

Niet-Commutatieve Meetkunde

Implicaties binnen de fysica

Shanna Haaker
Begeleider: Prof. dr. J. de Boer

16 juli 2007

Samenvatting

Het doel van dit paper is de niet-commutatieve meetkunde bekijken in de context van de fysica. Zo wordt eerst het meest eenvoudige voorbeeld gegeven, waarbinnen niet-commutatieve meetkunde daadwerkelijk wordt waargenomen. Dit is het twee dimensionale Landau probleem. Onder invloed van een sterk loodrecht magneetveld, blijken de twee coördinaten van een elektron, niet langer te commuteren. In de rest van dit paper zal de gevonden commutatierelatie, verder onderzocht worden. Zo wordt een systeem van elektronen beperkt tot een eindig oppervlak onderzocht. Eerst wordt een torus besproken en vervolgens een bol. Het magneetveld blijkt alleen nog gequantiseerd te kunnen voorkomen en het aantal toestanden dat zich op het oppervlak kan bevinden is eindig, in tegenstelling tot het klassieke geval. Ten slotte worden concrete gevallen binnen de fysica besproken waarbij niet-commutatieve meetkunde een verklaring kan bieden of een beter alternatief blijkt te zijn dan commutatieve meetkunde. Specifiek komen aan bod: quantum gravitatie modellen, het quantum Hall effect en zwarte gaten.

Inhoudsopgave

1	Introductie	3
2	Beschrijving systeem	4
2.1	Kanonieke quantisatie	6
2.2	Landau probleem	7
2.3	Niet-commutatieve coördinaten	10
3	Aantal toestanden op een eindig oppervlak	11
3.1	Geladen deeltje op een torus	11
3.1.1	Unitaire operatoren	13
3.2	Geladen deeltje op een bol	15
3.2.1	Ladderoperatoren	17
4	Toepassingen van niet-commutatieve meetkunde	22
4.1	Quantum gravitatie	22
4.2	Quantum Hall effect	23
4.3	Zwarte gaten	24
5	Conclusie	27

1 Introductie

Commutativiteit is een begrip dat in het alledaagse leven nogal vanzelfsprekend lijkt. Het maakt niet uit of een hardloper zijn rondje rechtsom of linksom rent. Als we in de wereld van de wiskunde kijken blijkt dat commutatitiviteit eerder uitzondering dan regel is. Neem bijvoorbeeld een simpele matrixvermenigvuldiging. Dan is het in het algemeen niet zo dat $xy = yx$. Goed, de stap van het alledaagse leven naar de wiskunde is een tamelijk grote. Een tussenstop lijkt noodzakelijk. Hoe staat het ervoor met commutatitiviteit in de fysica? Dit is een tussenstop, aangezien de fysica de wereld om ons heen aan de hand van de wiskunde beschrijft. Vraag is: kunnen fysici iets met niet-commutatitiviteit in hun beschrijving van de fysica? Ja! In de quantummechanica komt niet-commutatitiviteit al snel op de propen. In de quantummechanica hebben operatoren vaak de eigenschap dat ze onderling niet commuteren. Het maakt dus wel degelijk uit of er eerst A wordt toegepast en dan B of eerst B en dan A . Als bekendste voorbeeld is er de plaats van een deeltje en de kanonieke impuls. Deze operatoren commuteren niet. Dit betekent dat ze nooit allebei tegelijk gemeten kunnen worden. Daarentegen kunnen de twee coördinaten in een twee dimensionaal systeem over het algemeen wel degelijk gelijk gemeten worden.

Vraag is nu, wat gebeurt er wanneer dit niet meer het geval is? Dit is de centrale vraag van dit paper. Maar voor hiertoe gekomen kan worden moet er eerst wat voorbereidend werk getroffen worden. In sectie 2 wordt de manier om een systeem met geladen deeltjes, onder invloed van elektromagnetische velden, te beschrijven geschetst. Begrippen als de Lagrangiaan en Hamiltoniaan komen aan bod. Vervolgens wordt de overgang tussen een klassiek systeem en een quantum systeem besproken volgens de regels van kanonieke quantisatie van Dirac. Daarna wordt het meest eenvoudige voorbeeld gegeven om tot een systeem met niet-commutatieve meetkunde te komen. Dit gebeurt aan de hand van het Landau probleem.

In sectie 3 worden twee geometrieën bekeken met een eindig oppervlak onder de voorwaarde dat de meetkunde niet-commutatief is. Dit gebeurt middels de torus en de bol. Specifiek wordt het aantal toestanden dat zich op zo een oppervlak kan bevinden bekeken.

Na deze geometrieën wordt er doorgedaan met bepaalde fysische verschijnselen waarbij niet-commutatieve meetkunde een rol zou kunnen spelen in sectie 4. Eerst wordt quantum gravitatie besproken. Dit is het vakgebied dat de algemene relativiteitstheorie probeert te verbinden met de quantummechanica. Vervolgens wordt het quantum Hall effect besproken dat

vaak in één adem met niet-commutatieve meetkunde wordt genoemd. Als laatste voorbeeld is gekozen voor zwarte gaten die Hawking straling uitzenden. Er heerst nog veel onduidelijkheid omtrent het eindstadium van zo een zwart gat. Er wordt een artikel aangehaald, dat onder aanname van niet-commutatieve meetkunde de vergelijkingen, die het zwart gat beschrijven, aanpast en laat zien dat dit meer aannemelijke resultaten oplevert. Verder wordt de entropie van een zwart gat besproken en blijken er grote overeenkomsten te zijn tussen niet-commutatieve meetkunde en de entropie van een zwart gat.

In het laatste deel, sectie 5, wordt nog een samenvatting van al dat besproken is gegeven.

2 Beschrijving systeem

Zoals eerder gezegd is niet-commutatieve meetkunde niet slechts besteed aan mathematici. Anders gesteld is de gewone, commutatieve meetkunde niet het enige terrein van fysici. Niet-commutatieve coördinaten is een verschijnsel dat daadwerkelijk wordt waargenomen. Om dit te illustreren, wordt er voor het meest eenvoudige voorbeeld gekozen. Dit is een systeem waarin niet-relativistische elektronen, beperkt tot een twee dimensionaal oppervlak, door een loodrecht magnetisch veld bewegen. De coördinaten commuteren nog wel, maar in subsectie 2.3 worden de voorwaarden gegeven die nodig zijn om daadwerkelijk niet-commutatieve meetkunde te realiseren.

Voordat dit punt bereikt is moet eerst een gedegen beschrijving van het systeem gegeven worden, waarmee gewerkt wordt. Eerst worden begrippen als de Lagrangiaan, de Hamiltoniaan en de kanonieke impuls behandeld, die het systeem beschrijven. Vervolgens wordt in de volgende subsectie de basis gegeven om van een klassiek systeem naar een quantum mechanisch systeem te gaan.

Maar nu eerst de beschrijving van het systeem. De elektronen hebben lading e , massa m en het magneetveld wordt gegeven door

$$\vec{B}(\vec{q}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{q}) \quad (1)$$

Hierbij is $\vec{A}(\vec{q})$ de vectorpotentiaal en \vec{q} de positie van een deeltje. Bij dit systeem hoort een Lagrangiaan, per deeltje, te weten

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{q}}^2 + \frac{e}{c}\vec{A} \quad (2)$$

De Lagrangiaan is gedefinieerd als de kinetische energie min de potentiële energie. De Lagrangiaan leidt samen met de Euler-Lagrange vergelijking tot de bewegingsvergelijking. Uit de Lagrangiaan kan vervolgens de kanonieke impuls, \vec{p} , gevonden worden.

$$\vec{p}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = m\dot{\vec{q}} + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{q}) \quad (3)$$

Door $\dot{\vec{q}}$ uit te drukken in termen van \vec{p} , kan de Hamiltoniaan, $H(\vec{p}, \vec{q})$, van dit systeem worden verkregen. Dit is de totale energie van het systeem.

$$H(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{q}) \right)^2 \quad (4)$$

In de klassieke mechanica heeft de vectorpotentiaal niet direct invloed op fysische verschijnselen. Het fungeert louter als rekenhulp bij het versimpelen van problemen. Dit wordt direct duidelijk uit de bewegingsvergelijking voor een geladen deeltje met snelheid $\dot{\vec{q}}$ in een magnetisch veld \vec{B} .

$$m\ddot{\vec{q}} = \frac{e}{c}\dot{\vec{q}} \times \vec{B} \quad (5)$$

Hierin komt de vectorpotentiaal niet expliciet voor en kan er een transformatie van de vorm $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\Lambda$ worden gedaan waarbij Λ een willekeurig gekozen scalaire grootheid is. In de quantum mechanica zou deze beschouwing te kort door de bocht zijn. Na quantisatie kan de vectorpotentiaal wel degelijk een effect hebben.

Het bekendste voorbeeld hiervan is het Aharonov-Bohm effect [1]. Hierbij kunnen geladen deeltjes links- of rechtsom een solenoïde bewegen, maar zijn ze beperkt tot de ruimte waar er geen magneetveld is. Klassiek gezien zou er geen kracht op de deeltjes werken en dus zou er niets gebeuren. Op quantum mechanisch niveau gebeurt er wel iets niet-triviaals. Er treedt een fasefactor op. Dit heeft een verschuiving van het interferentiepatroon tot gevolg.

Nu de beschrijving van het systeem staat, moet er nog van de klassieke mechanica naar de quantum mechanica worden overgegaan. Hiervoor moet er eerst worden stilgestaan bij de regels van de quantum mechanica.

2.1 Kanonieke kwantisatie

Om de weg richting quantum mechanica te volgen, moet er kanonieke kwantisatie worden toegepast. Dit betekent dat er van functies op een faseruimte wordt overgegaan op operatoren die werken op golffuncties Ψ in een Hilbertruimte. Een golffunctie kan maar van de helft, van de variabelen uit de faseruimte, afhankelijk zijn.

Als het Poissonhaakje van twee variabelen nul is, kan de golffunctie van beide afhankelijk zijn. Het Poissonhaakje is een begrip uit de klassieke theorie. Voor twee functies $f(q, p)$ en $g(q, p)$ is het Poissonhaakje als volgt gedefinieerd.

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \quad (6)$$

Neem ter verduidelijking een golffunctie die alleen afhangt van \vec{q} . Volgens de regels van kanonieke kwantisatie volgt nu dat

$$\begin{aligned} q_i &\rightarrow \hat{q}_i = q_i \\ p_i &\rightarrow \hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (7)$$

Dit is in te zien door de commutator van p_i en q_j te bekijken zoals gedefinieerd door Dirac [2]. Bij de definitie van de commutator eiste Dirac dat de klassieke mechanica zou terugkeren uit de quantummechanica, als limietgeval. Voor iedere twee variabelen u en v geldt

$$\{u, v\} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \left\{ -\frac{i}{\hbar} [u, v] \right\} \quad (8)$$

Uit bovenstaande vergelijking wordt duidelijk dat om van een klassiek systeem naar een quantum systeem te gaan, er geen eenduidige manier hoeft te zijn. Er zouden hogere orde termen in \hbar kunnen voorkomen. Deze zijn niet langer merkbaar wanneer de limiet van $\hbar \rightarrow 0$ wordt genomen. Dit blijkt het geval te zijn in sectie 3.2.

Bekijken we nu het specifieke geval met p_i en q_j , dan volgt hieruit.

$$\begin{aligned} [\hat{q}_i, \hat{q}_j] &= 0 \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0 \\ [\hat{q}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar \delta_{ij} \end{aligned} \quad (9)$$

Nu wordt duidelijk waarom de keuze in (7) legitiem was. Aan de hand van deze relaties kunnen de commutatierelaties tussen iedere twee dynamische variabelen, die in een machtreeks in termen van \vec{q} en \vec{p} kunnen worden uitgedrukt, worden berekend.

Tot zover de overgang naar de quantummechanica. In de volgende subsectie worden de zaken wat specifieker gemaakt. Hierin wordt de aanloop genomen naar niet-commutatieve meetkunde.

2.2 Landau probleem

Niet-commutatieve meetkunde kan op verschillende manieren worden teruggevonden in de fysica. In dit paper is gekozen voor de volgende situatie. Beschouw N elektronen die zich in een constant homogeen, loodrecht magnetisch veld bevinden. Dit wordt het Landau probleem genoemd. Landau loste dit probleem op in de Landau ijk. Bekijk hiertoe een deeltje in het xy -vlak met een magnetisch veld in de z -richting (zie figuur 1). Nu komen de vergelijkingen, gepresenteerd aan het begin van deze sectie, aan bod. De Hamiltoniaan van dit systeem wordt gegeven door

$$H(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} \left(\vec{p}_i - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{q}_i) \right)^2 + V(\vec{q}_i) \quad (10)$$

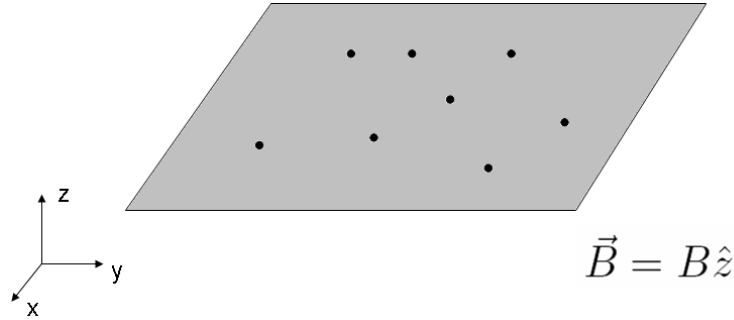
Hierbij is \vec{A} de vectorpotentiaal en V een potentiaal die van verschillende aard kan zijn. Dit is bijvoorbeeld de interactie tussen de elektronen of tussen de elektronen en impuriteiten aan het oppervlak. Kies als vectorpotentiaal

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Uit (1) blijkt dat deze vectorpotentiaal een magneetveld in de z -richting oplevert. Bekijk nu de kinematische impuls van een deeltje gegeven door

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \quad (12)$$

Zodra (11) wordt ingevuld en de commutator van $\vec{\pi}$ in de x - en in de y -richting wordt bekeken, is het resultaat als volgt



Figuur 1: N elektronen beperkt tot een oneindig vlak onder invloed van een loodrecht, homogeen magneetveld

$$[\pi_x^i, \pi_y^j] = i\hbar \frac{eB}{c} \delta_{ij} \quad (13)$$

Hieruit blijkt dat de x - en de y -richting van de snelheid van een deeltje niet meer commuteren, zodra het magneetveld wordt aangezet. De mate waarin ze niet commuteren is evenredig met de grootte van het magneetveld.

De impuls kan volgens (12) uitgedrukt worden in de kanonieke impuls. Deze laatste genereert in de quantummechanica plaatstranslaties. Dit betekent dat wanneer een deeltje eerst langs de x -richting en vervolgens in de y -richting wordt bewogen het deeltje in een andere toestand zal zijn dan wanneer eerst in de y -richting wordt bewogen en dan in de x -richting [7]. Beweegt het deeltje over een gesloten pad, wat zoveel wil zeggen als dat het deeltje op dezelfde plaats eindigt als het begonnen is, dan kan de toestand, ψ' , waarin het deeltje zich bevindt uitgedrukt worden in de toestand, ψ , waarin het deeltje begon.

$$\psi' = e^{\frac{ie}{\hbar c} \Phi} \psi \quad (14)$$

Hierbij is Φ de magnetische flux door het oppervlak dat omsloten wordt door het pad dat het deeltje beschrijft. De nieuwe golffunctie verschilt met een fasefactor van de oude. Dit is niets anders dan het Aharonov-Bohm effect, eerder aangehaald aan het begin van deze sectie. Hieruit blijkt dat wanneer het magneetveld uitstaat, het niet uitgemaakt had in welke richting het gesloten pad was doorlopen. Dit aangezien de impuls dan

gelijk was geweest aan de kanonieke impuls en de x- en de y-richting van deze altijd commuteren.

Leuk voor nu, maar hoe zit het met de coördinaten? Die blijken nog steeds aan de eerste vergelijking van (9) te voldoen. Er zullen nog andere eisen gesteld moeten worden om niet commutatieve meetkunde te verkrijgen.

Nu eerst nog door met het Landau probleem. Want wat is nu eigenlijk de oplossing van de Schrödinger vergelijking met deze specifieke Hamiltoniaan? De Schrödinger vergelijking wordt gegeven door

$$H\Psi(x, y, t) = E\Psi(x, y, t) \quad (15)$$

De Schrödinger vergelijking is de basisformule die het quantum systeem beschrijft. Wanneer \hat{A} wordt ingevuld in de Hamiltoniaan en de potentiaal V wordt weggelaten dan volgt daaruit

$$H(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + \frac{e^2}{c^2}B^2x^2 - 2\frac{e}{c}p_yBx) \quad (16)$$

Aangezien y niet expliciet in deze uitdrukking voorkomt, betekent dit dat er geen kracht in de y-richting is; het deeltje zal in deze richting met constante snelheid bewegen. Hieruit volgt dat er een fasefactor uit de oplossing Ψ kan worden gedestilleerd, te weten

$$H = H(p_x, p_y, x) \Rightarrow \Psi(x, y, t) = e^{iy p_y / \hbar} \psi(x, t) \quad (17)$$

Als deze oplossing in de Schrödinger vergelijking met Hamiltoniaan (16) wordt ingevuld, dan volgt uiteindelijk de volgende vergelijking

$$\frac{1}{2m} \left(\hat{p}_x^2 + p_y^2 + \frac{e^2 B^2}{c^2} x^2 - \frac{2eB}{c} x p_y \right) \psi = E\psi \quad (18)$$

Om duidelijk een onderscheid te maken tussen een operator en een getal, slaat de notatie \hat{p} , op de operator en p , op het getal. Vergelijking (18) kan door invoering van twee constanten op een wat meer suggestieve manier geschreven worden. Schrijf hiertoe $x_0 = \frac{p_y c}{eB}$ en $\omega = \frac{eB}{cm}$. Dan volgt hieruit

$$\left(\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (x - x_0)^2 \right) \psi = E\psi \quad (19)$$

Dit is niets minder dan de harmonische oscillator met frequentie $\omega = \frac{eB}{cm}$ en met een verschuiving van de x-coördinaat. De toegestane energieniveaus bij deze Hamiltoniaan zijn bekend en wel

$$E = \sum_{i=1}^N \hbar\omega \left(n_i + \frac{1}{2}\right) \quad (20)$$

$$n_i = 0, 1, 2, \dots$$

Dit worden de Landau niveaus genoemd.

2.3 Niet-commutatieve coördinaten

Vanuit de basis die er nu is kunnen de voorwaarden geschetst worden, die nodig zijn om uiteindelijk tot de meetkunde te komen, waarbij de x- en y-coördinaat niet meer met elkaar commuteren. Bekijk hiertoe het gat tussen de Landau niveaus

$$\Delta = \hbar\omega \quad (21)$$

Aangezien ω evenredig is met de grootte van het magneetveld, volgt hieruit dat $\Delta \sim B$. Zodra het magneetveld naar oneindig wordt gestuurd, betekent dit dat het gat tussen de energieniveaus oneindig groot wordt. Dit wil zeggen dat een overgang van de grondtoestand naar een hoger gelegen toestand niet meer plaats kan vinden. Bekijk nu de Lagrangiaan van dit systeem met deze limiet van $B \rightarrow \infty$, dan zijn de termen die overblijven

$$L(x_i, y_i) = \frac{e}{c} B x_i \dot{y}_i - V(x_i, y_i) \quad (22)$$

Merk op dat deze Lagrangiaan van de vorm $p\dot{q} - f(p, q)$ is. Nu geldt voor de commutator tussen de impuls p en de plaats q dat $[q, p] = i\hbar$. Zo kan y geassocieerd worden met q en $\frac{eB}{c}x$ met p . Hieruit volgt de volgende commutatierelatie tussen de x- en y-coördinaat

$$[x_i, y_j] = i\hbar \frac{c}{eB} \delta_{ij} \quad (23)$$

Er blijkt dat wanneer het magneetveld naar oneindig gaat, de x- en y-coördinaat van een deeltje niet meer met elkaar commuteren. Dit wil zeggen

dat de x - en de y -coördinaat niet gelijktijdig gemeten kunnen worden. Er is geen sprake meer van een duidelijk plaats van het deeltje. Een punt in de ruimte wordt als het ware uitgesmeerd.

Dit resultaat kan algemener gemaakt worden. Niet-commutatieve meetkunde komt niet alleen in dit specifieke geval voor. Er kan gesteld worden, dat om een systeem met niet-commutatieve meetkunde te creëren, de elektronen beperkt moeten worden tot het laagste Landau niveau. Wat er gebeurt is dat er als het ware een extra beperking optreedt. Deze zorgt er voor dat er van een vier dimensionale faseruimte per deeltje naar een twee dimensionale faseruimte wordt gegaan, bestaande uit twee coördinaten. De impuls speelt geen rol meer.

De gezochte commutatierelatie (23) is nu gevonden. In de volgende sectie worden specifieke geometrieën bekeken onder voorwaarde dat ze voldoen aan (23).

3 Aantal toestanden op een eindig oppervlak

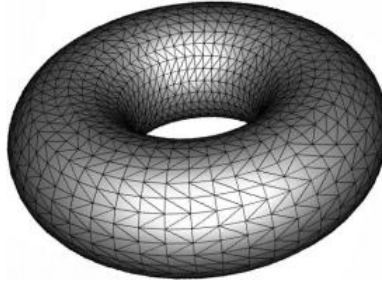
Nu zal nader ingegaan worden op twee verschillende geometrieën met een eindig oppervlak. Voor de meetkunde waarmee deze geometrieën worden beschreven, geldt in beide gevallen dat zij niet-commutatief is. Dit wordt wederom bereikt door de elektronen aan het oppervlak te beperken tot het laagste Landau niveau. In het bijzonder wordt er gekeken naar het aantal toestanden dat zich op zo een oppervlak kan bevinden. In het klassieke geval zou het aantal toestanden oneindig moeten zijn.

Allereerst wordt de torus behandeld. Dit is de kleinste stap van het xy -vlak, dat in de vorige sectie is behandeld, naar een eindig oppervlak. Vervolgens komt het oppervlak van een bol aan bod. Deze twee geometrieën zullen op geheel andere wijze behandeld worden. Met een verrassend gelijk resultaat tot gevolg.

3.1 Geladen deeltje op een torus

In paragraaf 2.3 is de commutatierelatie tussen de coördinaten van een deeltje afgeleid aan de hand van het xy -vlak. Nu komen de implicaties van deze relatie aan bod op het aantal toestanden dat zich op een eindig oppervlak kan bevinden. Als expliciet voorbeeld kan een elektron beperkt tot het oppervlak van een torus genomen worden. Overal aan het oppervlak is een loodrecht, homogeen magnetisch veld.

De keuze van de torus, als eerste voorbeeld, wordt duidelijk als er



Figuur 2: *Torus*.

naar de topologie van deze geometrie wordt gekeken. Bekijk daartoe een rechthoek met zijden L_1 en L_2 . De constructie van een torus wordt aangegeven in figuur 3. Wanneer de rode randen aan elkaar worden geplakt, ontstaat er een holle cylinder. Plak vervolgens de blauwe randen aan elkaar om een torus te verkrijgen.

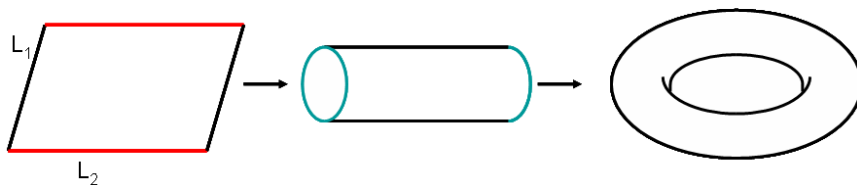
Het probleem van de torus wordt verder behandeld aan de hand van een vlak met zijden L_1 en L_2 . Neem periodieke randvoorwaarden

$$\begin{aligned} x + nL_1 &\rightarrow x \\ y + nL_2 &\rightarrow y \end{aligned} \quad (24)$$

Hierbij is $n \in \mathbb{Z}$. Herschrijf de commutatierelatie als volgt voor wat meer eenvoud in de komende afleidingen

$$[x, y] = i \frac{\hbar c}{eB} \equiv i\theta \quad (25)$$

Aangezien x en y niet commuteren kan de golffunctie niet in termen van zowel x als y worden uitgedrukt. Kies daartoe een golffunctie afhankelijk van x . Om (24) te implementeren lijkt de volgende keuze een logische



Figuur 3: Van een eindig vlak kan een torus geconstrueerd worden. Hierbij worden de randen op aangegeven manier aan elkaar geplakt.

$$\psi(x) \sim e^{2\pi i n x / L_1} \quad (26)$$

Hierbij is n een geheel getal. Beschouwen we x nu als een operator die simpelweg met x vermenigvuldigt, dan zal y niets anders doen dan de functie van de impuls overnemen en dus naar x differentiëren. Dit aangezien de commutatierelatie tussen x en y van dezelfde vorm is als de commutatierelatie tussen x en p , zoals in (9). Maar deze keuze van operatoren (dus analoog aan (9), maar dan met y in plaats van p), leidt tot een probleem. Het wordt dan een hele opgave om aan de tweede vergelijking van (24) te voldoen.

3.1.1 Unitaire operatoren

Om dit probleem te omzeilen worden de volgende unitaire operatoren gekozen

$$\begin{aligned} U &= e^{2\pi i x / L_1} \\ V &= e^{2\pi i y / L_2} \end{aligned} \quad (27)$$

Deze operatoren voldoen ten duidelijkste aan de gegeven periodieke randvoorwaarden. Verder wordt de commutatierelatie tussen x en y overgedragen op het produkt UV , met gebruik van de Baker, Campbell en Hausdorff formule.

$$UV = VU e^{-4\pi^2 i \theta L_1 L_2} \equiv VU \alpha \quad (28)$$

De volgende stap wordt om U en V zó te construeren dat ze aan (28) voldoen en eindig dimensionaal zijn. Te beginnen met U . Aangezien U unitair is moeten de eigenwaarden fasen zijn en kan U gediagonaliseerd worden.

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_N \end{pmatrix} \quad (29)$$

Aangenomen is, dat U eindig dimensionaal is. Bekijk vervolgens componentsgewijs de relatie gegeven in (28).

$$U_{ik}V_{kj} = V_{ik}U_{kj}\alpha \quad (30)$$

Aangezien U diagonaal is komt hier alleen iets niet-triviaals uit wanneer aan de linkerkant $k = i$ en aan de rechterkant $k = j$, daaruit volgt dan ook direct

$$\lambda_i V_{ij} = \lambda_j V_{ij}\alpha \quad (31)$$

Wanneer $V_{ij} = 0$ dan is dit een kloppende vergelijking, doch triviaal. Stel nu $V_{ij} \neq 0$, dan volgt hieruit

$$\lambda_i = \lambda_j\alpha \quad (32)$$

Zo wordt er een recursieformule voor alle eigenwaarden van U gevonden. Alle eigenwaarden hebben dezelfde factor, zeg λ , maal een macht van α . Na enige reorganisatie en het wegdelen van de gemeenschappelijke factor λ , kan U als volgt worden geschreven ¹

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & & \emptyset \\ & \alpha & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & \alpha^{N-1} \end{pmatrix} \quad (33)$$

Hierbij is er van uitgegaan dat er geen dubbele eigenwaarden van U voorkomen. Maar volgt dit wel zo direct uit (32)? Het blijkt dat alle eigenwaarden inderdaad verschillend moeten zijn, maar om dit in te zien moet de operator V worden bekeken. Eerst het geval waarvoor alle eigenwaarden verschillend zouden zijn. Om V te kunnen construeren is (31) nodig. De informatie die hieruit te halen valt is dat er op de diagonaal van V alleen nul kan staan. Verder kan gesteld worden dat $V_{ij} = \delta_{j+1,j}$ en dus

$$V = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

¹Er is nog niet uitgesloten dat U uit meerdere blokken kan bestaan, ieder blok met een verschillende factor λ_b . Er blijkt echter dat U dan reducibel is. Ieder blok op zich is een oplossing van (28).

Stel nu dat er eigenwaarden van U zijn die gelijk zijn. Dan kunnen er op plaatsen, afhankelijk van de dubbele eigenwaarden van U , waar nu nullen staan in V waarden ongelijk aan nul voorkomen. Dit is dan ook waar het fout gaat. Wordt het product VV^\dagger bekeken, dan blijkt dat dit onmogelijk de eenheidsmatrix oplevert. V is niet langer unitair en dit is dus geen mogelijkheid. Er kan geconcludeerd worden dat (33) en (34) voldoen aan $UV = VU\alpha$, samen irreducibel zijn, beide unitair en dus de gezochte operatoren zijn.

Nu kan gekeken worden naar het aantal toestanden N dat zich op de torus kan bevinden. Gebruik hiervoor dat α cyclisch is en wel $\alpha^N = 1$. Met de definitie van α gegeven in (28), kan N uitgedrukt worden in termen van θ en het oppervlak van de torus.

$$N = \frac{kL_1L_2}{2\pi\theta} \quad (35)$$

Hierbij is $k \in \mathbb{Z}$. Wanneer een specifieke torus wordt gekozen en naar het magneetveld wordt gekeken valt er iets merkwaardigs op te merken.

$$B = \frac{2\pi N\hbar c}{keL_1L_2} \quad (36)$$

Het magneetveld blijkt alleen gequantiseerd voor te kunnen komen. Kies vervolgens ook een vast, passend magneetveld, door een specifieke waarde voor k te kiezen. Nu kan het aantal toestanden dat zich op het oppervlak van deze torus onder dit magneetveld bevindt, bepaald worden.

$$N = \frac{L_1L_2eB}{2\pi\hbar c} \quad (37)$$

Hieruit blijkt dat het aantal toestanden eindig is in tegenstelling tot het klassieke geval, waar het aantal toestanden oneindig is. Opvallend is dat N evenredig is met het oppervlak van de torus en met de grootte van het magneetveld.

Wordt vervolgens het flux quantum bekeken, gegeven door $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{e}$ [4], dan is het aantal toestanden gelijk aan het aantal flux quanta waaruit het magneetveld bestaat, dat door het totale oppervlak heenprikt.

3.2 Geladen deeltje op een bol

Na de torus, is de volgende geometrie die nader bekeken wordt, het oppervlak van een bol. Wederom wordt gezocht naar het aantal toestanden dat

zich op dit oppervlak kan bevinden. Echter, er wordt een geheel andere methode gebruikt dan bij de bespreking van de torus.²

De bol heeft een straal R en overal aan het oppervlak is er sprake van een homogeen, loodrecht magneetveld met grootte B . Eerst wordt de commutatierelatie opnieuw bekeken.

$$[x, y] = i \frac{\hbar c}{eB} \quad (38)$$

Om een interpretatie van deze commutatierelatie te geven, kan de onzekerheidsrelatie bekeken worden. Deze zegt dat

$$\Delta x \Delta y \geq \frac{1}{2} \left| \frac{\hbar c}{eB} \right| \quad (39)$$

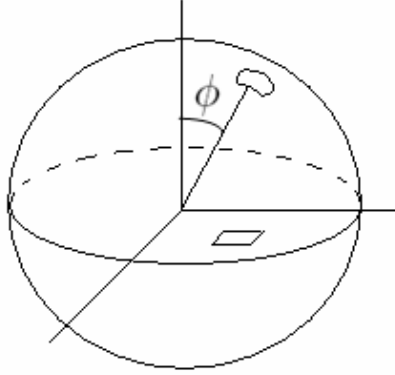
In dit geval is dit het kleinste oppervlakte element dat gemeten kan worden. Aangezien er aan het oppervlak van de bol sprake is van een homogeen, loodrecht magneetveld, moet bij een toenemende straal en dus totale oppervlakte van de bol, het oppervlakte element groter worden om er eenzelfde hoeveelheid magnetische veldlijnen doorheen te laten prikken. Anders gezegd, het product $\Delta x \Delta y B$ is constant. Wanneer het magneetveld afneemt, zal het kleinste oppervlakte element toenemen.

De commutatierelatie tussen x en y is afgeleid aan de hand van een plat oppervlak. Dit was nog steeds geldig bij de bespreking van de torus, maar nu de bol wordt behandeld, is het oppervlak niet meer recht, maar is er sprake van een kromming. Om deze kromming op te nemen in de vergelijkingen, wordt een elementje $dxdy$ in het xy -vlak bekeken. Het bijbehorende element aan het oppervlak van de bol is dan $\frac{1}{\cos \phi} dxdy$, met ϕ de hoek tussen de z -as en het elementje op de bol. Wanneer dit uitgedrukt wordt in termen van de z -coördinaat en de straal R dan

$$dxdy \rightarrow \frac{R}{z} dxdy \quad (40)$$

Aangezien het product van het magneetveld met het oppervlak constant is kan er teruggewerkt worden via (39) naar (38). Zo wordt de commutatierelatie voor het oppervlak van de bol verkregen.

²Voor een analyse die uitgaat van projectie van de coördinaten op het vlak zie [5].



Figuur 4: Oppervlakte element van een bol met straal R geprojecteerd op het xy -vlak.

$$[x, y] = i \frac{\hbar c}{eBR} z \equiv i\theta z \quad (41)$$

Hoe het assenstelsel in voorafgaande afleiding is gekozen, is uiteraard geheel arbitrair. Zo kunnen de coördinaten van het gekozen assenstelsel cyclisch gepermuteerd worden zonder dat er iets aan de geometrie verandert. Hieruit volgen de relaties

$$\begin{aligned} [y, z] &= i\theta x \\ [z, x] &= i\theta y \end{aligned} \quad (42)$$

Merk op dat deze relaties overeenkomen met de componenten van de spinvector van een deeltje. Neem dan $i = S_i$ met $i \in \{x, y, z\}$ en $\hbar \rightarrow \theta$. Wanneer de totale spin $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ van het deeltje wordt bekeken is dit van dezelfde vorm als $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Om nu wederom een uitdrukking voor het aantal toestanden dat zich op het oppervlak van de bol kan bevinden te vinden, wordt de afleiding gevolgd die te vinden is in [3] met betrekking tot de spin van een deeltje.

3.2.1 Ladderoperatoren

Om het aantal toestanden te bepalen, wordt op zoek gegaan naar de eigenwaarden van de coördinaten opgevat als operatoren. Wanneer R^2 als opera-

tor bekeken wordt, dan commuteert deze met x , y en z afzonderlijk. Oftewel

$$[R^2, \vec{r}] = 0 \quad (43)$$

waarbij $\vec{r} = (x, y, z)$. Dit betekent dat er voor R^2 en bijvoorbeeld z eenzelfde verzameling eigentoestanden gevonden kan worden. Zeg nu f is een eigentoestand waarvoor geldt

$$\begin{aligned} R^2 f &= \lambda f \\ z f &= \mu f \end{aligned} \quad (44)$$

Definieer vervolgens ladderoperatoren

$$R_{\pm} = x \pm iy \quad (45)$$

De reden dat dit twee ladderoperatoren zijn, wordt duidelijk als er naar de commutator met z wordt gekeken.

$$\begin{aligned} [z, R_{\pm}] &= \pm \theta R_{\pm} \\ [R^2, R_{\pm}] &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

Uit de tweede vergelijking volgt dat wanneer f een eigentoestand van R^2 is dat $R_{\pm}f$ ook een eigentoestand van R^2 is, met dezelfde eigenwaarde als f . Er geldt namelijk $R^2(R_{\pm}f) = R_{\pm}(R^2 f) = \lambda R_{\pm}f$. Uit de eerste vergelijking volgt dat wanneer f een eigentoestand van z is $R_{\pm}f$ ook een eigentoestand van z . Nu is de eigenwaarde alleen wel anders en wel

$$z(R_{\pm}f) = (\mu \pm \theta)R_{\pm}f \quad (47)$$

Hieruit wordt dan ook duidelijk waarom R_{\pm} ladderoperatoren genoemd worden. Voor een vaste eigenwaarde λ van R^2 , wordt er een ladder van eigentoestanden van z verkregen met eigenwaarden die oplopen met stapjes ter grootte van θ . Om deze eigenwaarden preciezer te maken, moet er eerst opgemerkt worden dat er een maximale en minimale eigentoestand bestaat. Dit kan als volgt worden ingezien. Bekijk de verwachtingswaarde van R^2 .

$$\langle R^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle \quad (48)$$

Nu geldt voor zowel x^2 als y^2 dat de verwachtingswaarde groter dan nul moet zijn, dus volgt dat

$$\lambda = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \mu^2 \geq \mu^2 \quad (49)$$

Fysisch gezien bekijken we een bol met straal R en kan z geen grotere waarde dan R of kleinere waarde dan $-R$ aannemen. De eigenwaarden van z hebben dus een boven- en een ondergrens.

Noem de eigentoestand bovenaan de ladder f_t . Deze heeft een eigenwaarde die een veelvoud is van θ . Om expliciet te zijn neem

$$\begin{aligned} z f_t &= \theta l f_t \\ R^2 f_t &= \lambda f_t \\ R_+ f_t &= 0 \end{aligned} \quad (50)$$

Hierbij is l de waarde die gezocht wordt. Vervolgens kan R^2 in termen van z en R_{\pm} geschreven worden. Als deze operator op f_t werkt kan er een uitdrukking voor λ gevonden worden.

$$R^2 f_t = (R_- R_+ + z^2 + \theta z) f_t = \theta^2 l(l+1) f_t = \lambda f_t \quad (51)$$

Hieruit volgt dat $\lambda = \theta^2 l(l+1)$. Ditzelfde kan gedaan worden voor de eigentoestand f_g met de laagste eigenwaarde.

$$\begin{aligned} z f_g &= \theta \bar{l} f_g \\ R^2 f_g &= \lambda f_g \\ R_- f_g &= 0 \end{aligned} \quad (52)$$

Op eenzelfde wijze wordt gevonden dat $\lambda = \theta^2 \bar{l}(\bar{l}-1)$. Nu kan de conclusie getrokken worden dat $\bar{l} = -l$. Hieruit volgt dat de eigenwaarden van z van de vorm $m\theta$ zijn met $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$.

Verder valt op te merken dat l niet zomaar iedere waarde kan aannemen. Er wordt namelijk in n stapjes van $-l$ tot l gelopen, ofwel $l = -l + n$. Hieruit volgt dat $l = \frac{n}{2}$ en dus dat l een geheel getal of een half getal is. Het uiteindelijke resultaat voor de vorm van de eigenwaarden is nu

$$\begin{aligned} R^2 f_l^m &= \theta^2 l(l+1) f_l^m \\ z f_l^m &= \theta m f_l^m \end{aligned} \quad (53)$$

Voor gegeven waarden van l zijn er

$$N = 2l + 1 \quad (54)$$

toestanden. Het aantal toestanden N is waar naar op zoek werd gegaan. Dit kan nu nog uitgedrukt worden in termen van het magneetveld en de straal van de bol. Deze grootheden zitten verborgen in θ . Kies hiertoe een vaste bol, dat wil zeggen een vaste waarde van R en hiermee een vaste l volgens

$$R = \theta \sqrt{l(l+1)} = \frac{\bar{\theta}}{RB} \sqrt{l(l+1)} \quad (55)$$

Op deze manier is alle relevante informatie uit θ gehaald en wordt er een nieuwe constante gedefinieerd, namelijk $\bar{\theta} = \frac{\hbar c}{e}$. Nu kan er een uitdrukking voor de grootte van het magneetveld gevonden worden.

$$B = \frac{\bar{\theta}}{R^2} \sqrt{l(l+1)} \quad (56)$$

Wederom is het magneetveld gequantiseerd, aangezien $2l \in \mathbb{Z}$, zoals eerder aangetoond. Om het aantal toestanden N te bepalen, moet eerst l opgelost worden uit (56).

$$l = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4B^2 R^2}{\bar{\theta}}} \right) \quad (57)$$

Nu kan er simpelweg door dit in te vullen in (54) het aantal toestanden gevonden worden dat zich op het oppervlak van een bol met straal R kan bevinden. Natuurlijk onder invloed van een magneetveld met grootte B onder voorwaarde dat voldaan is aan (56); het magneetveld moet passend zijn.

$$N = \sqrt{1 + \left(\frac{2R^2 e B}{\hbar c} \right)^2} \quad (58)$$

Deze vergelijking kan nog worden omgeschreven om een zeer interessant resultaat te bereiken. Schrijf dit ten eerste om in termen van het flux quantum Φ_0 , eerder besproken in subsectie 3.1.

$$N = \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi R^2 B}{\Phi_0}\right)^2} \quad (59)$$

Hieruit blijkt dat er wederom dezelfde afhankelijk van het magnetveld en de oppervlakte wordt verkregen als bij de torus. Hoewel, zolang de 1 onder de wortel wordt weggelaten.

Hoe valt dit te verklaren? Hiertoe moet er onderscheid gemaakt worden tussen de klassieke straal R_{kl} van de bol en de quantum straal R_q . Gedurende de hele afleiding is er gewerkt met een straal R die eigenlijk de quantum straal is. Er moet geschreven worden

$$N = \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi R_q^2 B}{\Phi_0}\right)^2} \quad (60)$$

Zoals eerder besproken in subsectie 2.1 kunnen er na kanonieke kwantisatie hogere orde termen in \hbar voorkomen. Bekijk de volgende samenhang tussen de klassieke straal en de quantum straal

$$R_{kl}^4 = \left(\frac{c}{2eB}\right)^2 \hbar^2 + R_q^4 \quad (61)$$

In de klassieke limiet staat er niets anders dan $R_{kl} = R_q = R$. Dit zou een mogelijkheid kunnen zijn. Wordt het aantal toestanden nu uitgedrukt in R_{kl} dan volgt

$$N = \frac{4\pi R_{kl}^2 B}{\Phi_0} \quad (62)$$

Er wordt precies hetzelfde resultaat gevonden als voor de torus. Twee verschillende geometrieën en twee totaal andere afleidingen geven hetzelfde resultaat.

Dit wordt algemeen gemaakt door Blau in [8]. Hierin wordt het aantal toestanden gegeven voor een geometrie met een bepaald volume. Er geldt dan

$$N \sim Vol \tag{63}$$

Merk op dat het volume van de twee behandelde geometrieën, simpelweg de oppervlakten zijn. Volume is een handige term, wanneer er in n dimensies gewerkt wordt. Voor twee dimensies is het volume gelijk aan het oppervlak.

Na het uitdiepen van twee voorbeelden waarin de consequenties van niet-commuterende coördinaten zijn bekeken, wordt de volgende sectie meer een overzicht van voorbeelden van velden binnen de fysica waar niet-commutatieve meetkunde een rol speelt of wellicht een verklaring van verschijnselen zou kunnen zijn.

4 Toepassingen van niet-commutatieve meetkunde

In voorafgaande sectie zijn twee verschillende twee dimensionale geometrieën aan bod gekomen. Hierbij commuteerden de twee onafhankelijke coördinaten niet. Nu wordt gekeken wat voor een fysische verschijnselen aan het fenomeen niet-commutatieve meetkunde kunnen worden gekoppeld. Er wordt begonnen met quantum gravitatie, vervolgens wordt het quantum Hall effect besproken en uiteindelijk worden er nog opmerkingen geplaatst over zwarte gaten in relatie tot niet-commutatieve meetkunde.

4.1 Quantum gravitatie

Wordt de onzekerheidsrelatie opnieuw bekeken $\Delta x \Delta y \geq \frac{1}{2} |\theta|$, dan kan dit opgevat worden als het kleinste oppervlakte element waarop ingezoomd kan worden. Er ontstaat een vaag oppervlak. In de engels literatuur wordt dan ook wel gesproken van de *fuzzy torus* en *fuzzy sphere*. Wat zoveel betekent als vage torus en vage bol. Wordt het oppervlak op korte afstand bekeken, dan is er geen sprake meer van punten aan het oppervlak. Dit soort fenomeen komt veelal voor in modellen van quantum gravitatie [6].

Modellen als deze voorspellen dat de algemene relativiteitstheorie niet meer opgaat op een schaal kleiner dan de Planckschaal. Zodra een deeltje gelokaliseerd wordt tot op de Planckschaal $l_P \sim 10^{-33}$ cm, zou dit betekenen, dat er een energie van de Planckmassa $\sim 10^{19}$ GeV/c² beschikbaar moet zijn voor het deeltje. Maar zo een energie zou een zwart gat creëren waarin het deeltje zou verdwijnen. Een manier om dit probleem te omzeilen

is door de klassieke meetkunde aan te passen. Dit wordt gedaan door een ruimtetijd onzekerheidsrelatie te eisen

$$\sum_{i < j} \Delta x^i \Delta x^j \geq l_P^2 \quad (64)$$

Op deze manier wordt de algemene relativiteitstheorie gequantiseerd [6]. Feit blijft, dat zo een onzekerheidsrelatie weer veel nieuwe problemen met zich meebrengt, die voor welgedefinieerde punten in de ruimte niet aanwezig zouden zijn. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de afstand tussen twee punten. Als er geen sprake is van een punt wordt het al een stuk lastiger om een afstand te definiëren.

4.2 Quantum Hall effect

Er kan ook een toepassing gevonden worden in de fysica van gecondenseerde materie. Een twee dimensionaal systeem van elektronen kan onder bepaalde voorwaarden merkwaardig gedrag vertonen.

Het klassieke Hall effect kan uitgelegd worden aan de hand van een dunne, vlakke geleider in een sterk loodrecht magneetveld [9]. Zodra er een stroom in bijvoorbeeld de x-richting wordt doorgestuurd, zal er een elektrisch veld in de y-richting ontstaan. De stroom die hiermee geassocieerd kan worden, wordt de Hall stroom genoemd. Nu is de ratio van de intensiteit van de Hall stroom en het elektrisch veld, de Hall geleiding, gegeven door

$$\sigma_H = \frac{\nu}{R_H} \quad (65)$$

Dit is de fractie waarmee een Landau niveau is gevuld met geleidende elektronen van de dunne plaat. Hierbij wordt $\nu = \frac{\rho c h}{e B}$ de vul factor genoemd. Deze is evenredig met de dichtheid van ladingsdragers en omgekeerd evenredig met het opgelegde magneetveld. Verder is $R_H = \frac{h}{e^2}$ de Hall weerstand. Deze Hall weerstand is sinds januari 1990 de nieuwe standaard van weerstand [11].

Om tot het quantum Hall effect te komen, moet de temperatuur van het systeem extreem laag worden gemaakt. Beneden 1K domineren quantum effecten. Nu zal blijken dat bij deze temperaturen ν een geheel getal moet zijn. Een grafiek van de Hall geleiding uitgezet tegen de vul factor, zal plateaus vertonen. De Hall geleiding is als het ware gequantiseerd. Bij

deze waarden van ν blijkt ook de geleiding in de richting van de opgelegde stroom te verdwijnen.

De gevonden vergelijkingen kunnen omgeschreven worden om tot een suggestiever resultaat te komen. Als het magneetveld wordt uitgedrukt in de vul factor en het magnetisch flux quantum dan

$$B = \frac{\Phi_0 \rho}{\nu} \quad (66)$$

De ladingsdragers dichtheid is niets anders dan het aantal elektronen per eenheid oppervlak. Dit kan herschreven worden in termen van het totaal aantal ladingsdragers N en het totale oppervlak A .

$$B = \frac{\Phi_0 N}{\nu A} \quad (67)$$

Vergelijk dit met (36). Aangezien ν een geheel getal is, wordt precies hetzelfde resultaat bereikt, als bij een eindig oppervlak met niet-commutatieve meetkunde. Deze meetkunde zou een goede beschrijving van het quantum Hall effect kunnen geven.

Later bleek dat ν ook de waarde van een breuk kan aannemen, dit is het fractionele quantum Hall effect (FQHE). FQHE kan alleen voorkomen bij systemen waar de elektronen interacties hebben. Hierdoor is het laagste Landau niveau in grote mate ontaard. Er bestaat nog geen gedegen beschrijving van het Landau probleem met interacties. Niet-commutatieve meetkunde, zou uitkomst kunnen bieden. Wanneer de ontaarding van het laagste Landau niveau, door de interactie potentiaal, groot genoeg is om alle elektronen in dit niveau kwijt te kunnen, ontstaan dezelfde voorwaarden als geschetst in subsectie 2.3. Zie voor een beschrijving van een niet-commutatieve velden theorie [6]. Deze theorie beschrijft, volgens Szabo, de FQHE veel beter, dan de commutatieve variant.

4.3 Zwarte gaten

Een zwart gat is een onderwerp in de fysica dat nog altijd niet goed begrepen wordt. Er heersen nog veel onduidelijkheden. Aan de hand van niet-commutatieve meetkunde, zou een aantal van die onzekerheden verklaard kunnen worden, volgens de auteur van [10]. In zijn artikel worden twee curieuze eigenschappen van een zwart gat dat straling uitzendt bekeken. De divergentie van de temperatuur tijdens het laatste stadium

voor de ineenstorting en de krommingssingulariteit van het centrum van het zwarte gat.

Om de effecten van niet-commutatieve meetkunde te testen wordt de gelineariseerde gravitationele veld vergelijking bekeken. Dit voordat de complete Einstein veld vergelijking hoeft te worden geanalyseerd. De gelineariseerde vergelijking voor een puntdeeltje wordt gegeven door

$$\vec{\nabla}^2 V_N = 4\pi G_N \delta(r) \quad (68)$$

Dit is de klassieke Poisson vergelijking voor een puntdeeltje. Hierbij geeft de deltafunctie de positie van het deeltje aan. Aangezien er geen puntobjecten meer zijn wanneer er sprake is van niet-commuterende coördinaten, wordt de deltafunctie vervangen door een Gaussische functie met minimale breedte $\sqrt{\theta}$, waarbij θ de commutator van de coördinaten is. Nu kan er doorgerkend worden met deze nieuwe vergelijking.

Zo kan de straal, r_H , van de event horizon en de massa van het zwarte gat worden bekeken. In de commutatieve variant neemt de massa van het zwarte gat lineair af met de straal van de event horizon. Wat betekent dat het proces van Hawking straling doorgaat tot er geen massa meer over is. In het niet-commutatieve geval is er een massa ongelijk aan nul waarbij de event horizon tot de oorsprong is gekrompen.

$$M_0 = 0.5\sqrt{\pi\theta} \quad (69)$$

Voor deze vergelijking geldt $\hbar = c = G_N = 1$. Voor een massa kleiner dan deze is de event horizon helemaal verdwenen en zal er een massief object achterblijven. Nu kan de temperatuur van het zwarte gat bekeken worden. In het commutatieve geval wordt de temperatuur gegeven door

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_H} \quad (70)$$

Dit betekent dat wanneer de event horizon naar nul gaat, de temperatuur divergeert. Wordt niet-commutatieve meetkunde geïmplementeerd, dan wordt dezelfde vergelijking gevonden voor grote r_H , maar wanneer $\frac{r_H}{\sqrt{\theta}} \rightarrow 0$ dan volgt

$$T_H \sim \frac{r_H}{24\pi\theta} \quad (71)$$

Hieruit blijkt dat er geen divergentie van de temperatuur meer is zodra er van niet-commutatieve meetkunde wordt uitgegaan.

Ook kan de kromming bekeken worden van het object dat achterblijft wanneer de event horizon helemaal is verdwenen. In het commutatieve geval zal er een divergente kromming in de oorsprong zijn, maar in het geval van niet-commutatieve coördinaten, blijkt de kromming eindig negatief te zijn. Wederom valt de limiet van $\frac{r}{\sqrt{\theta}} \gg 1$ samen met het commutatieve geval.

Nu valt er nog een veelbesproken eigenschap van zwarte gaten te behandelen: de entropie van een zwart gat. De entropie van een systeem is kort gezegd afhankelijk van het aantal manieren dat het systeem op microscopisch niveau kan worden beschreven zonder dat er op macroscopisch niveau iets verandert. Zwarte gaten zijn objecten met maximale entropie. Waar de entropie normaal gesproken afhankelijk is van het volume van een object geldt voor een zwart gat

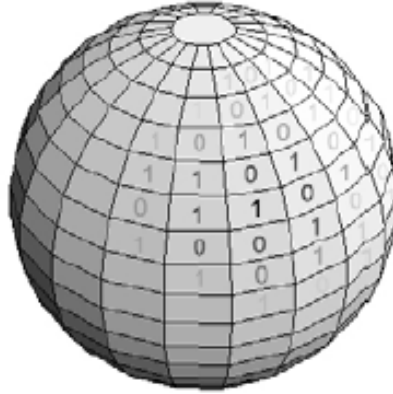
$$S = \frac{k_B A}{4l_P^2} \quad (72)$$

Hierbij is A het oppervlak van de event horizon van het zwarte gat, k_B de Boltzmann constante en $l_P = \sqrt{\frac{G_N \hbar}{c^3}}$ de Plancklengte. Wat dit wil zeggen is dat de event horizon van een zwart gat grofweg in vierkantjes met zijden van een Planck lengte kan worden opgedeeld en dat er op ieder vierkantje precies één eenheid entropie past [12]. Aangezien zwarte gaten maximale entropie hebben, zijn deze vierkantjes de kleinste mogelijke waarmee het oppervlak op zo een manier kan worden opgedeeld. Dit is als het ware een quantisatie van de ruimte.

Nu kan entropie ook opgevat worden als informatie. Aangezien zwarte gaten maximale entropie hebben, kan zo een vierkantje opgevat worden als een minimale eenheid van ruimte, waarop een bit aan informatie past (zie figuur 5).

Merk op dat dit in grote mate overeenkomt met het aantal toestanden dat op een bol (of torus) past. Hierbij heeft $\frac{\Phi_0}{B}$ eenheden van oppervlak en kan het oppervlak van de bol worden opgedeeld in elementjes waarop precies één toestand past. Het oppervlak is gequantiseerd zoals al eerder is opgemerkt. Dit is analoog aan de event horizon van een zwart gat. Deze is ook gequantiseerd.

Dat de entropie van een zwart gat evenredig is met het oppervlak van de event horizon is de kern van het holografische principe. 't Hooft en



Figuur 5: De event horizon van een zwart gat kan opgedeeld worden in minimale oppervlakte elementjes waarop een eenheid entropie of informatie past.

Susskind suggereerden dat alle informatie van een drie dimensionaal object eigenlijk geprojecteerd zit op het oppervlak. Kent men de informatie op het oppervlak, dan weet men wat zich in het volume afspeelt. Voor meer informatie over het holografische principe zie [13].

Voor nu is het voornaamste dat op te merken valt, dat er een analogie is tussen de manier waarop ruimte wordt gequantiseerd door niet-commutatieve meetkunde en het gequantiseerde oppervlak van een zwart gat.

5 Conclusie

In dit paper is niet-commutatieve meetkunde binnen de fysica besproken. Als voorbeeld, om zo een systeem te bereiken, is het Landau probleem behandeld. Dit is een twee dimensionaal systeem met elektronen onder invloed van een extern overal homogeen, loodrecht magneetveld. Wanneer het magneetveld naar oneindig gaat, wordt er een extra beperking aan het systeem opgelegd. Hierdoor wordt de vier dimensionale faseruimte per deeltje gereduceerd tot een twee dimensionale faseruimte bestaande uit de twee coördinaten. Deze twee coördinaten commuteren dan niet meer en wel omgekeerd evenredig met de grootte van het magneetveld. Wat dit wil zeggen is dat de coördinaten van een deeltje niet langer tegelijk kunnen worden gemeten en dat er dus niet langer over puntdeeltjes gesproken kan worden. De ruimte is als het ware gequantiseerd.

Vervolgens zijn de implicaties van niet-commutatieve coördinaten bekeken aan de hand van twee specifieke geometrieën met een eindig oppervlak: een torus en een bol. In het bijzonder wordt een uitdrukking voor het aantal toestanden dat zich op het oppervlak kan bevinden gezocht. In beide gevallen is gebleken, dat het aantal toestanden dat zich op het oppervlak kan bevinden eindig is en wel evenredig met de grootte van het magneetveld en het oppervlak waartoe de elektronen zijn beperkt. Verder kan opgemerkt worden, dat het magneetveld alleen discrete waarden kan aannemen.

Na deze specifieke gevallen zijn drie voorbeelden gegeven waarbij verwacht wordt dat niet-commutatieve meetkunde een rol speelt of waarbij niet-commutatieve meetkunde de oplossing zou kunnen bieden voor hiaten in de theorie. In het geval van modellen voor quantum gravitatie ontstaan er moeilijkheden wanneer deeltjes tot op de Planckschaal worden gelokaliseerd. Door niet-commutatieve coördinaten in te voeren, kan dit probleem omzeild worden en zou de algemene relativiteitstheorie gequantiseerd worden.

Het quantum Hall effect is besproken in relatie tot niet-commutatieve meetkunde. De Hall geleiding blijkt gequantiseerd te zijn. Dit is nog zonder aanname van niet-commutatieve meetkunde. Als de Hall geleiding wordt omgeschreven blijkt het magneetveld evenredig met het magnetisch flux quantum en het aantal elektronen te zijn en omgekeerd evenredig met het oppervlak en de vul factor. Deze laatste kan alleen gehele waarden aannemen. Dit is hetzelfde resultaat als gevonden voor de torus en de bol met niet-commuterende coördinaten. Het zou niet ondenkbaar zijn dat de juiste manier om het quantum Hall effect te beschrijven door middel van niet-commutatieve meetkunde is.

De effecten van niet-commutatieve meetkunde op de theorie van zwarte gaten zijn bekeken. Allereerst is een artikel aangehaald dat door aanpassing van de veld vergelijking voor een puntdeeltje, niet-commutatieve meetkunde realiseert. Doorrekenend wordt er gevonden dat er een massa ongelijk aan nul overblijft, wanneer de event horizon van een zwart gat helemaal is verdwenen, door het uitzenden van Hawking straling. Er blijft dus een massief object over. De kromming van dit object is eindig in de oorsprong en de temperatuur blijkt naar nul te gaan wanneer de event horizon naar nul gaat. Uitgaande van commutatieve meetkunde zou er geen massa overblijven wanneer de event horizon gelijk aan nul is en zou de temperatuur divergeren. Verder zou er een kromming singulariteit in de oorsprong optreden. Voor al deze berekeningen uitgaande van niet-commutatieve meetkunde, geldt dat de limiet waarvoor op grote afstand

wordt gekeken gelijk is aan de commutatieve variant.

Ten slotte is de entropie van een zwart gat nader bekeken. De entropie blijkt evenredig met het oppervlak van de event horizon, waar normaal gesproken entropie evenredig is met volume. Aangezien zwarte gaten objecten met maximale entropie zijn, kan er gesteld worden dat er elementjes van minimale grootte zijn waarop precies één eenheid entropie past. De event horizon is gequantiseerd. Dit lijkt in zeer grote mate analoog aan niet-commutatieve meetkunde.

Niet-commutatieve meetkunde is een levendig vakgebied. Binnen de fysica blijken er merkwaardige implicaties aan gerelateerd te zijn. Bepaalde fenomenen die voorheen niet verklaard konden worden, vinden hun oplossing misschien wel in niet-commutatieve meetkunde. Wellicht moet onze klassieke opvatting van meetkunde herzien worden en zal binnen bepaalde limietgevallen overgegaan moeten worden op niet-commutatieve meetkunde.

Referenties

- [1] http://en.wikipedia.org/wiki/Aharonov-Bohm_effect.
- [2] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford University Press, London, 1958).
- [3] D.J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, 2005).
- [4] M. Fowler, *Charged Particle in a Magnetic Field*, <http://galileo.phys.virginia.edu/classes/752.mf1i.spring03/ParticleMagField.htm>.
- [5] G.V. Dunne, *Hilbert Space for Charged Particles in Perpendicular Magnetic Fields*, *Annals of Physics* **215**, 233 (1992).
- [6] R.J. Szabo, *Magnetic Backgrounds and Noncommutative Field Theory*, arXiv:physics/0401142.
- [7] J.C. Baez, *Braids and Quantization*, <http://math.ucr.edu/home/baez/braids/node1.html>.
- [8] M. Blau, *Symplectic Geometry and Geometric Quantization*, (niet gepubliceerd).
- [9] M. Marcolli en V. Mathai, *Towards the fractional quantum Hall effect: a noncommutative geometry perspective*, arXiv:cond-mat/0502356.
- [10] P. Nicolini, *A model for radiating black hole in noncommutative geometry*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, L631 (2005).
- [11] J. Bellisard, A. van Elst en H. Schulz-Baldes, *The Noncommutative Geometry of the Quantum Hall Effect*, arXiv:cond-mat/9411052.
- [12] B. Greene, *The Fabric of the Cosmos* (Penguin Books, Londen, 2005).
- [13] L. Susskind, L. Thorlacius en J. Uglum, *The Stretched Horizon and Black Hole Complementarity*, arXiv:hep-th/9306069.