

Niet-commutatieve Meetkunde en het Standaardmodel

Reinier Jonker
Begeleider: Prof. dr. J. de Boer

Augustus 2008

Samenvatting

Een fundamenteel axioma uit de meetkunde is dat coördinaten commuteren. In de quantummechanica blijkt echter dat plaats en impuls niet altijd commuteren. Alain Connes heeft de meetkunde gegeneraliseerd voor niet-commuterende coördinaten. Met deze niet-commutatieve meetkunde kan een alternatieve beschrijving van het Standaardmodel worden gegeven op basis van eenvoudigere wiskunde dan het Standaardmodel op basis van commutatieve meetkunde. Het resulterende model levert dezelfde deeltjes en interacties op en kent een commutatieve ruimtetijd.

In dit artikel wordt een introductie verschaft tot het niet-commutatieve Standaardmodel van Connes et al. en worden een paar voorbeelden behandeld.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	Niet-commutatieve meetkunde	4
2.1	Moyal-product	4
2.2	Metrieken en gamma-matrices	5
2.3	Gegeneraliseerde Riemann-meetkunde	6
2.4	Het spectraal tripel	8
3	Het Standaardmodel	10
3.1	Keuze van het spectraal tripel	11
4	Resultaten	14
4.1	De bosonische actie-functionaal	14
4.2	Higgs-massa	15
5	Conclusie	16

1 Inleiding

Eén van de eenvoudigste formules uit de meetkunde geeft het oppervlak van een rechthoek: $A = xy$, waarbij x de lengte is en y de breedte. Hierbij maakt het niet uit welk van de twee dimensies men hierbij kiest als breedte en welke als lengte. Beide coördinaten zijn immers gewone getallen en het product is niet afhankelijk van de volgorde: $xy = yx$. Met andere woorden, de *commutator*:

$$[x, y] \equiv xy - yx \tag{1}$$

is gelijk aan nul.

Toch is dit wiskundig helemaal niet zo vanzelfsprekend. Er zijn genoeg voorbeelden van groepen waarbinnen elementen in het algemeen niet met elkaar commuteren. Men kan hierbij denken aan matrices, maar ook aan veel operatoren. In de quantummechanica geldt bijvoorbeeld dat $[x, p_x] = i\hbar$, de canonieke commutatierelatie.

Een voor de hand liggende vraag is nu of er in de meetkunde niet ook een zekere niet-commutativiteit bestaat. Allereerst moet men hierbij bedenken, dat deze niet-commutativiteit dan in elk geval een zeer klein effect moet zijn. Niet alleen is er in het dagelijks leven geen enkele aanwijzing tot niet-commutativiteit, maar ook uit experimenten is tot nu toe geen commutator die significant afwijkt van nul gebleken.

Toch is het de moeite waard te onderzoeken of niet-commutatieve meetkunde sommige fenomenen beter kan beschrijven dan bestaande theorieën. Door de aanname van commutativiteit op te geven raakt men een aantal zekerheden uit de gebruikelijke meetkunde kwijt, maar er zijn veel nieuwe vrijheden. Deze kunnen worden benut om een mathematisch eenvoudigere beschrijving te geven of om tot nu toe onverklaarbare zaken te verklaren.

Een goed voorbeeld van een toepassing van niet-commutatieve meetkunde is het niet-commutatieve Standaardmodel van Alain Connes. Deze beschrijving reproduceert het Standaardmodel met commutatieve ruimtetijd.

De algebra die in de niet-commutatieve theorieën van Connes voorkomt is niet eenvoudig en om dieper inzicht in sommige elementen te verkrijgen is een studie vereist die veel langer vergt dan voor de tijd van dit project beschikbaar is. Dit artikel beperkt zich dan ook tot een korte introductie tot de algebra van het niet-commutatieve Standaardmodel en enkele voorbeelden van concrete resultaten.

2 Niet-commutatieve meetkunde

2.1 Moyal-product

De quantummechanica introduceerde een commutativiteitsschending tussen plaats- en impuls-componenten op dezelfde manier als niet-commutatieve meetkunde dat doet tussen de plaatscomponenten onderling. In de woorden van Thomas Schücker [11]: niet-commutatieve meetkunde doet met de ruimtetijd wat de quantummechanica al deed met de faseruimte.

De Nederlandse fysicus H.J. Groenewold publiceerde in 1953 in een artikel over correspondentie in de quantummechanica [23]. In dit artikel wordt de Poisson-haak tussen de functies $f(q, p)$ en $g(q, p)$:

$$\{f, g\} := \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \quad (2)$$

gedefinieerd voor de quantummechanische plaats- en impulsoperatoren p en q . Dit levert de Moyal-haak op:

$$\{\{f, g\}\} = \frac{2}{\hbar} f(x, p) \sin \left(\frac{\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_x \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_x) \right) g(x, p) \quad (3)$$

waarbij de pijlen aangeven dat de functie links dan wel rechts moet worden afgeleid. Dit is het quantummechanische equivalent van de Poissonhaak.

De Moyal-haak kan worden geschreven als een soort commutator. We krijgen dan:

$$\{\{f, g\}\} = \frac{f \star g - g \star f}{i\hbar} \quad (4)$$

waarbij het Moyal-product $f \star g$ als volgt is gedefinieerd:

$$f \star g = \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right] \quad (5)$$

Het Moyal-product kan worden uitgeschreven in termen van een machtreeks in \hbar van differentiaaloperatoren B_k [4]:

$$f \star g = fg + \hbar B_1(f, g) + \hbar^2 B_2(f, g) + \dots \quad (6)$$

Hieraan is ook gemakkelijk te zien dat het Moyal-product reduceert naar het gewone product fg voor de limiet \hbar naar 0. de klassieke limiet van de quantummechanica.

Het Moyal-product kan echter ook worden gebruikt als generalisatie van commutatieve meetkunde naar niet-commutatieve meetkunde. Het reguliere product fg tussen $f(x)$ en $g(x)$ wordt dan vervangend door het Moyal-product $f \star g$. In deze context wordt het vaak geschreven als [9]:

$$f \star g = \exp \left(\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_{x^\mu} \partial_{y^\nu} \right) f(x)g(y) \Big|_{x=y} \quad (7)$$

waarbij $i\theta^{\mu\nu}$ de commutator tussen de coördinaten is

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu} \quad (8)$$

2.2 Metrieken en gamma-matrices

In de klassieke fysica geldt de Euclidische metriek met tensor $\eta = 1_4$. De componenten van deze tensor kunnen worden geschreven als anticommutator van de matrices γ^μ en γ^ν [10]:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}1 \quad (9)$$

waarbij de orthogonale matrices

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

de basisvectoren van de ruimtetijd zijn. Met deze matrices wordt de chiraliteitsmatrix χ als volgt gedefiniëerd:

$$\chi = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (12)$$

Deze anticommuteert met de γ -matrices:

$$\gamma^\mu\chi + \chi\gamma^\mu = 0 \quad \text{voor } \mu \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (13)$$

Vanwege deze relatie wordt χ soms ook aangeduid als γ^5 . Daarnaast is er de anti-unitaire operator J :

$$J = \gamma^0\gamma^2 \quad (14)$$

χ is een unitaire matrix en $\chi^2 = 1$. J daarentegen is anti-unitair en $J^2 = -1$. χ en J commuteren met elkaar. Unitariteit houdt in dat een $n \times n$ -matrix M voldoet aan:

$$M^\dagger M = I_n = MM^\dagger \quad (15)$$

Dit houdt in dat de inverse van de matrix gelijk is aan zijn geadjungeerde matrix.

2.3 Gegeneraliseerde Riemann-meetkunde

Het is mogelijk de eigenschappen van een ruimte te beschrijven aan de hand van afstanden tussen punten binnen die ruimte. Dit wordt gedaan in de Riemann-meetkunde. De niet-commutatieve meetkunde van Alain Connes et al. is een generalisatie van de Riemann-meetkunde waarbij de elementen die de afstanden bepalen niet langer hoeven te commuteren.

Een afstand tussen twee punten p en q in de ruimte is gedefiniëerd als de lengte van het kortste pad tussen p en q . De lengte van het pad γ is de integraal van 1 over γ . Zodoende is de afstand δ tussen de punten p en q gedefiniëerd als [1]

$$\delta(p, q) \equiv \inf \left\{ \int_{\gamma} ds \right\} \forall \gamma \in \{\gamma \text{ tussen } p \text{ en } q\} \quad (16)$$

In een gekromde ruimte kan de kromming worden beschreven door een metriektensor g met componenten $g_{\mu\nu}$.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dy^\nu \quad (17)$$

Hiermee wordt de padlengte uit (16)

$$\int_p^q \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} ds \quad (18)$$

In de niet-commutatieve meetkunde van Alain Connes wordt ds^2 vervangen wordt door een operator G op een Hilbertruimte \mathcal{H} van de vorm [1]:

$$G := \sum_1^q (dx^\mu)^* g_{\mu\nu} (dx^\nu) \quad (19)$$

waarbij:

$$dx^\mu := [F, x^\mu] \quad (20)$$

x^μ zijn elementen van een complexe algebra \mathcal{A} en F is een operator op \mathcal{H} met de eigenschap dat $F^2 = 1$.

Deze algebra kent echter geen punten. De begin- en eindpunten p en q van een pad worden daarom vervangen worden door toestanden φ en ψ op een gesloten uitbreiding van \mathcal{A} . Een toestand van een algebra is een positieve, lineaire functionaal met operatornorm 1. Voor een toestand φ werkende op de elementen a, b van de algebra \mathcal{A} geldt [11]:

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad (21)$$

$$\varphi(a^\dagger a) \geq 0 \quad (22)$$

$$\varphi(1) = 1 \quad (23)$$

Voor alle elementen f van \mathcal{A} is er een toestand φ behorende bij het punt p in de commutatieve ruimte en een ψ behorende bij het punt q in de commutatieve ruimte:

$$\varphi(f) = f(p) \quad \text{en} \quad \psi(f) = f(q) \quad \forall f \in \mathcal{A} \quad (24)$$

Men zou voor elk element f uit \mathcal{A} een afgeleide naar ds kunnen definiëren die voldoet aan (19). Voor elk van deze elementen kan dan een ‘padlengte’ worden beschouwd tussen de toestand φ en de toestand ψ . De langste ‘padlengte’ waarbij de norm van de afgeleide ten hoogste 1 is, correspondeert met de afstand tussen p en q .

$$\delta(p, q) = \sup \left\{ |f(p) - f(q)| \quad \text{met} \quad f \in \mathcal{A} \quad \text{met} \quad \left\| \frac{df}{ds} \right\| \leq 1 \right\} \quad (25)$$

Conceptueel kan dit uitgelegd worden als de snelste weg die men binnen de algebra kan afleggen om te beginnen bij een element dat correspondeert met punt p en te eindigen met een element dat correspondeert met punt q , waarbij de snelheid maximaal 1 is. Deze definitie hangt alleen nog indirect en op een welgedefiniëerde manier af van het begin- en eindpunt.

Voor een niet-commutatieve ruimte is de definitie van $\frac{df}{ds}$ is echter niet eenduidig bepaald. Het is immers niet noodzakelijk dat $(df)^{-1}ds$ gelijk is aan $ds(df)^{-1}$. Om deze reden wordt de afgeleide vervangen door een Dirac-operator D werkende op \mathcal{H} . Dit is in de commutatieve meetkunde een operator met de eigenschap dat $D^2 = \nabla^2$. In de niet-commutatieve meetkunde wordt de Dirac-operator gegeneraliseerd tot [1]:

$$D = FG^{-1/2} = Fds^{-1} \quad (26)$$

D commuteert met J . D en χ anticommuteeren juist.

De definitie vereist dat $\ker G = 0$, want anders is de inverse van G niet eenduidig bepaald. F wordt zodanig gekozen dat $Fds^{-1} = ds^{-1}$, dus $D = ds^{-1}$. Hiermee wordt (25):

$$\delta(p, q) = \sup \{ |f(p) - f(q)| \quad \text{met} \quad f \in \mathcal{A} \quad \text{met} \quad \|[D, f]\| \leq 1 \} \quad (27)$$

Hieruit volgt dat

$$G = F^2D^{-2} = D^{-2} \quad (28)$$

Als D bekend is, is G dus ook eenduidig bepaald. Het spectrum Σ van D is de verzameling van alle eigenwaarden van D . Hierin is alle meetkunde omvat. [2]

2.4 Het spectraal tripel

De operatoren F en D zijn cruciale onderdelen van de niet-commutatieve meetkunde. Hiermee worden alle afstanden binnen de ruimte bepaald. Deze operatoren werken op de Hilbertruimte \mathcal{H} , bestaande uit kwadratisch integreerbare Dirac-spinoren ω :

$$\mathcal{H} = \left\{ \omega : \int_{-\infty}^{\infty} |\omega(x)|^2 dx < \infty \right\} \quad (29)$$

In de commutatieve meetkunde is ω een vier-spinor is van de vorm:

$$\omega = \left[\begin{array}{c} \varphi \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E/c^2 + m} \varphi \end{array} \right] \quad (30)$$

met σ drievector van de Paul-spinmatrices, \mathbf{p} de impuls van het deeltje, E de energie van het deeltje en m de massa van het deeltje. φ is een twee-spinor die zo gekozen is, dat voldaan wordt aan de Dirac-vergelijking.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{y}} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{z}} \quad (31)$$

In de niet-commutatieve meetkunde is het niet langer nodig spin als een los veld te definiëren. ω wordt dan gedefiniëerd volgens de vergelijking [10]:

$$\omega e = -[D, e] \quad (32)$$

waarbij e een orthonormale basis is voor de elementen van \mathcal{H} .

Als de Hilbertruimte een $\mathbb{Z}/2$ -gradatie heeft wordt deze even genoemd. [3] Dit betekent dat de vectorruimte kan worden uitgeschreven als directe som van k -de graads homogene vectorruimten \mathcal{H}_k :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}/2} \mathcal{H}_k = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \quad (33)$$

Vanwege de $\mathbb{Z}/2$ -gradatie bestaat een even Hilbertruimte dus uit twee homogene vectorruimten. Er is dan een gradatie-operator γ [7]. In een even Hilbertruimte is het spectrum Σ gelijk aan $-\Sigma$ [6]. In het Standaardmodel correspondeert één van de vectorruimten met linkshandige deeltjes en de andere met rechtshandige deeltjes. [6]

Er kan binnen de Hilbertruimte een anti-lineaire isometrische afbeelding $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ worden gedefiniëerd met de eigenschappen [7]:

$$J^2 = \epsilon, \quad JD = \epsilon' DJ, \quad \text{en} \quad J\gamma = \epsilon'' \gamma J \quad (34)$$

waarbij ϵ , ϵ' en ϵ'' tekens zijn, dus:

$$\epsilon, \epsilon', \epsilon'' \in \{-1, 1\} \quad (35)$$

Er zijn $2^3 = 8$ mogelijke combinaties voor dit drietal. Wiskundig zijn deze alle acht mogelijk, maar bij zeven van de acht mogelijkheden is er een ‘fermion doubling problem’ [3] in het niet-commutatieve Standaardmodel. Dit houdt in dat er voor elk fermion in het model een tweede fermion met tegengestelde chiraliteit ontstaat. Dit is in tegenspraak met experimentele gegevens, waaruit blijkt dat er alleen linkshandige neutrino’s en alleen rechtshandige antineutrino’s bestaan.¹ Chiraliteit is een eigenschap van fundamentele deeltjes die te maken heeft met de asymmetrie onder spiegeling.

De algebra moet reëel en associatief zijn en voldoen aan de zogeheten ‘order zero condition’. Deze luidt als volgt [5]

$$[a, Jb^*J^{-1}] = 0 \quad \forall a, b \in \mathcal{A} \quad (36)$$

Dit kan gezien worden als een beperking aan de commutator tussen a en b . Deze voorwaarde is om technische redenen noodzakelijk. [5] Omdat Jb^*J^{-1} . Een gevolg hiervan is dat voor geschikte keuze van b ($b = (J^{-1*})^*$)

Uit \mathcal{A} wordt een eindigdimensionale onderalgebra $\mathcal{A}_F \subset \mathcal{A}$ gekozen die voldoet aan de ‘order one condition’ [3]:

$$[[D, a], Jb^*J^{-1}] = 0 \quad \forall a, b \in \mathcal{A}_F \quad (37)$$

Een onderalgebra is een deelverzameling van de elementen van een algebra, die onderling ook een algebra vormen.

Volgens Schücker [11] moet elke algebra die aan deze voorwaarden voldoet bestaan uit $n \times n$ -matrices met elementen die reëel, complex of zelfs quaternionisch zijn, dus $\mathcal{A} = m_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{A} = m_n(\mathbb{C})$ of $\mathcal{A} = m_n(\mathbb{H})$.

De quaternionen kunnen worden gezien als een vierdimensionale uitbreiding van de complexe getallen. Het is een groep bestaande uit de vier elementen $1, i, j$ en k waarbij de vermenigvuldiging niet commuteert. De groep van de complexe getallen \mathbb{C} is een ondergroep van de quaternionen \mathbb{H} .

Verder is een representatie ρ van \mathcal{A} op de Hilbertruimte nodig. Schücker schrijft [11] dat elke representatie die in aanmerking komt moet bestaan uit een directe som van irreducibele representaties. Als \mathcal{A} reële elementen heeft, is er slechts één mogelijke representatie, de zogeheten fundamentele representatie op \mathbb{R}^n . Met complexe elementen zijn er twee mogelijkheden, de fundamentele representatie en zijn complex geconjugeerde. Tot slot is er voor een algebra met quaternionische elementen slechts één mogelijke representatie: de fundamentele representatie op \mathbb{C}^{2n} . [11]

In berekeningen is het vaak handig de commutatieve en niet-commutatieve delen van de algebra te scheiden. Een element a van \mathcal{A} wordt dan als volgt uitgeschreven:

$$a = (b_1, \dots, b_M, c_1, \dots, c_N) \in \mathcal{A} = \mathbb{C}^M \oplus \bigoplus_{k=1}^N M_{n_k}(\mathbb{C}) \quad \text{met } n_k \geq 2 \quad (38)$$

¹Recent is aangetoond dat neutrino’s massa hebben. Dit duidt erop dat er mogelijk toch rechtshandige neutrino’s bestaan.

Tabel 1: Vermenigvuldigingstabel van de quaternionen

1	1	i	j	k	-1	-i	-j	-k
1	1	i	j	k	-1	-i	-j	-k
i	i	-1	k	-j	-i	1	-k	i
j	j	-k	-1	i	-j	k	1	-i
k	k	j	-i	-1	-k	-j	i	1
-1	-1	-i	-j	-k	1	i	j	k
-i	-i	1	-k	j	i	-1	k	-i
-j	-j	k	1	-i	j	-k	-1	i
-k	-k	-j	i	1	k	j	-i	-1

Het drietal $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ wordt het spectraal tripel genoemd. Dit is de kern van de niet-commutatieve meetkunde.

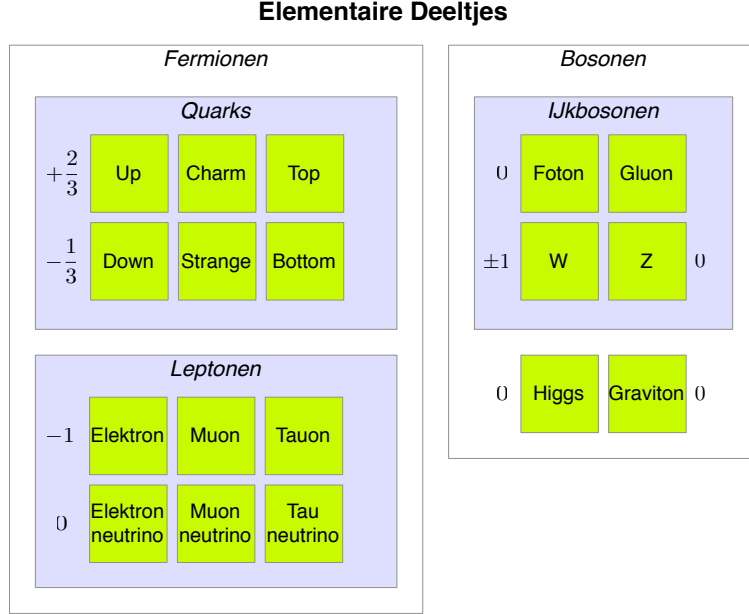
3 Het Standaardmodel

Het Standaardmodel beschrijft alle bekende deeltjes en drie van de vier fundamentele interacties: de sterke, zwakke en elektromagnetische wisselwerking. In het Standaardmodel zijn er zestien fundamentele deeltjes en zestien fundamentele antideeltjes. Dit zijn de quarks (up, down, charm, strange, top en bottom), de leptonen (elektron, muon en tauon en de bijbehorende neutrino's) en de bosonen (foton, gluon, W, Z, graviton, Higgs).

Een belangrijk wiskundig element van het Standaardmodel is een ijk-groep van de vorm $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. $U(n)$ is de verzameling van unitaire matrices met dimensie $n \times n$ en $SU(n)$ is de verzameling unitaire matrices met determinant 1. Daarnaast zijn er negentien parameters waarvan de waarde niet theoretisch kan worden voorspeld, maar alleen experimenteel kan worden vastgesteld.

Een introductie in de deeltjesfysica en het Standaardmodel is te vinden in Halzen & Martin. [24]

Alain Connes en Ali Chamseddine hebben het Standaardmodel opnieuw opgebouwd vanuit de niet-commutatieve meetkunde. Hierbij heeft men een geschikt spectraal tripel gekozen en gebruik gemaakt van experimentele eigenschappen van de bekende deeltjes.



Figuur 1: De elementaire deeltjes volgens het Standaardmodel, met de lading aangegeven. Van elk deeltje met lading bestaat ook een antideeltje, met tegengestelde lading. Daarnaast komen quarks in drie ‘kleuren’ voor: rood, groen en blauw.

3.1 Keuze van het spectraal tripel

In het niet-commutatieve Standaardmodel is de algebra \mathcal{A} als volgt gekozen [11, 6]:

$$\mathcal{A} = C^\infty(M) \otimes \mathcal{A}_F \quad (39)$$

met de eindigdimensionale algebra \mathcal{A}_F :

$$\mathcal{A}_F = \mathbb{C} \oplus \mathbb{H} \oplus M_3(\mathbb{C}) \quad (40)$$

De even Hilbertruimte is een complexe vector met negentig componenten:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_R \oplus \mathcal{H}_L^c \oplus \mathcal{H}_R^c \quad (41)$$

waarbij de vier termen als volgt zijn gedefiniëerd:

$$\mathcal{H}_L = (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^3) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}) \quad (42)$$

$$\mathcal{H}_R = (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^3) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^3) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}) \quad (43)$$

waarbij N het aantal generaties quarks is. In het commutatieve Standaardmodel is dit altijd gelijk aan 3, maar het niet-commutatieve Standaardmodel

Tabel 2: Parameters in het (commutatieve) Standaardmodel. De eerste negen parameters zijn de massa's van de zes quarks en van drie leptonen. Drie parameters komen voort uit de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-mixing en één bepaalt de fase bij schending van de lading-pariteit-symmetrie. Nog eens drie parameters zijn de koppelingssterkten van de drie ijkgroepen. Daarnaast is er nog een parameter die verband houdt met de quantumchromodynamica en er zijn twee parameters voor het Higgs-mechanisme waarvan de waarde pas bekend is wanneer het Higgs-boson experimenteel is waargenomen.

Tabel 3: Parameters voor het bepalen van de belangrijkste Lagrangiaan in het Standaardmodel. Bron: [25]

Massa's

Symbol	Deeltje	Massa
m_e	elektron	511 keV
m_μ	muon	106 MeV
m_τ	tauon	1,78 GeV
m_u	up-quark	3(1) MeV
m_d	down-quark	6,0(1,5) MeV
m_c	charm-quark	1,24(9) GeV
m_s	strange-quark	103(20) MeV
m_t	top-quark	172,6(1,4) GeV
m_b	bottom-quark	4,20(7) GeV

Overige parameters

Symbol	Omschrijving	Waarde
θ_{12}	CKM 12-mixing-hoek	0,229
θ_{23}	CKM 23-mixing-hoek	0,042
θ_{13}	CKM 13-mixing-hoek	0,004
δ	CKM CP-	0,995
g_1	U(1) koppelingssterkte	0,357
g_2	SU(2) koppelingssterkte	0,652
g_3	SU(3) koppelingssterkte	1,221
θ_{QCD}	Quantumchromodynamische vacuümhoek	0
μ	Kwadratische Higgs-koppelingssterkte	<i>onbekend</i>
λ	Higgs zelf-koppelingssterkte	<i>onbekend</i>

leent zich ook voor generalisatie tot $N \in \mathbb{N}$. Vooralnog zijn er drie generaties bekend, dus we gebruiken verder $N = 3$.

De termen \mathcal{H}_L^c en \mathcal{H}_R^c zijn de tegenhangers van respectievelijk \mathcal{H}_L en \mathcal{H}_R met geconjugeerde lading. Deze zijn qua structuur identiek.

De eerste factor in elke term correspondeert met de zwakke isospin doublets en singlets voor respectievelijk \mathcal{H}_L en \mathcal{H}_R . De tweede term correspondeert met het aantal generaties N , dat uit experimentele gegevens gelijk blijkt te zijn aan 3. De derde term tot slot correspondeert met de kleur-triplets en singlets.

Het verschil tussen \mathcal{H}_L en \mathcal{H}_R komt voort uit het empirische gegeven dat er wel neutrino's bestaan met linkshandige chiraliteit, maar niet met rechtshandige chiraliteit, terwijl er wel rechtshandige anti-neutrino's bestaan, maar geen linkshandige.

\mathcal{H}_L en \mathcal{H}_L^c hebben ieder $8N = 24$ complexe componenten. \mathcal{H}_R en \mathcal{H}_R^c hebben ieder $7N = 21$ componenten. \mathcal{H} heeft dus negentig componenten.

De interne Dirac-operator $\tilde{\mathcal{D}}$ is een matrix van matrices

$$\tilde{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M} & 0 & 0 \\ \mathcal{M}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mathcal{M}} \\ 0 & 0 & \bar{\mathcal{M}}^* & 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

\mathcal{M} is de fermionische massamatrix:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes M_u \otimes 1_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes M_d \otimes M_d \otimes 1_3 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes M_e \end{pmatrix} \quad (45)$$

met de diagonale matrices:

$$M_u = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$M_d = C_{KM} \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$M_e = \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix} \quad (48)$$

$$(49)$$

met de massa's m volgens tabel 4 en de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-matrix C_{KM} die het verval van verval via de zwakke wisselwerking beschrijft [24].

Tabel 4: Massa's van elementaire deeltjes in de fermionische massamatrix. Bron: [25]

Symbol	Massa van	Experimentele waarde
m_u	Up-quark	3(1) MeV
m_c	Charm-quark	1, 24(9) GeV
m_t	Top-quark	172, 6(1, 4) GeV
m_d	Down-quark	6, 0(1, 5) MeV
m_s	Strange-quark	103(20) MeV
m_b	Bottom-quark	4, 20(7) GeV
m_e	Elektron	0, 510998918(44) MeV
m_μ	Muon	105, 658369(9) MeV
m_τ	Tauon	1, 776, 99(29) MeV

De representatie ρ van $(a, b, c) \in \mathcal{A}$ op \mathcal{H} wordt dan [11]

$$\rho(a, b, c) = \begin{pmatrix} \rho_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho}_L^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\rho}_R^c \end{pmatrix} \quad (50)$$

met

$$\rho_L(a) = \begin{pmatrix} a \otimes 1_N \otimes 1_3 & 0 \\ 0 & a \otimes 1_N \end{pmatrix} \quad (51)$$

$$\rho_R(b) = \begin{pmatrix} b 1_N \otimes 1_3 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{b} 1_N \otimes 1_3 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{b} 1_N \end{pmatrix} \quad (52)$$

$$\rho_L^c(b, c) = \begin{pmatrix} 1_2 \otimes 1_N \otimes c & 0 \\ 0 & \bar{b} 1_2 \otimes 1_N \end{pmatrix} \quad (53)$$

$$\rho_R^c(b, c) = \begin{pmatrix} 1_N \otimes c & 0 & 0 \\ 0 & 1_N \otimes c & 0 \\ 0 & 0 & \bar{b} 1_N \end{pmatrix} \quad (54)$$

4 Resultaten

4.1 De bosonische actie-functionaal

De natuurkunde van het Standaardmodel wordt vaak beschreven in actie-functionalen:

$$S := \int \mathcal{L} d^4x \quad (55)$$

waarbij \mathcal{L} een Lagrangiaan is. Veel theorieën zijn geldig tot aan een bepaalde maximale energie. Bij het berekenen wordt dan vaak een ‘cutoff’-energie Λ als bovengrens genomen. In de niet-commutatieve meetkunde wordt zo’n actie-functionaal uitgerekend door het spoor van operatoren in de Hilbertruimte \mathcal{H} te nemen, dit naar aanleiding van de correspondentie tussen ds en D^{-1} .

Chamseddine en Connes hebben de actie-functionaal voor bosonen uitgerekend als [6].

$$S = \text{Tr} \left(\chi \frac{D}{\Lambda} \right) + \langle \psi, D\psi \rangle \quad (56)$$

waarbij χ de chiraliteitsmatrix uit (12) is en ψ een spinor in \mathcal{H} . Het naar de Einstein- en Yang Mills-termen genormaliseerde resultaat is als volgt [6]:

$$S_b = \int \sqrt{g} \left[\frac{1}{2\kappa_0^2} R - \mu_0^2 (H^* H) + a_0 C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} + b_0 R^2 + c_0^* R^* R + d_0 R_{;\mu}^{\mu} + e_0 \right. \\ \left. + \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{\mu\nu i} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + |D_\mu H|^2 - \xi_0 R |H|^2 + \lambda_0 (H^* H)^2 \right] \quad (57)$$

met als parameters:

$$\begin{aligned} \mu_0^2 &= \frac{4}{3\kappa_0^2} & a_0 &= -\frac{9}{8g_{03}^2} & b_0 &= 0 & c_0 &= -\frac{11}{18}a_0 \\ d_0 &= -\frac{2}{3}a_0 & e_0 &= \frac{45}{4\pi^2} f_0 m_0^4 & \lambda_0 &= \frac{4}{3} g_{03}^2 \frac{z^2}{y^3} & \xi_0 &= \frac{1}{6} \end{aligned} \quad (58)$$

en de definitie:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} - (g_{\mu[\rho} R_{\nu]\sigma} - g_{\nu[\rho} R_{\mu]\sigma}) + \frac{1}{6} (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) R \quad (59)$$

R is de Ricci-krommingsstraal en $R_{\mu\nu}$ zijn de componenten van de Ricci-krommingstensor van de ruimte. $G_{\mu\nu}$ zijn de componenten van de Einstein-tensor:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (60)$$

waarbij $g_{\mu\nu}$ de componenten van de metriektensor zijn.

Opmerkelijk aan dit resultaat is dat de termen die het Higgs-mechanisme beschrijven op een logische manier uit het model rollen. In het commutatieve Standaardmodel worden deze termen apart toegevoegd, maar in Connes’ Standaardmodel is dit verwerkt in de geometrie van de ruimte.

4.2 Higgs-massa

Een veel gepubliceerd resultaat van Connes’ niet-commutatieve Standaardmodel is de massa van het Higgs-boson. Dit boson is het enige deeltje uit het Standaardmodel dat op het moment van schrijven nog niet experimenteel is

waargenomen. Binnenkort worden er experimenten uitgevoerd waarbij het mogelijk is dat de massa van het Higgs-boson experimenteel wordt vastgesteld. Dit kan een interessante verificatie van Connes' niet-commutatieve meetkunde worden.

Chamseddine et al. voorspellen een massa van 170 ± 10 GeV bij een cutoff-energie Λ van 10^{17} GeV [8]. Knecht en Schücker voorspellen een massa van $175, 1(-9, 8/+5, 8)$ GeV bij een cutoff-energie van $1, 1 \cdot 10^{17}$ GeV [16].

Op 4 augustus 2008 bracht Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab) echter een persbericht uit waarin werd aangekondigd dat een Higgs-massa van 170 GeV experimenteel zeer onwaarschijnlijk gebleken was. Uit de data van twee experimenten op de Tevatron-versneller concludeerden de CDF- en DZero-teams dat er met met 95% zekerheid geen Higgs-boson bestaat met die massa. [26]

5 Conclusie

Door commutativiteit van meetkunde aan te nemen beperkt de natuurkunde zich tot één klasse van theorieën. Al hoewel er geen experimentele aanleiding om aan te nemen dat commutativiteit wordt geschonden in de natuur, is het zeer nuttig te beschouwen welke mogelijkheden er zijn als we deze aanname laten vallen.

Dit betekent echt er dat een groot deel van de meetkunde geheel opnieuw geformuleerd moet worden en over het algemeen is dit beduidend ingewikkelder dan in een commutatieve wereld. In een enkel geval kan uit deze meetkunde een theorie worden opgebouwd die juist eenvoudiger is dan zijn commutatieve tegenhanger.

Het niet-commutatieve Standaardmodel van Alain Connes is zo'n theorie. Al hoewel het wordt opgebouwd zonder enige aanname van commutativiteit, resulteert het model in een beschrijving die overeenkomt met zowel experimentele resultaten als het bestaande Standaardmodel – met commutatieve ruimtetijd.

Chamseddine en Connes hebben uit hun versie van het Standaardmodel een massa van het Higgs-boson van 170 ± 10 GeV berekend. Uit experimenten bij Tevatron is gebleken dat dit een onwaarschijnlijke waarde is. Mogelijk zullen experimentele gegevens uit de LHC-opstellingen dit resultaat kunnen bevestigen of ontkrachten.

Dankwoord

Ik wil Prof. Jan de Boer graag hartelijk bedanken voor zijn heldere uitleg, waardevolle suggesties en zijn goede begeleiding. Daarnaast wil ik Dr. Walter van Suijlekom van de Radboud Universiteit Nijmegen bedanken voor

zijn inspirerende voordracht.

Referenties

- [1] Alain Connes, '*Noncommutative Geometry*', InterEditions, 1990 / Academic Press 1994 (Engelse vertaling door Sterling Berberian)
- [2] Alain Connes, '*Noncommutative Geometry Year 2000*', 23 november 2000 (arXiv: math/0011193)
- [3] Ali H. Chamseddine en Alain Connes, '*Conceptual Explanation for the Algebra in the Noncommutative Approach to the Standard Model*', 21 november 2007 (arXiv: hep-th/0706.3690)
- [4] Alain Connes en Mathilde Marcolli '*A walk in the noncommutative garden,*' 3 januari 2006 (arXiv:math/0601054)
- [5] Ali H. Chamseddine en Alain Connes, '*Why the Standard Model*', 25 juni 2007 (arXiv: hep-th/0706.368)
- [6] Ali H. Chamseddine en Alain Connes, '*The Spectral Action Principle*', 3 juni 1996 (arXiv: hep-th/9606001)
- [7] Alain Connes, '*Noncommutative Geometry and the standard model with neutrino mixing*' 31 augustus 2006 (arXiv: hep-th/0608226)
- [8] Ali H. Chamseddine, Alain Connes en Matilde Marcolli, '*Gravity and the standard model with neutrino mixing*', 23 oktober 2006 (arXiv: hep-th/0610241)
- [9] Sean M. Carroll et al., '*Noncommutative Field Theory and Lorentz Violation*', mei 2001 (arXiv: hep-th/0105082)
- [10] Thomas Schücker, '*Geometries and Forces*', juli 1997 (arXiv: hep-th/9712095)
- [11] Thomas Schücker, '*Forces from Connes Geometry*', 26 maart 2007 (arXiv: hep-th/0111236)
- [12] Jan-H. Jureit, Thomas Krajewski , Thomas Schücker en Christoph A. Stephan, '*On the noncommutative standard model*', 3 mei 2007 (arXiv: hep-th/0705.0489)
- [13] Lionel Carminati, Bruno Iochum en Thomas Schücker '*Noncommutative Yang-Mills and Noncommutative Relativity: A Bridge Over Trouble Water*', 13 juni 1997 (arXiv: hep-th/9706105)
- [14] Joseph C. Varilly, '*An Introduction to Noncommutative Geometry*' (arXiv: physics/9709045)
- [15] Christoph A. Stephan, '*Gauge unication in noncommutative geometry*', 12 september 2007 (arXiv: hep-ph/0709.1857)

- [16] Marc Knecht en Thomas Schücker, ‘*Spectral action and big desert*’, 15 mei 2006 (arXiv: hep-ph/0605166)
- [17] Daniel Kastler, Thomas Schücker, ‘*The Standard Model a la Connes-Lott*’, 21 december 1994 (arXiv:hep-th/9412185)
- [18] Michael R. Douglas en Nikita A. Nekrasov, ‘*Noncommutative Field Theory*’, 18 oktober 2001 (arXiv: hep-th/0106048)
- [19] Ali H. Chamseddine en Alain Connes, ‘*Quantum Gravity Boundary Terms from Spectral Action of Noncommutative Space*’, 18 september 2007, (arXiv:0705.1786)
- [20] Alain Connes, ‘*Gravity coupled with matter and foundation of non-commutative geometry*’, 8 maart 1996 (arXiv:hep-th/9603053)
- [21] Ana Alboteanu, Thorsten Ohl en Reinhold Rückl, ‘*The Noncommutative Standard Model at $\mathcal{O}(\theta^2)$* ’, 24 juli 2007 (arXiv: hep-th/0707.3595)
- [22] P. Balachandran, T. R. Govindarajan, B. Ydri, ‘*The Fermion Doubling Problem and Noncommutative Geometry*’, 12 november 1999, (arXiv: hep-th/9911087)
- [23] H. J. Groenewold, ‘*On the principles of elementary quantum mechanics*’, Physica 12, 1946 p. 405-460
- [24] Francis Halzen en Alan D. Martin, ‘*Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*’, John Wiley & Sons, Inc. 1984
- [25] A. V. Manohar en C. T. Sachrajda, ‘*Quark masses*’, http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/quarks_q000.pdf
- [26] Fermilab, ‘*Tevatron Experiments Double-Team Higgs Boson*’ (persbericht), 4 augustus 2008 (<http://www.fnal.gov/pub/presspass/press-releases/Higgs-constraints-August2008.html>)