. Het is niet moeilijk een eindige rij objecten, zeg $a_0, \ldots, a_n$ te vinden zodanig dat (i) a_0 zeker rood is; (ii) a_n zeker niet rood is; en (iii) voor elke $i < n$ geldt dat als a_i rood is a_{i+1} dat ook is, al was het maar omdat er geen kleurverschil tussen a_i en a_{i+1} te zien is. Er laat zich weer eenvoudig een contradictie afleiden.

3.2 Poging 1: Driewaardige Logica

Basisidee: Als een predikaat P 'vaag' is dan zal de vraag of P aan een bepaald object toekomt soms niet met een simpele "ja" of "nee" beantwoord kunnen worden. Soms heeft de zin Pa geen waarheidswaarde.

Een ven de manieren om aan dit intuitieve idee een mathematische vorm the geven is de volgende.

Definitie 34 Zij $\mathcal{L}$ een taal van de predikatenlogica. Een (partiëel) model $\mathcal{M}$ voor $\mathcal{L}$ is een geordend paar $\langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, waarbij

(i) $\mathcal{D}$ een niet lege verzameling is, het *domein* van het model.

(ii) Voor elke individuele constante a geldt: $\mathcal{I}(a)$ is een element van $\mathcal{D}$. Voor het gemak nemen we aan dat er bij elk object d uit $\mathcal{D}$ minstens een individuele constante a te vinden is zodanig dat $\mathcal{I}(a) = d$.

(iii) Voor elke n-plaatsig predikaat P geldt: $\mathcal{I}(P)$ is een partiële functie van van $\mathcal{D}^n$ in $\{0, 1\}$.

Toelichting: Zij P een eenplaatsig predikaat: $\mathcal{I}(P)$ is in dit geval een partiële functie van van $\mathcal{D}$ in $\{0, 1\}$, dwz: Voor sommige elementen d uit $\mathcal{D}$ geldt $\mathcal{I}(P)(d) = 1$; de eigenschap uitgedrukt door P komt dan toe aan het object d. Voor andere objecten uit $\mathcal{D}$ geldt: $\mathcal{I}(P)(d) = 0$; de eigenschap uitgedrukt door P komt dan niet — zeker niet — toe aan het object d. En voor weer ander objecten uit $\mathcal{D}$ geldt dat $\mathcal{I}(P)(d)$ ongedefinieerd is: P is te vaag om hier uitsluitsel te geven.

Met het bovenstaande ligt voor elke atomaire zin $Pa_0 \ldots a_n$ vast wat de waarheidswaarde $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(Pa_0 \ldots a_n)$ van $Pa_0 \ldots a_n$ in het model $\mathcal{M}$ is:

$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(Pa_0 \ldots a_n) = 1$ desda $\mathcal{I}(P)(\langle \mathcal{I}(a_0), ..., \mathcal{I}(a_n) \rangle) = 1$.

$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(P(a_0 \ldots a_n)) = 0$ desda $\mathcal{I}(P)(\langle \mathcal{I}(a_0), ..., \mathcal{I}(a_n) \rangle) = 0$.

$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(Pa_0 \ldots a_n)$ is ongedefinieerd in alle andere gevallen.

Rest ons een recept te geven om de waarheidswaarde van meer complexe zinnen uit die van de atomaire zinnen te berekenen. Zelfs als we ons beperken tot een waarheidsfunctioneel recept, dienen er zich op het eerste gezicht vele alternatieven aan. Maar, met behulp van twee principes, *betrouwbaarheid* en *stabileit*, kunnen we dat aantal mogelijkheden flink inperken.

Het principe van betrouwbaarheid is dit: als we toevallig met een totale interpretatie te maken hebben — dwz: als $\mathcal{I}(P)(\langle d_0 \ldots d_n \rangle)$voor alle (n-plaatsige) predikaten P en alle rijtjes $\langle d_0 \ldots d_n \rangle$ gedefinieerd is — dan zal het recept dezelfde resultaten moeten geven als Tarski's waarheidsdefinitie. We gaan ervan uit dat voor dat voor precieze predicaten Tarski's semantiek (bekend uit Logica 1, zie Gamut 3.6.2) in orde is.

Om het principe van stabiliteit te formuleren hebben we nog een nieuw begrip nodig. Een van de kenmerken van vage predikaten is dat ze *gepreciseerd* kunnen worden. Formeel kunnen we dit begrip als volgt invoeren:

Definitie 35 Laten $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ en $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I}' \rangle$ twee pariële modellen met elk hetzelfde domein zijn. $\mathcal{M}'$ is een *precisering* van $\mathcal{M}$ desda aan de volgende voorwaarden voldaan is:
(a) Als P n-plaatsig is en $\mathcal{I}(P)(\langle d_0 \dots d_n \rangle) = 1$, dan $\mathcal{I}'(P)(\langle d_0 \dots d_n \rangle) = 1$;
(b) Als P n-plaatsig is en $\mathcal{I}(P)(\langle d_0 \dots d_n \rangle) = 0$, dan $\mathcal{I}'(P)(\langle d_0 \dots d_n \rangle) = 0$.

Het principe van stabiliteit luidt zo: als een zin φ waar(onwaar) is in een model $\mathcal{M}$, dan moet φ ook waar(onwaar) blijven als $\mathcal{M}$ nader preciseerd wordt. Formeel: Laat $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I}' \rangle$ een precisering van $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ zijn. Dan moet voor alle φ gelden:
(i) Als $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$, dan $\mathcal{V}_{\mathcal{M}'}(\varphi) = 1$.
(ii) Als $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$, dan $\mathcal{V}_{\mathcal{M}'}(\varphi) = 0$.

De volgende definitie is de enige waarheidsfunctionele die aan de principes van betrouwbaarheid en stabiliteit voldoet.

Definitie 36 Zij $\mathcal{L}$ een taal van de predikatenlogica en $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ een partiëel model voor $\mathcal{L}$. Dan geldt

- $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(Pa_0 \dots a_n) = 1$ desda $\mathcal{I}(P)(\langle \mathcal{I}(a_0), ..., \mathcal{I}(a_n) \rangle) = 1$
  $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(P(a_0 \dots a_n) = 0$ desda $\mathcal{I}(P)(\langle \mathcal{I}(a_0), ..., \mathcal{I}(a_n) \rangle) = 0$
- $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) = 1$ desda $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$
  $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) = 0$ desda $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}\varphi) = 1$
- $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi \wedge \psi) = 1$ desda $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ en $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$
  $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi \wedge \psi) = 0$ desda $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$ of $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 0$
- $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi \vee \psi) = 1$ desda $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ of $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$
  $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi \vee \psi) = 0$ desda $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$ en $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 0$
- $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi \to \psi) = 1$ desda $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$ of $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$
  $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi \to \psi) = 0$ desda $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ en $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 0$
- $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\exists x\varphi) = 1$ desda $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}([^a/x]\varphi) = 1$ voor minstens één constante a
  $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\exists x\varphi) = 0$ desda $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}([^a/x]\varphi) = 0$ voor elke constante a
- $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\forall x\varphi) = 1$ desda $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}([^a/x]\varphi) = 1$ voor elke constante a
  $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\forall x\varphi) = 0$ desda $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}([^a/x]\varphi) = 0$ voor minstens een constante a.

Stelling 20 De bovenstaande definitie is de enige waarheidsfunctionele definitie die beantwoordt aan de principes van Stabiliteit en Betrouwbaarheid.

Bewijs Dat de bovenstaande definitie inderdaad beantwoordt aan de principes van Betrouwbaarheid en Stabiliteit is gemakkelijk te bewijzen met inductie naar de complexiteit van de formule. Dat er geen andere waarheidsfunctionele definitie met deze eigenschappen is, kun je laten zien door te bewijzen dat er in alle gevallen geen andere keus is Als voorbeeld volgt hier de waarheidsclausule van implicatie. Alle andere gevallen gaan net zo. De waarheidsclausule luidt als volgt:

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi \to \psi) = 1 \text{ desda } \mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0 \text{ of } \mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$$

$\Leftarrow$ Onze waarheidsdefinitie zou niet betrouwbaar zijn als we gestipuleerd hadden dat in het geval dat $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$ of $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$, $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi \to \psi)$ de waarde 0 krijgt , of ongedefineerd blijft.
$\Rightarrow$ Beschouw het geval dat $\varphi = Pa$ en $\psi = Qb$. Stel dat $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(Pa) \neq 0$ en $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(Qb) \neq 1$. Dan is er altijd een precisering $\mathcal{M}'$ van $\mathcal{M}$ te vinden zodanig dat $\mathcal{V}_{\mathcal{M}'}(Pa) = 1$ en $\mathcal{V}_{\mathcal{M}'}(Qb) = 0$. Het principe van betrouwbaarheid eist dat $\mathcal{V}_{\mathcal{M}'}(Pa \to Qb) = 0$. Gegeven het principe van stabiliteit is het dan niet toegelaten dat $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(Pa \to Qb) = 1$. M.a.w. als $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(Pa \to Qb) = 1$ dan $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(Pa) = 0$ of $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(Qb) = 1$. En, gegeven de waarheidsfunctionele opzet van het geheel, zal wat voor Pa en Qb geldt voor alle φ en ψ moeten gelden.

De volgende definitie legt vast wanneer een redenering Δ/φ geldig is binnen dit raamwerk:

Definitie 37 $\Delta \models \varphi$ desda voor alle partiële modellen $\mathcal{M}$ geldt:
als $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$ voor alle $\psi \in \Delta$, dan $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$.

Opgave 45 Bewijs:
(i) $\varphi, \varphi \to \psi \vDash \psi$
(ii) $\nvDash \varphi \vee \neg\varphi$
(iii) $\nvDash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$

Uit (i) hierboven blijkt dat de redeneringsvorm waarmee we dit hoofdstuk begonnen, de Sorites,binnen het hier behandelde raamwerk geldig is.Door herhaalde toepassing van Modus Ponens kan men van Pa_0 via Pa_1, Pa_2 etc tot, zeg, $Pa_{10.000}$ concluderen. Dat wil natuurlijk nog niet zeggen dat voorstanders van deze theorie, zo die er al zouden zijn, gehouden zijn die conclusie te accepteren. Die zullen ongetwijfeld een of meerdere premissen te verwerpen. De theorie biedt ze daar ook de mogelijkheid toe. Ook al is Pa_0 waar, en Pa_1, en Pa_3 en Pa_4, dat wil nog niet zeggen dat Pa_k waar is voor alle $k \leq 10.000$. Het kan best dat Pa_k voor k tussen 3000 en 6000 onbepaald is en vanaf 6000 onwaar. Daarmee worden, gegeven de waarheidsdefinitie, de waarheidswaarde van de premissen $Pa_k \to Pa_{k+1}$ voor k tussen 3000 en 6000 onbepaald.

Kritiek: Uit het bovenstaande zal al duidelijk geworden zijn hoe simplistisch er in deze theorie over vaagheid gedacht wordt. Er wordt weliswaar geen scherpe grens getrokken tussen aan de ene kant de verzameling objecten waaraan het predikaat 'kaal'(of 'klein' etc) zeker wel toekomt en aan de andere kant verzameling de objecten waaraan dat predikaat zeker niet toekomt — er zijn objecten waarvoor het onbepaald is of het predikaat in kwestie eraan toekomt. Maar er liggen wel scherpe grenzen tussen het "positieve"gebied en het "onbepaalde"gebied en tussen het "onbepaalde"gebied en het "negatieve gebied". De theorie suggereert dat we in staat zijn om twee precieze getallen aan te geven, zeg k en m (met $k < m$, zodanig dat we eenieder met niet meer dan k haren 'kaal' noemen, eenieder met niet minder dan m haren 'niet kaal', en bij alle anderen onze schouders ophalen.

Een tweede lijn van kritiek op dit raamwerk sluit aan bij (ii) van de opgave. Heel algemeen gesteld komt deze kritiek hierop neer: ook tussen zinnen waarvan de waarheidswaarde onbepaald is kunnen logische relaties bestaan. Deze worden in de theorie echter niet verantwoord. Voorbeeld: ook al is de waarheidswaarde van de zin 'Jan is kaal' onbepaald, dat wil nog niet zeggen dat waarheidswaarde de zin 'Jan is kaal en Jan is niet kaal' onbepaald is. Die zin zou gewoon de waarheidswaarde 'onwaar' moeten krijgen. Het predikaat 'kaal' is vaag, maar hoe we het ook preciseren, bij geen enkele precisering kan het voorkomen dat een object zowel in de positieve extensie als in de negatieve extensie van 'kaal' komt te vallen. Ander voorbeeld: ook al is het niet duidelijk of het jurk van Marie nu geel is of oranje, daarmee is nog niet gezegd dat de zin 'Marie's jurk is geel of oranje' geen waarheidswaarde toekomt. Die disjuncie kan best waar zijn terwijl beide disjuncten onbepaald zijn. Ook al zijn de predikaten 'geel' en 'oranje' allebei vaag, er is wel een *betekenisrelatie* tussen, zelfs in het gebied waarin het voor beide predikaten onduidelijk is of ze van toepassing zijn.

3.3 Poging 2: Supervaluaties

Hoe verantwoord je betekenisrelaties tussen vage predikaten in een mathematisch model? De hieronder geintroduceerde manier is bedacht door de logicus Kit Fine. (Zie [9]).

Definitie 38 Zij $\mathcal{L}$ een taal van de predikatenlogica. Een supermodel $\mathcal{M}$ voor $\mathcal{L}$ is een geordend paar $\langle \mathcal{D}, \mathcal{J} \rangle$, waarbij

(i) $\mathcal{D}$ een niet lege verzameling is, het *domein* van het model;

(ii) $\mathcal{J}$ een (niet lege) verzameling (partiële) interpretaties is zodanig dat

(a) elke $\mathcal{I} \in \mathcal{J}$ aan elke individuele constante a een element $\mathcal{I}(a)$ van $\mathcal{D}$ toekent;

(b) elke $\mathcal{I} \in \mathcal{J}$ aan elk n-plaatsig predikaat P een partiële functie $\mathcal{I}(P)$ van $\mathcal{D}^n$ in $0, 1$ toekent.

Daarbij gelden nog de volgende restricties:

(c) voor alle $\mathcal{I}, \mathcal{I}' \in \mathcal{J}$ en elke individuele constante a geldt: $\mathcal{I}(a) = \mathcal{I}'(a)$;

(d) er is een $\mathcal{I}_0 \in \mathcal{J}$ zodanig dat voor alle $\mathcal{I} \in \mathcal{J}$ geldt: $\mathcal{I}$ is een precisering van $\mathcal{I}_0$;
(e) voor alle $\mathcal{I} \in \mathcal{J}$ is er een $\mathcal{I}' \in \mathcal{J}$ zodanig dat $\mathcal{I}'$ een totale precisering van $\mathcal{I}$ is.

Toelichting

Het idee dat aan de bovenstaande definitie ten grondslag ligt is dit: de betekenis van een vaag predikaat is gegeven met alle mogelijke manieren waarop het gepreciseerd kan worden. Het domein $\mathcal{D}$, samen met de onder d) genoemde zogenaamde *basisinterpretatie* $\mathcal{I}_0$ vormen samen een geheel $\langle \mathcal{D}, \mathcal{I}_0 \rangle$ dat u kunt vergelijken met de modellen uit de vorige paragraaf: met $\mathcal{I}_0$ wordt voor elk van de predikaten vastgelegd wat de "vageëxtensie ervan is op het domein $\mathcal{D}$. Elk van de andere interpretatiefuncties $\mathcal{I} \in \mathcal{J}$ vormt samen met $\mathcal{D}$ een model $\langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ dat u het best kan opvatten als een *toegelaten* precisering van $\langle \mathcal{D}, \mathcal{I}_0 \rangle$. Niet alle logisch mogelijke preciseringen zijn toegelaten; alleen die preciseringen die de betekenisrelaties tussen de verschillende predikaten respecteren. Met Clausule e) wordt gesteld dat het altijd mogelijk is alle predikaten zo te preciseren dat alle vaagheid uitgebannen wordt. “We zouden wel precies kunnen zijn als we maar zouden willen”.

Definitie 39 (Waarheidsdefinitie) Zij $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{J} \rangle$ een supermodel, en φ een zin. Per definitie zal dan gelden:

- $\mathcal{W}_\mathcal{M}(\varphi) = 1$ desda $\mathcal{V}_{\langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle}(\varphi) = 1$ voor *alle* totale $\mathcal{I} \in \mathcal{J}$.
- $\mathcal{W}_\mathcal{M}(\varphi) = 0$ desda $\mathcal{V}_{\langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle}(\varphi) = 0$ voor *alle* totale $\mathcal{I} \in \mathcal{J}$.
- In andere gevallen is $\mathcal{W}_\mathcal{M}(\varphi)$ onbepaald.

$\mathcal{W}_\mathcal{M}(\varphi)$ is de waarhedswaarde van φ in het supermodel $\mathcal{M}$. U weet uit de vorige paragraaf al hoe u $\mathcal{V}_{\langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle}(\varphi)$ kan bepalen. Daar is ook gebleken dat voor totale $\mathcal{I}$ $\mathcal{V}_{\langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle}(\varphi)$ samenvalt met de waarheidswaarde die φ in $\langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ zou krijgen volgens de waarheidsdefinitie van Tarski.

Fine licht de waarheidsdefinitie als volgt toe:

> A sentence is true if it is true for all ways of making it completely precise. As such it is a sort of principle of non-pedantry: truth is secured if it does not turn upon what one means. Absence of meaning makes for absence of truthvalue only if presence of meaning could make for diversity of truth value.

Definitie 40 Zij $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{J} \rangle$ een supermodel.
$\mathcal{M}' = \langle \mathcal{D}', \mathcal{J}' \rangle$ is een restrictie van $\mathcal{M}$ desda
(i) $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.
(ii) Er is een $\mathcal{I} \in \mathcal{J}$ zodanig dat
$\mathcal{J}' = \{\mathcal{I}' \in \mathcal{J} | \langle \mathcal{D}, \mathcal{I}' \rangle$ is een precisering van $\langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle\}$

De zin van deze definitie is gelegen in de volgende stelling.

Stelling 21 Zij $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{J} \rangle$ een supermodel. De waarheidsdefinitie die hierboven gegeven is, is de *enige* definitie die beantwoordt aan de volgende principes:
Betrouwbaarheid Als $\mathcal{J} = \{\mathcal{I}\}$ voor zekere totale $\mathcal{I}$, dan geldt $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ desda $\mathcal{V}_{\langle \mathcal{D},\mathcal{I} \rangle}(\varphi) = 1$ volgens de waarheidsdefinitie van Tarski.
Stabiliteit (i) Als $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$, dan $\mathcal{W}_{\mathcal{M}'}(\varphi) = 1$ voor alle restricties $\mathcal{M}'$ van $\mathcal{M}$;
(ii) Als $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$, dan $\mathcal{W}_{\mathcal{M}'}(\varphi) = 0$ voor alle restricties $\mathcal{M}'$ van $\mathcal{M}$.
Resolutie (i) Als $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}(\varphi) \neq 1$, dan is er een restrictie $\mathcal{M}'$ van $\mathcal{M}$ zodanig dat $\mathcal{W}_{\mathcal{M}'}(\varphi) = 0$;
(ii) Als $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}(\varphi) \neq 0$, dan is er een restrictie $\mathcal{M}'$ van $\mathcal{M}$ zodanig dat $\mathcal{W}_{\mathcal{M}'}(\varphi) = 1$.

Bewijs Dat de waarheidsdefinitie aan de genoemde principes voldoet is onmiddellijk duidelijk. Dat het ook de enige is die aan deze principes voldoet is als volgt in te zien. Elke andere waarheidsdefinitie zou (minstens) een van de vier volgende situaties toelaten:

(a) voor een of ander supermodel $\mathcal{M}$ zou kunnen gelden dat $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$, terwijl toch voor zekere totale $\mathcal{I} \in \mathcal{J}$, $\mathcal{V}_{\langle \mathcal{D},\mathcal{I} \rangle}(\varphi) = 0$. Maar dat zou in strijd zijn met het genoemde principe van stabiliteit.
(b) voor een of ander supermodel $\mathcal{M}$ zou kunnen dat $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}(\varphi) \neq 1$, terwijl toch voor alle totale $\mathcal{I} \in \mathcal{J}$, $\mathcal{V}_{\langle \mathcal{D},\mathcal{I} \rangle}(\varphi) = 1$. Maar dat zou in strijd zijn met het genoemde principe van resolutie.
(c) voor een of ander supermodel $\mathcal{M}$ zou kunnen gelden dat $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$, terwijl toch voor zekere totale $\mathcal{I} \in \mathcal{J}$, $\mathcal{V}_{\langle \mathcal{D},\mathcal{I} \rangle}(\varphi) = 1$. Dit zou net als (a) in strijd zijn met het principe van betrouwbaarheid.
(d) voor een of ander supermodel $\mathcal{M}$ zou kunnen dat $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}(\varphi) \neq 0$, terwijl toch voor alle totale $\mathcal{I} \in \mathcal{J}$, $\mathcal{V}_{\langle \mathcal{D},\mathcal{I} \rangle}(\varphi) = 1$. En dit is net als (c) in strid met principe van resolutie.

De volgende definitie legt vast wanneer een redenering Δ/φ geldig is in deze opzet.

Definitie 41 $\Delta \models \varphi$ desda voor alle supermodellen $\mathcal{M}$ geldt: als $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$ voor alle $\psi \in \Delta$, dan $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$.

Stelling 22 $\Delta \models \varphi$ desda Δ/φ is geldig in de klassieke zin van het woord.

Bewijs Van rechts naar links: Stel $\Delta \not\models \varphi$. Dan is er een supermodel $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{J} \rangle$ zodanig dat $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$ voor alle $\psi \in \Delta$, terwijl $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}(\varphi) \neq 1$. Gegeven het resolutieprincipe er een restrictie $\mathcal{M}'$ van $\mathcal{M}$ zodanig dat $\mathcal{W}_{\mathcal{M}'}(\varphi) = 0$. Beschouw een restrictie $\mathcal{M}'' = \langle \mathcal{D}, \{\mathcal{I}\} \rangle$ van $\mathcal{M}'$ met $\mathcal{I}$ totaal. Gegeven het principe van stabiliteit zal gelden $\mathcal{W}_{\mathcal{M}''}(\varphi) = 0$, en ook $\mathcal{W}_{\mathcal{M}''}(\psi) = 1$ voor alle $\psi \in \Delta$. Dat betekent dat Δ/φ ook ongeldig is in de klassieke zin van het woord. Met $\mathcal{M}''$ is een een Tarskiaans tegenmodel tegen Δ/φ gegeven.

Van links naar rechts: triviaal.

Sorites: Volgens deze aanpak hebben vage predikaten dus dezelfde logische eigenschappen als precieze predikaten. Zo geldt dat $\models Pa \vee \neg Pa$ of P nu vaag is of niet. En wat de Sorites betreft: ook volgens deze theorie is die redenering geldig, en ook voorstanders van deze theorie zullen dus als ze aan de conclusie van een Soritesargument willen ontsnappen, de premissen moeten bestrijden. Ze kunnen daarbij iets subtieler te werk gaan dan de (imaginaire) aanhangers van de theorie uit de voorgaande paragagraaf. Deze aanpak stelt je in staat te beweren dat er een getal k is zodanig dat de zin $Pa_k \to Pa_{k+1}$ onwaar is, zonder je daarmee te verplichten ook zo'n getal k te speciferen. Bij elke volledige precisering van de taal is er een getal k zodanig dat $Pa_k \to Pa_{k+1}$ onwaar is, maar dat getal k hoeft niet voor elke volledige precisering hetzelfde te zijn.

Kritiek: De hier behandelde theorie gaat er vanuit dat vaagheid een kwestie van luiheid is - we zouden wel precies kunnen zijn als we dat zouden willen, zo stelt clausule e) van de definitie van supermodel, maar waarom zouden we precies worden daar waar alle verdere precisering toch niets uitmaakt? Het is echter de vraag of dit een juiste stelling is. Als Michael Dummett, wiens theorie we in de volgende paragraaf zullen behandelen gelijk heeft, dan *kunnen* we niet precies zijn, tenminste niet zonder in botsing te komen met een fundamenteel semantisch principe dat aan het gebruik van alle vage predikaten ten grondslag ligt.

3.4 Dummett's Diagnose

Variants of the Sorites - if you want more variants than the ones given in section 1 are easy to come by. [1] In fact, it appears from [8] that the supply is inexhaustible. All you need is a vague predicate P, preferably one with a comparative form, the use of which is guided by the following rule:

> If two objects are observationally indistinguishable in the respects relevant to P, then either both satisfy P or else neither of them does.

Following Kamp [1981], we will refer to this principle, which expresses the Equivalence of Observationally Indistinguishable objects, as EOI.

With such a vague predicate P, one can nearly always associate a domain $\mathcal{D}$ and a relation $\mathcal{R}$ with the following properties:

1. Wat volgt is een bewerking van een deel van een artikel dat in samenwerking met R. Muskens in het Engels geschreven is.

1. $\mathcal{D}$ is nonempty; the objects in $\mathcal{D}$ are similar in kind and (therefore) comparable in the respects relevant to P.
2. $\mathcal{R}$ is the irreflexive and transitive relation on $\mathcal{D}$ consisting of the pairs $\langle d, e\rangle$ of which the first member d is observationally *more* P than the second member e.
3. There are objects d and e in $\mathcal{D}$ such that
   (a) P clearly applies to d;
   (b) P clearly does not apply to e;
   (c) There is a finite sequence of objects $d = d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}, d_n = e$ in $\mathcal{D}$ such that for any two successive objects d_i and d_{i+1} in this sequence, neither $d_i \mathcal{R} d_{i+1}$, nor $d_{i+1} \mathcal{R} d_i$.

Let us write $x\mathcal{E}y$ iff neither $x\mathcal{R}y$ nor $y\mathcal{R}x$. Whenever $x\mathcal{E}y$, x and y are observationally indistinguishable in the respects relevant to the predicate P, and therefore it is tempting to read '$x\mathcal{E}y$' as 'x is observationally *just as* P as y'. We will not resist this temptation, even though we are aware that $\mathcal{E}$ need not be an equivalence relation. That is, $\mathcal{E}$ is reflexive and symmetric, but not in general transitive. It may very well occur that there is no discriminable difference between the objects x and y — x is observationally just as P as y — and no discriminable difference between the objects y and z — y is observationally just as P as z — whereas x and z *can* be discriminated — x is observationally more P than z. It is easy to see now how the paradox can arise. The principle EOI forces us to use the predicate P in a way that would only be coherent if the relation $\mathcal{E}$ were transitive.

For, what else does EOI express but:

(EOI 1) For any $x, y \in \mathcal{D}$, if $x\mathcal{E}y$, then, if P applies to x, P applies to y.

So, you cannot assign the predicate P to d_0 without having to assign it to $d_1, d_2, d_3, \ldots$, and, finally, to d_n as well. EOI forces you to do so, even though $\mathcal{E}$ is not transitive: d_0 and d_n could be so far apart — d_0 has got no hairs, d_n has 150,000 hairs; the temperature of d_0 is 2^o C, the temperature of d_n is 80^o C — that it would seem perfectly all-right to say that d_0 is P — bald, or cold — but that d_n is not. From the above it will be clear that we are in a predicament: either we accept EOI, in which case we are forced to conclude that the use of at least some observational predicates is intrinsically inconsistent, or we do not accept EOI, in which case it seems to follow that there are no truly observational predicates.

Dummett is inclined to choose the first horn of this dilemma, and there is something attractive in this point of view. After all, normally we are dealing with just a few objects, all very well discernable from each other. In those circumstances EOI does *not* give rise to inconsistency; normally, it serves its purpose quite well. Only in exceptional situations — i.e. when we are confronted with sequences of objects as described above — things go wrong. But then, vague predicates like 'cold' and also 'bald' and 'short' and 'heap' are not meant to be used in those situations; what we should use there is other, finer tools; we should no longer talk in terms of 'cold', 'short' etc., but in terms of degrees centigrade or millimeters or grains of sand. The Sorites Paradox typically arises when the coarse tools of vague predicates are used *side by side* with these finer tools, i.e. when one starts saying things like 'if someone with *23567* hairs on his head is not *bald*, then neither is someone with *234566* hairs on his head'.[2] As such, it merely reflects that one should not use the coarse tools in circumstances where only other, more delicate, ones are applicable. [3]

Dummett's position seems a strong one, and, if a choice between the true observational character of at least some predicates and the consistency of language really cannot be avoided, it is the only position an empiricist can take. But there is a way out. One can loosen the ties between vague predicates and observation, without having to cut them. How this can be done will be explained right now. [4]

Let us return to the observational relation $\mathcal{R}$. The problem is that its resolution is too poor: a basketball player x can *in fact* be shorter than a basketball player y, without *observationally* being so. Or, to phrase it more carefully, it may be that x cannot be seen to be shorter than y by the naked eye, while a less crude measurement shows that he is. Our powers of discrimination are limited; that is why observational equivalence is not transitive. We can, however, define a relation $\mathcal{R}^{\mathcal{D}}$ from $\mathcal{R}$ which, as it were, increases the resolution:

Definitie 42 Let $\mathcal{R}$ be an irreflexive binary relation on a domain $\mathcal{D}$. Define the *sharpening* $\mathcal{R}^{\mathcal{D}}$ of $\mathcal{R}$ *relative to* $\mathcal{D}$ by: $x\mathcal{R}^{\mathcal{D}}y$ if and only if
either (i) $x, y \in \mathcal{D}$ and there is some $z \in \mathcal{D}$ such that $z\mathcal{R}y$ and not $z\mathcal{R}x$,
or (ii) $x, y \in \mathcal{D}$ and there is some $z \in \mathcal{D}$ such that $x\mathcal{R}z$ and not $y\mathcal{R}z$.

Suppose you are confronted with three objects d_1 and d_2, and d_3; you cannot discern any difference in length between d_1 and d_2; you cannot discern any difference in length between d_2 and d_3 either; but you can discern a difference in length between d_1 and d_3: d_1 is observationally shorter than d_3. Wouldn't you then conclude that there *must* be a difference in length between d_1 and d_2 even though you cannot see it by the naked eye? Wouldn't you be inclined to say then that d_1 is *in fact* shorter than d_2, even though this is not observationally so? The following facts, the proofs of which are left as an *exercise*, are noteworthy:

- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^{\mathcal{D}}$;
- $\mathcal{R}^{\mathcal{D}}$ is irreflexive;
- $\mathcal{R}^{\mathcal{D}}$ is transitive if $\mathcal{R}$ is.

2. This point is extensively discussed in [27].
3. Note that this solution of the Sorites Paradox is completely in line with Wittgenstein's *Philosophische Untersuchungen*. See in particular sections 85-87: 'A rule stands like a sign-post . . . The sign-post is in order–if, under normal circumstances, it fulfils its purpose'.
4. The basic ideas can already be found in [25] and [13]

Hence, if $\mathcal{R}$ is the relation 'being visibly shorter than', we are really allowed to think of $\mathcal{R}^{\mathcal{D}}$ as a sharpening of that relation.

- $(\mathcal{R}^{\mathcal{D}})^{\mathcal{D}} = \mathcal{R}^{\mathcal{D}}$.

Hence, if we were to call an irreflexive relation *sharp* if sharpening it in the manner described above leaves it unchanged, then we could prove $\mathcal{R}^{\mathcal{D}}$ to be sharp.

- If $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$, then $\mathcal{R}^{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{R}^{\mathcal{D}'}$.

Actually, the resolution may *increase* if elements are added to $\mathcal{D}$: it is very well possible that two objects that cannot be discriminated within $\mathcal{D}$, can be discriminated within $\mathcal{D}'$.

- Define a relation $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$ from $\mathcal{R}^{\mathcal{D}}$ in a way analogous to the way $\mathcal{E}$ is defined from $\mathcal{R}$: $x\mathcal{E}_{\mathcal{D}}y$ iff neither $x\mathcal{R}^{\mathcal{D}}y$ nor $y\mathcal{R}^{\mathcal{D}}x$. Then we find that even though $\mathcal{E}$ is not necessarily transitive, $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$ is. Indeed, $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$ is an *equivalence* relation.

So, even if you do not want to call $\mathcal{R}^{\mathcal{D}}$ sharp — after all, adding elements to $\mathcal{D}$ may make it sharper, the least you will have to say is that it is sharp *enough* to avoid the kind of problems we got with $\mathcal{R}$. That is, if we replace the formalization (1) of the principle EOI given above by the following new formalization:

(EIO 2) For any $x, y \in \mathcal{D}$, if $x\mathcal{E}_{\mathcal{D}}y$ and P applies to x, then P applies to y,

contradictions need no longer arise. Suppose you are presented with a series of objects as described in the beginning of this section. Given the first formulutuion of te principle of EIO (EIO 1), you cannot assign the predicate P to d_0 without having to assign it to $d_1, d_2, d_3, \ldots$, and finally to d_n as well. But given the second formulation (EIO 2), you need not be led into contradicting yourself. Clearly, there must be three objects d_i, d_{i+1}, and d_k in the series such that $d_i\mathcal{R}d_k$, but not $d_{i+1}\mathcal{R}d_k$. Choose such d_i, d_{i+1}, and d_k,and you can deny the truth of the premise that if d_i is P, d_{i+1} is — and this without giving up the principle EOI: d_i and d_{i+1} are *observationally* distinguishable in a respect relevant to P, since the purely observational predicate $x\mathcal{R}d_k$ applies to d_i, but not to d_{i+1}.

Are our new relations $\mathcal{R}^{\mathcal{D}}$ and $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$ really observational? Well, they are clearly not *directly* observational like the relation $\mathcal{R}$. In many cases it is impossible to decide on the basis of *direct* observation whether $\mathcal{R}^{\mathcal{D}}$ (or $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$) applies to a pair of objects or not. This is because in the definition of $\mathcal{R}^{\mathcal{D}}$ (and hence in the definition of $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$) a quantification occurs. But, while $\mathcal{R}^{\mathcal{D}}$ and $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$ are not directly observational, they are certainly observational in the sense that they are defined from a directly observational relation $\mathcal{R}$ by means of logic alone. Every statement containing references to $\mathcal{R}^{\mathcal{D}}$ or $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$ can be translated into an equivalent expression in which no reference is made to relations other than $\mathcal{R}$. Therefore, if (1) is replaced by (2), the links between the predicate P and direct observation are not severed; the principle that the use of P should be guided by *mere* observation is just replaced by the principle that it should be guided by observation *aided by reason*.

Side Remark

In the above, we have not made any use of the properties of the relation $\mathcal{R}$, except of its irreflexivity; so the method is very general. But in many cases — and here the relation 'being visibly shorter than' may serve as an example — $\mathcal{R}$ will satisfy certain extra principles, which have been stated in [23]:

Definitie 43 (Luce's Axioms) L1 For no $x \in \mathcal{D}, x\mathcal{R}x$;

L2 For any $w, x, y, z \in \mathcal{D}$, if $w\mathcal{R}x$ and $y\mathcal{R}z$, then either $w\mathcal{R}z$ or $y\mathcal{R}x$;

L3 For any $x, y \in \mathcal{D}$, if some $z \in \mathcal{D}$ is such that $x\mathcal{R}z$ and $z\mathcal{R}y$, then every $z \in \mathcal{D}$ will be such that either $x\mathcal{R}z$ or $z\mathcal{R}y$.

Note that **L1** and **L2** imply transitivity. Think of $\mathcal{R}$ as the relation 'being visibly shorter than' on the domain of basketballplayers. Then one way to see what these axioms mean is to assume that at every moment there is a real number c such that you judge a basketball player x to be shorter than a basketballplayer y just in case y's length exceeds x's length by c millimeters or more. So, instead of $x\mathcal{R}y$ we can write $length(x) + c \leq length(y)$. It is easy to check that this last relation satisfies Luce's Axioms. Once you accept the validity of Luce's Axioms for the relation 'being visibly shorter than', you get certain desirable properties for the sharpening of this relation in the bargain. The relation $\mathcal{R}^{\mathcal{D}}$ turns out to be almost-connected, i.e. for any $x, y, z \in \mathcal{D}$ the following holds: if $x\mathcal{R}^{\mathcal{D}}y$, then $x\mathcal{R}^{\mathcal{D}}z$ or $z\mathcal{R}^{\mathcal{D}}y$. Therefore, the $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$-equivalence classes are *linearly* ordered by the relation that holds between two $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$-equivalence classes $\{x \in \mathcal{D} | x\mathcal{E}_{\mathcal{D}}d\}$ and $\{x \in \mathcal{D} | x\mathcal{E}_{\mathcal{D}}e\}$ just in case $d\mathcal{R}^{\mathcal{D}}e$. [5]

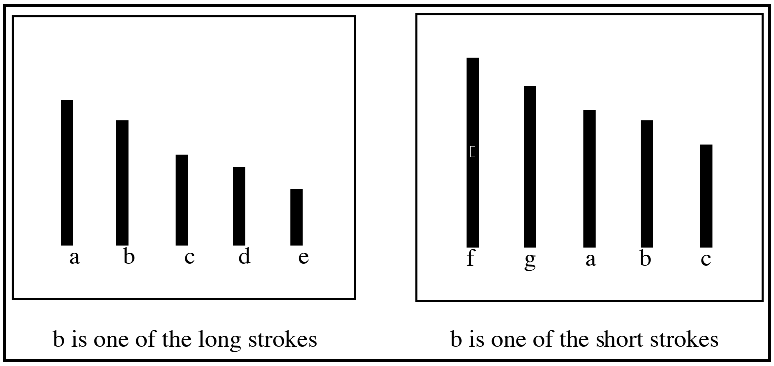
3.5 Contextuele Resolutie

So far we have paid hardly any attention to what — apart from vagueness — is the most salient feature of the predicates that can be used in a Sorites type of argument, namely their context dependency. At least two different kinds of context-dependency are involved. The first kind results from the phenomenon that the question whether or not a certain object may be called P (tall, warm, yellow), does not only depend on the object itself, but also on the set of objects it is compared with. What is tall, or warm, or yellow in one context can be short,

5. To be more precise, the structure $\langle \mathcal{D}, \mathcal{R}^{\mathcal{D}}, \mathcal{E}_{\mathcal{D}} \rangle$ is what [18] has called a *quasi-series*:
   (i) $\mathcal{R}^{\mathcal{D}}$ is irreflexive and transitive;
   (ii) $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$ is an equivalence relation;
   (iii) for any $x, y \in \mathcal{D}$, either $x\mathcal{R}^{\mathcal{D}}y$, or $y\mathcal{R}^{\mathcal{D}}x$, or $x\mathcal{E}_{\mathcal{D}}y$

Now, for each $d \in \mathcal{D}$, define $[d]$ to be $\{x \in \mathcal{D} | x\mathcal{E}_{\mathcal{D}}d\}$ and define: $[d] < [e]$ iff $d\mathcal{R}^{\mathcal{D}}e$. This is well-defined. Set $\mathcal{D}/\mathcal{E}_{\mathcal{D}} = \{[d] | d \in \mathcal{D}\}$; then the structure $\langle \mathcal{D}/\mathcal{E}_{\mathcal{D}}, < \rangle$ is a linear order. For more information, see [24]. Such linear orderings form the basic input for any form of quantitative measurement.

or cold or orange in another. For example, if you were asked to select the short strokes from the right picture below, you might very well want to include stroke b, whereas in the left picture, the very same stroke b may be said to be one of the long strokes.



Note that it is not the fact that the capacities of our senses are limited and the resulting poor resolution of observational relations that causes this behaviour of vague predicates. The relative lenghts of the strokes drawn are clear enough, still stroke b may be called long in one picture but not in the other.

We may contrast this property of vague predicates with a second kind of context-dependency that does result from the fact that the resolution of an observational relation may depend on the domain of discourse. Suppose that you are presented with two different colour patches a and b not visibly differing in shade (not $a\mathcal{R}b$). Further suppose that a and b are the only objects in your domain of discourse. You might be quite at a loss to answer the question whether a is red or not, but even so EOI forces you to accept that if a is red, b is red too. This is because $a\mathcal{E}_{\{a,b\}}b$ holds. Now, let's change the domain of discourse and add a third individual c to it, such that a and c are, but b and c are not, visibly distinguishable. As soon as this addition is made, a and b are no longer equivalent (not $a\mathcal{E}_{\{a,b,c\}}b$ and so the conditional is no longer forced upon you. Resolution generally depends on the number of comparable objects; the smaller this number, the less resolution. In the worst case, when there are only two objects in the domain, we are at the level of directly observational relations: $a\mathcal{E}_{\{a,b\}}b$ iff $a\mathcal{E}b$.

It will now be clear what our amendment to Dummett's analysis is: Dummett is right in saying that if there is no discriminable difference between two objects, then either P applies to both or to neither of them; but it should be added that this holds only in contexts where no objects other than these two are at stake. If the reference group gets larger the objects may *become* distinguishable.

In ordinary discourse domains of evaluation seldomly stay fixed. Objects are unceasingly being introduced into these domains and taken out again. This can happen either by means of linguistic acts like the uttering of a sentence or by non-linguistic acts like pointing at things, covering or uncovering them, etcetera.

One may exploit this phenomenon to obtain versions of the Sorites paradox. The following is a quotation from [20]:

> In front of us is a large screen. Its extreme left is green, its extreme right yellow, and there is a gradual transition from the one colour to the other. The screen is subdivided into many small squares, so small that each square appears to have a uniform hue and moreover the colours of no two adjacent squares can be distinguished by sight. Compare the following two experiments.
> 1) We are both facing the screen which is entirely visible to you. I begin by pointing at a little square on the extreme left and ask you what its colour is. If you are not colourblind you will surely answer: 'green'. I then point to the adjacent little square on the right and ask the same question. Probably you will again say 'green' Then I point at the square to the right of this one, and so on. After a while your answers 'green' will become hesitant, increasingly so, until the point is reached where you either say: 'Now I don't know what to say any more', or else some such thing as 'this one really looks more like yellow'.
> 2) This time the big screen is completely covered. I ask the same question about the same squares in the same order. But now I proceed as follows. When I ask my first question I *only* uncover the first little square. After you have answered I reveal the square next to it. Then, after your second answer I cover the first square and uncover the third; after you have made your third reply, I cover the second and uncover the fourth, etc.
>
> How will the outcomes of these two experiments compare? In all likelyhood you will carry on 'green ' for a longer time in the second trial than in the first.

With the apparatus developed thus far, we can explain what is happening here. In the first experiment, where you have all the patches before you, the domain of discourse is relatively large and resolution is accordingly good. As soon as you start to feel unsure about the greenness of the square currently being pointed at, you will have no trouble in finding a square differentiating it from its predecessor. You may therefore feel free to deny the present's square being green without any violation of the principle EOI. In the second experiment, on the other hand, the differentiating objects are systematically being made unavailable to you, and EOI forces you to keep on saying 'green', or so it seems. Let us to put the above considerations together in a definition, which spells out what constraints there are if you have to decide to which objects in a certain set C - this set determines the *context* — the predicate P applies and which objects in C it does not.

Definitie 44 Let $\mathcal{D}$ and $\mathcal{R}$ be like above and let C be any subset of $\mathcal{D}$. An *admissable interpretation* for P in C is any function $\mathcal{I}_C(P)$ from C into $\{0, 1\}$

that meets the following conditions:
(EOI) If $x\mathcal{E}_C y$, then $\mathcal{I}_C(P)(x) = \mathcal{I}_C(P)(y)$;
(MON) If $x\mathcal{R}^C y$ and $\mathcal{I}_C(P)(y) = 1$, then $\mathcal{I}_C(P)(x) = 1$;
(DIS) If there are $x, y \in C$ such that $x\mathcal{R}y$, then there are $x, y \in C$ such that $\mathcal{I}_C(P)(x) \neq \mathcal{I}_C(P)(y)$.

Note that $\mathcal{I}_C(P)$ is a total function. Hence, if $x\mathcal{R}^C y$ and $\mathcal{I}_C(P)(x) = 0$, then $\mathcal{I}_C(P)(y) = 0$.

The definition leaves a lot of freedom, which is part of the reason why we call a predicate P whose use is guided by these principles vague.

Cross contextual constraints

Once you have chosen an (admissable) interpretation for P in C, this puts some further constraints on the decisions you can take when some *new* objects are added to C. You cannot start all over again when C is extended to B; not any old admissable interpretation of P in the context B is coherent with the interpretation you have chosen in context C.

More precisely:

Definitie 45 Let $C \subseteq B$, $\mathcal{I}_C(P)$ an admissable interpretation of P over C, and $\mathcal{I}_B(P)$ an admissable interpretation of P over B. Then $\mathcal{I}_B(P)$ is *coherent with* $\mathcal{I}_C(P)$ iff the following two conditions are fulfilled:
(+ -) There are $d \in C$ such that $\mathcal{I}_C(P)(d) = 1$ and $\mathcal{I}_B(P)(d) = 0$ only if there are $e \in B \setminus C$ such that $\mathcal{I}_B(P)(e) = 1$;
(- +) There are $d \in C$ such that $\mathcal{I}_C(P)(d) = 0$ and $\mathcal{I}_B(P)(d) = 1$ only if there are $e \in B \setminus C$ such that $\mathcal{I}_B(P)(e) = 0$.

Examples

(1) Let $\mathcal{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, and set $d\mathcal{R}e$ iff $d < e$. Consider the sets $C = \{1, 3, 4, 7, 9, 10\}$, and $B = \{1, 3, 4, 7, 9, 10, 12\}$ The following are all admissable interpretations for the predicate *small*. (Here we set a number in boldface when it is small according to the interpretation in question).

$$\mathcal{I}_C(P) : \{\mathbf{1,\ 3}, 4, 7, 9, 10\}$$

$$\mathcal{I}'_C(P) : \{\mathbf{1,\ 3,\ 4}, 7, 9, 10\}$$

$$\mathcal{I}_B(P) : \{\mathbf{1{,}3}, 4, 7, 9, 10, 12\}$$

$$\mathcal{I}'_C(P) : \{\mathbf{1{,}3{,}4}, 7, 9, 10, 12\}$$

Starting from $\mathcal{I}_C(P)$, both $\mathcal{I}_B(P)$ and $\mathcal{I}'_B(P)$ are coherent, but starting from $\mathcal{I}'_C(P)$, only $\mathcal{I}'_B(P)$ is. That is, if you have first decided that 1, 3, and 4 are the small numbers in the set 1,3,4,7,9,10, you are not allowed , when 12 is added to this set, to call only 1 and 2 small.

(2) Let $B \subseteq C$, $\mathcal{I}_B(P)$ an admissable interpretation of P in context B, and $\mathcal{I}_C(P)$ an admissable interpretation of P in context C that is coherent with $\mathcal{I}_B(P)$. It will be clear that the rules given above do not guarantee that

$$\{d \in B | \mathcal{I}_B(P)(d) = 1\} \subseteq \{d \in C | \mathcal{I}_C(P)(d) = 1\}$$

An informal example, which shows that this is how it should be, is easy to find: take B the set of basketballplayers, C the set of human beings, and P the predicate 'short'. All basketballplayers are human beings, but not all short basketplayers are short human beings.

We are ready now to specify a truthdefinition for a language $\mathcal{L}$ that has as its logical vocabulary $\neg$ (for negation), and $\rightarrow$ (for implication), and as its non-logical vocabulary *one* vague predicate P, and individual constants $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

Definition 1 A coherent model for this language $\mathcal{L}$ is a triple $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ where

(i) $\mathcal{D}$ and $\mathcal{R}$ have the properties described before;
(ii) $\mathcal{I}$ is a function that assigns
  (a) an element of $\mathcal{D}$ to every individual constant a;
  (b) an admissable interpretation $\mathcal{I}_C(P)$ for P in C to each C; whenever $C \subseteq C'$, $\mathcal{I}_{C'}(P)$ must be coherent with $\mathcal{I}_C(P)$.

We will say that a context C is *decisive* for a sentence φ if and only if $\mathcal{I}(a) \in C$ for every individual constant a occurring in φ. The truthdefinition is given in two steps. First it is explained what it means for a sentence φ to be true in a context C that is decisive for φ.

- $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(P(a), C) = 1$ iff $\mathcal{I}_C(P)(\mathcal{I}(a)) = 1$;
- $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\neg\varphi, C) = 1$ iff $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi, C) = 0$;
- $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi \rightarrow \psi, C) = 1$ iff $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi, C) = 0$ or $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi, C) = 1$.

In the second step we want to extend the above to contexts that are not decisive.

Let Δ be a set of sentences, and $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ a coherent model and $C \subseteq \mathcal{D}$. Set

$C_\Delta = C \cup \{\mathcal{I}(a) | a$ occurs somewhere in the sentences of $\Delta\}$.

Notice that C_Δ is the minimal extension of C that is decisive for all sentences in Δ.

Now we can stipulate that for a given model $\mathcal{M}$ an arbitrary context C and an arbitrary set Δ of sentences the following will hold:

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\Delta, C) = 1 \text{ iff for every } \varphi \in \Delta, \mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi, C_\Delta) = 1$$

Presumably, you wonder why the second step of the truthdefinition is formulated not for sentences but for sets of sentences. The following example should help to you to appreciate this manoeuvre.

Example
Consider any model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ such that

(i) $\mathcal{D} = \{d_0, d_1, \ldots, d_{1000}\}$;
(ii) for any i, j, $d_i \mathcal{R} d_j$ iff $i < j + 50$;
(iii) $\mathcal{I}(a_i) = d_i$ for every i;
(iv) If $d_0 \in C$, then $\mathcal{I}_C(P)(d_0) = 1$; if $d_{1000} \in C$, then $\mathcal{I}_C(P)(d_{1000}) = 0$
Then the following holds:
$\mathcal{V}_\mathcal{M}(\{P(a_i) \to P(a_{i+1})\}, \emptyset) = 1$ for every $i < 1000$;
$\mathcal{V}_\mathcal{M}(\{P(a_i) \to P(a_{i+1}) | i < 1000\}, \emptyset) = 0$.

In other words, a speaker is forced to accept each of the sentences $P(a_i) \to P(a_{i+1})$ taken in isolation. Still, this does not mean that he or she has to accept all these sentences taken together. This is the key to our solution of the Sorites. When a decision has to be taken concerning, say, $P(a_{27}) \to P(a_{28})$ taken in isolation, the objects d_{27} and d_{28} are to be compared in a context — $\{d_{27}, d_{28}\}$ to be precise — in which they are observationally indistinguishable. But when the whole set $\{P(a_i) \to P(a_{i+1}) | i < 1000\}$ is at stake, d_{27} , and d_{28} will be distinguishable, because in that case they must be compared with all other objects in $\mathcal{D}$.

Definitie 46 $\Delta \models \varphi$ iff for every coherent $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ and $C \subseteq \mathcal{D}$ the following holds: if $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\Delta, C_{\Delta \cup \{\varphi\}}) = 1$, then $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, C_{\Delta \cup \{\varphi\}}) = 1$.

Fact: $\Delta \models \varphi$ iff Δ / φ is classically valid.

Conclusion: The Sorites argument is valid. Moreover, each of its premises, taken separately, is true. Still, the conclusion does not follow since taken all together, the premises are false.

Hoofdstuk 4

Tijdslogica

4.1 Ordeningen

Om te kunnen bepalen welke redeneringen geldig zijn en welke niet heb je enig inzicht nodig in de grammaticale structuur van de taal waarin de redeneringen gesteld zijn en in de manier waarop de gebruikers van die taal over de werkelijkheid spreken. In een logische theorie gebeurt het eerst genoemde in de syntaxis, en het tweede in de semantiek.

Maar de geldigheid van een een redenering is niet alleen afhankelijk van de structuur van de taal en de wijze waarop met die taal over de werkelijkheid wordt gesproken; ze wordt ook bepaald door de opvattingen die de sprekers hebben ten aanzien van de werkelijkheid waarover gesproken wordt. In dit hoofdstuk zullen we nader ingaan op de samenhang tussen ontologische vooronderstellingen en geldigheid van redeneren. We zullen verschillende tijdslogica's ontwikkelen die alleen hierin van elkaar verschillen dat ze gebaseerd zijn op een andere ontologie.

We zullen in dit verband ook korte tijd stilstaan bij Zeno's paradox van de pijl. Als geen ander is Zeno in staat geweest de vinger te leggen op de relatie tussen logica en ontologie door op het eerste gezicht plausibele ontologische veronderstellingen tot absurde, maar schijnbaar onontkoombare consequenties te voeren. We geven hier een versie van de paradox van de pijl. Een bespreking van deze paradox en de consequenties ervan voor onze veronderstellingen ten aanzien van de structuur van de tijd zullen we in een later stadium ter hand nemen. Zeno beweerde dat een bewegende pijl in rust is. Want, zo stelde hij, iets is in rust als het precies evenveel ruimte inneemt als zichzelf. Op elk van de opeenvolgende momenten van zijn vlucht neemt de pijl precies zoveel ruimte in als zichzelf. En dus is gedurende zijn vlucht de pijl op elk moment in rust.

Definitie 47 (Structuren) Een *structuur* $\mathcal{F}$ is een geordend paar $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ met:

(i) $\mathcal{T} \neq \emptyset$; de elementen van $\mathcal{T}$ noemen we 'tijdstippen'.

(ii) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T} \times \mathcal{T}$; '$\langle t, t' \rangle \in \mathcal{R}$' betekent 'tijdstip t valt eerder dan tijdstip t''.

De informatie die in bovenstaande definitie ligt opgesloten is miniem: ze stelt dat we ons “de tijd” verzamelingtheoretisch zullen voorstellen als een verzameling waarop een relatie gedefinieerd is. De rest is beeldspraak.

Om eenduidig over de structuren te kunnen spreken die we in bovenstaande definitie hebben geïntroduceerd zullen we gebruik maken van zinnen uit een taal van de eerste orde predikatenlogica met identiteit. De eerste orde taal in kwestie wordt geacht naast de identiteit slechts één (binair) predikaat te bevatten waarvoor we het symbool ‘R’ zullen gebruiken. Als we in deze taal over een structuur $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ spreken dan dient U de verzameling $\mathcal{T}$ als discussiedomein te beschouwen en de relatie $\mathcal{R}$ als de interpretatie voor het predikaat “R”. De rest wijst zich vanzelf.

Definitie 48 (Partiële ordening) Laat $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een structuur zijn. De relatie $\mathcal{R}$ is een partiële ordening van $\mathcal{T}$ dan en slechts dan als:

(i) $\mathcal{R}$ *transitief* is, d.w.z., als $\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)$

(ii) $\mathcal{R}$ *irreflexief* is, d.w.z., als $\forall x \neg Rxx$

Wanneer we de beeldspraak uit definitie 47 serieus nemen en willen dat de verzamelingtheoretische “eerder dan” relatie binnen de verzamelingtheoretische tijd de rol zal kunnen spelen van de echte “eerder dan”relatie binnen de echte tijd, dan lijkt de eis dat $\mathcal{R}$ de verzameling $\mathcal{T}$ partieel moet ordenen toch wel de zwakste eis die je aan de structuren $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ kunt opleggen: geen enkel tijdstip valt eerder dan zichzelf, en als een tijdstip t eerder valt dan een tijdstip t', en het tijdstip t' eerder dan een tijdstip t'', dan valt t ook eerder dan t''.

Opgave 46 Zij $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een structuur en $\mathcal{R}$ een partiële ordening van $\mathcal{T}$.

(a) Bewijs dat $\mathcal{R}$ asymmetrisch is, dat wil zeggen dat $\forall x \forall y(Rxy \to \neg Ryx)$.

(b) Laat zien dat $\breve{R} = \{\langle t, t' \rangle \mid \langle t', t \rangle \in R\}$ ook een partiële ordening is. Hoe zou U $\langle t, t' \rangle \in \breve{R}$ kunnen lezen?

Definitie 49 (Lineaire ordening) Laat $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een structuur zijn. $\mathcal{R}$ is een lineaire of totale ordening van $\mathcal{T}$ dan en slechts dan als:

(i) $\mathcal{R}$ een *partiële* ordening van $\mathcal{T}$ is.

(ii) $\mathcal{R}$ *samenhangend* is, d.w.z. $\forall x \forall y(x \neq y \to (Rxy \vee Ryx))$

Vanwaar de naam “lineair”?

Bewering 4 Laat l een horizontaal lijnstuk zijn. Laat $\mathcal{T}$ een eindige, of aftelbaar oneindige verzameling tijdstippen zijn en $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een lineair geordende structuur. We kunnen we ons de tijdstippen uit $\mathcal{T}$ voorstellen als punten op het lijnstuk l zodanig dat voor alle tijdstippen t en t' geldt dat $\langle t, t' \rangle \in \mathcal{R}$ dan en slechts dan als het punt dat t representeert links ligt van het punt dat t' representeert.

Bewijs: Laat $t_0, t_1, t_2, \ldots$ een aftelling zijn van de elementen van $\mathcal{T}$. Ken nu aan elk tijdstip t_i één-éénduidig een punt als representant toe als volgt:
Stap 0: Kies als representant van t_0 een willekeurig punt op het lijnstuk l dat geen begin-, of eindstuk van dat lijnstuk is.
Stap n: Neem aan er dat voor $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ representanten zijn gevonden zodanig dat voor alle $i, j \prec n$ geldt dat $\langle t_i, t_j \rangle \in \mathcal{R}$ dan en slechts dan als het punt dat t_i representeert links ligt van het punt dat t_j representeert. Voor wat t_n betreft doen zich de volgende mogelijkheden voor:

1. $\langle t_n, t_i \rangle \in \mathcal{R}$ voor alle $i \prec n$. Kies dan als representant van t_n een punt op het lijnstuk — maar niet het beginstuk — dat links ligt van het meest linkse punt dat U tot nu toe als representant voor een of ander tijdstip heeft gekozen. Dan geldt voor alle $i, j \prec n+1$ dat $\langle t_i, t_j \rangle \in R$ dan en slechts dan als het punt dat t_i representeert links ligt van het punt dat t_j representeert.
2. $\langle t_i, t_n \rangle \in \mathcal{R}$ voor alle $i \prec n$. In dat geval kiest U als representant van t_n een punt op het lijnstuk — maar niet het eindstuk — dat rechts ligt van het meest rechtse punt dat tot nu toe als representant voor een of ander tijdstip gekozen is.
3. $\langle t_i, t_n \rangle \in \mathcal{R}$ voor minstens een $i \prec n$ èn $\langle t_n, t_j \rangle \in \mathcal{R}$ voor minstens een $j \prec n$. Beschouw nu het meest rechts liggende punt p waarvoor geldt dat het tijdstip t_i dat door p gerepresenteerd wordt eerder valt dan het tijdstip t_n. Beschouw ook het meest links liggende punt q waarvoor geldt dat het tijdstip t_j dat door dat punt gerepresenteerd wordt later valt dan t_n Er geldt:
   i. p ligt links van q. Immers, $\langle t_i, t_n \rangle \in \mathcal{R}$ en $\langle t_n, t_j \rangle \in \mathcal{R}$. Vanwege de transitiviteit van R geldt dat $\langle t_i, t_j \rangle \in \mathcal{R}$. En uit de aanname dat de constructie tot nu toe goed verlopen is — de inductiehypothese — volgt volgt dan dat p links ligt van q.
   ii. Tussen p en q ligt geen enkel punt r dat als representant is gekozen voor een of ander tijdstip t_k, $(k \prec n)$. Stel van wel. Vanwege de samenhangendheid en asymmetrie van R geldt òf $\langle t_k, t_n \rangle \in \mathcal{R}$, òf $\langle t_n, t_k \rangle \in \mathcal{R}$.; r ligt rechts van p en links van q, dus op grond van de inductiehypothese volgt dat $\langle t_i, t_k \rangle \in \mathcal{R}$ en $\langle t_k, t_j \rangle \in \mathcal{R}$. Als nu $\langle t_k, t_n \rangle \in \mathcal{R}$, dan zou p niet het meest rechts liggende punt zijn waarvoor geldt dat het tijdstip dat door p gerepresenteerd wordt eerder valt dan het tijdstip t_n. En als $\langle t_n, t_k \rangle \in \mathcal{R}$, dan zou q niet het meest links liggende tijdstip zijn waarvoor geldt dat het tijdstip dat door q gerepresenteerd wordt later valt dan het tijdstip t_n.

   Kies nu als representant van t_n een willekeurig punt tussen p en q, en merk op dat nu voor alle $i, j \prec n+1$ geldt dat $\langle t_i, t_j \rangle \in \mathcal{R}$ dan en slechts dan als het punt dat t_i representeert links ligt van het punt dat t_j representeert.

Andere mogelijkheden dan de drie hier boven genoemde zijn er niet. Immers, als niet voor alle $i \prec n$ geldt dat $\langle t_i, t_n \rangle \in \mathcal{R}$, dan is er minstens een $i \prec n$ waarvoor geldt dat $\langle t_i, t_n\rangle \notin \mathcal{R}$. Gegeven het feit dat $t_i \neq t_n$ en het feit dat R samenhangend is volgt dan dat $\langle t_n, t_i\rangle \in \mathcal{R}$ voor minstens een $i \prec n$. Net zo: als niet voor alle $i \prec n$ geldt dat $\langle t_n, t_i\rangle \in \mathcal{R}$ dan is er minstens een $i \prec n$ zodanig dat $\langle t_i, t_n\rangle \in \mathcal{R}$.

Definitie 50 Laat $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle$ een structuur zijn.

$\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle$	heeft een *minimaal element*	desda	$\exists x \forall y \neg Ryx$
$\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle$	heeft een *maximaal element*	desda	$\exists x \forall y \neg Rxy$
$\mathcal{R}$	is *voortzettend naar de toekomst*	desda	$\forall x \exists y Rxy$
$\mathcal{R}$	is *voortzettend naar het verleden*	desda	$\forall x \exists y Ryx$
$\mathcal{R}$	is *voortzettend*	desda	$\forall x \exists y Rxy \wedge \forall x \exists y Ryx$

De termen "voortzettend naar de toekomst", "voortzettend naar het verleden" en "voortzettend" zijn nogal suggestief. Ze roepen het beeld op van een *oneindig* doorlopende tijd, maar dat is alleen juist als de structuur bovendien partieel geordend is. Neem bijvoorbeeld de structuur $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle = \langle\{1\}, \{\langle 1,1\rangle\}\rangle$. Merk op dat $\mathcal{R}$ niet irreflexief is en daarom geen partiële ordening. Niettemin is $\mathcal{R}$ op grond van bovenstaande definitie voortzettend, evenals $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle = \langle\{1,2,3\}, \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}\rangle$, met weliswaar irreflexieve, maar niet transitieve $\mathcal{R}$.

Opgave 47

(a) Laat zien dat er partieel geordende structuren bestaan met meer dan één minimum (maximum).

(b) Bewijs dat elke lineair geordende structuur met minstens één minimum (maximum) ook ten hoogste één minimum (maximum) heeft.

Dat de term "voortzettend" echt op zijn plaats is als we aannemen dat $\mathcal{R}$ een partiële ordening van $\mathcal{T}$ is, blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 23 Als $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle$ een partieel geordende structuur is en $\mathcal{T}$ eindig is, dan heeft $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle$ (minstens) een maximum en (minstens) een minimum.

Bewijs: We bewijzen de stelling met inductie naar het aantal elementen van $\mathcal{T}$.
Basisstap: Als $\mathcal{T}$ één element heeft dan is de stelling vanwege de irreflexiviteit van $\mathcal{R}$ haast triviaal.
Inductiestap: Neem aan dat de stelling juist is voor verzamelingen $\mathcal{T}$ met n elementen. Laat $\mathcal{T}$ nu een verzameling zijn met $n+1$ elementen. We mogen aannemen dat $\mathcal{T} = \mathcal{T}' \cup \{t_0\}$ met $t_0 \notin \mathcal{T}'$ en $\mathcal{T}'$ een verzameling met n elementen.

Beschouw nu in plaats van $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle$ de structuur $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R} \upharpoonright \mathcal{T}'\rangle$. We merken op dat de structuur $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R} \upharpoonright \mathcal{T}'\rangle$ een partieel geordende structuur is, met n elementen. Op grond van de inductiehypothese heeft $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R} \upharpoonright \mathcal{T}'\rangle$ minstens een minimum en minstens een maximum. Laat t_1 nu een willekeurig minimum van $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R} \upharpoonright \mathcal{T}'\rangle$ zijn. De volgende mogelijkheden doen zich voor:

1. $\langle t_o, t_1\rangle \notin \mathcal{R}$. In dat geval is t_1 ook een minimum van $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle$.
2. $\langle t_0, t_1\rangle \in \mathcal{R}$. In dat geval is t_0 een minimum van $\mathcal{R}$. Immers, als er een $t_2 \in \mathcal{T}$ zou zijn zodanig dat $\langle t_2, t_0\rangle \in \mathcal{R}$, dan zou op grond van de transitiviteit van $\mathcal{R}$ gelden dat $\langle t_2, t_1\rangle \in \mathcal{R}$. Maar dan zou ook $\langle t_2, t_1\rangle \in \mathcal{R} \restriction \mathcal{T}'$ en dus zou t_1 in dat geval geen minimum van $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R} \restriction \mathcal{T}'\rangle$ zijn.

Op analoge wijze volgt dat $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle$ minstens een maximum heeft.

Corollarium 2 Als $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle$ een partieel geordende structuur is en $\mathcal{R}$ voortzettend is naar het verleden of de toekomst, dan heeft $\mathcal{T}$ oneindig veel elementen.

Zeno's paradox van de pijl, zoals geformuleerd op blz. 81, lijkt te veronderstellen dat tijd bestaat uit successieve momenten of tijdstippen. Beschouw een periode van, zeg, duizend tijdstippen en neem aan dat de pijl gedurende deze periode door de lucht vliegt. Op elk van deze duizend tijdstippen is de pijl waar hij is en neemt hij precies die ruimte in die hij groot is, en is per definitie in rust. Maar elk volgend tijdstip is de pijl ergens anders, neemt hij een successieve positie in. Maar hoe kan de pijl van positie veranderen, als hij op elk van de tijdstippen in rust is? Wanneer verandert de pijl van positie? Dit kan alleen gebeuren tussen de tijdstippen, dat wil zeggen, op geen enkel moment.

Het probleem lijkt te schuilen in de aanname dat er na elk tijdstip t een een tijdstip t' komt dat onmiddellijk op t volgt. Zodra we aannemen dat de tijd *dicht* is houdt de paradox op te bestaan, want in dat geval geldt dat zich tussen elk twee tijdstippen t en t' een derde tijdstip t'' bevindt.[1]

Definitie 51 (Dichtheid) Laat $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle$ een structuur zijn:
$\mathcal{R}$ is dicht desda $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \exists z(Rxz \wedge Rzy))$.

Door dichtheid als eigenschap aan onze ordeningsrelatie op te leggen kunnen we dus op eenvoudige wijze ontsnappen aan Zeno's paradox van de pijl. De oplossing bestaat er in dat we er abusievelijk van uit gaan dat de pijl in zijn vlucht op elk volgend moment een volgende positie inneemt, terwijl er feitelijk geen volgend moment en geen volgende positie zijn.

Laten we nu — tot nader order — aannemen dat de tijd opgevat kan worden als een verzameling tijdstippen met daarop een lineaire, voortzettende en dichte eerder-dan relatie. We kunnen deze ontologische vooronderstellingen als volgt in een theorie Θ van de eerste orde predikatenlogica die we in definitie 48, 49, 50 en 51 gebruikt hebben samenvatten:

i) $\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$
ii) $\forall x \neg Rxx$
iii) $\forall x \forall y(x \neq y \rightarrow (Rxy \vee Ryx)$

1. Merk op dat deze bewering alleen juist is als we aannemen dat de tijd dicht èn lineair geordend is.

iv) $\forall x \exists y Rxy \wedge \forall x \exists y Ryx$
v) $\forall x \forall y (Rxy \rightarrow \exists z (Rxz \wedge Rzy))$

Bewering 5 Θ is consistent.

Bewijs: Beschouw de structuur $\langle \mathbb{Q}, \prec \rangle$, dat wil zeggen de verzameling rationale getallen met daarop de gewone kleiner-dan relatie. Als U "$\prec$ " opvat als de interpretatie van het pedikaat "R", dan zult U makkelijk kunnen controleren dat $\langle \mathbb{Q}, \prec \rangle$ beschouwd kan worden als een model voor de theorie Θ.

Bewering 6 Θ is compleet.

De bewering dat Θ compleet is wil zeggen dat voor elke zin ϕ van de eerste-orde predikatenlogica waarin Θ gesteld is geldt dat hetzij ϕ logisch volgt uit Θ, dan wel $\neg\phi$ logisch volgt uit Θ. Met andere woorden, als we nog méér willen zeggen over onze structuren $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$, dan wat in de theorie Θ tot uitdrukking wordt gebracht, dan kan dat niet meer in de taal waarin Θ is gesteld. Want alles wat we nog in die taal zouden kunnen zeggen volgt al uit Θ, of is er mee in strijd. Het bewijs van bewering 6 is allesbehalve triviaal, zoals U zult zien.

Definitie 52 (Isomorfie van structuren) Laten $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ en $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R}' \rangle$ twee structuren zijn. $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ is *isomorf* met $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R}' \rangle$ dan en slechts dan als er een bijectie f bestaat met $dom(f) = \mathcal{T}$ en $ran(f) = \mathcal{T}'$ zodanig dat voor elke $t, t' \in \mathcal{T}$ geldt: $\langle t, t' \rangle \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow \langle f(t), f(t') \rangle \in \mathcal{R}'$.

Opgave 48 Bewijs:
(a) Elke structuur $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ is isomorf met zichzelf.
(b) Als $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ isomorf is met $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R}' \rangle$, dan is $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R}' \rangle$ isomorf met $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$.
(c) Als $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ isomorf is met $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R}' \rangle$, en $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R}' \rangle$ is isomorf met $\langle \mathcal{T}'', \mathcal{R}'' \rangle$, dan is $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ isomorf met $\langle \mathcal{T}'', \mathcal{R}'' \rangle$.

Stelling 24 (Cantor) Als $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ en $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R}' \rangle$ twee structuren zijn met de volgende eigenschappen:
(i) $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}'$ zijn beide aftelbaar oneindig.
(ii) $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$ zijn beide lineaire ordeningen, voortzettend en dicht.
dan zijn $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ en $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R}' \rangle$ isomorf.

Bewijs: $\mathcal{T}$ is aftelbaar, we kunnen dus aan elke $t \in \mathcal{T}$ bijectief een natuurlijk getal n toevoegen. Laat $t_0, t_1, t_2, \ldots$ dan een aftelling van $\mathcal{T}$ zijn. Op dezelfde wijze: laat $t'_0, t'_1, t'_2, \ldots$ een aftelling van $\mathcal{T}'$ zijn.

We zullen nu eerst met de zogenaamde zig-zag methode van Cantor een rij functies $f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots$ definiëren met de volgende eigenschappen:
i) $f_n \subseteq f_{n+1}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

ii) Voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat f_n een isomorfisme is van $n+1$ elementen van $\mathcal{T}$ naar $n+1$ elementen van $\mathcal{T}'$.

Vervolgens bewijzen we dat $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ een isomorfisme is tussen $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}'$.

Welnu: f_0 is als volgt bepaald: $dom(f_0) = \{t_0\}$ en $f_0(t_0) = \{t'_0\}$. Neem nu aan dat $f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots, f_k$ alle bepaald zijn en dat de eigenschappen i) en ii) voor elke $n \leq k$ gelden. f_{k+1} is dan als volgt bepaald:

1. *Als $k+1$ een even getal is*
   Laat t_i het eerste element in de aftelling $t_0, t_1, \ldots$ van $\mathcal{T}$ zijn waarvoor geldt: $t_i \notin dom(f_k)$. De volgende mogelijkheden doen zich voor:
   i. $\langle t_i, t_n \rangle \in \mathcal{R}$ voor elke $t_n \in dom(f_k)$.
   Beschouw de structuur $\langle dom(f_k), \mathcal{R}\restriction dom(f_k)\rangle$. Deze structuur is eindig en lineair geordend en heeft dus op grond van stelling 23 en opgave 47 precies één minimum — zeg t_m. Neem aan dat $f_k(t_m) = t'_j$. Merk op dat t'_j het minimum is van de structuur $\langle ran(f_k), \mathcal{R}'\restriction ran(f_k)\rangle$. Zij t'_i het eerste element in de aftelling $t'_0, t'_1, \ldots$ is waarvoor geldt dat $\langle t'_i, t'_j\rangle \in \mathcal{R}'$. Zo'n element moet er zijn, want $\mathcal{R}'$ is voortzettend naar het verleden. Merk op dat $t'_i \notin ran(f_k)$. Kies dan $f_{k+1} = f_k \cup \{\langle t_i, t'_i\rangle\}$. Merk op dat de eigenschappen (1) en (2) nu voor elke $n \leq k+1$ gelden.
   ii. $\langle t_n, t_i \rangle \in \mathcal{R}$ voor elke $t_n \in dom(f_k)$.
   Het bewijs is analoog. Beschouw het maximum t_m van de structuur $\langle dom(f_k), \mathcal{R}\restriction dom(f_k)\rangle$. Neem aan dat $f_k(t_m) = t'_j$. Laat t'_i het eerste element in de aftelling van $\mathcal{T}'$ zijn waarvoor geldt; $\langle t'_j, t'_i\rangle \in \mathcal{R}$. Kies $f_{k+1} = f_k \cup \{\langle t_i, t'_i\rangle\}$.
   iii. $\langle t_n, t_i\rangle \in \mathcal{R}$ voor sommige $t_n \in dom(f_k)$ en $\langle t_i, t_n\rangle \in \mathcal{R}$ voor sommige $t_n \in dom(f_k)$
   Laat A de verzameling $\{t_n \in dom(f_k) \mid \langle t_n, t_i\rangle \in \mathcal{R}\}$ zijn en B de verzameling $\{t_n \in dom(f_k) \mid \langle t_i, t_n\rangle \in \mathcal{R}\}$. De structuur $\langle A, \mathcal{R}\restriction A\rangle$ heeft een maximum, zeg t_m. De structuur $\langle B, \mathcal{R}\restriction B\rangle$ heeft een minimum, zeg t_l. Neem aan dat $f_k(t_m) = t'_j$ en $f_k(t_l) = t'_h$. Er geldt $\langle t_m, t_l\rangle \in \mathcal{R}$, want $\langle t_m, t_i\rangle \in \mathcal{R}$ en $\langle t_i, t_l\rangle \in \mathcal{R}$. Ook geldt dat er geen $t_n \in dom(f_k)$ is zodanig dat $\langle t_m, t_n\rangle \in \mathcal{R}$ en $\langle t_n, t_l\rangle \in \mathcal{R}$ (Ga dit zelf na). Dan geldt ook: $\langle t'_j, t'_h\rangle \in \mathcal{R}'$. En bovendien geldt dat er geen $t'_n \in ran(f_k)$ is zodanig dat $\langle t'_j, t'_n\rangle \in \mathcal{R}'$ en $\langle t'_n, t'_h\rangle \in \mathcal{R}'$.
   Laat t'_i nu het eerste element in de aftelling van $\mathcal{T}'$ zijn waarvoor geldt $\langle t'_j, t'_i\rangle \in \mathcal{R}'$ en $\langle t'_i, t'_h\rangle \in \mathcal{R}'$. Zo'n element moet er zijn want $\mathcal{R}'$ is dicht. Kies dan $f_{k+1} = f_k \cup \{\langle t_i, t'_i\rangle\}$. Merk op dat de eigenschappen (1) en (2) nu voor elke $n \leq k+1$ gelden.
   iv. Andere mogelijkheden zijn er niet.
2. *Als $k+1$ een oneven getal is*
   Laat t'_i het eerste element in de aftelling van $\mathcal{T}'$ zijn waarvoor geldt: $t'_i \notin ran(f_k)$. De volgende mogelijkheden doen zich voor:
   i. $\langle t'_i, t'_n\rangle \in \mathcal{R}'$ voor elke $t'_n \in ran(f_k)$.
   Beschouw het minimum — zeg t'_m — van de structuur $\langle ran(f_k), \mathcal{R}'$

$\restriction ran(f_k)\rangle$. Neem aan dat $\breve{f}_k(t'_m) = t_j$. Laat t_i het eerste element in de aftelling van $\mathcal{T}$ zijn waarvoor geldt dat $\langle t_i, t_j\rangle \in \mathcal{R}$. Kies dan $f_{k+1} = f_k \cup \{\langle t_i, t'_j\rangle\}$.

ii. $\langle t'_n, t'_i\rangle \in \mathcal{R}'$ voor elke $t'_n \in ran(f_k)$.
Analoog.

iii. $\langle t'_n, t'_i\rangle \in \mathcal{R}'$ voor sommige $t'_n \in ran(f_k)$ en $\langle t'_i, t'_n\rangle \in \mathcal{R}'$ voor sommige $t'_n \in ran(f_k)$. Doe dit geval zelf. (**Opgave 49.a**)

iv. Andere mogelijkheden zijn er niet.

Definieer nu: $f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Uit de constructie blijkt dat $dom(f) = \mathcal{T}$ en dat $ran(f) = \mathcal{T}'$. Neem maar aan dat $dom(f) \neq \mathcal{T}$. Laat t_i het eerste element in de aftelling van $\mathcal{T}$ zijn waarvoor geldt: $t_i \notin dom(f)$. En laat k het kleinste getal zijn waarvoor geldt: $t_j \in dom(f_k)$ voor alle $j \prec i$. Onherroepelijk geldt dan dat $t_i \in dom(f_{k+2})$. Dat $ran(f) = \mathcal{T}'$ bewijst men analoog. Uit de constructie blijkt ook dat f een injectie is. Bewijs dit zelf. (**Opgave 49.b**)

Tenslotte geldt voor alle $t_i, t_j \in \mathcal{T}$ dat $\langle t_i, t_j\rangle \in \mathcal{R}$ desda $\langle f(t_i), f(t_j) \in \mathcal{R}'$. Immers, neem aan dat $\langle t_i, t_j\rangle \in \mathcal{R}$; laat k het kleinste getal zijn waarvoor geldt $t_i, t_j \in dom(f_k)$. In ieder geval geldt dan $\langle f_k(t_i), f_k(t_j)\rangle \in \mathcal{R}'$; en omdat $f_k \subseteq f$ geldt dus ook $\langle f(t_i), f(t_j)\rangle \in \mathcal{R}'$. Het omgekeerde bewijst men op dezelfde manier.

Stelling 25 De theorie Θ is compleet.

Bewijs: Neem aan van niet. Dan bestaat er een zin φ van de taal waarin Θ gesteld is zodanig dat noch φ noch $\neg\varphi$ logisch volgt uit Θ. In dat geval geldt dat zowel de theorie $\Theta \cup \{\varphi\}$ als de theorie $\Theta \cup \{\neg\varphi\}$ een model heeft.

De theorie Θ heeft alleen oneindige modellen, zo leert ons het corollarium van stelling 23. De theorie $\Theta \cup \{\varphi\}$ heeft dus ook alleen oneindige modellen. De stelling van Skolem-Löwenheim leert ons dat elke eerste-orde theorie met een oneindig model een aftelbaar model heeft. Er bestaat dus een aftelbaar model $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle$ voor de theorie $\Theta \cup \{\varphi\}$. Op dezelfde gronden mogen we aannemen dat er een aftelbaar model $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R}'\rangle$ voor de theorie $\Theta \cup \{\neg\varphi\}$ bestaat.
$\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle$ en $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R}'\rangle$ zijn beide aftelbare structuren met een lineaire, voortzettende en dichte ordening. Uit stelling 24 volgt derhalve dat $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle$ en $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R}'\rangle$ isomorf zijn. Maar als dat zo is, dan geldt voor alle zinnen ψ van onze eerste-orde taal dat ψ waar is in $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle$ desda ψ waar is in $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R}'\rangle$.[2], dit in tegenstelling tot onze eerdere bewering dat φ waar is in $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle$ en $\neg\varphi$ in $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R}'\rangle$. Contradictie.
Uit het bovenstaande moet U duidelijk geworden zijn dat we, als we meer over de ordening van de tijd willen zeggen dan dat ze lineair is, en dicht, en al dan niet een begin-, of eindpunt heeft, sterker grammaticaal geschut in stelling moeten brengen dan de eerste-orde taal die we tot nu toe gebruikt hebben.

2. Mocht U niet bereid dit zonder meer te accepteren dan kunt U het misschien bewijzen door met inductie naar de complexiteit van de formule te laten zien: als f een isomorfisme is van $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle$ naar $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R}'\rangle$, dan geldt voor elke formule ψ: ψ is waar in $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}\rangle$ desda ψ is waar in $\langle \mathcal{T}', \mathcal{R}'\rangle$

Definitie 53 (Snede) Laat $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een structuur zijn die lineair geordend wordt door $\mathcal{R}$. Een *snede* in $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ is een geordend paar $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$ met de volgende eigenschappen:

(i) $\mathcal{T}_1 \neq \emptyset, \mathcal{T}_2 \neq \emptyset, \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = \emptyset$.

(ii) $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$.

(iii) Als $t_1 \in \mathcal{T}_1$ en $t_2 \in \mathcal{T}_2$, dan $\langle t_1, t_2 \rangle \in \mathcal{R}$.

Definitie 54 Zij $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$ een snede in de lineaire structuur $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$.

(i) De snede $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$ bepaalt een *sprong* desda $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{R} \restriction \mathcal{T}_1 \rangle$ een maximum heeft en $\langle \mathcal{T}_2, \mathcal{R} \restriction \mathcal{T}_2 \rangle$ een minimum.

(ii) De snede $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$ bepaalt een *kloof* desda $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{R} \restriction \mathcal{T}_1 \rangle$ geen maximum heeft en $\langle \mathcal{T}_2, \mathcal{R} \restriction \mathcal{T}_2 \rangle$ geen minimum.

(iii) De snede $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$ bepaalt een *overgang* desda hetzij $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{R} \restriction \mathcal{T}_1 \rangle$ een maximum heeft, hetzij $\langle \mathcal{T}_2, \mathcal{R} \restriction \mathcal{T}_2 \rangle$ een minimum.

Ter kennismaking met deze begrippen het volgende:

Stelling 26 Laat $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een lineair geordende structuur zijn. Dan geldt: $\mathcal{R}$ is dicht dan en slechts dan als geen enkele snede in $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een sprong bepaalt.

Bewijs: $\Leftarrow$. Neem aan dat $\mathcal{R}$ niet dicht is. Dan zijn er twee tijdstippen t_1 en t_2 in $\mathcal{R}$ te vinden zodanig dat $\langle t_1, t_2 \rangle \in \mathcal{R}$, terwijl er geen $t \in \mathcal{T}$ is met $\langle t_1, t \rangle \in \mathcal{R}$ en $\langle t, t_2 \rangle \in \mathcal{R}$. Beschouw nu $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$ zodanig dat $\mathcal{T}_1 = \{t \in \mathcal{T} \mid \langle t, t_1 \rangle \in \mathcal{R} \text{ of } t = t_1\}$ en $\mathcal{T}_2 = \{t \in \mathcal{T} \mid \langle t_2, t \rangle \in \mathcal{R} \text{ of } t_2 = t\}$. Het is niet moeilijk te controleren dat $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$ een snede in $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ is, en dat t_1 een — of liever gezegd *het* — maximum van $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{R} \restriction \mathcal{T}_1 \rangle$ is, en t_2 het minimum van $\langle \mathcal{T}_2, \mathcal{R} \restriction \mathcal{T}_2 \rangle$. Met andere woorden, als $\mathcal{R}$ niet dicht is dan bestaat er snede in $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ die een sprong bepaalt.
$\Rightarrow$ Dit is **Opgave 50**

Stelling 27 Zij $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een aftelbare, lineaire, voortzettende en dicht geordende structuur. Dan geldt: niet elke snede in $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ bepaalt een overgang.

Bewijs: Op grond van stelling 24 is het voldoende als we laten zien dat we in de structuur $\langle \mathbb{Q}, \prec \rangle$ een snede kunnen aangeven die geen overgang bepaalt.

Beschouw de snede $\langle \mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2 \rangle$ met $\mathbb{Q}_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ of } x^2 < 2\}$ en $\mathbb{Q}_2 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ en } x^2 > 2\}$. We controleren om te beginnen of $\langle \mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2 \rangle$ wel een snede is:

1. $\mathbb{Q}_1 \cap \mathbb{Q}_2 = \emptyset, \mathbb{Q}_1 \neq \emptyset, \mathbb{Q}_2 \neq \emptyset$. Triviaal.
2. $\mathbb{Q}_1 \cup \mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}$. Dit is zo, want er is geen $x \in \mathbb{Q}$ zodanig dat $x^2 = 2$. Stel van wel. Neem aan dat de breuk $\frac{m}{n}$ aan de gestelde eis voldoet. We mogen aannemen dat m en n zo gekozen zijn dat ze geen gemeenschappelijke deler hebben. Als $(\frac{m}{n})^2 = 2$ dan geldt: $m^2 = 2n^2$ en dus: m^2 is even. Als m^2 even is, dan is m ook even. Neem aan dat $m = 2l$. Dan geldt: $4l^2 = 2n^2$,

met andere woorden, $n^2 = 2l^2$. Derhalve is n^2 even en daarmee n ook: m en n zijn dus beide even. Dit in tegenstelling tot onze aanname dat m en n geen gemeenschappelijke deler zouden hebben. Contradictie.

3. Als $x_1 \in \mathbb{Q}_1$ en $x_2 \in \mathbb{Q}_2$, dan $x_1 \prec x_2$. Triviaal.

Nu zullen we laten zien dat $\langle \mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2 \rangle$ een kloof bepaalt; $\mathbb{Q}_1$ heeft namelijk geen maximum. Stel van wel. Neem aan dat x het maximum is van $\mathbb{Q}_1$. We mogen aannemen dat $1 \prec x$. Beschouw nu $y = x + \frac{2-x^2}{2x+1}$. Merk op dat $x \prec y$. Verder geldt: $y^2 = x^2 + 2\frac{2-x^2}{2x+1}(x + \frac{2-x^2}{4x+2})$, dat wil zeggen, $y^2 \prec x^2 + 2\frac{2-x^2}{2x+1}(x + \frac{1}{2}) = 2$. Met andere woorden, $y \in \mathbb{Q}_1$. Contradictie.

Op dezelfde wijze toont men aan dat $\mathbb{Q}_2$ geen minimum heeft. En dus bepaalt de snede $\langle \mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2 \rangle$ een kloof.

Stel dat we op een tijdstip t_1 een pijl de lucht in schieten, en neem aan dat die pijl op tijdstip t_2 de grond weer raakt. Is er een tijdstip t tussen t_1 en t_2 waarop die pijl een maximale hoogte bereikt?

Deze vraag kan alleen met een volmondig "ja" beantwoord worden als we er zeker van kunnen zijn dat er in de tijd geen snede gemaakt kan worden die een kloof bepaalt. Anders zou het best zo kunnen zijn dat er een snede in de tijd bestaat zodanig dat de pijl stijgt voor elk tijdstip t later dan t_1 in het beginstuk van de snede en daalt voor elk tijdstip t eerder dan t_2 in het eindstuk van de snede, met als gevolg dat er geen enkel tijdstip tussen t_1 en t_2 bestaat waarop de pijl stijgt noch daalt. Immers, als de snede in kwestie een kloof bepaalt, dan is het denkbaar dat er bij elk tijdstip t in het beginstuk van de snede een tijdstip t' *later* dan t bestaat waarop de pijl zich in een hogere positie dan op tijdstip t bevindt (het beginstuk heeft geen laatste tijdstip), en dat er bij elk tijdstip in het eindstuk van de snede een tijdstip t'' *eerder* dan t bestaat waarop de pijl zich in een hogere positie dan op het tijdstip t bevindt (het eindstuk heeft geen eerste tijdstip).

Als geen enkele snede in de tijd een kloof bepaalt dan is de hierboven beschreven situatie ondenkbaar. Vandaar dat het interessant is om dergelijke structuren nader te bekijken.

Definitie 55 Zij $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een lineair geordende structuur. $\mathcal{R}$ is *continu* dan en slechts dan als geen enkele snede in $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een kloof bepaalt.

De pijlparadox van Zeno bracht ons ertoe aan te nemen dat de tijd dicht geordend is. Bovenstaand verhaal leidde tot de conclusie dat het verstandig is om aan te nemen dat de tijd continu geordend is. Het eerste dat we moeten nagaan is of er wel structuren bestaan die èn dicht èn continu geordend zijn. De volgende stelling zegt van wel:

Stelling 28 Laat $\langle \mathbb{R}, \prec \rangle$ de structuur zijn die aan de volgende voorwaarden voldoet:

(i) $p \in \mathbb{R}$ desda:
  (a) $p \neq \emptyset, p \subseteq \mathbb{Q}, p \neq \mathbb{Q}$.
  (b) Voor alle $x \in \mathbb{Q}$ geldt: als $x \in p$ dan $\{y \in \mathbb{Q} \mid y \prec x\} \subseteq p$.
  (c) p heeft geen maximum.

(ii) $p \prec q$ desda $p \subseteq q$ en $p \neq q$.

Dan geldt: $\langle \mathbb{R}, \prec \rangle$ is een lineaire, dichte en continu geordende structuur.

Bewijs: Er geldt:

1. $\prec$ is transitief. Triviaal.
2. $\prec$ is irreflexief. Triviaal.
3. $\prec$ is samenhangend. Neem aan van niet. Dan zijn er $p, q \in \mathbb{R}$ zodanig dat $p \neq q$, niet $p \subseteq q$ en ook niet $q \subseteq p$. Dat wil zeggen dat er $x, y \in \mathbb{Q}$ bestaan met $x \in p, x \notin q, y \in q, y \notin p$. Aangezien $x, y \in \mathbb{Q}$ doen zich de volgende mogelijkheden voor:
   i. $x = y$. Dit kan niet.
   ii. $x \prec y$. Dit kan ook niet, want dan zou op grond van stelling 28, i.b, gelden dat $x \in q$.
   iii. $y \prec x$. Kan niet, want dan zou wederom op grond van stelling 28, i.b, gelden dat $y \in p$.
   iv. Andere mogelijkheden zijn er niet. Contradictie.
4. $\prec$ is dicht. Neem aan dat $p, q \in \mathbb{R}$ en $p \prec q$. Beschouw een willekeurige $x \in q$ waarvoor geldt dat $x \notin p$. Definieer $x^* = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \prec x\}$. Het is eenvoudig in te zien dat $x^* \in \mathbb{R}, p \prec x^*$ en $x^* \prec q$.
5. $\prec$ is continu. Zij $\langle \mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2 \rangle$ een willekeurige snede in $\langle \mathbb{R}, \prec \rangle$. Beschouw $\bigcup \mathbb{R}_1$, d.w.z. $\{x \in \mathbb{Q} \mid$ er is een $p \in \mathbb{R}_1$ zodanig dat $x \in p\}$. Het is eenvoudig in te zien dat $\bigcup \mathbb{R}_1 \in \mathbb{R}$. Dan geldt: òf $\bigcup \mathbb{R}_1 \in \mathbb{R}_1$, òf $\bigcup \mathbb{R}_1 \in \mathbb{R}_2$. Als $\bigcup \mathbb{R}_1 \in \mathbb{R}_1$, dan is $\bigcup \mathbb{R}_1$ het maximale element van $\mathbb{R}_1$. Immers als $p \in \mathbb{R}_1$, dan geldt: $p \subseteq \bigcup \mathbb{R}_1$, en derhalve geldt niet: $\bigcup \mathbb{R}_1 \prec p$. Op dezelfde wijze kan ingezien worden dat $\bigcup \mathbb{R}_1$ het minimale element van $\mathbb{R}_2$ moet zijn als $\bigcup \mathbb{R}_1 \in \mathbb{R}_2$.

Misschien komt de structuur $\langle \mathbb{R}, \prec \rangle$ U wat gekunsteld voor. Niettemin heeft U zojuist kennis gemaakt met één van de geijkte methoden om de reële getallen te definiëren op basis van de rationale getallen. Vandaar ook dat zonder scrupules de letter $\mathbb{R}$ gebruikt is om de verzameling in kwestie aan te duiden.

Opgave 51

(a) Vergelijk definitie 55 met definities 48 tot en met 51. In definitie 55 definiëren we voor het eerst een ordeningseigenschap zonder gebruik te maken van zinnen uit de eerste-orde predikatenlogica. Geef aan waarom er geen zin is van de taal van de eerste-orde predikatenlogica die we in definitie 48 tot en met 51 gebruikt hebben, die zegt dat de ordeningsrelatie continu is.

(b) Leg uit dat de verzameling $\mathbb{R}$, zoals gedefinieerd in stelling 28, overaftelbaar is.

Ter afronding van de theorie over snedes de volgende definitie:

Definitie 56 Zij $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een lineair geordende structuur. $\mathcal{R}$ is *discreet* dan en slechts dan als geen enkele snede in $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een overgang bepaalt.

Dat $\mathcal{R}$ discreet is kunnen we in de taal van de eerste-orde predikatenlogica uitdrukken en wel met een zin die zegt dat elk tijdstip dat niet het laatste tijdstip is, een onmiddellijke opvolger heeft, en elk tijdstip dat niet het eerste tijdstip is, een onmiddellijke voorganger:

Opgave 52

(a) Bewijs dat voor elke lineair geordende structuur $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ geldt: $\mathcal{R}$ is discreet dan en slechts dan als:
   i. $\forall x(\exists y Rxy \rightarrow \exists y(Rxy \land \neg \exists z(Rxz \land Rzy)))$
   ii. $\forall x(\exists y Ryx \rightarrow \exists y(Ryx \land \neg \exists z(Ryz \land Rzx)))$

(b) Geef een voorbeeld van een structuur $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ met de volgende eigenschappen:
   i. $\mathcal{R}$ is lineair en discreet.
   ii. Er bestaat een snede $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$ in $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ die een kloof bepaalt.

We besluiten deze paragraaf met enkele feiten.

Feit 1 Zij $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een structuur met de volgende eigenschappen: $\mathcal{R}$ is lineair, voortzettend naar de toekomst, niet voortzettend naar het verleden, discreet en continu. Dan geldt: $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ is isomorf met $\langle \mathbb{N}, \prec \rangle$.

Feit 2 Zij $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een structuur met de volgende eigenschappen: $\mathcal{R}$ is lineair, voortzettend, discreet en continu. Dan geldt: $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ is isomorf met $\langle Z, \prec \rangle$.

Wanneer is een structuur $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ isomorf met $\langle \mathbb{R}, \prec \rangle$? Het is, jammer genoeg, niet voldoende te eisen dat $\mathcal{R}$ lineair, voortzettend, dicht en continu is:

Feit 3 Zij $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een structuur met de volgende eigenschappen:

(i) $\mathcal{R}$ is lineair, voortzettend en continu.

(ii) Er is een aftelbare $\mathcal{T}'$ die *dicht ligt in* $\mathcal{T}$, d.w.z.: $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, en voor alle $t, t' \in \mathcal{T}$ geldt: als $\langle t, t' \rangle \in \mathcal{R}$, dan is er een $t'' \in \mathcal{T}'$ zodanig dat $\langle t, t'' \rangle \in \mathcal{R}$ en $\langle t'', t' \rangle \in \mathcal{R}$.

Dan geldt: $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ is isomorf met $\langle \mathbb{R}, \prec \rangle$.

Opgave 53 Zij $\langle\mathcal{T},\mathcal{R}\rangle$ een structuur. $\mathcal{R}$ is *niet vertakkend naar het verleden* desda $\forall x\forall y\forall z((Rxz \wedge Ryz) \rightarrow (x = y \vee Rxy \vee Ryx))$. $\mathcal{R}$ is *niet vertakkend naar de toekomst* desda $\forall x\forall y\forall z((Rzx \wedge Rzy) \rightarrow (x = y \vee Rxy \vee Ryx))$.

(a) Laat zien dat er structuren $\langle\mathcal{T},\mathcal{R}\rangle$ bestaan zodanig dat $\mathcal{R}$ een partiële ordening is die noch naar de toekomst, noch naar het verleden vertakt, terwijl $\mathcal{R}$ niet lineair is.

(b) Zoek een zin ϕ van de eerste-orde predikatenlogica zodanig dat geldt:

  i. $\langle\mathcal{T},\mathcal{R}\rangle$ is lineair geordend desda $\mathcal{R}$ een partiële niet vertakkende ordening van $\mathcal{T}$ is, en ϕ.

  ii. Er bestaan partiële ordeningen $\langle\mathcal{T},\mathcal{R}\rangle$ zodanig dat ϕ, die zowel naar het verleden als naar de toekomst vertakken.

4.2 Grammatica en Semantiek

Definitie 57 (Grammatica) Een taal $\mathcal{L}$ (van de propositionele tijdslogica) is een viertal $\langle$AT, UN, BI, ZIN$\rangle$ met de volgende eigenschappen:

(i) AT is een niet lege verzameling *symbolen*. De elementen van AT noemen we “atomaire zinnen”.

(ii) UN is een verzameling van drie symbolen die geacht worden te verschillen van de elementen van AT. De elementen van UN heten unaire voegwoorden en we zullen ze aanduiden met de tekens “$\neg$”, “G” en “H”.

(iii) BI is een verzameling die één symbool bevat dat verschilt van de elementen van AT en UN. Het element van BI is een zogenaamd binair voegwoord en we zullen ernaar verwijzen met het symbool“$\rightarrow$”.

(iv) Laten ‘[’ en ‘]’ nu twee symbolen zijn die verschillen van de elementen uit AT, UN en BI. ZIN, de verzameling zinnen van $\mathcal{L}$, is dan de *kleinste* verzameling X van *uitdrukkingen* waarvoor geldt:

  a. AT $\subseteq X$;
  b. Als $\varphi \in X$ en $\otimes \in$ UN, dan $\otimes\varphi \in X$; en
  c. als $\varphi, \psi \in X$ en $\otimes \in$ BI, dan $[\varphi \otimes \psi] \in X$.

Het symbool ‘H’ wordt geacht model te staan voor de Nederlandse uitdrukking: “het is steeds het geval geweest dat ...”, het symbool ‘G’ voor de uitdrukking: “het zal steeds het geval zijn dat ...”. De rol van ‘$\neg$’ en ‘$\rightarrow$’ is U, naar wordt aangenomen, bekend.

Definitie 58 Laat $\mathcal{L}$ een taal zijn en $\varphi, \psi \in$ ZIN. Dan geldt:

$(\varphi \vee \psi) =_{df} (\neg\varphi \rightarrow \psi)$
$(\varphi \wedge \psi) =_{df} \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$
$(\varphi \leftrightarrow \psi) =_{df} ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$
$\mathrm{F}\varphi =_{df} \neg\mathrm{G}\neg\varphi$

$\mathrm{P}\varphi =_{df} \neg\mathrm{H}\neg\varphi$
$\Box\varphi =_{df} ((\mathrm{G}\varphi \wedge \mathrm{H}\varphi) \wedge \varphi)$
$\Diamond\varphi =_{df} \neg\Box\neg\varphi$

Definitie 59 (Model) Neem aan dat $\mathcal{L} = \langle \text{AT, UN, BI, ZIN} \rangle$ een taal is en $\mathcal{F} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een structuur. Een interpretatie $\mathcal{I}$ voor $\mathcal{L}$ in $\mathcal{F}$ is een functie met domein AT $\times \mathcal{T}$ en codomein $\{0, 1\}$. Als $\varphi \in$ AT en $\mathcal{I}(\varphi, t) = 1$, dan zeggen we ook wel: "φ is waar op tijdstip t (onder de interpretatie $\mathcal{I}$)". Net zo: $\mathcal{I}(\varphi, t) = 0$ lezen we als: "φ is onwaar op tijdstip t". Als $\mathcal{L}$ een taal is, $\mathcal{F}$ een structuur en $\mathcal{I}$ een interpretatie voor $\mathcal{L}$ in $\mathcal{F}$, dan heet het geordende paar $\langle \mathcal{F}, \mathcal{I} \rangle$ ook wel een *model* bij $\mathcal{L}$.

Definitie 60 (Semantiek) Laat $\mathcal{L}$ een taal zijn en $\mathcal{M} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ een model bij $\mathcal{L}$. Laat φ een zin van $\mathcal{L}$ zijn en $t \in \mathcal{T}$. De waarheidswaarde (in $\mathcal{M}$) van φ op tijdstip t — $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, t)$ — is nu als volgt bepaald:

Als $\varphi \in$ AT dan $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, t) = \mathcal{I}(\varphi, t)$

$\mathcal{V}_\mathcal{M}(\neg\varphi, t) = 1$ desda $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, t) = 0$

$\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi \to \psi, t) = 1$ desda $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, t) = 0$ en/of $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\psi, t) = 1$

$\mathcal{V}_\mathcal{M}(G\varphi, t) = 1$ desda $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, t') = 1$ voor alle $t' \in \mathcal{T}$ zodanig dat $\langle t, t' \rangle \in \mathcal{R}$

$\mathcal{V}_\mathcal{M}(H\varphi, t) = 1$ desda $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, t') = 1$ voor alle $t' \in \mathcal{T}$ zodanig dat $\langle t', t \rangle \in \mathcal{R}$

Definitie 60 vertelt hoe de waarheidswaarde die een samengestelde zin op tijdstip t heeft, afhangt van de waarheidswaarde van de samenstellende zinnen op eventueel andere tijdstippen. Met andere woorden: de bovenstaande clausules leggen de betekenis van $\neg$, $\to$, H en G impliciet vast. In het volgende zullen we vaak op deze clausules terugvallen, meestal zonder ernaar te verwijzen. U moet ze dus kunnen dromen, evenals de volgende:

$\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi \vee \psi, t) = 0$ desda $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, t) = 0$ en $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\psi, t) = 0$

$\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi \wedge \psi, t) = 1$ desda $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, t) = 1$ en $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\psi, t) = 1$

$\mathcal{V}_\mathcal{M}(F\varphi, t) = 1$ desda $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, t') = 1$ voor minstens een $t' \in \mathcal{T}$ met $\langle t, t' \rangle \in \mathcal{R}$

$\mathcal{V}_\mathcal{M}(P\varphi, t) = 1$ desda $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, t') = 1$ voor minstens een $t' \in \mathcal{T}$ met $\langle t', t \rangle \in \mathcal{R}$

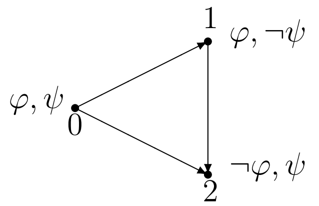
$\mathcal{V}_\mathcal{M}(\Box\varphi, t) = 1$ desda $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, t') = 1$ voor alle $t' \in \mathcal{T}$ met $t = t'$ of $\langle t, t' \rangle \in \mathcal{R}$ of $\langle t', t \rangle \in \mathcal{R}$

$\mathcal{V}_\mathcal{M}(\Diamond\varphi, t) = 1$ desda $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, t') = 1$ voor minstens een $t' \in \mathcal{T}$ met $t = t'$ of $\langle t, t' \rangle \in \mathcal{R}$ of $\langle t', t \rangle \in \mathcal{R}$

Voorbeeld Zij $\mathcal{L} = \langle \text{AT, UN, BI, ZIN} \rangle$ een taal en $\mathcal{M} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ een model zodanig dat $\mathcal{T} = \{0, 1, 2\}, \mathcal{R} = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$. Zij $\varphi, \psi \in$ AT en neem aan dat $\mathcal{I}(\varphi, 0) = \mathcal{I}(\varphi, 1) = 1, \mathcal{I}(\varphi, 2) = 0, \mathcal{I}(\psi, 1) = 0$ en $\mathcal{I}(\psi, 0) = \mathcal{I}(\psi, 2) = 1$.

Bepaal de volgende waarheidswaarden: $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\mathrm{F}\varphi, 0)$, $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\mathrm{P}(\varphi \rightarrow \psi), 2)$, $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\mathrm{H}(\varphi \wedge \neg\varphi), 0)$, $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\mathrm{FH}(\psi \vee \neg\varphi), 1)$, en $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\Box(\varphi \rightarrow \mathrm{P}\varphi), 2)$

Soms is het handig om een hulptekening te maken waarin de tijdstippen door punten worden voorgesteld en waarin de aanwezigheid van de relatie $\mathcal{R}$ tussen twee tijdstippen wordt aangegeven met een pijl naar het "latere" tijdstip:



Maar ook zonder tekening moet U kunnen controleren dat: $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\mathrm{F}\varphi, 0) = 1$, $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\mathrm{P}(\varphi \rightarrow \psi), 2) = 1$, $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\mathrm{H}(\varphi \wedge \neg\varphi), 0) = 1$, $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\mathrm{FH}(\psi \vee \neg\varphi), 1) = 0$, $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\Box(\varphi \rightarrow \mathrm{P}\varphi), 2) = 0$

Opgave 54 Zij $\mathcal{L} = \langle \mathrm{AT, UN, BI, ZIN} \rangle$ een taal en $\mathcal{M} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ een model zodanig dat $\mathcal{T} = \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{R} = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$, terwijl $\mathcal{I}(\varphi, 0) = 0$, $\mathcal{I}(\varphi, 1) = \mathcal{I}(\varphi, 2) = 1$, $\mathcal{I}(\psi, 0) = \mathcal{I}(\psi, 1) = 1$, en $\mathcal{I}(\psi, 2) = 0$. Bepaal:

(a) $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\mathrm{G}\varphi \rightarrow \mathrm{F}\psi), 1)$
(b) $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\mathrm{P}(\psi \wedge \varphi), 2)$
(c) $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\mathrm{G}(\varphi \rightarrow \mathrm{F}\psi), 0)$
(d) $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\mathrm{FG}(\psi), 0)$

4.3 Geldigheid en Uitdrukbaarheid

Definitie 61 (Logische noties) Zij $\mathcal{L} = \langle \mathrm{AT, UN, BI, ZIN} \rangle$ een tijdslogische taal en $\phi \in \mathrm{ZIN}$;

(i) Als $\mathcal{M} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ een model bij $\mathcal{L}$ is, en $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\phi, t) = 1$ dan schrijven we ook wel: $M \models \phi[t]$, en we lezen dit als: " $\mathcal{M}$ *maakt* ϕ *waar op tijdstip* t".

(ii) Als $\mathcal{M} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ een model bij $\mathcal{L}$ is, en $M \models \phi[t]$ voor alle $t \in \mathcal{T}$, dan schrijven we voortaan ook wel: $\mathcal{M} \models \phi$, en lezen dit als: " $\mathcal{M}$ *verifieert* ϕ."

(iii) Als $\mathcal{F}$ een structuur is, en voor alle $\mathcal{I}$ voor $\mathcal{L}$ in $\mathcal{F}$ geldt $\langle \mathcal{F}, \mathcal{I} \rangle \models \phi$, dan schrijven we ook wel: $\mathcal{F} \models \phi$, en lezen dit als: "ϕ *is geldig op* $\mathcal{F}$."

(iv) Als $\mathcal{C}$ een klasse van structuren is, en voor alle $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ geldt dat $\mathcal{F} \models \phi$, dan schrijven we ook wel: $\mathcal{C} \models \phi$, en lezen dit als: "ϕ is geldig binnen de klasse $\mathcal{C}$."

(v) Als $\mathcal{C}$ een klasse van structuren is, en $\mathcal{C} \models \phi$, terwijl voor alle $\mathcal{F}$ met $\mathcal{F} \notin \mathcal{C}$ geldt dat ϕ niet geldig is op $\mathcal{F}$, dan zeggen we ook wel dat ϕ de klasse $\mathcal{C}$ *karakteriseert*.

In het verlengde van bovenstaande definitie ligt ook het volgende taalgebruik: "$\mathcal{M}$ falsifieert ϕ staat voor: "$\mathcal{M} \not\models \phi$", hetgeen kort is voor: niet voor alle $t \in \mathcal{T}$ geldt dat $\mathcal{M} \models \phi[t]$"; "$\phi$ is ongeldig op $\mathcal{F}$" voor "$\mathcal{F} \not\models \phi$" wat een afkorting is van: "niet voor alle $\mathcal{I}$ voor $\mathcal{L}$ in $\mathcal{F}$ geldt dat $\langle \mathcal{F}, \mathcal{I} \rangle \models \phi$"; en "$\phi$ is ongeldig binnen $\mathcal{C}$" voor "$\mathcal{C} \not\models \phi$", welke uitdrukking op haar beurt staat voor: "niet voor alle $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ geldt dat $\mathcal{F} \models \phi$."

De belangrijkste notie uit de bovenstaande definitie is de notie van *geldigheid*. Merk op dat als een zin ϕ geldig is op een bepaalde structuur $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$, de zin op alle tijdstippen waar is, onafhankelijk van de waarheidswaarden die de verschillende atomaire zinnen in ϕ op de verschillende tijdstippen in $\mathcal{T}$ hebben.

Opgave 55 Ga na dat de volgende zinnen geldig zijn op alle structuren:

(a) Alle tautologieën van de klassieke propositielogica.
(b) Alle zinnen van de vorm $\mathrm{G}(\phi \to \psi) \to (\mathrm{G}\phi \to \mathrm{G}\psi)$.
(c) Alle zinnen van de vorm $\phi \to \mathrm{HF}\phi$.

Als U moet bewijzen dat een bepaalde zin ϕ geldig is binnen een bepaalde klasse $\mathcal{C}$ van structuren, dan moet u laten zien dat er bij geen enkele structuur $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle \in \mathcal{C}$ een interpretatie $\mathcal{I}$ te vinden is zodanig dat het resulterende model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ de zin ϕ falsifieert. U bewijst dat het makkelijkst uit het ongerijmde.

Als u moet laat zien dat een zin ϕ een bepaalde klasse $\mathcal{C}$ van structuren karakteriseert, moet u niet alleen laten zien dat ϕ geldig is binnen $\mathcal{C}$, maar ook dat ϕ ongeldig is buiten $\mathcal{C}$. Het laatste is moeilijker dan het eerste. In uw bewijs dient u bij een *willekeurige* structuur $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle \notin \mathcal{C}$ een interpretatie $\mathcal{I}$ te specificeren zodanig dat het resulterende model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ de zin ϕ falsifieert.

Voorbeeld:
Zij $\mathcal{L} = \langle$AT, UN, BI, ZIN$\rangle$ een taal en $\phi \in$ AT. Dan geldt: $(\mathrm{G}\phi \to \mathrm{GG}\phi)$ karakteriseert de klasse van transitieve structuren.

Bewijs: Zij $\mathcal{C}$ de klasse van transitieve structuren. We zullen laten zien dat 1. $\mathcal{C} \models (\mathrm{G}\phi \to \mathrm{GG}\phi)$, en 2. $\mathcal{F} \not\models (\mathrm{G}\phi \to \mathrm{GG}\phi)$ voor alle $\mathcal{F} \notin \mathcal{C}$.

1. Neem aan dat $\mathcal{C} \not\models (\mathrm{G}\phi \to \mathrm{GG}\phi)$; dan is er een $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle \in \mathcal{C}$ en een $\mathcal{I}$ voor $\mathcal{L}$ in $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ zodanig dat het model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ de zin $(\mathrm{G}\phi \to \mathrm{GG}\phi)$ falsifieert. In dat geval is er een $t_0 \in \mathcal{T}$ zodanig dat:
   i. $\mathcal{M} \models \mathrm{G}\phi[t_0]$, en
   ii. $\mathcal{M} \not\models \mathrm{GG}\phi[t_0]$.

   Uit (ii) volgt dat er een $t_1 \in \mathcal{T}$ te vinden is zodanig dat:
   iii. $\langle t_0, t_1 \rangle \in \mathcal{R}$ en $\mathcal{M} \not\models \mathrm{G}\phi[t_1]$

   Uit (iii) volgt dat er een $t_1 \in \mathcal{T}$ te vinden is zodanig dat:
   iv. $\langle t_1, t_2 \rangle \in \mathcal{R}$ en $\mathcal{M} \not\models \phi[t_2]$

   $\mathcal{R}$ is transitief; dus geldt dat $\langle t_0, t_2 \rangle \in \mathcal{R}$. Gezien (i) volgt dat $\mathcal{M} \models \phi[t_2]$. Dit is in tegenspraak met (iv). Contradictie.

2. Zij $\mathcal{F} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle \notin \mathcal{C}$. We kunnen er zeker van zijn dat er t_0, t_1, t_2 in $\mathcal{T}$ te vinden zijn zodanig dat $\langle t_0, t_1 \rangle \in \mathcal{R}$, $\langle t_1, t_2 \rangle \in \mathcal{R}$ en $\langle t_0, t_2 \rangle \notin \mathcal{R}$. Laat $\mathcal{I}$ nu een interpretatie voor $\mathcal{L}$ in $\mathcal{F}$ zijn zodanig dat $\mathcal{I}(\phi)(t) = 1$ voor alle $t \in \mathcal{T}$ met $t \neq t_2$ en $\mathcal{I}(\phi)(t_2) = 0$. Het is eenvoudig na te gaan dat het model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ de zin $(\mathrm{G}\phi \to \mathrm{GG}\phi)$ falsifieert: $\mathcal{M} \not\models (\mathrm{G}\phi \to \mathrm{GG}\phi)[t_0]$. De zin $(\mathrm{G}\phi \to \mathrm{GG}\phi)$ is derhalve niet geldig op $\mathcal{F}$.

Opmerking: Als een zin ϕ een bepaalde klasse $\mathcal{C}$ van structuren karakteriseert, dan wil dat nog niet zeggen dat èlk *model* $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ voor $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle \notin \mathcal{C}$ de zin ϕ falsifieert. Een zin kan best geverifieerd worden door een bepaald model zonder geldig te zijn op de onderliggende structuur. Als $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ niet transitief is, maar $\mathcal{I}$ is zodanig dat dat $\mathcal{I}(\psi, t)$ =1 voor alle $t \in \mathcal{T}$, dan geldt $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle \models (\mathrm{G}\psi \to \mathrm{GG}\psi)$.

Opgave 56 Zij $\mathcal{L} = \langle$AT, UN, BI, ZIN$\rangle$ een taal en $\phi \in$ AT. Bewijs:

(a) $(\mathrm{G}\phi \to \mathrm{F}\phi)$ karakteriseert de klasse van alle naar de toekomst voortzettende structuren.

(b) $(\mathrm{F}\phi \to \mathrm{G}(\phi \vee \mathrm{P}\phi \vee \mathrm{F}\phi))$ karakteriseert de klasse van alle niet naar de toekomst vertakkende structuren.

(c) $(\mathrm{F}\phi \to \mathrm{FF}\phi)$ karakteriseert de klasse van alle dicht geordende structuren.

Opgave 57 (a) Bewijs dat de formule

$$(\varphi \wedge \mathrm{H}\varphi) \to \mathrm{FH}\varphi$$

de klasse van alle structuren $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ met de eigenschap uitgedrukt door de volgende eerste-orde formule karakteriseert:

$$\forall x \exists y (\mathcal{R}xy \wedge \forall z (\mathcal{R}zy \to (z = x \vee \mathcal{R}zx)))$$

(b) Geef een voorbeeld van een structuur $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ waarop zowel de formule $(\varphi \wedge \mathrm{H}\varphi) \to \mathrm{FH}\varphi$ als haar spiegelbeeld $(\varphi \wedge \mathrm{G}\varphi) \to \mathrm{PG}\varphi$ geldig zijn.

Bewijzen dat een gegeven zin een bepaalde klasse van structuren karakteriseert is één. De volgende opgave gaat een stap verder. Daar wordt u gevraagd zelf die zin te vinden.

Opgave 58 Geef een zin die:

(a) de klasse van de naar het verleden voortzettende structuren karakteriseert.

(b) de klasse van de niet naar het verleden vertakkende structuren karakteriseert.

(c) de klasse van alle reflexieve structuren karakteriseert.

(d) de klasse van alle symmetrische structuren karakteriseert.

Terzijde: reflexiviteit en symmetrie zijn natuurlijk geen eigenschappen die vanuit tijdslogisch oogpunt interessant zijn.

Nu een opgave die het omgekeerde vraagt van de vorige:

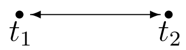
Opgave 59 Beschouw de zin (FG$\phi \rightarrow$ GFϕ). Zij $\mathcal{C}$ de klasse van structuren die door deze zin gekarakteriseerd wordt. Beschrijf $\mathcal{C}$ met een zin van de eerste orde predikatenlogica.

Niet met alle ordeningseigenschappen die we in paragraaf 4.1 besproken hebben, correspondeert een zin uit de taal van de tijdslogica die de klasse van structuren met de eigenschap in kwestie karakteriseert. Sommige van die eigenschappen zijn niet *karakteriseerbaar* in de taal van de tijdslogica.

Stelling 29 Zij $\mathcal{L} = \langle \text{AT}, \text{UN}, \text{BI}, \text{ZIN} \rangle$ een taal van de propositionele tijdslogica. Er is geen $\phi \in$ ZIN die de klasse van alle irreflexieve structuren karakteriseert.

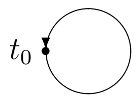
Bewijs: We laten zien dat elke zin ϕ die geldig is op de onderstaande irreflexieve structuur $\mathcal{F}$,

$\mathcal{F}$:



ook geldig is op de structuur $\mathcal{F}'$ die niet irreflexief is.

$\mathcal{F}'$:



Stel dat ϕ geldig is op $\mathcal{F}$ en ongeldig op $\mathcal{F}'$. Gegeven het laatste, bestaat er een interpretatie $\mathcal{I}'$ bij $\mathcal{L}$ in $\mathcal{F}'$ zodanig dat

$$\langle \mathcal{F}', \mathcal{I}' \rangle \not\models \phi[t_0]$$

Kies nu de interpretatie $\mathcal{I}$ bij $\mathcal{L}$ in $\mathcal{F}$ zodanig dat voor alle atomaire zinnen ψ geldt:

$$\mathcal{I}(\psi, t_1) = \mathcal{I}(\psi, t_2) = \mathcal{I}'(\psi, t_0)$$

Met inductie naar de complexiteit van χ is nu eenvoudig te bewijzen dat voor alle zinnen χ geldt:

$$\mathcal{V}_{\langle \mathcal{F}, \mathcal{I} \rangle}(\chi, t_1) = \mathcal{V}_{\langle \mathcal{F}, \mathcal{I} \rangle}(\chi, t_2) = \mathcal{V}_{\langle \mathcal{F}', \mathcal{I}' \rangle}(\chi, t_0)$$

Maar dat betekent:

$$\langle \mathcal{F}, \mathcal{I} \rangle \not\models \phi[t_1]$$

En dat is een contradictie.

Opgave 60 Bewijs:

(a) De klasse van asymmetrische structuren is niet karakteriseerbaar.
(b) De klasse van samenhangende structuren is niet karakteriseerbaar.

Het bovenstaande zou de indruk kunnen wekken dat het uitdrukkingsvermogen van de talen van de propositionele tijdslogica maar zeer beperkt is. Heel "simpele" eerste-orde eigenschappen kunnen niet worden uitgedrukt met een tijdslogische formule. Echter, er zijn klassen van structuren die niet eerste-orde definieerbaar zijn maar wèl gekarakteriseerd kunen worden met een tijdslogische formule.

Definitie 62 (Welgefundeerdheid) Zij $\langle\mathcal{T},\mathcal{R}\rangle$ een structuur. $\mathcal{R}$ is *welgefundeerd* desda iedere niet-lege deelverzameling $\mathcal{T}'$ van $\mathcal{T}$ een minimaal element heeft.

Een andere manier om hetzelfde te zeggen is deze: $\mathcal{R}$ is welgefundeerd desda er geen *oneindig dalende keten* in de structuur $\langle\mathcal{T},\mathcal{R}\rangle$ te vinden is, d.w.z., er is geen aftelbaar oneindige deelverzameling $t_0, t_1, t_2, \ldots$ van $\mathcal{T}$ zodanig dat voor iedere i geldt dat $\langle t_{i+1}, t_i\rangle \in \mathcal{R}$. Hèt voorbeeld hier is natuurlijk de structuur $\langle\mathbb{N}, <\rangle$ van de natuurlijke getallen met daarop de gewone "kleiner-dan" relatie. (Merk op dat ook de structuur die je krijgt als je de natuurlijke getallen twee of meer keer "achter elkaar zet", welgefundeerd is.)

Stelling 30 Het begrip welgefundeerdheid is niet eerste-orde definieerbaar: er is geen verzameling zinnen Δ van de eerste orde logica zodanig dat: $\langle\mathcal{T},\mathcal{R}\rangle \models \phi$ voor alle $\phi \in \Delta \Leftrightarrow \mathcal{R}$ is *welgefundeerd.*

Bewijs: Stel dat Δ de klasse van welgefundeerde structuren als modellen heeft. Laat nu Γ de theorie zijn die uit de volgende zinnen bestaat:

1. $\exists x_0 \exists x_1 R x_1 x_0$
2. $\exists x_0 \exists x_1 \exists x_2 (R x_2 x_1 \wedge R x_1 x_0)$
3. $\ldots$
4. $\exists x_0 \exists x_1 \ldots \exists x_n \exists x_{n+1} (R x_{n+1} x_n \wedge \ldots \wedge R x_1 x_0)$
5. etc.

In iedere eindige deelverzameling van $\Gamma \cup \Delta$ treden maar eindig veel zinnen uit Γ op. Daarom heeft iedere eindige deelverzameling van $\Gamma \cup \Delta$ een welgefundeerd model. Toepassing van de Compactheidsstelling leert dan dat ook de verzameling $\Gamma \cup \Delta$ zelf een model heeft. In dit model komt echter een oneindig dalende rij voor, dus is het niet welgefundeerd. Tegenspraak.

De reden dat het begrip 'welgefundeerdeheid' hier aan de orde komt, is dat het ons een niet al te ingewikkeld voorbeeld levert van een echte tweede-orde eigenschap die tijdslogisch karakteriseerbaar is. Merk op dat het niet om de eigenschap 'welgefundeerdheid' zelf gaat maar om 'welgefunderdheid+transitiviteit'.

Opgave 61 $\mathrm{H}(\mathrm{H}\phi \to \phi) \to \mathrm{H}\phi$ karakteriseert de klasse van alle transitieve en welgefundeerde structuren.

Als uitsmijter een stelling over een andere tweede orde eigenschap: continuïteit.

Stelling 31 Zij $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een lineair geordende structuur. Dan geldt

$$\mathcal{R} \text{ is continu} \Leftrightarrow \langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle \models \Box(\mathrm{G}\phi \to \mathrm{PG}\phi) \to (\mathrm{G}\phi \to \mathrm{H}\phi)$$

.

Bewijs: We laten eerst zien dat de betreffende zin geldig is binnen de klasse van alle lineaire continue structuren. Neem daartoe aan dat er een continue lineaire structuur $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ bestaat zodanig dat voor zeker model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ en $t_0 \in \mathcal{T}$ geldt

$$\mathcal{M} \not\models \Box(\mathrm{G}\phi \to \mathrm{PG}\phi) \to (\mathrm{G}\phi \to \mathrm{H}\phi)[t_0]$$

Dan geldt:

$$\mathcal{M} \models \Box(\mathrm{G}\phi \to \mathrm{PG}\phi)[t_0] \tag{a}$$

$$\mathcal{M} \models \mathrm{G}\phi[t_0] \tag{b}$$

$$\mathcal{M} \not\models \mathrm{H}\phi[t_0] \tag{c}$$

Uit (a) volgt, gegeven de samenhangendheid van $\mathcal{R}$ dat

$$\mathcal{M} \models \mathrm{G}\phi \to \mathrm{PG}\phi[t] \text{ voor alle } t \in \mathcal{T} \tag{d}$$

Uit (c) volgt dat er een t' met $\langle t', t_0 \rangle \in \mathcal{R}$ te vinden is zodanig dat $\mathcal{M} \not\models \phi[t']$. Dan geldt ook dat $\mathcal{M} \not\models \mathrm{PG}\phi[t']$, en (d) leert ons dan dat:

$$\mathcal{M} \not\models \mathrm{G}\phi[t'] \text{ voor zekere } t' \text{ met } \langle t', t_0 \rangle \in \mathcal{R} \tag{e}$$

Beschouw nu $\mathcal{T}_1 = \{t \in \mathcal{T} \mid \mathcal{M} \not\models \mathrm{G}\phi[t]\}$ en $\mathcal{T}_2 = \{t \in \mathcal{T} \mid \mathcal{M} \models \mathrm{G}\phi[t]\}$. Merk op dat $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$, dat $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = \emptyset$, dat $\mathcal{T}_1 \neq \emptyset$ (vanwege (e)), en dat $\mathcal{T}_2 \neq \emptyset$ (vanwege (b)). Bovendien geldt voor alle $t \in \mathcal{T}_1$ en $t' \in \mathcal{T}_2$ dat $\langle t, t' \rangle \in \mathcal{R}$. Immers: neem aan van niet. Dan geldt voor zekere $\langle t, t' \rangle \in \mathcal{R}$ dat $\mathcal{M} \models \mathrm{G}\phi[t]$ en $\mathcal{M} \not\models \mathrm{G}\phi[t']$. Uit het laatste volgt dat $\mathcal{M} \not\models \phi[t'']$ voor zekere t'' met $\langle t', t'' \rangle \in \mathcal{R}$. Gezien het feit dat $\mathcal{R}$ transitief is, geldt dat $\langle t, t'' \rangle \in \mathcal{R}$, maar dit is in strijd met het feit dat $\mathcal{M} \models \mathrm{G}\phi[t]$.
Het paar $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$ is derhalve een snede in $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$.
We zullen nu laten zien dat $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$ een kloof bepaalt, hetgeen in strijd is met de aannname dat $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ continu is.

(i) $\mathcal{T}_1$ heeft géén maximum. Neem maar aan van wel en laat t dat maximum zijn. Er zou dan gelden $\mathcal{M} \not\models \mathrm{G}\phi[t]$, hetgeen met zich mee zou brengen dat er een t' met $\langle t, t' \rangle \in \mathcal{R}$ — en derhalve $t' \in \mathcal{T}_2$ — zou bestaan zodanig dat $\mathcal{M} \not\models \phi[t']$. Uit (d) en het feit dat $t' \in \mathcal{T}_2$ volgt dan dat $\mathcal{M} \models \mathrm{PG}\phi[t']$, hetgeen impliceert dat $\mathcal{M} \models \phi[t']$. Tegenspraak

(ii) $\mathcal{T}_2$ heeft géén minimum. Neem maar aan van wel en laat t dat minimum zijn. Uit (d) en het feit dat $t \in \mathcal{T}_2$ volgt dat er in dit geval een t' met $\langle t', t \rangle \in \mathcal{R}$ zou moeten bestaan zodanig dat $\mathcal{M} \models \mathrm{G}\phi[t']$. Maar aangezien voor alle t' met $\langle t', t \rangle \in \mathcal{R}$ geldt dat $t' \in \mathcal{T}_1$, kan dat niet.

De geldigheid van de formule $\Box(\mathrm{G}\phi \to \mathrm{PG}\phi) \to (\mathrm{G} \to \mathrm{H}\phi)$ in de klasse van alle lineaire en continue structuren is hiermee aangetoond.

Dat de formule in kwestie ongeldig is op alle niet-continue lineaire structuren is eenvoudiger aan te tonen:

Laat $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een lineaire niet continue structuur zijn en neem aan dat $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$ een snede in $\mathcal{T}$ is die een kloof bepaalt. Kies $\mathcal{I}$ nu zó dat $\mathcal{I}(\phi, t) = 1$ voor alle $t \in \mathcal{T}_2$ en $\mathcal{I}(\phi, t) = 0$ voor alle $t \in \mathcal{T}_1$. Het is eenvoudig in te zien dat nu voor elke $t \in \mathcal{T}_2$ geldt dat:

$$\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle \not\models \Box(\mathrm{G}\phi \to \mathrm{PG}\phi) \to (\mathrm{G}\phi \to \mathrm{H}\phi)[t]$$

Opgave 62 Zij $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ een structuur waarop zowel de formule $\mathrm{H}(\mathrm{H}\varphi \to \varphi) \to \mathrm{H}\varphi$ als de formule $\mathrm{G}\varphi \to \mathrm{F}\varphi$ geldig zijn. Beredeneer dat $\mathcal{T}$ oneindig veel elementen heeft.

Opgave 63 Beredeneer dat er geen formule φ is zodanig dat voor alle structuren $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ waarop φ geldig is, geldt dat $\mathcal{T}$ eindig veel elementen heeft.

4.4 Axiomasystemen

Tot nu toe hebben we het als het om geldigheid ging, steeds gehad over de geldigheid van zinnen, en niet over de geldigheid van redeneringen. De volgende definitie brengt daar verandering in:

Definitie 63 (Geldigheid van redeneringen) Zij $\mathcal{C}$ een klasse van structuren. De redenering Δ/ϕ met premissenverzameling Δ en conclusie ϕ is *geldig binnen* $\mathcal{C}$ desda voor alle modellen $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ met $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle \in \mathcal{C}$ en voor alle $t \in \mathcal{T}$ geldt:

$$\text{Als } \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle \models \psi[t] \text{ voor elke } \psi \in \Delta, \text{ dan } \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle \models \phi[t].$$

Notatie: Als de redenering Δ/ϕ met premissenverzameling Δ en conclusie ϕ geldig is binnen $\mathcal{C}$, dan schrijven we dikwijls:

$$\Delta \models_{\mathcal{C}} \phi.$$

Merk op dat $\models_{\mathcal{C}} \phi$ hetzelfde betekent als $\mathcal{C} \models \phi$.

Welke redeneringen zijn geldig als je aanneemt dat de tijd gestructureerd is als de rationale getallen, en welke als je enkel aanneemt dat de tijd lineair geordend is. Of als je aannnemt dat de tijd eruit ziet als de gehele getallen? De eerste logicus die dit soort vragen stelde was A.N. Prior, en hij deed dat in een tijd —de jaren vijftig—dat binnen de logica nog nauwelijks aandacht voor semantiek bestond. Het hart van een logische theorie was toen nog gegeven met een bewijssysteem, dat de gebruiker in staat moest stellen om voor een gegeven redenering Δ/ϕ in geval van geldigheid de conclusie ϕ uit de premissen Δ *af te leiden.*

Binnen de tijdslogica, en meer in het algemeen de intensionele logica, is het gebruikelijk de bewijssystemen axiomatisch op te zetten. Wat dat precies inhoudt wordt met het volgende voorbeeld wellicht duidelijk.

De minimale tijdslogica $\mathbf{K}_t$

Het minimale tijdslogische systeem staat bekend onder de naam $\mathbf{K}_t$ en is gegeven met de volgende axioma's:

Axioma 1. Alle formules die de vorm hebben van een propositielogische tautologie zijn axioma's van $\mathbf{K}_t$

Axioma 2. Alle formules van de vorm $\mathrm{G}(\phi \to \psi) \to (\mathrm{G}\phi \to \mathrm{G}\psi)$ of het spiegelbeeld $\mathrm{H}(\phi \to \psi) \to (\mathrm{H}\phi \to \mathrm{H}\psi)$ zijn axioma's van $\mathbf{K}_t$

Axioma 3. Alle formules van de vorm $\mathrm{PG}\phi \to \phi$ and $\mathrm{FH}\phi \to \phi$ zijn axioma's van $\mathbf{K}_t$.

Onder het hoofdje **Axioma 1** vallen ook formules als $(\phi \wedge \mathrm{G}\psi) \to \mathrm{G}\psi$. Hoewel er een tijdslogische operator in deze formule optreedt, heeft ze de vorm van een propositielogische tautologie.

Definitie 64 (Afleidbaarheid in $\mathbf{K}_t$) Een formule ϕ is afleidbaar in $\mathbf{K}_t$ uit de premissenverzameling in Δ desda er een eindige rij formules bestaat waarvan ϕ de laatste is, zodanig dat elke formule ψ in die rij aan een van de volgende voorwaarden voldoet:

- ψ is een axioma van $\mathbf{K}_t$.
- ψ is een van de premissen in Δ.
- Eerder in de rij staan twee formules θ en $\theta \to \psi$. (In dit geval zeggen we dat ψ met **Modus Ponens** uit θ en $\theta \to \psi$ verkregen is.)
- Eerder in de rij, en wel op een plaats waar nog geen premisse is opgevoerd, staat een formule θ, terwijl ψ de vorm $\mathrm{G}\theta$ of $\mathrm{H}\theta$ heeft. (In dit geval zeggen we dat ψ met **Necessitatie** uit θ verkregen is.)

Als ϕ afleidbaar is uit Δ in $\mathbf{K}_t$, dan schrijven we ook wel

$$\Delta \vdash_{\mathbf{K}_t} \phi.$$

Als $\emptyset \vdash_{\mathbf{K}_t} \phi$, dan schrijven we ook wel $\vdash_{\mathbf{K}_t} \phi$, en we noemen ϕ in dat geval een *theorema* van $\mathbf{K}_t$.

Laat $\mathcal{C}$ de klasse van alle structuren zijn. Merk op dat het volgende juist is:

$$\text{Als } \models_{\mathcal{C}} \phi, \text{ dan } \models_{\mathcal{C}} \mathrm{G}\phi,$$

maar het volgende is onjuist:

$$\phi \models_{\mathcal{C}} \mathrm{G}\phi.$$

Het bewijssysteem zit zo in elkaar dat ook het volgende geldt:

$$\text{Als } \vdash_{\mathbf{K}_t} \phi, \text{ dan } \vdash_{\mathbf{K}_t} \mathrm{G}\phi$$

en de clausule *'en wel op een plaats waar nog geen premisse is opgevoerd'* is toegevoegd om te voorkomen dat zou gelden

$$\phi \vdash_{\mathbf{K}_t} \mathrm{G}\phi.$$

Het maken van axiomatische afleidingen is geen sinecure. Daarom maken we vaak gebruik van zogenaamde 'afgeleide regels', terwijl ook het deductietheorema grote diensten kan bewijzen.

Afgeleide regels

Als toelichting bij het begrip 'afgeleide regel' is het misschien nuttig de volgende afleiding van $\mathrm{G}(\phi \wedge \psi) \to \mathrm{G}\phi$ eens nader te bekijken:

1. $(\phi \wedge \psi) \to \phi$	Axioma 1
2. $\mathrm{G}((\phi \wedge \psi) \to \phi)$	via Necessitatie uit 1
3. $\mathrm{G}((\phi \wedge \psi) \to \phi) \to (\mathrm{G}(\phi \wedge \psi) \to \mathrm{G}\phi)$	Axioma 2
4. $\mathrm{G}(\phi \wedge \psi) \to \mathrm{G}\phi$	via Modus Ponens uit 2, 3

Uit deze afleiding blijkt iets veel algemeners: welke formules ϕ en ψ je ook neemt, als $\vdash_{\mathbf{K}_t} \phi \to \psi$, dan geldt ook dat $\vdash_{\mathbf{K}_t} \mathrm{G}\phi \to \mathrm{G}\psi$. Of zoals we vanaf nu zullen zeggen: $\phi \to \psi / \mathrm{G}\phi \to \mathrm{G}\psi$ is een *afgeleide regel* van $\mathbf{K}_t$.

De gebruikelijke regels van de propositiecalculus zijn natuurlijk ook afgeleide regels van $\mathbf{K}_t$. Immers $\mathbf{K}_t$ bevat alle tautologieën en is afgesloten onder Modus Ponens. Zo is het bijvoorbeeld makkelijk te bewijzen dat

$$\frac{\phi \to \psi, \phi \to \chi}{\phi \to (\psi \wedge \chi)}$$

en

$$\frac{\phi \to \psi, \psi \to \chi}{\phi \to \chi}$$

afgeleide regels van $\mathbf{K}_t$ zijn.

Als toepassing van het bovenstaande bewijzen we:

Stelling 32 $\vdash_{\mathbf{K}_t} \mathrm{G}(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\mathrm{G}\phi \wedge \mathrm{G}\psi)$.

Bewijs: $\Rightarrow$ Uit $\vdash_{\mathbf{K}_t} \mathrm{G}(\phi \wedge \psi) \rightarrow \mathrm{G}\phi$ en $\vdash_{\mathbf{K}_t} \mathrm{G}(\phi \wedge \psi) \rightarrow \mathrm{G}\psi$ volgt middels een van de bovengenoemde afgeleide regels dat $\vdash_{\mathbf{K}_t} \mathrm{G}(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\mathrm{G}\phi \wedge \mathrm{G}\psi)$.
$\Leftarrow$ Gegeven dat $\vdash_{\mathbf{K}_t} \phi \rightarrow (\psi \rightarrow (\phi \wedge \psi))$, volgt $\vdash_{\mathbf{K}_t} \mathrm{G}\phi \rightarrow \mathrm{G}(\psi \rightarrow (\phi \wedge \psi))$. Verder geldt dat de formule $\mathrm{G}(\phi \rightarrow (\phi \wedge \psi)) \rightarrow (\mathrm{G}\psi \rightarrow \mathrm{G}(\phi \wedge \psi))$ een axioma is (Axioma 2). Derhalve geldt $\vdash_{\mathbf{K}_t} \mathrm{G}\phi \rightarrow (\mathrm{G}\psi \rightarrow \mathrm{G}(\phi \wedge \psi))$ dit ook via een van de hierboven genoemde afgeleide regels. Zo krijgen we, opnieuw door toepassing van een afgeleide regel (welke?) dat $\vdash_{\mathbf{K}_t} (\mathrm{G}\phi \wedge \mathrm{G}\psi) \rightarrow \mathrm{G}(\phi \wedge \psi)$.

Merk op dat dit bewijs veel langer zou zijn als we geen gebruik zouden maken van afgeleide regels: Elke keer dat we nu een beroep doen op zo'n regel zouden we een hele afleiding ervan moeten inlassen.

Stelling 33 (Deductietheorema voor $\mathbf{K}_t$)

$$\text{Als } \phi_1, \ldots, \phi_n, \psi \vdash_{\mathbf{K}_t} \chi, \text{ dan } \phi_1, \ldots, \phi_n \vdash_{\mathbf{K}_t} \psi \rightarrow \chi.$$

Bewijs: Stel $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi \vdash_{\mathbf{K}_t} \chi$. Dan bestaat er een afleiding van de formule χ uit de formules $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi$ plus een aantal $\mathbf{K}_t$-theorema's $\theta_1, \ldots, \theta_m$ waarin als enige afleidingsregel Modus Ponens gebruikt wordt. Dit betekent dat er een puur propositielogische afleiding van χ uit $\theta_1, \ldots, \theta_m, \phi_1, \ldots, \phi_n, \psi$ bestaat. (Immers, de regel van $\mathbf{K}_t$ die niet tot de propositiecalculus hoort, mag niet op de premissen worden toegepast). Voor de propositiecalculus weten we al dat het deductietheorema opgaat. Dus geldt:

$$\vdash \theta_1 \rightarrow (\theta_2 \rightarrow (\ldots (\theta_m \rightarrow (\phi_1 \rightarrow (\phi_n \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)))) \ldots)),$$

Gegeven de correctheidsstelling van de propositielogica is de formule in kwestie een tautologie, en dus een axioma van $\mathbf{K}_t$, en daarmee ook afleidbaar in $\mathbf{K}_t$. Aangezien $\vdash_{\mathbf{K}_t} \theta_1, \ldots, \vdash_{\mathbf{K}_t} \theta_m$ (al de θ's zijn stellingen van $\mathbf{K}_t$), verkrijgen we

$$\vdash_{\mathbf{K}_t} \phi_1 \rightarrow (\ldots (\phi_n \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \ldots),$$

dit door Modus Ponens m keer toe te passen. Door Modus Ponens opnieuw toe te passen, ditmaal n keer, vinden we tenslotte dat $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash_{\mathbf{K}_t} \psi \rightarrow \chi$.

Opgave 64 Bewijs: Als $\vdash_{\mathbf{K}_t} \phi \rightarrow \psi$, dan $\vdash_{\mathbf{K}_t} \mathrm{P}\phi \rightarrow \mathrm{P}\psi$

Opgave 65 Laat zien:
(a) $\vdash_{\mathbf{K}_t} \phi \rightarrow \mathrm{HF}\phi$
(b) $\vdash_{\mathbf{K}_t} \neg\mathrm{P}(\phi \wedge \neg\phi)$
(c) $\vdash_{\mathbf{K}_t} (\mathrm{G}\phi \wedge \mathrm{F}\psi) \rightarrow \mathrm{F}(\phi \wedge \psi)$

Opgave 66 Laat $\phi*$ het spiegelbeeld van ϕ zijn, d.w.z., de formule die uit ϕ ontstaat als je de operator G overal waar die in ϕ optreedt door de operator H vervangt, en *vice versa*. Bewijs: Als $\vdash_{\mathbf{K}_t} \phi$, dan $\vdash_{\mathbf{K}_t} \phi*$

Feit 4 $\mathbf{K}_t$ is correct en sterk volledig met betrekking tot de klasse van alle structuren. Dwz:

$$\Delta \vdash_{\mathbf{K}_t} \phi \Leftrightarrow \Delta \models_{\mathcal{C}} \phi \text{ (waarbij } \mathcal{C} \text{ de klasse van alle structuren is.)}$$

Andere tijdslogische systemen

Andere tijdslogische afleidingssystemen verschillen van $\mathbf{K}_t$ enkel hierin dat ze meer axioma's hebben. $\mathbf{K}_t\mathbf{4}$ bijvoorbeeld is het systeem dat ontstaat wanneer toegestaan wordt om in een afleiding ook alle zinnen van de vorm $(\mathrm{G}\phi \to \mathrm{GG}\phi)$ als een axioma op te voeren.

Opgave 67 Laat zien dat $\vdash_{\mathbf{K}_t\mathbf{4}} \mathrm{H}\phi \to \mathrm{HH}\phi$

Feit 5
- (i) $\mathbf{K}_t\mathbf{4} = \mathbf{K}_t + (\mathrm{G}\phi \to \mathrm{GG}\phi)$ is correct en sterk volledig met betrekking tot de klasse van alle partiële ordeningen.
- (ii) $\mathbf{Lin} = \mathbf{K}_t\mathbf{4} + (\mathrm{F}\phi \to \mathrm{G}(\phi \vee \mathrm{P}\phi \vee \mathrm{F}\phi)) + (\mathrm{P}\phi \to \mathrm{H}(\phi \vee \mathrm{P}\phi \vee \mathrm{F}\phi))$ is correct en sterk volledig met betrekking tot de klasse van lineaire structuren.
- (iii) $\mathbf{Dis} = \mathbf{Lin} + ((\phi \wedge \mathrm{G}\phi) \to \mathrm{PG}\phi) +$ $+ ((\phi \wedge \mathrm{H}\phi) \to \mathrm{FH}\phi))$ is correct en sterk volledig met betrekking tot de klasse van alle lineaire discrete structuren zonder begin of eindpunt.
- (iv) $\mathbf{Q} = \mathbf{Lin} + \mathrm{P}(\phi \vee \neg\phi) + \mathrm{F}(\phi \vee \neg\phi) + (\mathrm{GG}\phi \to \mathrm{G}\phi)$ is correct en sterk volledig met betrekking tot de structuur $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$.
- (v) $\mathbf{R} = \mathbf{Q} + (\bigwedge(\mathrm{G}\phi \to \mathrm{PG}\phi) \to (\mathrm{G}\phi \to \mathrm{H}\phi))$ is correct en sterk volledig met betrekking tot de structuur $\langle \mathbb{R}, < \rangle$.

4.5 Tijd en Determinisme

Lees het het bijgevoegde fragment van het artikel 'The unreal future' geschreven door J. Burgess en maak de volgende opgave.

Opgave 68 Beschouw de volgende bewering (gedaan in maart 1995):

Ajax wint de Europacup.

Bepaal uw standpunt ten aanzien van de volgende stellingen:
- De bewering '*Ajax wint de Europacup*' is waar of onwaar.
- De bewering '*Ajax wint de Europacup of Ajax wint de Europacup niet*' is waar.

- De bewering'*Ajax wint de Europacup*' is alleen waar als de bewering '*Het is onvermijdelijk dat Ajax de Europacup wint*' waar is.
- De bewering '*Ajax wint de Europacup*' heeft geen waarheidswaarde omdat het principieel onmogelijk is te weten wat de toekomst brengen zal.

Welke van de theorieën die in het bijgevoegde fragment aan de orde komen, sluit het beste bij uw standpunt aan? (U kunt bij het doorwerken van dit fragment de tussen vierkante haken geplaatste stukjes overslaan).

Hoofdstuk 5

Epistemische Logica

Binnen[1] de epistemische logica onderzoekt men de logische eigenschappen van operatoren zoals: “Marie weet dat...”, “Jan gelooft dat...”, “Piet verwacht dat...” en “Ans betwijfelt dat...”. Zulke operatoren worden wel epistemische operatoren genoemd—ze verwijzen naar de *kennistoestand* van de ‘agents’ die er in genoemd worden. De eerste logicus die geïnteresseerd raakte in dit onderwerp was de Fin Jaakko Hintikka, die in 1962 in zijn boek *Knowledge and Belief* liet zien dat begrippen en technieken uit de modale logica en de tijdslogica ook op dit gebied van toepassing waren. Zijn boek gaf aanleiding tot heftige discussies onder filosofisch georiënteerde logici—u zult in de loop van dit hoofdstuk zien waarom.

In het begin van de jaren ’80 kreeg de ontwikkeling in dit vakgebied een nieuwe impuls toen theoretisch georiënteerde informatici en AI-ers epistemische logica’s gingen gebruiken voor de formele beschrijving van de kennis van ‘agents’ in gedistribueerde systemen — het zoveelste voorbeeld van het verschijnsel dat iets zuiver filosofisch plotseling enig praktisch nut blijkt te hebben. Tegenwoordig vinden we toepassingen van epistemische logica met name op de volgende terreinen:

- specificatie van gedistribueerde systemen en verificatie van protocollen voor het verzenden van berichten daarin.
- formele beschrijving van kennis in gegevens- en kennisbanken
- specificatie van het gedrag van samenwerkende robots

Dit hoofdstuk behandelt slechts de allereerste beginselen van de epistemische logica. Mathematisch-logisch brengt het nauwelijks iets nieuws: de centrale begrippen zijn gewoon die van de modale logica (zoals bijvoorbeeld in Gamut II geïntroduceerd.)

1. Dit hoofdstuk is zodanig aangevuld dat het los staat van het hoofdstuk Tijdslogica. (EM, december 2007)

5.1 De taal van de epistemische logica

Definitie 65 (Grammatica) Een taal $\mathcal{L}$ (van de epistemische logica) is een vijftal $\langle$AT, CON, UN, BI, ZIN$\rangle$ met de volgende eigenschappen:

(i) AT is een niet lege verzameling symbolen. De elementen van AT noemen we "atomaire zinnen".

(ii) CON is een verzameling symbolen die verschillen van de symbolen in AT. De elementen van CON noemen we "namen".

(iii) UN is een verzameling van twee of drie symbolen die geacht worden te verschillen van de elementen van AT∪CON. De elementen van UN heten unaire voegwoorden en we zullen ze aanduiden met de tekens "$\neg$", "$\mathbf{K}$" en "$\mathbf{B}$". Het symbool $\neg$ maakt altijd deel uit van UN.

(iv) BI is een verzameling die één symbool bevat dat verschilt van de elementen van AT∪CON∪UN. Het element van BI is een binair voegwoord en we zullen ernaar verwijzen met het symbool"$\rightarrow$".

(v) Laten '(' en ')' nu twee symbolen zijn die verschillen van de elementen uit AT, UN en BI. ZIN, de verzameling zinnen van $\mathcal{L}$, is dan de *kleinste* verzameling X van uitdrukkingen waarvoor geldt:

a. AT $\subseteq X$

b. Als $\varphi \in X$, dan $\neg\varphi \in X$

c. Als $\varphi \in X$ en $a \in$ CON dan $\mathbf{K}_a\varphi \in X$ en $\mathbf{B}_a\varphi \in X$

d. Als $\varphi, \psi \in X$, dan $(\varphi \rightarrow \psi) \in X$

Lees $\mathbf{K}_a\varphi$ als "a weet dat φ" en $\mathbf{B}_a\varphi$ als "a gelooft dat φ". Disjunctie, conjunctie, en equivalentie kunnen in termen van $\rightarrow$ en $\neg$ gedefinieerd worden:

Definitie 66 Laat $\mathcal{L}$ een taal zijn en $\varphi, \psi \in$ ZIN. Dan geldt:

$$(\varphi \vee \psi) =_{df} (\neg\varphi \rightarrow \psi)$$
$$(\varphi \wedge \psi) =_{df} \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$$
$$(\varphi \leftrightarrow \psi) =_{df} ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$$

Een formule als $\mathbf{K}_a\varphi \wedge \neg\mathbf{B}_c\mathbf{K}_a\varphi$ kan dus gelezen worden als "a weet dat φ, maar c gelooft niet dat a dat weet".

Tot nader order zijn we enkel geïnteresseerd in het geval dat we met één agent van doen hebben. Daarom kunnen we het subscript x dat naar de agent in kwestie verwijst uit de operatoren $\mathbf{B}_x$ en $\mathbf{K}_x$ weglaten.

U zult in het volgende ontdekken dat de logische theorieën uit de epistemische logica formeel gesproken overeenkomen met de modale en tijdslogische systemen uit Gamut II. Dat geldt zowel voor de semantische kant van de zaak als voor de syntactische. Echter in tegenstelling tot de presentatie van Gamut is het uitgangspunt bij epistemische logica altijd een axiomatisch afleidingssysteem—structuren ("frames") en modellen komen pas in tweede instantie aan de orde.

5.2 Axiomatische Aanpak

De epistemische afleidingssystemen zijn hetzelfde opgebouwd als andere modale systemen. Een systeem **S** wordt gegeven met een aantal kenmerkende axioma's; de definitie van wat een 'afleiding' in **S** is in alle gevallen hetzelfde:

Definitie 67 (Afleidbaarheid in S) Een formule φ is afleidbaar uit de premissenverzameling Δ desda er een eindige rij formules bestaat waarvan φ de laatste is, zodanig dat elke formule ψ in die rij aan een van de volgende voorwaarden voldoet:

- ψ heeft de vorm van een propositielogische tautologie (Axioma 1).
- ψ heeft de vorm $\mathbf{K}(\chi \to \theta) \to (\mathbf{K}\chi \to \mathbf{K}\theta)$ of $\mathbf{B}(\chi \to \theta) \to (\mathbf{B}\chi \to \mathbf{B}\theta)$ (Axioma 2).
- ψ is een ander axioma van **S**.
- ψ is een van de premissen in Δ.
- Eerder in de rij staan twee formules θ en $\theta \to \psi$. (In dit geval zeggen we dat ψ met **Modus Ponens** uit θ en $\theta \to \psi$ verkregen is.)
- Eerder in de rij, en wel op een plaats waar nog geen premisse is opgevoerd, staat een formule θ, terwijl ψ de vorm $\mathbf{K}\theta$ of $\mathbf{B}\theta$ heeft. (In dit geval zeggen we dat ψ met **Necessitatie** uit θ verkregen is.)

Als φ afleidbaar is uit Δ in het systeem **S**, dan schrijven we ook wel

$$\Delta \vdash_{\mathbf{S}} \varphi.$$

Als $\emptyset \vdash_{\mathbf{S}} \varphi$, dan schrijven we ook wel $\vdash_{\mathbf{S}} \varphi$, en we noemen φ in dat geval een *theorema* van **S**.

Het bewijssysteem zit zo in elkaar dat het volgende geldt:

$$\text{Als } \vdash_{\mathbf{S}} \varphi, \text{ dan } \vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{K}\varphi$$

en de clausule *'en wel op een plaats waar nog geen premisse is opgevoerd'* is toegevoegd om te voorkomen dat zou gelden

$$\varphi \vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{K}\varphi.$$

Zoals je je herinnert uit hoofdstuk 1 is het maken van axiomatische afleidingen geen sinecure. Daarom maken we vaak gebruik van zogenaamde 'afgeleide regels', terwijl ook het deductietheorema grote diensten kan bewijzen. In de volgende paragraaf ontwikkelen we dit algemene metalogische deductiegereedschap. Vervolgens passen we het toe in specifiek epistemische axiomasystemen.

5.2.1 Afgeleide regels

We beschouwen een willekeurig modaal systeem $\mathbf{S}$.[2] Als toelichting bij het begrip 'afgeleide regel' is het misschien nuttig de volgende afleiding van $\mathbf{K}(\varphi \wedge \psi) \to \mathbf{K}\varphi$ eens nader te bekijken.

1. $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	Axioma 1
2. $\mathbf{K}((\varphi \wedge \psi) \to \varphi)$	via Necessitatie uit 1
3. $\mathbf{K}((\varphi \wedge \psi) \to \varphi) \to (\mathbf{K}(\varphi \wedge \psi) \to \mathbf{K}\varphi)$	Axioma 2
4. $\mathbf{K}(\varphi \wedge \psi) \to \mathbf{K}\varphi$	via Modus Ponens uit 2, 3

Uit deze afleiding blijkt iets veel algemeners: welke formules φ en ψ je ook neemt, als $\vdash_{\mathbf{S}} \varphi \to \psi$, dan geldt ook dat $\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{K}\varphi \to \mathbf{K}\psi$. Of zoals we vanaf nu zullen zeggen: $\varphi \to \psi / \mathbf{K}\varphi \to \mathbf{K}\psi$ is een *afgeleide regel* van $\mathbf{S}$.
De gebruikelijke regels van de propositiecalculus zijn natuurlijk ook afgeleide regels van $\mathbf{S}$. Immers $\mathbf{S}$ bevat alle tautologieën en is afgesloten onder Modus Ponens. Zo is het bijvoorbeeld makkelijk te bewijzen dat

$$\frac{\varphi \to \psi, \varphi \to \chi}{\varphi \to (\psi \wedge \chi)}$$

en

$$\frac{\varphi \to \psi, \psi \to \chi}{\varphi \to \chi}$$

afgeleide regels van $\mathbf{S}$ zijn.

Als toepassing van het bovenstaande bewijzen we:

Stelling 34 $\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{K}(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\mathbf{K}\varphi \wedge \mathbf{K}\psi)$.

Bewijs: $\Rightarrow$ Uit $\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{K}(\varphi \wedge \psi) \to \mathbf{K}\varphi$ en $\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{K}(\varphi \wedge \psi) \to \mathbf{K}\psi$ volgt middels een van de bovengenoemde afgeleide regels dat $\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{K}(\varphi \wedge \psi) \to (\mathbf{K}\varphi \wedge \mathbf{K}\psi)$.
$\Leftarrow$ Gegeven dat $\vdash_{\mathbf{S}} \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$, volgt $\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{K}\varphi \to \mathbf{K}(\psi \to (\varphi \wedge \psi))$. Verder geldt dat de formule $\mathbf{K}(\varphi \to (\varphi \wedge \psi)) \to (\mathbf{K}\psi \to \mathbf{K}(\varphi \wedge \psi))$ een axioma is (Axioma 2). Derhalve geldt $\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{K}\varphi \to (\mathbf{K}\psi \to \mathbf{K}(\varphi \wedge \psi))$ dit ook via een van de hierboven genoemde afgeleide regels. Zo krijgen we, opnieuw door toepassing van een afgeleide regel (welke?) dat $\vdash_{\mathbf{S}} (\mathbf{K}\varphi \wedge \mathbf{K}\psi) \to \mathbf{K}(\varphi \wedge \psi)$.

Merk op dat dit bewijs veel langer zou zijn als we geen gebruik zouden maken van afgeleide regels: Elke keer dat we nu een beroep doen op zo'n regel zouden we een hele afleiding ervan moeten inlassen.

Stelling 35 (Deductietheorema voor S)

$$\text{Als } \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \vdash_{\mathbf{S}} \chi, \text{ dan } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathbf{S}} \psi \to \chi.$$

2. Deze paragraaf is dus niet alleen van toepassing op epistemische logica's, maar op elk modaal systeem.

Bewijs: Stel $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \vdash_{\mathbf{S}} \chi$. Dan bestaat er een afleiding van de formule χ uit de formules $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ plus een aantal **S**-theorema's $\theta_1, \ldots, \theta_m$ waarin als enige afleidingsregel Modus Ponens gebruikt wordt. Dit betekent dat er een puur propositielogische afleiding van χ uit $\theta_1, \ldots, \theta_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ bestaat. (Immers, de regel van **S** die niet tot de propositiecalculus hoort, mag niet op de premissen worden toegepast). Voor de propositiecalculus weten we al dat het deductietheorema opgaat. Dus geldt:

$$\vdash \theta_1 \to (\theta_2 \to (\ldots (\theta_m \to (\varphi_1 \to (\varphi_n \to (\psi \to \chi)))) \ldots)),$$

Gegeven de correctheidsstelling van de propositielogica is de formule in kwestie een tautologie, en dus een axioma van **S**, en daarmee ook afleidbaar in **S**. Aangezien $\vdash_{\mathbf{S}} \theta_1, \ldots, \vdash_{\mathbf{S}} \theta_m$ (al de θ's zijn stellingen van **S**), verkrijgen we

$$\vdash_{\mathbf{S}} \varphi_1 \to (\ldots (\varphi_n \to (\psi \to \chi)) \ldots),$$

dit door Modus Ponens m keer toe te passen. Door Modus Ponens opnieuw toe te passen, ditmaal n keer, vinden we tenslotte dat $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathbf{S}} \psi \to \chi$.

5.2.2 Minimale epistemische systemen

Nu over naar echte epistemische systemen. Het minimale kennislogische systeem **T** is gegeven met de volgende axioma's:

Systeem T Alle formules van de vorm $\mathbf{K}\varphi \to \varphi$ zijn axioma's van **T**.

Het systeem **T** is bedoeld voor talen waarin naast $\neg$ alleen **K** als unaire operator is opgenomen. Het heeft alleen betrekking op 'kennis', waarvoor het axioma **T** kenmerkend is. Voor talen waarin alleen **B** als epistemische operator is opgenomen is een ander axioma bepalend.

Het minimale doxastische systeem **D** is gegeven met de volgende axioma's:

Systeem D Alle formules van de vorm $\mathbf{B}\varphi \to \neg\mathbf{B}\neg\varphi$ zijn axioma's van **D**.

En het minimale "gemengde" systeem **TD** is het volgende:

Systeem TD Alle axioma's van het systeem **T** en het systeem **D** zijn axioma's van **TD**. En alle formules van de vorm $\mathbf{K}\varphi \to \mathbf{B}\varphi$ (axioma **KB**) zijn axioma's van **TD**.

Alle epistemische systemen die in het volgende nog aan de orde komen zijn uitbreidingen van de bovenstaande drie. Voor alle epistemische systemen geldt daarom het volgende.

Stelling 36 Als $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathbf{S}} \psi$, dan

$$\mathbf{K}\varphi_1, \ldots, \mathbf{K}\varphi_n \vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{K}\psi \text{ en } \mathbf{B}\varphi_1, \ldots, \mathbf{B}\varphi_n \vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{B}\psi$$

Bewijs: Met gebruikmaking van afgeleide regels.

Wat betekent deze stelling voor onze noties van kennis en geloof? Stel ψ is afleidbaar uit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. De stelling zegt dat dan ook $\mathbf{K}\psi$ afleidbaar is uit $\mathbf{K}\varphi_1, \ldots, \mathbf{K}\varphi_n$. Met andere woorden: de stelling beweert dat de kennis van een agent is afgesloten onder afleidbaarheid, en het hetzelfde geldt voor hetgeen een agent gelooft.

Op het eerste gezicht lijkt dit misschien teveel van het goede. Stel bijvoorbeeld dat $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de axioma's van de Euclidische meetkunde zijn, en ψ de stelling dat de zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan. Ù weet toevallig hoe u die stelling uitgaande van de axioma's kan bewijzen, maar Jan weet dat niet —of nòg niet. Jan kent enkel de axioma's; hij weet dat door twee punten precies een lijn gaat, en dat er door een punt dat niet op een bepaalde lijn ligt precies een lijn evenwijdig aan de eerstgenoemde lijn gaat, en zo ook de andere axioma's. Maar daar houdt het dan ook wel zo'n beetje mee op. Toch lijkt de stelling te beweren dat Jan in dat geval ook weet hoe het met die zwaartelijnen zit. De stelling lijkt te impliceren dat de subjecten aan wie kennis of geloof wordt toegeschreven logisch alwetend zijn.

Men kan op verschillende manieren op deze problematiek reageren.
(i) De standaardmanier is te stellen dat de stelling laat zien dat deze logische systemen zich inderdaad slechts bezighouden met 'ideale', logisch alwetende subjecten. Wat minder ideale subjecten (zoals de hierboven genoemde Jan) betreft: hier heeft dit soort systemen hoogstens normatieve pretenties. Als Jan de axioma's van de Euclidische meetkunde gelooft, dan moet hij de gevolgen ervan ook geloven.
(ii) Ook wordt wel gesteld dat het in deze logische theorieën mede om impliciet geloof en impliciete kennis gaat, en niet alleen om expliciete, bewuste kennis of geloof. Als Jan de axioma's van de Euclidische meetkunde kent, dan kent hij daarmee impliciet alle stellingen die er uit volgen.
In het verlengde van (i) en (ii) wordt dikwijls nog opgemerkt dat als het om toepassingen gaat, en dan met name om toepassingen in de informatica, deze veronderstelling van logische alwetendheid geen kwaad kan.

Het zijn met name de Necessitatieregel en Axioma 2 die maken dat het probleem van logische alwetendheid rijst. Maar ook de andere axioma's zijn voor discussie vatbaar. Eigenlijk spreekt alleen axioma T voor zich: iets dat onwaar is kun je niet weten, ook al ben je er heilig van overtuigd dat je het wel weet. Met axioma D ligt het al iets moeilijker. Natuurlijk, als het om 'ideale' subjecten of 'bewust geloof' gaat, dan is het geldig: Ideale subjecten zullen wel 'rationeel' genoeg zijn om niet tegelijkertijd twee tegengestelde dingen te geloven. En misschien geldt ook wel voor minder 'ideale' subjecten dat het logisch onmogelijk is om in een toestand te verkeren waarin bewust twee tegengestelde dingen worden geloofd. Maar als het om impliciet geloof van niet ideale subjecten gaat spreekt een en ander niet zo voor zich. Er zijn genoeg voorbeelden van wiskundige theorieën waar men heilig in geloofde totdat bleek dat ze inconsistent waren. Eenzelfde type argument kan tegen axioma KB worden ingebracht: als het om onbewust geloof of bewuste kennis gaat, spreekt het voor zich. Maar als het om bewust geloof en onbewuste kennis gaat, dan is het niet moeilijk tegenvoorbeelden te bedenken.

Opgave 69 Bewijs
(i) $\vdash_{\mathbf{TD}} \mathbf{BK}\varphi \to \mathbf{B}\varphi$
(ii) $\vdash_{\mathbf{TD}} \mathbf{KB}\varphi \to \mathbf{B}\varphi$

5.2.3 Versterkingen van T, D en TD

Ter versterking van T worden dikwijls de volgende axioma's voorgesteld.
Positieve kennisintrospectie $\mathbf{K}\varphi \to \mathbf{KK}\varphi$
Negatieve kennisintrospectie $\neg\mathbf{K}\varphi \to \mathbf{K}\neg\mathbf{K}\varphi$
De naamgeving moge hier tevens als motivatie dienen. Bijna iedereen accepteert *Positieve Introspectie* maar *Negatieve Introspectie* is controversieel. We zullen in het volgende zien waarom.

Iedereen die *Negatieve Introspectie* accepteert, accepteert ook *Positieve Introspectie*. Zo krijgen we twee interessante uitbreidingen van **T**:
S4 = **T** + *Positieve kennisintrospectie*
S5 = **S4** + *Negatieve kennisintrospectie*
Binnen de AI is **S5** is het meest toegepaste kennislogische systeem. Dit vooral omdat technisch beter hanteerbaar is dan de alternatieven. De volgende opgave geeft een indicatie waarom.

Opgave 70 Een kennislogische *modaliteit* is een (mogelijk leeg) symbolenrijtje opgebouwd uit enkel het negatieteken en de operator **K**. We noemen twee modaliteiten X en Y equivalent in het syteem **S** desda voor elke φ geldt dat $\vdash_{\mathbf{S}} X\varphi \leftrightarrow Y\varphi$.

(a) Bewijs nu dat in **S5** elke modaliteit X equivalent is met één van de volgende zes: (i) het lege rijtje; (ii) $\neg$; (iii) $\mathbf{K}$; (iv) $\neg\mathbf{K}$; (v) $\mathbf{K}\neg$; en (vi) $\neg\mathbf{K}\neg$. We zeggen ook wel: **S5** heeft zes modaliteiten.
(b) Ter vergelijking: **T** heeft oneindig veel modaliteiten. (Met het bewijs hiervan kunt u het beste wachten tot de volgende paragraaf).

Waarom getwijfeld aan negatieve introspectie? Wel, het lijkt onmogelijk te worden om te geloven dat je iets weet, terwijl je het in feite niet weet (en ook niet kàn weten, bijvoorbeeld omdat het onwaar is). Negatieve introspectie voorspelt dat je als je p niet weet, ook weet dat je p niet weet, en daaruit lijkt weer te volgen dat je ook gelooft dat je p niet weet. En als je gelooft dat je p *niet* weet, dan kan je moeilijk volhouden te geloven dat je p *wèl* weet. Toch?

Hier komen we dadelijk nog formeel op terug. Maar eerst noemen we mogelijke versterkingen van **D**. Het gaat daarbij opnieuw om introspectie-axioma's:

Positieve geloofsintrospectie $\mathbf{B}\varphi \rightarrow \mathbf{BB}\varphi$
Negatieve geloofsintrospectie $\neg\mathbf{B}\varphi \rightarrow \mathbf{B}\neg\mathbf{B}\varphi$

De corresponderende systemen zijn:

D4 = **D** + *Positieve geloofsintrospectie*
D5 = **D4** + *Negatieve geloofsintrospectie*

Opgave 71 Bewijs dat $\vdash_{\mathbf{D5}} \mathbf{BB}\varphi \rightarrow \mathbf{B}\varphi$.

Opgave 72 Maakt het voor de aanvaardbaarheid van *Positieve geloofsintrospectie* en *Negatieve geloofsintrospectie* enig verschil of men het heeft over expliciet geloof of over impliciet geloof?

Bij het versterken van het gemengde systeem **TD** gaat het al vlug duizelen van de afwisselende **K**'s en **B**'s met en zonder voorafgaande negatietekens.

Opgave 73 Zij **S** = **TD** + *Positieve kennisintrospectie*. Dan geldt
(i) $\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{K}\varphi \rightarrow \mathbf{KB}\varphi$
(ii) $\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{K}\varphi \rightarrow \mathbf{BK}\varphi$

Stelling 37 Zij **S** = **TD** + *Negatieve kennisintrospectie*. Dan geldt
(i) $\vdash_{\mathbf{S}} \neg\mathbf{K}\varphi \rightarrow \mathbf{B}\neg\mathbf{K}\varphi$
(ii) $\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{BK}\varphi \rightarrow \mathbf{K}\varphi$.

Bewijs
We beperken ons tot een bewijs van (ii). Het is voldoende om te laten zien dat $\vdash_{\mathbf{S}} \neg\mathbf{K}\varphi \rightarrow \neg\mathbf{BK}\varphi$. Welnu, merk op dat

1. $\vdash_{\mathbf{S}} \neg\mathbf{K}\varphi \rightarrow \mathbf{K}\neg\mathbf{K}\varphi$ (*Negatieve introspectie*)
2. $\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{K}\neg\mathbf{K}\varphi \rightarrow \mathbf{B}\neg\mathbf{K}\varphi$ (**KB**)
3. $\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{B}\neg\mathbf{K}\varphi \rightarrow \neg\mathbf{B}\neg\neg\mathbf{K}\varphi$ (**D**)
4. $\vdash_{\mathbf{S}} \neg\mathbf{B}\neg\neg\mathbf{K}\varphi \rightarrow \neg\mathbf{BK}\varphi$ (proplog. + afgeleide regel)
5. $\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{BK}\varphi \rightarrow \mathbf{K}\varphi$ (proplog. uit 1 t/m 4)

De stelling maakt het onmogelijk een gemengd systeem voor te staan waarin zowel negatieve kennisintrospectie als het axioma

Arrogantie $\mathbf{B}\varphi \rightarrow \mathbf{BK}\varphi$

zijn opgenomen. Immers in een dergelijk systeem wordt $\mathbf{B}\varphi \rightarrow \mathbf{K}\varphi$ afleidbaar. Nu is het principe van *Arrogantie* zeker niet geldig voor elke notie van geloof, maar het lijkt niet onredelijk aan te nemen dat het opgaat voor voor een sterke notie, waar 'geloven dat...' zoiets betekent als 'er van overtuigd zijn dat...'.

Merk op dat er in het bewijs van de stelling niet alleen een beroep gedaan wordt op *Negatieve kennisintrospectie*, maar ook op de principes **KB** en **D**. In de literatuur wordt het resultaat dan ook niet altijd als een argument tegen *Negatieve kennisintrospectie* gebruikt; soms stelt men voor een van de andere twee op te geven.

Er zijn nog twee redelijke introspectieprincipes niet genoemd, een positief en een negatief principe. Samen verwoorden ze de aanname dat een 'agent' volledig geïnformeerd is over zijn eigen geloofstoestand.

$\mathbf{B}\varphi \to \mathbf{KB}\varphi$

$\neg\mathbf{B}\varphi \to \mathbf{K}\neg\mathbf{B}\varphi$

Deze principes zijn onafhankelijk van de hierboven genoemde. Maar om dat te bewijzen hebben we meer gereedschap nodig. In de volgende paragraaf wordt dat aangereikt.

Opgave 74 We beschouwen het systeem

$$\mathbf{S} = \mathbf{TD} + \mathbf{K}\varphi \to \mathbf{KK}\varphi$$

We voeren een nieuwe operator $\mathbf{O}$ in die we als volgt definieren:

$$\mathbf{O}\varphi =_{df} \mathbf{BK}\varphi.$$

U kunt $\mathbf{O}\varphi$ lezen als '(de agent) is ervan overtuigd dat φ'.

(a) Bewijs:

(i) $\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{K}\varphi \to \mathbf{O}\varphi$

(ii) $\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{O}\varphi \to \mathbf{OO}\varphi$

(iii) $\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{O}\varphi \to \neg\mathbf{O}\neg\varphi$

(iv) $\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{O}\varphi \to \mathbf{OK}\varphi$

(b) Laat zien dat $\nvdash_{\mathbf{S}} \mathbf{OK}\varphi \to \mathbf{K}\varphi$.

5.3 Semantische Aanpak

Definitie 68 (Structuren) Een *structuur* $\mathcal{F}$ is een geordend drietal $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b \rangle$ met:

(i) $\mathcal{W} \neq \emptyset$; de elementen van $\mathcal{W}$ noemen we "mogelijke werelden".

(ii) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}$; als $\langle w, w' \rangle \in \mathcal{R}_k$ dan zeggen we "wereld w' is een epistemisch alternatief voor wereld w", en als $\langle w, w' \rangle \in \mathcal{R}_b$ dan zeggen we "wereld w' is een doxastisch alternatief voor wereld w".

Enige toelichting is hier op zijn plaats. De elementen van $\mathcal{W}$ vertegenwoordigen elk een logisch mogelijke situatie—een situatie waarnaar de 'agents' in hun taalgebruik impliciet of expliciet kunnen verwijzen. In de woorden van de filosoof Robert Stalnaker:

> "The term "possible world" is perhaps misleading for what I have in mind. A set of possible worlds may be a space of relevant alternative possible states of some limited subject matter determined by a context in which some rational activity (deliberation, inquiry, negotiation, conversation) is taking place. Although the kind of abstract account of speech and thought that I will presuppose takes possible worlds for granted, it need not take on the metaphysical burdens which the picturesque terminology suggests. All that is assumed is that agents who think and talk are distinguishing between possibilities, that their so distinguishing is essential to the activities which constitute their thinking and talking, and that we can usefully describe these activities in terms of the possibilities they are distinguishing between."

Wat is de rol van $\mathcal{R}_k$ en $\mathcal{R}_b$? We zijn hier geinteresseerd in het geval dat we maar met één 'agent' van doen hebben. Daarom vindt u in de structuren maar één relatie $\mathcal{R}_k$ en één relatie $\mathcal{R}_b$. Bij meerdere agenten zal elk van hen in elke wereld zijn eigen epistemische en doxastische alternatieven moeten kunnen krijgen, want kennis en geloof kunnen van agent tot agent verschillen. Het idee is dit: Als $\langle w, w' \rangle \in \mathcal{R}_k$ dan is de wereld w', gegeven de beperkte kennis die de agent over de wereld w heeft, ononderscheidbaar van w; voorzover de kennis van de agent reikt zou w' best de echte wereld kunnen zijn. Net zo voor de relatie $\mathcal{R}_b$: Als $\langle w, w' \rangle \in \mathcal{R}_b$, dan voldoet w' aan het (mogelijk onjuiste) beeld dat de agent zich van w gevormd heeft.

Met dit in het achterhoofd zal het niet moeilijk zijn de volgende twee definities te doorgronden.

Definitie 69 (Model) Neem aan dat $\mathcal{L} = \langle \text{AT, UN, BI, ZIN} \rangle$ een taal is en $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b \rangle$ een structuur. Een interpretatie $\mathcal{I}$ voor $\mathcal{L}$ in $\mathcal{F}$ is een functie met domein AT $\times \mathcal{W}$ en codomein $\{0, 1\}$. Als $\varphi \in$ AT en $\mathcal{I}(\varphi, w) = 1$, dan zeggen we ook wel: "φ is waar in wereld w (onder de interpretatie $\mathcal{I}$)". Net zo: $\mathcal{I}(\varphi, w) = 0$ lezen we als: "φ is onwaar in wereld w". Als $\mathcal{L}$ een taal is, $\mathcal{F}$ een structuur en $\mathcal{I}$ een interpretatie voor $\mathcal{L}$ in $\mathcal{F}$, dan heet het geordende paar $\langle \mathcal{F}, \mathcal{I} \rangle$ ook wel een *model* bij $\mathcal{L}$.

Definitie 70 (Semantiek) Laat $\mathcal{L}$ een taal zijn en $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b, \mathcal{I} \rangle$ een model bij $\mathcal{L}$. Laat φ een zin van $\mathcal{L}$ zijn en $w \in \mathcal{W}$. De waarheidswaarde (in $\mathcal{M}$) van φ in wereld w — $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, w)$ — is nu als volgt bepaald:

Als $\varphi \in$ AT dan $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, w) = \mathcal{I}(\varphi, w)$

$\mathcal{V}_\mathcal{M}(\neg\varphi, w) = 1$ desda $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, w) = 0$

$\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi \to \psi, w) = 1$ desda $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, w) = 0$ en/of $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\psi, w) = 1$

$\mathcal{V}_\mathcal{M}(\mathbf{K}\varphi, w) = 1$ desda $\mathcal{V}_\mathcal{M}(\varphi, w') = 1$ voor alle $w' \in \mathcal{W}$ zodanig dat $\langle w, w' \rangle \in \mathcal{R}_k$

$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\mathbf{B}\varphi, w) = 1$ desda $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi, w') = 1$ voor alle $w' \in \mathcal{W}$ zodanig dat $\langle w, w' \rangle \in \mathcal{R}_b$

U ziet het: de waarheidsconditie voor zinnen van de vorm $\mathbf{K}\psi$ en $\mathbf{B}\psi$ is niks anders dan die voor zinnen van de vorm $\Lambda\psi$. "Jan gelooft dat ψ" is waar in een wereld w als ψ waar is in alle werelden w' die voldoen aan het beeld dat Jan zich van w gevormd heeft. Vergelijk: "Het is noodzekelijk dat ψ" is waar in w als ψ waar is in alle mogelijke werelden die vanuit w toegankelijk zijn. (En voor "Jan weet dat ψ" net zo.)

5.3.1 Geldigheid en Karakteriseringen

We definiëren een aantal belangrijke semantische noties.

Definitie 71 (Logische noties) Zij $\mathcal{L} = \langle \text{AT, UN, BI, ZIN} \rangle$ een epistemische taal en $\varphi \in$ ZIN;

(i) Als $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b, \mathcal{I} \rangle$ een model bij $\mathcal{L}$ is, en $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi, w) = 1$ dan schrijven we ook wel: $M \models_w \varphi$, en we lezen dit als: " $\mathcal{M}$ *maakt* φ *waar in* w".

(ii) Als $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b, \mathcal{I} \rangle$ een model bij $\mathcal{L}$ is, en $M \models_w \varphi$ voor alle $w \in \mathcal{W}$, dan schrijven we voortaan ook wel: $\mathcal{M} \models \varphi$, en lezen dit als: " $\mathcal{M}$ *verifieert* φ."

(iii) Als $\mathcal{F}$ een structuur is, en voor alle $\mathcal{I}$ voor $\mathcal{L}$ in $\mathcal{F}$ geldt $\langle \mathcal{F}, \mathcal{I} \rangle \models \varphi$, dan schrijven we ook wel: $\mathcal{F} \models \varphi$, en lezen dit als: "$\varphi$ *is geldig op* $\mathcal{F}$."

(iv) Als $\mathcal{C}$ een klasse van structuren is, en voor alle $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ geldt dat $\mathcal{F} \models \varphi$, dan schrijven we ook wel: $\mathcal{C} \models \varphi$, en lezen dit als: "$\varphi$ is geldig binnen de klasse $\mathcal{C}$."

(v) Als $\mathcal{C}$ een klasse van structuren is, en $\mathcal{C} \models \varphi$, terwijl voor alle $\mathcal{F}$ met $\mathcal{F} \notin \mathcal{C}$ geldt dat φ niet geldig is op $\mathcal{F}$, dan zeggen we ook wel dat φ de klasse $\mathcal{C}$ *karakteriseert*.

In het verlengde van bovenstaande definitie ligt ook het volgende taalgebruik: "$\mathcal{M}$ falsifieert φ staat voor: "$\mathcal{M} \not\models \varphi$", hetgeen kort is voor: niet voor alle $w \in \mathcal{W}$ geldt dat $\mathcal{M} \models_w \varphi$"; "$\varphi$ is ongeldig op $\mathcal{F}$" voor "$\mathcal{F} \not\models \varphi$" wat een afkorting is van:"niet voor alle $\mathcal{I}$ voor $\mathcal{L}$ in $\mathcal{F}$ geldt dat $\langle \mathcal{F}, \mathcal{I} \rangle \models \varphi$"; en "$\varphi$ is ongeldig binnen $\mathcal{C}$" voor "$\mathcal{C} \not\models \varphi$", welke uitdrukking op haar beurt staat voor: "niet voor alle $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ geldt dat $\mathcal{F} \models \varphi$."

De belangrijkste notie uit de bovenstaande definitie is de notie van *geldigheid*. Merk op dat als een zin φ geldig is op een bepaalde structuur $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b \rangle$, de zin in alle werelden waar is, onafhankelijk van de waarheidswaarden die de verschillende atomaire zinnen in φ in de verschillende werelden in $\mathcal{W}$ hebben.

Opgave 75 Ga na dat de volgende zinnen geldig zijn op alle structuren:

(a) Alle tautologieën van de klassieke propositielogica.

(b) Alle zinnen van de vorm $\mathbf{K}(\varphi \to \psi) \to (\mathbf{K}\varphi \to \mathbf{K}\psi)$.

Als U moet bewijzen dat een bepaalde zin φ geldig is binnen een bepaalde klasse $\mathcal{C}$ van structuren, dan moet u laten zien dat er bij geen enkele structuur $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ een interpretatie $\mathcal{I}$ te vinden is zodanig dat het resulterende model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{I} \rangle$ de zin φ falsifieert. U bewijst dat het makkelijkst uit het ongerijmde.

Als u moet laten zien dat een zin φ een bepaalde klasse $\mathcal{C}$ van structuren karakteriseert, moet u niet alleen laten zien dat φ geldig is binnen $\mathcal{C}$, maar ook dat φ ongeldig is buiten $\mathcal{C}$. Het laatste is moeilijker dan het eerste. In uw bewijs dient u bij een *willekeurige* structuur $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b \rangle \notin \mathcal{C}$ een interpretatie $\mathcal{I}$ te specificeren zodanig dat het resulterende model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b, \mathcal{I} \rangle$ de zin φ falsifieert.

Voorbeeld:
Zij $\mathcal{L} = \langle \text{AT, UN, BI, ZIN} \rangle$ een taal en $\varphi \in \text{AT}$. Dan geldt: $(\mathbf{K}\varphi \rightarrow \mathbf{KK}\varphi)$ karakteriseert de klasse van structuren met een transitieve 'kennis-toegankelijkheidsrelatie' $\mathcal{R}_k$.

Bewijs: Zij $\mathcal{C}$ de klasse van structuren met transitieve $\mathcal{R}_k$. We moeten laten zien dat 1. $\mathcal{C} \models (\mathbf{K}\varphi \rightarrow \mathbf{KK}\varphi)$, en 2. $\mathcal{F} \not\models (\mathbf{K}\varphi \rightarrow \mathbf{KK}\varphi)$ voor alle $\mathcal{F} \notin \mathcal{C}$.

1. Neem aan dat $\mathcal{C} \not\models (\mathbf{K}\varphi \rightarrow \mathbf{KK}\varphi)$; dan is er een $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b \rangle \in \mathcal{C}$ en een $\mathcal{I}$ voor $\mathcal{L}$ in $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b \rangle$ zodanig dat het model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b, \mathcal{I} \rangle$ de zin $(\mathbf{K}\varphi \rightarrow \mathbf{KK}\varphi)$ falsifieert. In dat geval is er een $w_0 \in \mathcal{W}$ zodanig dat:
   i. $\mathcal{M} \models_{w_0} \mathbf{K}\varphi$, en
   ii. $\mathcal{M} \not\models_{w_0} \mathbf{KK}\varphi$.
   Uit (ii) volgt dat er een $w_1 \in \mathcal{W}$ te vinden is zodanig dat:
   iii. $\langle w_0, w_1 \rangle \in \mathcal{R}_k$ en $\mathcal{M} \not\models_{w_1} \mathbf{K}\varphi$
   Uit (iii) volgt dat er een $w_2 \in \mathcal{W}$ te vinden is zodanig dat:
   iv. $\langle w_1, w_2 \rangle \in \mathcal{R}_k$ en $\mathcal{M} \not\models_{w_2} \varphi$
   $\mathcal{R}_k$ is transitief; dus geldt dat $\langle w_0, w_2 \rangle \in \mathcal{R}_k$. Gezien (i) volgt dat $\mathcal{M} \models_{w_2} \varphi$. Dit is in tegenspraak met (iv). Contradictie.
2. Zij $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b \rangle \notin \mathcal{C}$. We kunnen er zeker van zijn dat er w_0, w_1, w_2 in $\mathcal{W}$ te vinden zijn zodanig dat $\langle w_0, w_1 \rangle \in \mathcal{R}_k$, $\langle w_1, w_2 \rangle \in \mathcal{R}_k$ en $\langle w_0, w_2 \rangle \notin \mathcal{R}_k$. Laat $\mathcal{I}$ nu een interpretatie voor $\mathcal{L}$ in $\mathcal{F}$ zijn zodanig dat $\mathcal{I}(\varphi)(w) = 1$ voor alle $w \in \mathcal{W}$ met $w \neq w_2$ en $\mathcal{I}(\varphi)(w_2) = 0$. Het is eenvoudig na te gaan dat het model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b, \mathcal{I} \rangle$ de zin $(\mathbf{K}\varphi \rightarrow \mathbf{KK}\varphi)$ falsifieert: $\mathcal{M} \not\models_{w_0} (\mathbf{K}\varphi \rightarrow \mathbf{KK}\varphi)$. De zin $(\mathbf{K}\varphi \rightarrow \mathbf{KK}\varphi)$ is derhalve niet geldig op $\mathcal{F}$.

Opmerking: Als een zin φ een bepaalde klasse $\mathcal{C}$ van structuren karakteriseert, dan wil dat nog niet zeggen dat èlk *model* $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b, \mathcal{I} \rangle$ voor $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b \rangle \notin \mathcal{C}$ de zin φ falsifieert. Een zin kan best geverifieerd worden door een bepaald model zonder geldig te zijn op de onderliggende structuur. Als $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k \rangle$ niet transitief is, maar $\mathcal{I}$ is zodanig dat dat $\mathcal{I}(\psi, w) = 1$ voor alle $w \in \mathcal{W}$, dan geldt $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b, \mathcal{I} \rangle \models (\mathbf{K}\psi \rightarrow \mathbf{KK}\psi)$.

Redeneringen

Tot nu toe hebben we het als het om geldigheid ging, steeds gehad over de geldigheid van zinnen, en niet over de geldigheid van redeneringen. De volgende definitie brengt daar verandering in:

Definitie 72 (Geldigheid van redeneringen) Zij $\mathcal{C}$ een klasse van structuren. De redenering Δ/φ met premissenverzameling Δ en conclusie φ is *geldig binnen* $\mathcal{C}$ desda voor alle modellen $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b, \mathcal{I} \rangle$ met $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b \rangle \in \mathcal{C}$ en voor alle $w \in \mathcal{W}$ geldt:

$$\text{Als } \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b, \mathcal{I} \rangle \models_w \psi \text{ voor elke } \psi \in \Delta, \text{ dan } \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{R}_b, \mathcal{I} \rangle \models_w \varphi.$$

Notatie: Als de redenering Δ/φ met premissenverzameling Δ en conclusie φ geldig is binnen $\mathcal{C}$, dan schrijven we dikwijls:

$$\Delta \models_{\mathcal{C}} \varphi.$$

Merk op dat $\models_{\mathcal{C}} \varphi$ hetzelfde betekent als $\mathcal{C} \models \varphi$.

5.3.2 Correspondenties: axioma's en klassen

We hebben net gezien dat het introspectie axioma $\mathbf{K}\varphi \to \mathbf{KK}\varphi$ de klasse van transitieve kennis structuren karakteriseert. Hoe zit het met de andere epistemische axioma's uit de vorige paragraaf? Welke klassen van structuren worden daardoor gekarakteriseerd? In de onderstaande tabel staat rechts de eerste orde formule die de klasse in kwestie beschrijft.

$\mathbf{K}\varphi \to \varphi$	$\forall x \mathcal{R}_k xx$
$\mathbf{B}\varphi \to \neg\mathbf{B}\neg\varphi$	$\forall x \exists y \mathcal{R}_b xy$
$\mathbf{K}\varphi \to \mathbf{KK}\varphi$	$\forall x \forall y \forall z ((\mathcal{R}_k xy \wedge \mathcal{R}_k yz) \to \mathcal{R}_k xz)$
$\mathbf{B}\varphi \to \mathbf{BB}\varphi$	$\forall x \forall y \forall z ((\mathcal{R}_b xy \wedge \mathcal{R}_b yz) \to \mathcal{R}_b xz)$

Zonder bewijs voegen we hier nog de volgende correspondenties aan toe:

$\mathbf{K}\varphi \to \mathbf{B}\varphi$	$\forall x \forall y (\mathcal{R}_b xy \to \mathcal{R}_k xy)$
$\neg\mathbf{K}\varphi \to \mathbf{K}\neg\mathbf{K}\varphi$	$\forall x \forall y \forall z ((\mathcal{R}_k xy \wedge \mathcal{R}_k xz) \to \mathcal{R}_k yz)$
$\neg\mathbf{B}\varphi \to \mathbf{B}\neg\mathbf{B}\varphi$	$\forall x \forall y \forall z ((\mathcal{R}_b xy \wedge \mathcal{R}_b xz) \to \mathcal{R}_b yz)$

Een relatie die de bij negatieve introspectie behorende eerste-orde eigenschap heeft wordt ook wel euclidisch genoemd.

Opgave 76 Laat zien:

(a) Elke reflexieve en euclidische relatie is symmetrisch.
(b) Elke transitieve en symmetrische relatie is euclidisch.

Opgave 77 Zolang we in onze formele taal alleen de kennisoperator $\mathbf{K}$ opnemen en maar in één agent geïnteresseerd zijn, kunnen we ons in de semantiek beperken tot structuren $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k \rangle$ met maar één epistemische toegankelijkheidsrelatie.

(a) Laat zien dat de formule

$$\neg\mathbf{K}\varphi \to \mathbf{K}\neg\mathbf{K}\varphi$$

de klasse van alle structuren karaktiseert waarin $\mathcal{R}_k$ euclidisch is.

(b) We beschouwen het systeem

$$\mathbf{S5} = \mathbf{T} + \mathbf{K}\varphi \to \mathbf{KK}\varphi + \neg\mathbf{K}\varphi \to \mathbf{K}\neg\mathbf{K}\varphi$$

Laat zien dat $\vdash_{\mathbf{S5}} \varphi \to \mathbf{K}\neg\mathbf{K}\neg\varphi$

Nu we een semantiek voor onze epistemische talen hebben, kunnen we allerlei vragen beantwoorden die met alleen bewijstheoretische middelen moeilijk te beantwoorden zijn. Zo is het nu tamelijk eenvoudig geworden om te laten zien dat deze of gene zin φ *niet* afleidbaar is in systeem zus en zo. De volgende stelling slaat daar de brug voor.

Stelling 38 (Correctheidsstelling) Zij $\mathbf{S}$ een epistemisch afleidingssysteem en $\mathcal{C}$ de klasse van structuren die door de axioma's van $\mathbf{S}$ gekarakteriseerd wordt. Dan geldt:

$$\text{Als } \vdash_{\mathbf{S}} \varphi \text{ dan } \mathcal{C} \models \varphi$$

Bewijs. Met inductie naar de lengte van de afleiding van φ in $\mathbf{S}$. Het bewijs wordt aan de lezer overgelaten.

Stel je wil bewijzen dat φ niet afleidbaar is in systeem $\mathbf{S}$. Gegeven de bovenstaande stelling is het dan voldoende te laten zien dat φ niet geldig is binnen de klasse van structuren die door de axioma's van $\mathbf{S}$ gekarakteriseerd wordt. En meestal is een tegenmodel vlug gemaakt.

Opgave 78 Beschouw het systeem $\mathbf{S}$ dat onstaat als $\mathbf{TD}$ verrijkt wordt met positieve en negatieve introspectieaxioma's voor kennis èn geloof.

(a) Laat zien dat $\not\vdash_{\mathbf{S}} \mathbf{B}\varphi \to \mathbf{KB}\varphi$

(b) Idem voor $\not\vdash_{\mathbf{S}} \neg\mathbf{B}\varphi \to \mathbf{K}\neg\mathbf{B}\varphi$

(c) Welke klassen van structuren worden door de onder (a) en (b) genoemde formules gekarakteriseerd?

We besluiten dit hoofdstuk met een stelling over $\mathbf{S5}$, het sterkste kennislogische systeem dat in het voorgaande aan de orde is geweest. U heeft zich misschien afgevraagd of er geen sterker systeem bestaat. We hebben het over positieve en negatieve introspectie gehad, maar wie zegt dat er daarnaast geen andere logische eigenschappen aan de frase "a weet dat..." vastzitten die in axioma's tot uitdrukking gebracht zouden moeten worden."Nee, die zijn er niet", kunnen we met een gerust hart stellen. En de volgende stelling reikt daar een doorslaggevend argument voor aan.

Stelling 39 Laat $\mathcal{C}$ de klasse van structuren $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k \rangle$ zijn waarin $\mathcal{R}_k$ universeel is (dwz. $\mathcal{R}_k = \mathcal{W} \times \mathcal{W}$), en zij $\mathcal{C}'$ de klasse van alle structuren $\langle \mathcal{W}', \mathcal{R}'_k \rangle$ waarin $\mathcal{R}'_k$ een equivalentierelatie is. Dan geldt voor alle φ:

$$\text{als } \mathcal{C} \models \varphi, \text{ dan } \mathcal{C}' \models \varphi.$$

Bewijs. Neem aan dat $\mathcal{C}' \not\models \varphi$. Dan is er een $\langle \mathcal{W}', \mathcal{R}'_k \rangle \in \mathcal{C}'$ en een interpretatie $\mathcal{I}'$ zodanig dat voor zekere $w_0 \in \mathcal{W}'$ geldt dat

$$\mathcal{M}' = \langle \mathcal{W}', \mathcal{R}'_k, \mathcal{I}' \rangle \not\models_{w_0} \varphi \ .$$

Beschouw nu het model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k, \mathcal{I} \rangle$ gedefinieerd als volgt:

(i) $\mathcal{W} = \{w \in \mathcal{W}' \mid \langle w_0, w \rangle \in \mathcal{R}'_k\}$;

(ii) $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}'_k \restriction \mathcal{W}$; en

(iii) voor alle $w \in \mathcal{W}$ en alle $\psi \in$ AT geldt

$$\mathcal{I}(\varphi, w) = 1 \text{ desda } \mathcal{I}'(\varphi, w) = 1.$$

Het is nu niet moeilijk om de volgende twee beweringen te checken

(a) $\mathcal{R}_k = \mathcal{W} \times \mathcal{W}$;

(b) voor alle zinnen χ en alle $w \in \mathcal{W}$ geldt

$$\mathcal{M} \models_w \chi \text{ desda } \mathcal{M}' \models_w \chi \ .$$

Uit dit laatste volgt onmiddellijk dat $\mathcal{M} \not\models_{w_0} \varphi$.

De axioma's van **S5** karakteriseren de klasse van alle structuren $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k \rangle$ met $\mathcal{R}_k$ een equivalentierelatie. Willen we echt iets nieuws zeggen bovenop de axioma's van **S5**, dan zal dat iets moeten zijn dat ongeldig is binnen die klasse. Sterker, bovenstaande stelling leert ons dat het iets zal moeten zijn dat ongeldig is binnen de klasse van alle structuren $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_k \rangle$ met $\mathcal{R}_k$ de universele relatie. Maar wat valt er nog over $\mathcal{R}_k$ te zeggen als we eenmaal weten dat $\forall w \forall w' \mathcal{R}_k w w'$? Daar valt weinig aan te versterken. Het enige dat je theoretisch nog nog zou kunnen doen is voorwaarden opleggen aan de cardinaliteit van $\mathcal{W}$. Maar dat is ontologie en heeft met 'kennis' weinig van doen.

Bibliografie

[1] Jonathan Barnes, editor. *The complete works of Aristotle*, volume I-II. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1985.

[2] Paul Benacerraf and Hilary Putnam, editors. *Philosophy of mathematics. Selected readings*. Cambridge University Press, second edition, 1983.

[3] Bernard Bolzano. *Paradoxien des Unendlichen*. Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1975.

[4] Georg Cantor. Über eine eigenschaft des inbegriffes aller reellen algabraischen Zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84:242–258, 1874.

[5] Georg Cantor. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84:242–258, 1878. Ook in Cantor [1932], pp. 119-133.

[6] Georg Cantor. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Springer, Berlin, 1932. E. Zermelo (ed.) (reprinted 1980).

[7] P.J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 50(1143-8), 193.

[8] M. Dummett. Wang's paradox. *Synthese*, 30(301-324), 1975.

[9] K. Fine. Vagueness, truth and logic. *Synthese*, 30(265-300), 1975.

[10] A.A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, and A. Levy. *Foundations of Set Theory*, volume 67 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam, second edition, 1984.

[11] Kurt Gödel. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, 24:556–7, 1938.

[12] Kurt Gödel. What is Cantor's continuum problem? *American Mathematical Monthly*, 54:515–25, 1947. Extend version in Benacerraf-Putnam 194, pp. 258-273.

[13] Nelson Goodman. *The Structure of Appearance*. Harvard University Press, Cambridge Mass, 1951.

[14] Susan Haack. *Deviant logic. Some philosophical issues*. Cambridge University Press, London, 1974.

[15] Susan Haack. *Philosophy of Logics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1978.

[16] Michael Hallett. *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*. Clarendon Press, Oxford, 1984.

[17] Jean Heijenoort, editor. *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*. HArvard University Press, Cambridge, 1967.

[18] C.G Hempel. *Fundamentals of Concept Formation in Empirical Science*. The University of Chicago Press, Chicago, 1952.

[19] D Hilbert. Mathematische Probleme. *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zur Göttingen*, pages 253–97, 1900.

[20] J.A.W. Kamp. The paradox of the heap. In U. Mönnich, editor, *Aspects of Philosophical Logic*, pages 123–155. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1981.

[21] C. Kuratowski. Sur la notion de l' ordre dans la théorie des ensembles. *Fundamenta Mathematicae*, 3:161–171, 1921.

[22] Azriel Levy. *Basic set theory*. Perspectives in mathematical logic. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[23] R.D Luce. Semi-orders and a theory of utility discrimination. *Econometrica 24*, pages 178–191, 1956.

[24] Suppes P.C. and J.L. Zinnes, editors. *Basic Measurement Theory*. Handbook of Mathematical Psychology. Wiley, New York, 1963.

[25] B. Russell. *An Inquiry into Meaning and Truth*. George Allen and Unwin, London, 1940.

[26] D. van Dalen, H.C. Doets, and H.C.M. de Swart. *Verzamelingen. Naïef, axiomatisch en toegepast*. Oosthoek, Scheltema & Holkema, Utrecht, 1975.

[27] S.E. Weiss. The sorites fallacy: What difference does a peanut make. *Synthese*, 33(253-272), 1976.