Monopolen

Kees V. van Driel & Philip A. van Reeuwijk

juli 2009

Voorwoord

In dit verslag houden we ons bezig met de magnetische monopool. Dit is een hypothetisch deeltje met een magnetische lading, of een magneet met maar één pool. In de klassieke theorie bestaat de notie van een magnetische lading al langer dan de Maxwell-vergelijkingen; magnetische lading is alijd als de bron van magnetische velden gezien, tot het inzicht van Ampère dat elektrische stroom ook als bron voor magnetisme kan optreden. Dit beeld van de oorzaak van magnetische verschijnselen (géén magnetische lading, maar bewegende elektrische lading) is het enige overgeblevene in het klassieke formalisme, de Maxwell-vergelijkingen: deze geven een verband tussen de verdeling van lading en het elektrische en magnetische veld. In de standaardvorm geven de vergelijkingen wel een elektrische lading, maar geen magnetische. Buiten dit zijn de vergelijkingen symmetrisch onder verwisseling van het elektrisch en magnetisch veld. Dit geeft aanleiding om een magnetische lading te introduceren. Dat voorziet ons immers van de mogelijkheid om de vergelijkingen volledig symmetrisch op te schrijven. Zo komt het idee van een magnetische monopool heel natuurlijk voort uit de klassieke theorie voor elektromagnetisme. Dit zullen we uitvoeriger bespreken in het volgende hoofdstuk.

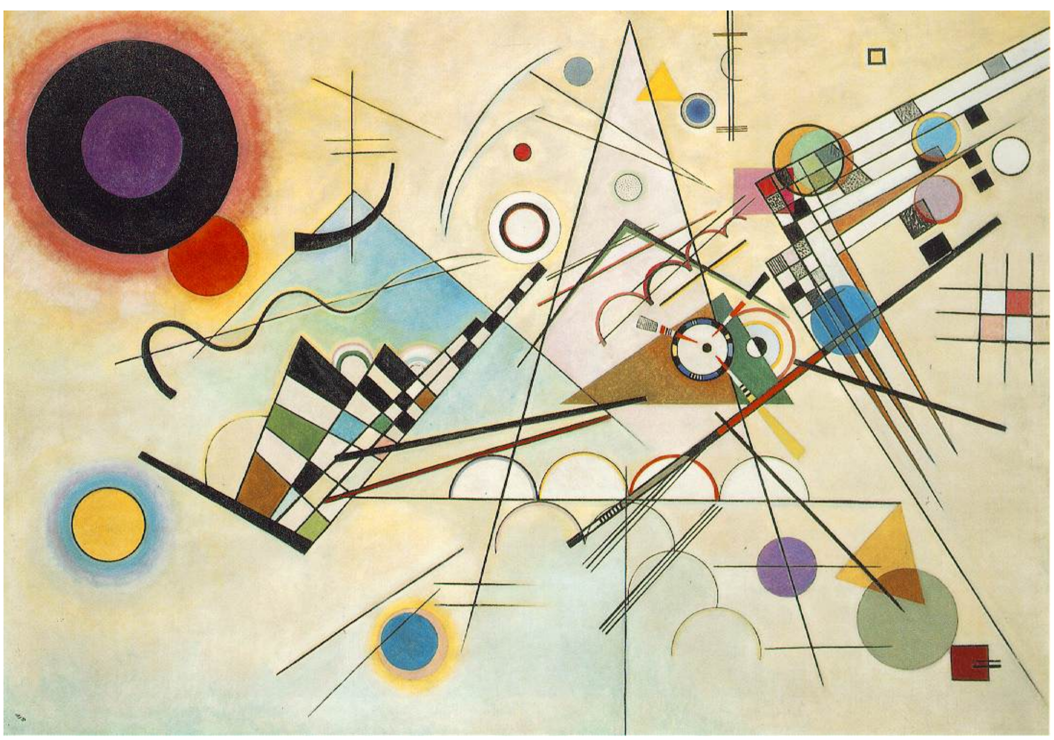
Interessanter werd het wanneer Paul Dirac in 1931 een quantumtheorie voorstelde voor magnetische lading. In zijn artikel Quantised Singularities in the Electromagnetic Field kwam hij met de eerste serieuze beschrijving van magnetische lading: de Dirac-monopool. Ook vond hij dat, als monopolen bestaan, ze direct impliceren dat lading, elektrische of magnetische, gequantiseerd is. Dit zullen we later in het verslag uit de doeken doen. Zijn verhandeling deed veel stof opwaaien onder fysici. Sindsdien is een systematische jacht op monopolen geopend. Tot op de dag van vandaag heeft geen enkel experiment echter uitsluitsel geboden over het bestaan van monopolen en blijft het mogelijk dat ze er gewoon niet zijn.

Het model van Dirac poneert ook een probleem. De beschrijving van de monopool zoals Dirac die voorstelt geeft een elektromagnetische potentiaal die niet overal gedefiniërd is. Het is daarom noodzakelijk om voor een globale, gladde, beschrijving over te gaan op verdere wiskundige abstractie. Een van de modellen die hier het product van is de 't Hooft-Polyakov-monopool. In dit model worden de singulariteiten die Dirac aan het licht bracht uit de weg geruimd met de machinerie van quantumveldentheorie, door het invoeren van extra velden die een globale definitie van potentialen toestaan. We zullen van dit model later een kwalitatieve beschrijving geven.

De magnetische monopool heeft voor veel discussie gezorgd in de moderne natuurkunde. Experimenten hebben weliswaar nog geen gevolgaanduidende resultaten geleverd, maar onder theoretici is magnetische lading eigenlijk een voldongen feit.

We danken prof. dr Jan de Boer voor zijn steun en vertrouwen.

K.V.v.D. & Ph.A.v.R.



Contents

Chapter 1

De Maxwell-vergelijkingen
Invariantie, Dualiteit en Formulering

In natuurlijke eenheden (waar alles gemeten wordt in Planck-schalen, ofwel $\hbar = c = G = 1$) zien de Maxwell-vergelijkingen, klassiek geformuleerd in termen van de vectorvelden $\vec{E}, \vec{B} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, er zo uit [2],[4]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{1.2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \tag{1.3}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \partial_t \vec{E} + 4\pi \vec{J}_e \tag{1.4}$$

voor een elektrische ladingsdichtheid $\rho_e : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ en een stroomdichtheid $\vec{J}_e : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, aangevuld met de Lorentz-wet voor de elektromagnetische kracht op een lading q_e met snelheid $\vec{v}$:

$$\vec{F} = q_e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1.5}$$

In de aanwezigheid van de op dit moment puur theoretische "magnetische ladings- en stroomdichtheid" ρ_m en $\vec{J}_m$ (waar (1.2) en (1.3) om lijken te smeken) krijgen we de volgende vergelijkingen:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e \tag{1.1'}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_m \tag{1.2'}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} - 4\pi \vec{J}_m \tag{1.3'}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \partial_t \vec{E} + 4\pi \vec{J}_e \tag{1.4'}$$

Wat betekenen deze uitdrukkingen? In de eerste plaats moet opgemerkt worden dat de vergelijkingen (1.1')-(1.4') invariant zijn onder een zogenaamde dualiteitstransformatie over $\theta \in \mathbb{R}$ [2],[4]:

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

We vatten $\vec{E}$ en $\vec{B}$ hier op als de twee componenten van een vector in $\mathbb{R}^2$, formeel luiden de transformaties:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & \sin\theta \\ -\sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

een ondergroep isomorf met $SO(2, \mathbb{R}) \subset GL(6, \mathbb{R})$.
Deze transformatie laat de velden alleen invariant als we de bronnen op dezelfde manier transformeren (met de conventie $\vec{\rho}_i = (\rho_i, \vec{J}_i)$, $i = e, m$):

$$\begin{pmatrix} \vec{\rho}_e \\ \vec{\rho}_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho}_e \\ \vec{\rho}_m \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Dit wil zeggen dat we elektrische bronnen naar magnetische kunnen transformeren en dat ladingen elektrisch en magnetisch noemen tot op zekere hoogte een conventie is; pas als de verhouding tussen elektrische en magnetische lading van deeltje tot deeltje verschilt, is de magnetische lading niet meer overal "weg te transformeren" en kan men met recht van magnetische monopolen spreken.

Deze transformatie toepassen voor $\theta = \frac{\pi}{2}$ levert $\vec{E} \mapsto \vec{B}, \vec{B} \mapsto -\vec{E}$, en idem voor de bronnen. De Lorentz-wet in aanwezigheid van magnetische lading luidt dus:

$$\vec{F} = q_e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + q_m(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}) \tag{1.5'}$$

1.1 Het potentiaalformalisme; ijktransformaties

De Maxwellvergelijkingen staan ons toe de velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$ uit te drukken als afgeleiden van andere grootheden, de zogenaamde potentalen. Volgens de Stelling van Helmholtz geldt voor een willekeurig (glad) vectorveld $\vec{X}$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{X} = 0 &\iff \exists \vec{Y} : \vec{X} = \nabla \times \vec{Y} \\ \nabla \times \vec{X} = \vec{0} &\iff \exists f : \vec{X} = \nabla f \end{aligned}$$

De conditie uit (1.2) levert ons dan dat voor zekere $\vec{A} : \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, en (1.3) geeft vervolgens

$$\begin{aligned} &\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} = -\partial_t(\nabla \times \vec{A}) = -\nabla \times (\partial_t \vec{A}) \\ \Rightarrow &\nabla \times \vec{E} + \nabla \times (\partial_t \vec{A}) = \nabla \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = \vec{0} \\ \Rightarrow &\exists V : \vec{E} + \partial_t \vec{A} = -\nabla V \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V - \partial_t \vec{A} \end{aligned}$$

Nu zijn beide velden in de potentialen uitgedrukt (het minteken voor de elektrostatische potentiaal is conventie, [2]); dit is een alomtegenwoordig fenomeen in de natuukunde. De potentialen bieden in de klassieke theorie een groot computationeel voordeel, en in de relativistische beschrijving zorgen ze voor een bijzonder elegante en inzichtelijke formulering, maar hun belang is groter: in de Lagrangiaanse of Hamiltoniaanse mechanica en de quantumfysica kan een Hamiltoniaan voor een geladen (vrij; V is de elektrostatische potentiaal, niet de potentiële energie) deeltje in aanwezigheid van velden uitsluitend in termen van de potentialen worden gegeven [3]:

$$\mathcal{H} = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + qV \tag{1.8}$$

Aangezien vergelijking (1.2), de afwezigheid van magnetische monopolen, precies is wat er in dit onderzoek ter discussie staat, en de potentialen deze voorwaarde veronderstellen, zal een groot deel van het werk in het teken staan van het redden van het onmisbare potentiaalformalisme.

Een eerste stap is de vraag in hoeverre de definieerende differentiaalvergelijkingen de potentialen vastleggen: het is meteen duidelijk dat het optellen van een constante de velden niet beinvloedt, maar daar houdt onze keuzevrijheid niet op. De zogenaamde ijkvrijheid op de potentialen speelt in de theorie een cruciale rol. Stel:

$$
\begin{aligned}
&\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A}' := \nabla \times (\vec{A} + \vec{D}) \\
&\Rightarrow \nabla \times \vec{D} = \vec{0} \Rightarrow \vec{D} = \nabla \varLambda \\
&\Rightarrow \vec{E} = -\nabla V - \partial_t \vec{A} = -\nabla V' - \partial_t \vec{A}' := -\nabla (V + \varGamma) - \partial_t (\vec{A} + \nabla \varLambda) \\
&\Rightarrow \varGamma = -\partial_t \varLambda,
\end{aligned}
$$

kortom: $V \mapsto V - \partial_t \varLambda, \vec{A} \mapsto \vec{A} + \nabla \varLambda$,[2] , laten de de velden invariant voor elke reële functie $\varLambda$. In de relativistische formulering zal een specifieke keuze, de Lorentz-ijking ("Lorentz gauge"), de covariantie van de vergelijkingen garanderen; deze ijking,

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\partial_t V \tag{1.9}$$

zullen we van nu af aan exclusief gebruiken, tenzij anders vermeld.

1.2 Covariantie; differentiaalvormen

Zoals bekend zijn de Maxwell-vergelijkingen het oervoorbeeld van relativistisch- of Lorentz-covariante formules; Einsteins Speciale Relativiteitstheorie leert ons dat een natuurwet in alle inertiaalsystemen, aan elkaar gekoppeld door transformaties in de volledige Poincaré-groep, geldig moet zijn en dezelfde voorspellingen moet doen. Dit geldt voor de Maxwell-vergelijkingen, maar is in de klassieke formulering niet onmiddellijk duidelijk; de transformaties van de velden zijn redelijk gecompliceerde vergelijkingen met elektrische en magnetische termen door elkaar. Eerst laten we zien hoe dit eenvoudig te verhelpen is in de taal van tensoren en 4-vectoren; vervolgens zal blijken dat deze taal niets anders is dan een geometrische interpretatie van de studie van differentiaalvormen op varieteiten. De taal van de differentiaalvorm is in dit kader de mooiste, elegantste en meest practische manier om onze wetten uit te drukken en te onderzoeken.

Het ligt onmiddellijk voor de hand stroom en lading (we beperken ons hier tot het elektrische geval; monopolen komen zodirect ter sprake) als componenten van een 4-vector op te vatten:

$$J^\mu = (\rho, J_1, J_2, J_3). \tag{1.10}$$

De velden, zo blijkt meteen uit hun gedrag onder Lorentztransformaties, vormen de zes componenten van een antisymmetrische tensor van rang twee in vier dimensies, de veldtensor:

$$F^{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{array} \right\}. \tag{1.11}$$

De duale van deze tensor, $G^{\mu\nu}$, verkrijgt men door de dualiteitstransformatie uit (1.6) over een rechte hoek toe te passen. De volledige wetten van Maxwell zijn nu te geven als

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = J^\mu, \quad \frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \tag{1.12}$$

waar we de sommatieconventie hanteren. Allicht krijgen de potentialen eenzelfde behandeling, $A^\mu = (V, A_1, A_2, A_3)$, en we vinden dan dat:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}, \tag{1.13}$$

zoals een directe berekening laat zien. Let hier op het verschil tussen boven- en benedenindices: een vector met bovenindex is contravariant, met benedenindex covariant. In de hyperbolische meetkunde van platte Minkowski-ruimtetijd, de arena van de speciale relativiteitstheorie, is het verschil het teken van de eerste component: $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (-x^0, x^1, x^2, x^3)$. De zogenaamde metriek $\eta_{\mu\nu}$, een tensor die op vectoren werkt om contra- in covariant te transformeren ($x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$), speelt in de algemene relativiteitstheorie een centrale, dynamische rol; in ons eenvoudige geval van Minkowsi-ruimtetijd luidt hij:

$$\eta_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} \tag{1.14}$$

Wanneer we (1.13) invullen in vergelijking (1.12) om de Maxwell-verglijkingen in termen van de potentiaal 4-vector te verkrijgen dan vinden we (het potentiaalformalisme regelt de homogene duale vergelijking automatisch):

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = J^\mu,$$

een redelijk onwerkbare vergelijking. Wanneer we ons echter onze ijkvrijheid realiseren, blijkt dat onze keuze van de Lorentzconditie precies was:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \partial_t V = 0 \iff \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} = 0,$$

zodat de eerste term vervalt en we een bijzonder elegante formulering overhouden, genoteerd met de d'Alembertiaan, de natuurlijke relativistische pendant van de Laplaciaan:

$$\Box^2 := \nabla^2 - \partial_t^2 = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}.$$

De hele theorie kan nu worden samengebald als [2],[4]:

$$\boxed{\Box^2 A^\mu = -J^\mu} \tag{1.15}$$

Het vergt weinig inzicht om monopolen in dit formalisme onder te brengen. Zoals hierboven bij de dualiteitstransformaties aangetoond vervangen we (1.12) door

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = J_e^\mu, \quad \frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = J_m^\mu, \tag{1.12'}$$

waar we de elektrische 4-stroom als zodanig benoemd hebben en de magnetische 4-stroom op analoge wijze is ingevoerd. Veel verder kunnen we op dit moment niet gaan: de definitie van de 4-potentiaal behelst automatisch de homogene conditie uit (1.12) en is dus incompatibel met monopolen.

Al deze vergelijkingen vinden hun meest natuurlijke vorm in de studie van differentiaalvormen op variëteiten, een theorie die te ver voert om hier volledig uit de doeken te doen (zie [5],[6],[7]); we noemen hier de hoofdpunten. Een gladde variëteit van dimensie n is een topologische ruimte lokaal homeomorf met $\mathbb{R}^n$, zodanig dat waar deze lokale homeomorfismes overlappen ze een gladde (C^∞) functie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ geven. Op elk punt p heeft een variëteit M een raakruimte $T_p(M)$ isomorf met $\mathbb{R}^n$, precies zoals we elk punt van de verzameling (dus niet vectorruimte) $\mathbb{R}^n$ als oorsprong kunnen kiezen, en dus met ieder punt van de verzameling $\mathbb{R}^n$ een vectorruimte $\mathbb{R}^n$ geïdentificeerd wordt. Als $\{x^i\}$ lokale coördinaten voor M in de buurt van p zijn nemen we de richtingsafgeleiden als basis voor de raakruimte aan p: $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\}$ is de verzameling basisvectoren. Voor de duale ruimte $T_p^*(M)$ nemen we als duale basis $\{dx^i\}$, dat wil zeggen, $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p) = \delta^i_j$. We herhalen de constructie voor tensorproducten van raakruimtes: voor $T_p^{\otimes k}(M)$ vinden we een $T_p^{*,\otimes k}(M)$, die we om technische redenen alternerend maken; we beperken ons tot $\omega_p \in T_p^{*,\otimes k}(M) : \omega_p(X_p^{\sigma(1)}, \ldots, X_p^{\sigma(k)}) = sgn(\sigma)\omega_p(X_p^1, \ldots, X_p^k)\forall\sigma \in S_k, \forall X_p^1, \ldots, X_p^k \in T_p(M)$; deze ruimte is de k^e uitwendige macht van M, $\bigwedge_p^k(M)$, van dimensie $\binom{n}{k}$. De conditie van alternerendheid zorgt ervoor dat een differentiaalvorm (of uitwendige- of co-vector) identiek nul is bij een herhaald argument; voor $k > n$ is de uitwendige macht dan ook de nulruimte. We hebben nu nog twee constructies nodig om onze theorie weer te geven, het wigproduct en de uitwendige afgeleide. Het wigproduct is grof gezegd een bilineaire functie van differentiaalvormen zodanig dat het product weer een differentiaalvorm is, dat wil zeggen, alternerend: voor $\omega_p \in \bigwedge_p^k(M), \eta_p \in \bigwedge_p^l(M)$ hebben we $\omega_p \wedge \eta_p \in \bigwedge_p^{k+l}(M)$. We zien nu dat we de co-vectoren kunnen schrijven als lineaire combinaties van wigproducten van de duale basisvectoren; het voorbeeld voor $n = 3$ is instructief. Kies als duale basis voor de eerste uitwendige macht van een variëteit van dimensie 3 de vormen dx, dy, dz, dan is een willekeurige 1-vorm gegeven als $\omega = a_1dx + a_2dy + a_3dz$, en een andere als $\eta = b_1dx + b_2dy + b_3dz$, zodat we vinden

$$\begin{gathered}
\omega \wedge \eta \\
= (a_1dx + a_2dy + a_3dz) \wedge (b_1dx + b_2dy + b_3dz) \\
= a_1b_1dx \wedge dx + a_2b_2dy \wedge dy + a_3b_3dz \wedge dz \\
+a_1b_2dx \wedge dy + a_2b_1dy \wedge dx + a_1b_3dx \wedge dz \\
+a_3b_1dz \wedge dx + a_2b_3dy \wedge dz + a_3b_2dz \wedge dy \\
= (a_2b_3 - b_3a_1)dy \wedge dz + (a_3b_1 - a_1b_3)dx \wedge dz + (a_1b_2 - a_2b_1)dx \wedge dy \\
\longleftrightarrow
\end{gathered}$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \to \vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

waar we uiteraard gebruiken dat $dx \wedge dx = 0, dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ &c.

Zo zien we dat het wigproduct de natuurlijke generalisatie van het uitproduct is; we kunnen in $\mathbb{R}^3$ het uitproduct met het wigproduct identificeren, omdat $\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$; als we in Minkowski-ruimtetijd werken vinden we $\binom{4}{1} = 4, \binom{4}{2} = 6$, en het uitproduct verliest zijn betekenis. Het beruchte pseudovectorgedrag van het uitproduct in drie dimensies laat al zien dat er zelfs daar iets wringt, de identificatie van een twee-vorm met een vector heeft iets gezochts en onfysisch.

Analoog aan de manier waarop we in $\mathbb{R}^n$ een vectorveld maken door aan elk punt een vector toe te wijzen, kunnen we op een variëteit aan elk punt een k-covector toekennen om de covectoren als functies op M te laten variëren. We noteren de ruimte van "covectorvelden" $\omega \colon p \in M \mapsto \omega_p \in \bigwedge_p^k(M)$ met $\Omega^k(M)$. De uitwendige afgeleide $d \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ is gedefiniëerd als

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(dx^i \wedge \omega)$$

waar de afgeleides werken op de coëfficiënten van de termen van de differentiaalvorm, die nu dus reële functies geworden zijn. Een sprekend voorbeeld is de nul-vorm, een gewone reële functie op M, waar we een bekende calculusstelling terugzien: $f \colon M \to \mathbb{R}, df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$, dus voor een eendimensionale ruimte: $df = \frac{df}{dx} dx$. Een ander aardig en belangrijk voorbeeld in $\mathbb{R}^3$, waar we zoals hierboven 1- en 2-vormen ω resp. $\tau := c_1 dy \wedge dz + \dots$. met vectorvelden en 0- en 3-vormen met scalaire functies identificeren, is

$$\begin{aligned}
df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz &\leftrightarrow \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) \\
d\omega = (\frac{\partial a_2}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial y})dy \wedge dz \ etc. &\leftrightarrow (\nabla \times \vec{a})_1 = \frac{\partial a_2}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial y} \ etc. \\
d\tau = (\frac{\partial c_1}{\partial x} + \frac{\partial c_2}{\partial y} + \frac{\partial c_3}{\partial z})dx \wedge dy \wedge dz &\leftrightarrow \nabla \cdot \vec{c} = \frac{\partial c_1}{\partial x} + \frac{\partial c_2}{\partial y} + \frac{\partial c_3}{\partial z}
\end{aligned}$$

kortom, de uitwendige afgeleide generaliseert de bekende vectordifferentiaaloperatoren in drie dimensies; de regels $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$ en $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0$ volgen uit de basisregel van de uitwendige afgeleide $d^2 = 0$.

Een laatste hulpmiddel om de identificaties van wigproduct resp. uitwendige afgeleide met uitproduct resp. vectorafgeleiden uit te werken is een dualiteitsoperator $\star$, de Hodge-ster, die eigenlijk de symmetrie van de binomiaalcoëfficient ($\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$) uitbuit, hier in drie dimensies:

$$\begin{aligned}\star\colon \Omega^p(M) &\to \Omega^{n-p}(M)\\ \star dx &= dy \wedge dz\\ \star(dx \wedge dz) &= dy\end{aligned}$$

enzovoorts. Onze identificaties kunnen nu exact gemaakt worden, omdat de Hodge-ster van 2-vormen 1-vormen maakt, en van 3-vormen 0-vormen (functies) maakt, en we dus consequent 0-vormen als scalairen en 1-vormen als vectoren kunnen zien, en de rest elimineren:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &\leftrightarrow \star(a \wedge b)\\ \nabla f &\leftrightarrow df\\ \nabla \times \vec{a} &\leftrightarrow \star(d\omega)\\ \nabla \cdot \vec{b} &\leftrightarrow \star(d\eta)\end{aligned}$$

Het is nu kinderspel om de Maxwell-vergelijkingen op te schrijven, covariant, inzichtelijk, coördinaatvrij, makkelijk manipuleerbaar, en op een willekeurige variëteit van dimensie 4. Definieer

$$\begin{aligned}E &= E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz\\ B &= B_1 dy \wedge dz - B_2 dx \wedge dz + B_3 dx \wedge dy,\end{aligned}$$

dan vinden we de veldtensor (2-vorm)

$$F = E \wedge dt + B \tag{1.16}$$

Vergelijken van de componenten geeft precies de tensor uit (1.11), en de antisymmetrie van de tensor is precies het alterneren van de vorm; de duale vorm vinden we als $G = \star F$. (Wat komt het allemaal weer mooi uit.) Met het voor de hand liggende

$$\begin{aligned}J &= \rho dt + J_e^1 dx + J_e^2 dy + J_e^3 dz\\ A &= V dt + A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz\end{aligned}$$

staan de Maxwell-vergelijkingen er:

$$F = dA \tag{1.17}$$

$$dF = 0 \tag{1.18}$$

$$d \star F = \star J_e \tag{1.19}$$

Wederom, in aanwezigheid van magnetische lading J_m:

$$\boxed{dF = \star J_m} \tag{1.18'}$$

$$\boxed{d \star F = \star J_e} \tag{1.19}$$

Dat een potentiaal in dit kader geen optie is is meteen duidelijk uit $d^2 = 0$.

Chapter 2

De Dirac-monopool
Singulariteiten en de Quantisatieconditie

In 1931 werd het fenomeen ”magnetische monopool” voor het eerst serieus behandeld in het artikel Quantised Singularities in the Electromagnetic Field van P.A.M. Dirac [8]. Allereerst zullen we zijn introductie volgen en de beroemde quantisatieconditie voor elektrische en magnetische lading afleiden. Vervolgens geven we een equivalente maar iets inzichtelijkere, moderne afleiding.

Voor een voorstelling van de redenering van Dirac beschouwen we een golffunctie $|\psi\rangle$ van een geladen deeltje in drie dimensies. Deze kan worden uitgedrukt in een product van een reëelwaardige factor voor de amplitude en een e-macht van de reële fase:

$$\langle(\vec{r}, t)|\psi\rangle = A(\vec{r}, t)e^{i\gamma(\vec{r},t)}$$

We realiseren ons nu dat de fase γ geen enkelwaardige, welgedefiniëerde functie hoeft te zijn; de fase zelf is immers niet waarneembaar, en maar op een veelvoud van 2π na bepaald. We kijken nu hoe we de onbepaaldheid van de fase op kunnen vatten als fysisch fenomeen. Om te beginnen eisen we dat het fase*verschil* tussen twee naburige punten welgedefiniëerd is. We kunnen, door infinitisemale bijdragen bij het doorlopen van een pad te integreren nu spreken over het opgebouwde faseverschil bij het doorlopen van een lus. Aangezien men na het doorlopen van een lus weer op het beginpunt is, moet het opgebouwd faseverschil onwaarneembaar zijn, om precies te zijn $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, met n een constante van de lus en zodoende een eigenschap van de fysische situatie. Dirac stelt voor de onbepaaldheid van de totale fase van $|\psi\rangle$ op te nemen in een complexe e-macht $e^{i\beta}$ met β een meerwaardige functie op de ruimte-tijd, echter zó, dat de afgeleiden $\kappa_\mu = (\kappa_0, \vec{\kappa}) := \frac{\partial \beta}{\partial x^\mu}$ wel overal eenduidig zijn om het faseverschil tussen naburige punten welgedefinieerd te houden. We schrijven dus $|\psi\rangle = e^{i\beta}|\psi'\rangle$, met $|\psi'\rangle$ een 'gewone', enkelwaardige toestand van een vrij deeltje. Volgens Stokes is het totale faseverschil na het afleggen van de lus $\mathfrak{L}$, de rand van het oppervlak $\mathfrak{S}$,

$$\int_{\mathfrak{L}} \kappa_\mu dl^\mu = \int_{\mathfrak{S}} (\nabla \times \vec{\kappa}, \nabla \kappa_0 - \partial_t \vec{\kappa}), \tag{2.1}$$

waar de tweede integrand de uitwendige afgeleide van de eerste integrand, een 1-vorm, voorstelt; deze tweede uitdrukking is dus een 2-vorm in vier dimensies, een 6-vector, geïntegreerd over een geörienteerd tweedimensionaal oppervlak geparametriseerd door een 6-vector. Dit is allemaal erg onoverzichtelijk, de onderliggende uitdrukking is de fundamentele vorm van Stokes:

$$\int_{\partial \mathfrak{S}} \kappa = \int_{\mathfrak{S}} d\kappa \tag{2.2}$$

We vinden nu dat

$$-i\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} = e^{i\beta}(-i\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \kappa_\mu)\psi',$$

dat wil zeggen, als $|\psi'\rangle$ aan de Schrödingervergelijking voor een vrij deeltje voldoet, voldoet $|\psi\rangle$ eraan met de Hamiltoniaan van een elektromagnetisch veld (1.8) met $q = -e$ (om concreet te zijn laten we de golffunctie maar een elektron beschrijven), immers: $\widehat{p_i} = -i\frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto \widehat{p_i} + \kappa_i, E \mapsto E - \kappa_0$ levert de gezochte vorm als we de identificatie $\kappa_\mu = (-eV, e\vec{A})$ inzien. Dat de eerder ingevoerde fase β niet volledig vastligt, maar dat we een keuze moeten maken voor de afgeleiden, die de potentialen blijken te zijn, betekent dat de ongedetermineerde fase van een quantumtoestand in een elektromagnetisch veld niets anders is dan de ijkvrijheid op de potentialen. Op de golffunctie van een geladen deeltje in een veld ziet een ijktransformatie over Λ er dan ook uit als $|\psi\rangle \mapsto |\psi\rangle e^{iq\Lambda}$, vermenigvuldiging met een fasefactor. Deze fasefactor is een complex getal van modulus 1, daarom is in de veldentheorie elektrodynamica een ijktheorie over $U(1)$.

Zoals eerder genoemd mag het faseverschil tussen twee golffuncties rond een gesloten lus slechts afwijken met een willekeurige veelvoud van 2π. De continuiteit van de golffunctie geeft dat voor een kleine lus het faseverschil klein wordt, en in (2.1) hebben we gezien dat dit precies de elektromagnetische flux is. Echter, als de golffunctie nul is, is fase niet meer welgedefinieerd kunnen we alleen zeggen dat het faseverschil $2\pi n$ is voor zekere n. Het verdwijnen van de golffunctie vergt vanwege de complexiteit twee condities($\Re\psi = \Im\psi = 0$), dus de locus van singuliere punten is eendimensionaal in de ruimte. Deze locus is de zogenaamde "Dirac string" van karakteristiek n, een constante van de configuratie volgens onze eerdere observatie. Volgens (2.1) vinden we dan dat het faseverschil op een golffunctie na om zo'n "string" heen te zijn gelopen gelijk is aan

$$2\pi n + e \int_{\mathfrak{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S}, \tag{2.3}$$

waar $\mathfrak{S}$ wederom een oppervlak afgesloten door de lus is, het elektisch veld doet hier niet ter zake. Immers, bekijken we een gesloten oppervlak waar de "string" in eindigt, is de flux van het elektrisch veld nul bij afwezigheid van elektrische lading, maar vinden we een eindige magnetische flux ongelijk nul; immers, om een gesloten oppervlak mag de fase niet veranderen, naar voor $n \neq 0$ levert (2.3) dan een magnetische bijdrage aan de flux: $\nabla \cdot \vec{B} \neq 0$.

Als we de magnetische flux uit zo'n bol $4\pi q_m$ noemen, vinden we vervolgens onmiddellijk dat

$$\begin{aligned} 4\pi q_m &= \frac{2\pi n}{e} \\ q_m &= \frac{n}{2e}, \end{aligned}$$

dus voor $n = 1$, de kleinste keuze van q_m en dus de vermoedelijke magnetische elementairlading μ:

$$\boxed{e\mu = \frac{1}{2}} \tag{2.4}$$

Dit is Dirac's beroemde quantisatieconditie; het bestaan van magnetische lading (al is het er naar een) impliceert de quantisatie van elektrische én magnetische lading. We kunnen nog wat preciezer zijn over de interpretatie van de singuliere lijn, de "string", en de connectie met ijktheorie. In het uitwerken van ons voorbeeld is gebleken dat magnetische lading een natuurlijke interpretatie is van het eindpunt van een lijn met verdwijnende golffunctie en dus ongedefinieerde fase; deze fase interpreteerden we als de 4-potentiaal, en we mogen dan ook niet raar opkijken als die zich niet meer overal netjes gedraagt: het potentiaalformalisme veronderstelt het ontbreken van monopolen, dus de vectorpotentiaal moet singulier worden als het magneetveld een divergentie ongelijk nul kent. Deze singuliere lijn is echter onfysisch: de lijn verplaatsen komt neer op het veranderen van de fase van golffuncttie, en dus de potentialen, zodat de keuze van de locatie van de "string" precies de ijkvrijheid is, en de locus van ongedefinieerde punten is een keuze. Het enige is, je kan je potentiaal niet *overal* goed krijgen.

Een ander belangrijk punt is een beetje aan het zicht onttrokken door ons gebruik van natuurlijke eenheden. De dimensieloze fijnstructuurconstante $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ zegt iets over de sterkte van de elektromagnetische kracht, het is een koppelingsconstante. De analoge grootheid voor een monopool, $\alpha_m = \frac{\mu^2}{\hbar c} \approx \frac{137}{4}$, is vele malen groter (dit is een absolute opmerking, de constante is dimensieloos), dus zouden monopolen veel sterker "gekoppeld" zijn dan elektrisch geladen deeltjes. Dit zou verklaren dat ze nog niet waargenomen zijn, ware het niet dat in versnellers tegenwoordig enorme energieën haalbaar zijn; het ontbreken van monopolen blijft een raadsel.

We hebben dit argument redelijk volledig weergegeven omdat het historisch van groot belang is; in de moderne literatuur zijn er snellere wegen om met dezelfde fysica dit resultaat de bereiken. Voor de inzichtelijkheid is het misschien raadzaam een van deze wegen ook te tonen [2].

In de klassieke theorie, vooral in het kader van de behoudswetten, speelt de zogenaamde Poynting-vector $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$ een belangrijke rol, onder andere als impulsdichtheid van de velden. Zodoende is $\vec{r} \times \vec{S}$ de dichtheid van het impulsmoment in een bepaalde elektromagnetische configuratie. Postuleren we de aanwezigheid van monopolen en de gewijzigde Maxwell-vergelijkingen uit (1.1') - (1.4'), dan vinden we voor een elektrisch geladen deeltje e op positie $\vec{r_1}$ en magneetlading μ op positie $\vec{r_2}$ de velden

$$\vec{E} = \frac{e}{|\vec{r} - \vec{r_1}|^3}(\vec{r} - \vec{r_1})$$
$$\vec{B} = \frac{\mu}{|\vec{r} - \vec{r_2}|^3}(\vec{r} - \vec{r_2})$$

We berekenen nu de grootte van het totale impulsmoment van deze configuratie:

$$|\int_{\mathbb{R}^3} \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) dV| = e\mu$$

Als we uit de quantumfysica aannemen dat impulsmoment komt in quanta van $\frac{n}{2}$, komen we op exact dezelfde conditie uit. Deze route, inzichtelijk en conceptueel helder als hij is, is eigenlijk een sluiproute; om op de quantisatie van impulsmoment te komen is in de handboeken quantumfysica hetzelfde argument van een enkelwaardige golffunctie nodig.

Chapter 3

Overige modellen

't Hooft-Polyakov en Topologische Lading

In dit korte hoofdstuk stippen we een klein aantal moderne lijnen van argumentatie aan waarlangs over monopolen gedacht wordt. Het voert veel te ver om hier diep of technisch op in te gaan, maar de denkwijze en het theoretisch kader zijn misschien interessant om als wegwijzer te volgen.

Een eerste hint in de goede richting is het nadenken over de aard van lading. Uit de eerste basis van de elektrostatica weten we dat het elektrische veld van een geladen puntdeeltje (een concept waar Maxwelltheorie met haar dichtheden en verdelingen eigenlijk helemaal niet op berekend is) op de positie van de lading een singuliere vorm aanneemt, operationeel ondervangen maar theoretisch niet opgelost met Dirac's deltafunctie. Een ander berucht voorbeeld van het instorten van het formalisme is de elektron-zelfinteractie, met de paradoxen van elektromagnetische traagheid en de a-causale Abraham-Lorentzformule. De problemen van de monopool zijn deels de problemen van elk (geladen) puntdeeltje, en die zijn in de klassieke theorie onopgelost.

Het probleem van de ongedefinieerde potentiaal voor monopolen geeft ons een aanwijzing waar we moeten zoeken: bij de topologie. Hoewel volgens (1.18') de uitwendige afgeleide van de veldtensor overal verdwijnt behalve op de monopool is F zelf niet meer als dA te schrijven. De vraag

$$dF = 0 \overset{?}{\iff} F = dA$$

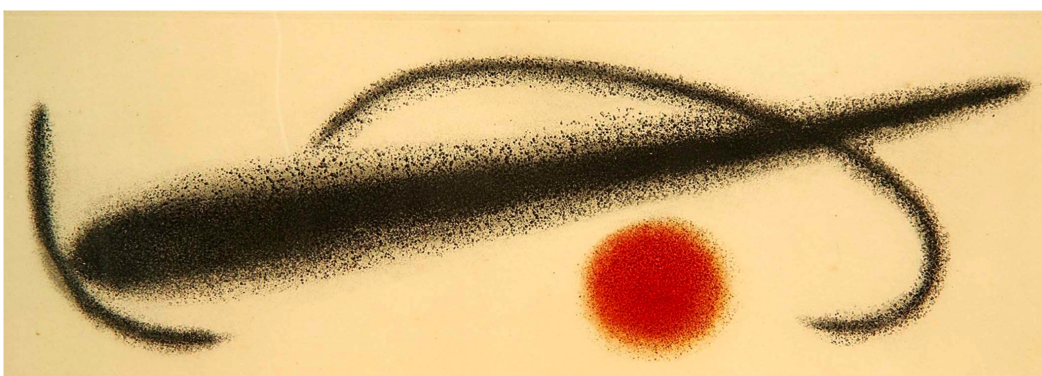
wordt beantwoord door de De Rham-cohomologieruimtes $H^p_{DeRham}(M)$ [7], die grof gezegd de verhouding tussen gesloten en exacte dfferentiaalvormen geven: stel $Z^p(M) = \{\omega \in \Omega^p(M) | d\omega = 0\}$ en $B^p(M) = \{\omega \in \Omega^p(M) | \exists \eta \in$

$\Omega^{p-1}(M) : \omega = d\eta\}$, dan zijn Z^p, B^p deelruimtes van Ω^p, en wegens $d^2 = 0$ geldt $B^p \subset Z^p$; we vormen dus het quotient $H^p_{DeRham} = Z^p/B^p$. Dit quotient blijkt een topologische invariant te zijn, dat wil zeggen, stabiel onder continue deformaties van M. Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ blijkt triviale cohomologieruimtes te hebben, elke gesloten vorm is exact; dit is een algemene formulering van de Stelling van Helmholtz uit hoofdstuk 1. We hebben gezien dat dit alles niet meer opgaat in de aanwezigheid van magnetische lading. De suggestie is nu dat lading kennelijk topologisch van aard is, de topologie van de ruimte verandert, immers, aanwezigheid van lading verandert het analytische gedrag van vormen zozeer dat ze zich formeel in een andere ruimte zouden moeten bevinden. De cohomologieruimtes van de n-sfeer $\mathbb{S}^n$, die topologisch gesproken vergelijkbaar is met $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x\}$, zijn niet triviaal; de moeite die het formalisme heeft met puntdeeltjes suggereert dat we de punten waar lading aanwezig is van de theorie uit moeten sluiten, om zo in een gepunctueerde ruimte te belanden die zich topologisch heel anders gedraagt.

We hebben het nu over het analytische gedrag van vormen en functies op deze ruimte, maar het kan (letterlijk) fundamenteler; ook zonder de ruimte waar we in werken van algebraïsche of analytische structuur te voorzien kunnen we naar elementaire topologische invarianten kijken: de fundamentaalgroep $\pi_1(M, p)$ of, algemener, de hogere homotopiegroepen $\pi_n(M, p)$, die intuitief iets zeggen over de structuur van de ruimte: samenhang, gaten, lussen die niet continu is elkaar over te voeren zijn. Het belangrijkste en eenvoudigste niet-triviale voorbeeld is $\pi_1(\mathbb{S}^1, p) \simeq \mathbb{Z}$, corresponderend met het inzicht dat de *verschillende* manieren om over een cirkel te lopen en op hetzelfde punt terug te keren gegeven worden door het aantal rondjes dat je maakt en of je met de klok mee of tegen de klok in loopt. Anders gezegd, een lus in de cirkel wordt uniek gegeven door een geheel getal, een windingsgetal. Dit is precies waar de n is Dirac's quantisatieconditie vandaan komt; het is een topologisch quantumgetal.

Een op dit moment zeer vruchtbare, maar in dit bestek en op dit niveau onbenaderbare invalshoek is ijktheorie, in het bijzonder de niet-Abelse of Yang-Mills-variant, [1], [10]. We hebben gezien hoe de ijkvrijheid op de elektromagnetische potentialen een groot hulpmiddel was in het weergeven van de theorie. Elke vrijheid om iets te doen aan een formulering zonder de voorspellingen de veranderen is een symmetrie, gegeven door een groep, en dit is in alle takken van de natuurkunde van het grootste belang. IJktheorieën beschrijven natuurwetten zelfs uitsluitend in termen van hun symmetrieën, en identificeren met een wet of verschijnsel een ijkgroep die het systeem beschrijft. In 1974 liet Gerard 't Hooft [9] zien dat in het kader van ijktheorieën van $SU(2)$ of $SU(3)$, waar de elektromagnetische groep $U(1)$ als ondergroep wordt genomen, monopooloplossingen bestaan die potentiaaltheoretisch geen probleem vormen. Terugvertaald naar vectorvelden worden de monopolen beschreven door drie velden, naast $\vec{E}, \vec{B}$ is er een derde "vrijheidsgraad" nodig om een monopool te vinden die zich probleemloos gedraagt. Onafhankelijk van 't Hooft heeft Polyakov dezelfde oplossing gevonden.

In de *state-of-the-art* - modellen van modere Yang-Mills-theorie en snaartheorie, en zoals hierboven in topologische overwegingen binnen de quantumveldentheorie, is de monopool springlevend. We hebben in dit stuk nauwelijks het topje van de ijsberg weten te raken, maar hopelijk de geïnteresseerde lezer een begin van een idee gegeven waar monopolen opduiken, en hoe actief ze gezocht worden in vrijwel alle velden van de theoretische natuurkunde.



Nawoord

In het voorgaande hebben we gezien hoe een betrekkelijk eenvoudige probleemstelling als die van de magnetische monopool voor veel opschudding kan zorgen in de theoretische natuurkunde. Het denken over monopolen is dan ook vruchtbaar gebleken; de magnetische monopool geeft een directe verklaring voor de ladingsquantisatie. De meeste moderne invalshoeken veronderstellen tegenwoordig het bestaan van de magnetische monopool.

Ook in de experimentele natuurkunde is hard gestreden om het, tot op heden, open probleem op te helderen. Er zijn al talloze pogingen gedaan om de eventuele aanwezigheid van monopolen te bevestigen. Wellicht de bekendste en meest eenvoudige maakt gebruik van een supergeleidende spoel. Wanneer een monopool door zo een spoel valt induceert deze, middels een magnetische fluxverandering, een meetbare stroom. B. Cabrera (werkzaam aan de universiteit van Stanford) dacht in 1982 op deze manier een monopool geregistreerd te hebben, maar sindsdien is nooit een soortgelijk resultaat gevonden. Zijn onderzoek wordt vandaag de dag niet als conclusief beschouwd.

Het moge duidelijk zijn dat men nog niet uitgedacht is over monopolen. Ofschoon het bestaan van de deeltjes door velen geaccepteerd is en er eigenlijk geen steekhoudende argumenten voor het tegendeel pleiten, is het wachten nog steeds op experimentele verlossing. Óf we moeten concluderen, schijnbaar het meest onwaarschijnlijke geval, dat de monopolen gewoonweg niet bestaan.

Amsterdam, juli 2009

Bibliografie

[1] N. Manton, P. Sutcliffe *Topological Solitons.*
Cambridge University Press, 2004

[2] D.J. Griffiths *Introduction to Electrodynamics.* 3rd ed.
Pearson Benjamin Cummings, 2008

[3] D.J. Griffiths *Introduction to Quantum Mechanics.* 2nd ed.
Pearson Benjamin Cummings, 2005

[4] J. D. Jackson *Classical Electrodynamics.* 2nd ed.
John Wiley & Sons, 1975

[5] F.B. Schutz *Geometrical Methods of Mathematical Physics.*
Cambridge University Press, 1980

[6] M. Spivak *Calculus on Manifolds.*
Westview Press, 1965

[7] L.W. Tu *An Introduction to Manifolds.*
Springer Verlag, 2008

[8] P.A.M. Dirac *Quantised Singularities in the Electromagnetic Field.*
Proc. Roy. Soc. A 133,60, 1931

[9] G. 't Hooft *Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories.*
Nuclear Physics B79 276-284, 1974

[10] P. Goddard, D.I. Olive *Magnetic Monopoles in Gauge Field Theories.*
Rep. Prog. Phys. Vol. 41, 1978