Supersymmetrie in niet-relativistische quantummechanica

Robert Noest
Hans Wiermans
Begeleider: Prof. Dr. Jan de Boer

Instituut voor Theoretische Fysica
Valckenierstraat 65
1018 XE Amsterdam

E-mail: Robert.Noest@student.uva.nl

E-mail: Hans.Wiermans@student.uva.nl

Samenvatting.

In dit verslag beschrijven we hoe supersymmetrie gebruikt wordt in de quantummechanica. We beginnen met een uitleg van het basisprincipe van supersymmetrie, daarnaast komen de motivaties voor supersymmetrie langs. Vervolgens geven we een simpel voorbeeld van een supersymmetrisch systeem in de quantummechanica en daarna bouwen we de theorie van de grond af op. We behandelen onder andere het spectrum van supersymmetrische quantummechanica, de superalgebra en symmetriebreking. We sluiten af met een aantal toepassingen van de theorie.

1. Een introductie in supersymmetrie

1.1. Wat is supersymmetrie?

Supersymmetrie is een fundamentele symmetrie in de natuur die bosonen en fermionen aan elkaar relateert. Bosonen, deeltjes met een geheeltallige spin en fermionen, deeltjes met een halftallige spin, verschillen fundamenteel van elkaar in de manier waarop ze zich gedragen in meerdeeltjessystemen. Fermionen zijn onderhevig aan het Pauli uitsluitingsprincipe, wat betekent dat geen twee fermionen met dezelfde quantumgetallen dezelfde toestand kunnen bezetten. Bosonen hebben hier geen last van en er kunnen zich oneindig veel bosonen in één toestand bevinden.

Hoewel bosonen en fermionen dus fundamenteel verschillen, zorgt supersymmetrie toch voor bepaalde relaties tussen bosonische en fermionische toestanden. Het zijn deze relaties die oplossingen geven voor veel hardnekkige natuurkundige problemen zoals we zullen zien in dit artikel.

Wij vinden het van belang om te benadrukken dat supersymmetrie vooralsnog alleen een theorie is. Er is *nog* niet bewezen dat de natuur ook werkelijk supersymmetrisch is. We zeggen *nog*, omdat dit weleens kon veranderen in de zeer nabije toekomst. Van de Large Hadron Collider (LHC), die dit najaar hopelijk eindelijk gaat werken, wordt verwacht dat hij de juiste energieschalen kan bereiken om supersymmetrische partnerdeeltjes (zie sectie 1.2.3) te creëren.

1.2. Motivaties voor supersymmetrie

Supersymmetrie heeft een interessant verleden. Het werd begin jaren '70 door verschillende groepen in Rusland en de VS bedacht. Sindsdien is supersymmetrie in vele gebieden binnen de theoretische natuurkunde toegepast. Dit komt omdat supersymmetrie een oplossing vormt voor vele moderne natuurkundige problemen. In de volgende secties bespreken we enkele van deze problemen en de oplossingen die supersymmetrie hiervoor biedt.

1.2.1. Snaartheorie Een van de eerste plaatsen waar supersymmetrie werd toegepast was in de snaartheorie. Deze theorie, die sinds het eind van de jaren '60 bestond, bevatte toen nog alleen bosonen en wordt tegenwoordig aangeduid als bosonische snaartheorie. Deze theorie bevat echter een aantal hardnekkige problemen, waardoor het nooit een juiste beschrijving van de natuur kan zijn.

Ten eerste voorspelt het een deeltje, het Tachyon, met een imaginaire massa dat als gevolg hiervan alleen sneller dan het licht kan bewegen. Ten tweede werkt het alleen consistent in 26 dimensies. Het belangrijkste probleem is echter dat er binnen deze theorie geen fermionen bestaan. Aangezien de materie om ons heen grotendeels is opgebouwd uit fermionen (voornamelijk up- en down-quarks en elektronen), kan bosonische snaartheorie hierdoor geen goede beschrijving van de natuur zijn. Dit is waar supersymmetrie om de hoek komt kijken: in supersymmetrische snaartheorie, ook wel supersnaartheorie genoemd, zorgt de supersymmetrie ervoor dat er naast de bosonen ook fermionen in het spel komen.

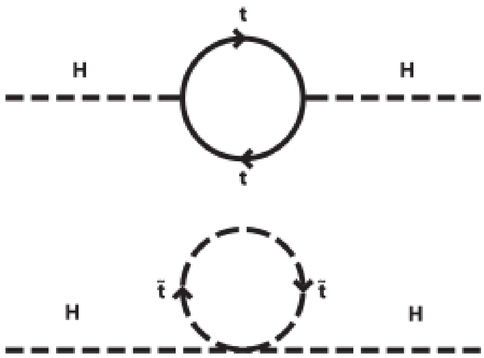
De supersnaartheorieën hebben meer voordelen. Het aantal dimensies waarin de theorie klopt kan worden teruggeschroeft van 25+1 naar 10+1. Verder bevatten supersnaartheorieën geen Tachyon, waardoor mogelijke problemen met causaliteit ook van tafel verdwijnen. Tegenwoordig zijn vijf van de meest gebruikte snaartheorieën samengevat in de M-theorie, die als een grote kandidaat wordt gezien om quantumzwaartekracht te beschrijven en alle natuurkrachten in één theorie te verenigen. Eén van de eigenschappen die deze vijf theorieën delen: ze zijn allen supersymmetrisch.

1.2.2. Het hierarchie probleem Een ander hardnekkig probleem in theoretische fysica staat bekend als het hierarchie probleem en heeft te maken met de extreem lichte massa van de deeltjes in het Standaard Model, in het bijzonder het Higgs-boson. Metingen van CERN's LEP-versneller en meer recentelijk van Fermilab's Tevatron wijzen erop dat de Higgs-massa tussen de 114 en 185 GeV moet liggen (zie bijvoorbeeld de nieuwste data van Fermilab's CDF- en DØ-detectoren [1]). Dit is echter de fysische meetbare massa M_F, niet de parameter m_H die uiteindelijk in het Standaard Model verschijnt. Deze wordt namelijk beïnvloed door allerlei correcties, veroorzaakt door virtuele deeltje-antideeltjesparen. Als al deze correcties worden samengevat als Δm_H, dan is de fysische Higgs-massa naïef te schrijven als:

$$M_F = \Delta m_H + m_H.$$

Zoals al genoemd ligt M_F tussen de 114 en 185 GeV. De correcties ten gevolge van de virtuele deeltjesparen zijn echter ook uit te rekenen en zijn van de orde 10^{19} GeV. Omdat de correcties en de fysische massa optellen, betekent dit dat m_H, de parameter van het SM, nauwkeurig moet zijn op 19 cijfers. Hoewel hier wiskundig gezien niets mis mee is, is het niet een elegante oplossing en zoekt men liever naar alternatieven voor deze enorme correctie. Supersymmetrie levert een oplossing voor dit probleem. In supersymmetrische versies van het Standaard Model bestaat er voor elk boson een fermionische superpartner en vice versa. Deze supersymmetrische partnerdeeltjes, met weinig originele namen als squark, slepton of sneutrino zorgen ervoor dat er in totaal twee keer zoveel deeltjes zijn als in het huidige Standaard Model. Ook deze "superpartners" leveren via virtuele deeltjesparen een contributie aan Δm_H. Echter, de bijdrage van een "gewoon" deeltje wordt volledig geannihileerd door de bijdrage van zijn superpartner. Zie Figuur 1.

1.2.3. Donkere materie We hebben het al gehad over supersymmetrische partnerdeeltjes. Naast het hierarchie probleem is er nog een groot, onopgelost natuurkundig probleem waarvoor deze superpartners een uitkomst kunnen bieden: donkere materie. Uit o.a. de rotatiecurves van spiraalvormige sterrenstelsels en de bewegingen van sterrenstelsels binnen clusters is afgeleid dat ongeveer 23 procent (gecombineerde WMAP+BAO+SN data, zie [2]) van de massa-energie dichtheid van het heelal uit



Figuur 1. Boven: een Higgs boson valt even uiteen in een top-quark loop, dit is gelijk aan het uiteenvallen in een top- en antitop-quark. Beneden: een Higgs valt uiteen in een stop-squark loop. De twee bijdragen aan Δm_H vallen tegen elkaar weg.

deze donkere materie bestaat. Tot op heden is echter nog niet bekend waar deze niet-baryonische materie uit bestaat.

Men dacht al snel aan neutrino's. Deze deeltjes interacteren immers nauwelijks met normale materie en zijn daardoor moeilijk detecteerbaar. Later werd echter duidelijk dat de donkere materie grotendeels "koud" moest zijn, d.w.z. het zou bestaan uit niet-relativistische deeltjes. Hierdoor vielen neutrino's af als bouwstenen van deze koude donkere materie.

Een andere, niet-relativistische donkere materie kandidaat wordt geleverd door supersymmetrie. Het supersymmetrische Standaard Model bezit voor elk boson een fermionische superpartner. Zo is er onder andere het zino (partner van het Z^0), het fotino (partner van het foton) en het higgsino (partner van H^0). Lineaire combinaties van deze drie fermionen leveren vier verschillende massa-eigentoestanden die "neutralino's" worden genoemd.

In supersymmetrische versies van het Standaard Model worden de behoudswetten voor baryongetal en leptongetal vervangen door de *wet van behoud van R-pariteit.* R-pariteit is gedefiniëerd als

$$R = (-1)^{2j+3B+L}, \tag{1}$$

waarbij j de spin van een deeltje aangeeft, B het baryongetal en L het leptongetal. Door simpel invullen van de quantumgetallen in vergelijking (1) is te zien dat alle deeltjes uit het Standaard Model R-pariteit +1 hebben, terwijl de superpartners R-pariteit -1 bezitten. Als R-pariteit behouden is, betekent dit dat "gewone" deeltjes alleen in andere gewone deeltjes kunnen vervallen en superpartners alleen in andere superpartners. Hierdoor moet de lichtste superpartner, de lichtste van de vier neutralino's, stabiel zijn. Deze neutralino wordt het *Lightest Supersymmetric Particle* (LSP) genoemd.

Mocht de natuur echt supersymmetrisch zijn, dan zouden alle deeltjes met R-pariteit -1 uiteindelijk vervallen in deze LSP. Dit betekent dat er wel eens heel veel van dit soort deeltjes in het heelal kunnen zijn, die samen een aanzienlijk deel van de donkere materie kunnen verklaren.

Het feit dat de superpartners nog niet zijn ontdekt in deeltjesbotsingsexperimenten toont aan dat de massa van de deeltjes vrij hoog is. Er wordt geschat dat de massa van het neutralino zo tussen de 100 GeV en 1 TeV ligt. Dit is interessant, omdat dit ruim binnen het bereik ligt van de LHC. Mochten deze deeltjes bestaan, dan zal de LHC ze vinden. Dit toont echter ook aan, iets dat al bekend is, dat zelfs *als* de natuur supersymmetrisch is, deze symmetrie niet exact is. Als dit wel zo zou zijn zouden de massa's van de gewone deeltjes gelijk zijn aan die van hun superpartners. Aangezien dit duidelijk niet het geval is, moet het zo zijn dat de supersymmetrie *gebroken* is, meer hierover in sectie 2.3.

1.2.4. Overige motivaties Naast de hier al genoemde motivaties, zijn er nog meer toepassingen van supersymmetrie waarbij deze theorie grote problemen zou kunnen oplossen. We bespraken al een hiërarchie probleem aan de hand van de Higgs-massa correcties. Dit hiërarchie-probleem heeft te maken met het enorme verschil in sterkte tussen de zwakke kernkracht en zwaartekracht. Een nog veel groter verschil in energie tussen theorie en praktijk doet zich voor bij de waarde van de vacuüm-energiedichtheid. De meetresultaten van de Voyager-sateliet en de voorspelde waarde uit quantumveldentheorie ontlopen elkaar hier met een factor 10^{107}! Ook in dit geval bied supersymmetrie weer een (gedeeltelijke) oplossing.

Supersymmetrie wordt ook veelal gebruikt in *Grand Unified Theories*, ook wel GUT's. Deze theorieën op zeer hoge energieschalen worden gebruikt om de elektrozwakke en sterke kernkracht te combineren in één allesoverkoepelend framework.

1.3. Gebruikte eenheden

Nog even een opmerking over de gebruikte eenheden: we werken in een systeem waar $\hbar = 1$ en de massa $m = 1$, hierdoor wordt de impuls-operator: $p_x = -i\partial_x$ en kan de Hamiltoniaan van een één-dimensionaal quantum systeem worden geschreven als:

$$H = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + V.$$

1.4. Een simpel supersymmetrisch systeem

In de quantummechanica is supersymmetrie geen symmetrie tussen deeltjes. Wel kunnen we een aantal belangrijke eigenschappen van een supersymmetrisch systeem naar voren zien komen, die ook in quantumveldentheorie gelden. Om deze eigenschappen zichtbaar te maken beginnen we met de Hamiltoniaan van een gewone 1-dimensionale harmonische oscillator [3].

1.4.1. De harmonische oscillator

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + \omega^2 x^2).$$

Het is dan mogelijk om verhogings- en verlagings-operatoren te definiëren, die een energieniveau één niveau omhoog of omlaag schuiven:

$$A := \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(-p_x - i\omega x),$$

waarbij A de verlagingsoperator is en $A^\dagger$ zijn complex geconjugeerde verhogingsoperator. De commutator van de twee operatoren is:

$$[A, A^\dagger] := AA^\dagger - A^\dagger A = 1.$$

Hierdoor kunnen we de Hamiltoniaan in een andere vorm schrijven:

$$H = \frac{\omega}{2}(A^\dagger A + AA^\dagger) = \omega(A^\dagger A + \frac{1}{2}). \tag{2}$$

Nu gaan we het 2-dimensionale geval bekijken:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + \omega^2 x^2) + \frac{1}{2}(p_y^2 + \omega^2 y^2) = H_x + H_y.$$

Hier is het dus mogelijk om de Hamiltoniaal op te delen in twee delen en deze apart te behandelen. Je kunt dus weer dezelfde verhogings- en verlagings-operatoren definiëren, alleen nu zijn het er vier, twee voor x en twee voor y. Omdat de A_x en A_y commuteren, kan je vervolgens de Hamiltoniaan schrijven als:

$$H = \frac{\omega}{2}(A_x^\dagger A_x + A_x A_x^\dagger + A_y^\dagger A_y + A_y A_y^\dagger) = \omega(A_x^\dagger A_x + A_y^\dagger A_y + 1).$$

1.4.2. Supersymmetrisch Dan gaan we nu kijken naar de supersymmetrische oscillator [4]. Deze bestaat ook uit twee componenten, alleen heten ze nu een bosonisch en een fermionisch deel. Het bosonische deel is precies hetzelfde als (2). Voor het fermionische deel moeten we een nieuwe verhogings- en verlagings-operator introduceren:

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

met weer $C^\dagger$ als de verhogingsoperator. Deze operator voldoet aan de volgende relaties:

$$\{C, C^\dagger\} := CC^\dagger + C^\dagger C = 1,$$

$$[A, C] = 0.$$

De eerst vergelijking heet de anti-commutator, het is de commutator maar dan voor fermionen. Het verschil komt doordat twee bosonen symmetrisch zijn onder verwisseling, maar fermionen antisymmetrisch. Analoog aan (2) kunnen we nu een fermionische Hamiltoniaan opstellen:

$$H_F = \frac{\omega}{2}(C^\dagger C - CC^\dagger) = \omega(C^\dagger C - \frac{1}{2}).$$

De supersymmetrische Hamiltoniaan ziet er dan uit als:

$$H = H_B + H_F = \omega(A^\dagger A + C^\dagger C).$$

Als we dat weer uitschrijven zien we dat dit de Hamiltoniaan is van een elektron dat over de x-as kan bewegen door een magneetveld dat in de z-richting staat:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + \omega^2 x^2) + \frac{\omega}{2}\sigma_z.$$

Om nu de supersymmetrie in dit systeem zichtbaar te maken kijken we naar de energieën van het systeem. Van het bosonische deel zijn de energieën $(n + \frac{1}{2})\omega$, het is immers een deeltje in een gewone harmonische potentiaal. Van het fermionische deel zie je dat de energie $\mp\frac{1}{2}\omega$ is, omdat σ_z een diagonaalmatrix is. Tellen we deze twee hamiltonianen op dan zien we dat de energie van de supersymmetrisch oscillator dus $(n + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2})\omega$ is. Voor elke energie zijn er dus twee mogelijkheden, òf n energie-eenheden in het bososische deel en de laagste toestand in het fermionische deel, òf $n - 1$ energie-eenheden in het bosonische deel en de hoogste toestand in het fermionische deel. De enige uitzondering is de grondtoestand, die heeft maar 1 mogelijkheid.

We zien hier dus dat de energie toestanden altijd in paren komen. Voor elke energietoestand (als die niet bij de grondtoestand is) is er een andere toestand die erbij hoort en dezelfde energie heeft. Dit is de vorm van supersymmetrie in quantummechanica. Het is niet een symmetrie tussen deeltjes, maar tussen toestanden van een "fermionische" en een "bosonische" Hamiltoniaan. We zullen dit exacter maken bij het behandelen van het algemene geval.

2. De theorie

2.1. Partner Hamiltonianen en het spectrum

We zullen nu het specifieke voorbeeld van de harmonische potentiaal loslaten om te kijken wat alle supersymmetrische systemen gemeen hebben. We beginnen met een algemene Hamiltoniaan:

$$H_B = p_x^2 + V_B(x),$$

De subscript voor de bosonische Hamiltoniaan komt een beetje uit de lucht vallen nu, maar wordt binnenkort duidelijk. Om supersymmetrie te kunnen gebruiken moeten we de Hamiltoniaan kunnen opdelen in twee operatoren [5]. We definiëren:

$$A := -p_x + iw(x) \ , \ A^\dagger := -p_x - iw(x). \tag{3}$$

We zien dat $H_B = A^\dagger A$ als we $w(x)$ zo kiezen dat:

$$V_B(x) = w(x)^2 - w'(x).$$

Nu kunnen we ook kijken naar $H_F = AA^\dagger$. Het is duidelijk dat beide Hamiltonianen veel gemeen zullen hebben, omdat ze beide opgedeeld kunnen worden in A en $A^\dagger$. We kunnen H_F uitschrijven:

$$H_F = p_x^2 + V_F(x),$$

met daarin:

$$V_F(x) = w(x)^2 + w'(x).$$

In beide Hamiltonianen wordt de potentiaal dus bepaald door de functie $w(x)$ en deze heet om die reden de superpotentiaal. De twee Hamiltonianen die je dan krijgt heten partner Hamiltonianen en omdat het er twee zijn is het handig om ze een verschillende naam te geven. Uit de deeltjesfysica halen we daarom de namen bosonisch en fermionisch, maar dat heeft alleen met de symmetrie te maken, niet met de Hamiltonianen. We gaan nu de symmetrie tussen bieden Hamiltonianen duidelijk maken, daarvoor nemen we allereerst een eigenfunctie van H_B:

$$H_B \mid \psi_n^B\rangle = E_n^B \mid \psi_n^B\rangle.$$

Dan geldt:

$$H_F A \mid \psi_n^B\rangle = AA^\dagger A \mid \psi_n^B\rangle = AH_B \mid \psi_n^B\rangle = E_n^B A \mid \psi_n^B\rangle,$$

we zien dus dat A een "bosonische"toestand naar een "fermionische"toestand stuurt met dezelfde energie. De uitzondering hierop is als $A \mid \psi_n^B\rangle = 0$, oftewel als A de bosonische staat annihileert, maar dan hebben we dat:

$$H_B \mid \psi_n^B\rangle = A^\dagger A \mid \psi_n^B\rangle = 0.$$

Oftewel alleen de grondtoestand van de bosonische Hamiltoniaan heeft geen partner toestand bij de fermionische Hamiltoniaan. We kunnen dit zelfde bekijken voor een eigenfunctie van H_F:

$$H_F \mid \psi_n^F\rangle = E_n^F \mid \psi_n^F\rangle,$$

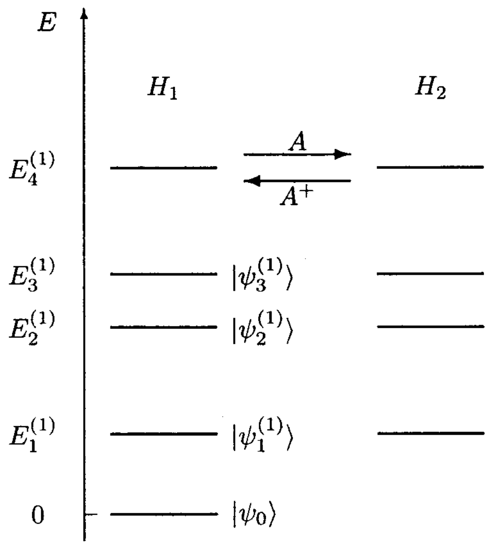
dan zien we weer dat:

$$H_B A^\dagger \mid \psi_n^F\rangle = A^\dagger AA^\dagger \mid \psi_n^F\rangle = A^\dagger H_F \mid \psi_n^B\rangle = E_n^F A^\dagger \mid \psi_n^F\rangle,$$

$A^\dagger$ doet dus precies het omgekeerde, hij stuurt een eigenfunctie van de fermionische Hamiltoniaan naar een eigenfunctie van de bosonische Hamiltoniaan met dezelfde energie. Ook hier geldt weer de uitzondering dat als $A^\dagger$ de toestand annihileert, dan moet het de grondtoestand zijn geweest van de fermionische Hamiltoniaan. Een algemeen energiespectrum ziet er dan uit als in afbeelding 2.

2.2. Transmissie en Reflectie

Om te laten zien hoe nuttig het verband tussen de partner Hamiltonianen kan zijn gaan we nog een voorbeeld uitwerken over transmissie en reflectie van golven [5]. Om een continu spectrum te maken moeten we eisen dat superpotentiaal eindig blijft voor



Figuur 2. Energieniveau's van de twee partner Hamiltonianen, hier aangegeven met H_1 en H_2. Ook de werking van de operatoren A en $A^\dagger$ is aangegeven.

$x \to \pm\infty$. We nemen dus: $w(x \to \pm\infty) = w_\pm$, dan is ook $w'(\pm\infty) = 0$ en dus geldt: $V_B(\pm\infty) = V_F(\pm\infty) = w_\pm^2$.

Nu nemen we een inkomende golf van $-\infty$ met energie E: e^{ikx}. Op de potentialen V_B en V_F reflecteert deze met coëfficiënten R_B en R_F en gaat verder met T_B en T_F. We hebben dus:

$$\begin{aligned} \psi_{B,F}(k, x \to \infty) &= e^{ikx} + R_{B,F}e^{-ikx}, \\ \psi_{B,F}(k', x \to -\infty) &= T_{B,F}e^{ik'x}. \end{aligned}$$

Door de relatie tussen de Hamiltonianen te gebruiken kunnen we een relatie vinden tussen de reflectie en transmissie coëfficiënten. We hebben dat:

$$A\psi_B = c\psi_F,$$

met c een constante. Als we dit gebruiken krijgen we twee vergelijkingen:

$$\begin{aligned} c(e^{ikx} + R_F e^{-ikx}) &= i(\partial_x + w_-)(e^{ikx} + R_B e^{-ikx}) \\ &= iw_-(e^{ikx} + R_B e^{-ikx}) + i(ike^{ikx} - ikR_B e^{-ikx}) \\ &= e^{ikx}(iw_- - k) + e^{-ikx}R_B(iw_- + k), \end{aligned}$$

en:

$$\begin{aligned} cT_F e^{ik'x} &= i(\partial_x + w_+)T_B e^{ik'x} \\ &= e^{ik'x}T_B(iw_+ + k'). \end{aligned}$$

Door nu termen met dezelfde exponent aan elkaar gelijk te stellen vinden we:

$$ce^{ikx} = (iw_- - k)e^{ikx}$$

$$cR_Fe^{-ikx} = (iw_- + k)R_Be^{-ikx}$$
$$cT_Fe^{ik'x} = (iw_+ + k')T_Be^{ik'x}.$$

Daaruit zien we dat:

$$c = (iw_- - k),$$

en dus dat:

$$R_B = R_F\frac{iw_- - k}{iw_- + k} = R_F\frac{w_- + ik}{w_- - ik},$$

en:

$$T_B = T_F\frac{iw_- - k}{iw_+ - k'} = T_F\frac{w_- + ik}{w_+ + ik'} = T_F\frac{w_+ - ik'}{w_- - ik}.$$

Voor die laatste stap heb je een uitdrukking voor k en k' nodig. Deze vinden we door $H\psi = E\psi$ uit te werken of k te herkennen als de kinetische energie en dus: $E = k^2 + V$. Er volgt:

$$k = \sqrt{E - w_-^2},$$
$$k' = \sqrt{E - w_+^2}.$$

Als eerste is het interessant om op te merken dat de Hamiltonianen dezelfde reflectie en transmissie kansen hebben. Immers:

$$|R_B|^2 = |R_F\frac{w_- + ik}{w_- - ik}|^2 = |R_F|^2|\frac{w_- + ik}{w_- - ik}|^2 = |R_F|^2.$$

De reflectiekansen zijn dus hetzelfde en omdat reflectie en transmissie samen een kans van 1 hebben, is ook de transmissiekans gelijk. Ook zien we dat als $w_- = w_+$ dan is $T_B = T_F$.

Nu gaan we kijken naar de superpotentiaal $w(x) = \mu\tanh(\alpha x)$. Die heeft als bijbehorende potentialen:

$$V_F(x) = \mu\left(\mu + (\alpha - \mu)\mathrm{sech}(\alpha x)^2\right),$$

en

$$V_B(x) = \mu\left(\mu - (\alpha + \mu)\mathrm{sech}(\alpha x)^2\right).$$

Als nu $\alpha = \mu$ dan zien we dat V_F constant is en we weten van constante potentialen dat die reflectieloos zijn. Vanwege de supersymmetrie is dan direct ook V_B reflectieloos, iets wat zonder de symmetrie niet zo duidelijk is. We zien dus dat met behulp van supersymmetrie we een aantal extra mogelijkheden hebben om reflectie en transmissie eigenschappen van de potentiaal te achterhalen.

2.3. De Superalgebra

2.3.1. Supercharges en de supersymmetrische Hamiltoniaan We hebben al gezien dat de operatoren A en $A^\dagger$ een bosonische toestand naar een fermionische toestand sturen en andersom. We hebben ook gezien dat $A^\dagger \mid \psi_n^B\rangle = A \mid \psi_n^F\rangle = 0$. Als we nu de bosonische en fermionische toestand van gelijke energie, $\mid \psi_n^B\rangle$ en $\mid \psi_n^F\rangle$ in een vector zetten, kunnen we de A-operatoren in matrix vorm zetten. Op deze manier worden de Q-operatoren, ook wel de *supercharges* genoemd, gedefinieërd:

$$Q^\dagger := \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad Q := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

Als we nu de vector $\mid \psi\rangle$ definiëren als:

$$\mid \psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi^B \\ \psi^F \end{pmatrix},$$

dan zien we dat:

$$Q^\dagger \mid \psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^B \\ \psi^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\dagger \psi^F \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$Q \mid \psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^B \\ \psi^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A\psi^B \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Dus $Q^\dagger$ stuurt de fermionische staat naar een bosonische, en maakt de bosonische staat kapot, terwijl Q precies het tegenovergestelde doet.

Verder definiëren we de supersymmetrische Hamiltoniaan H:

$$H = \begin{pmatrix} H_B & 0 \\ 0 & H_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix}. \tag{6}$$

2.3.2. Superalgebra Het is nu tijd om de algebraïsche relaties van de verschillende operatoren eens op een rijtje te zetten. Deze relaties bestaan uit zowel commutatoren $[A, B]$, als anti-commutatoren $\{C, D\}$. Als de operatoren van een algebra zowel via commutatoren als anti-commutatoren zijn gerelateerd, heet de algebra een *superalgebra*. De superalgebra van de supersymmetrische quantummechanica ziet er als volgt uit:

$$\{Q^\dagger, Q^\dagger\} = \{Q, Q\} = 0 \tag{7}$$
$$\{Q^\dagger, Q\} = \{Q, Q^\dagger\} = H \tag{8}$$
$$[Q^\dagger, H] = [Q, H] = 0. \tag{9}$$

Het is makkelijk om aan te tonen dat deze relaties kloppen. Eerst (7):

$$\{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 2(Q^\dagger)^2 = 2\begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Evenzo:

$$\{Q, Q\} = 2Q^2 = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Bewijs van (8):

$$\begin{aligned} \{Q^\dagger, Q\} = Q^\dagger Q + QQ^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\dagger & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix} = H. \end{aligned}$$

Als laatste zullen we laten zien dat de supercharges commuteren met de Hamiltoniaan. Voor Q geldt:

$$\begin{aligned} [Q, H] &= QH - HQ \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & AA^\dagger A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & AA^\dagger A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

En voor zijn geadjungeerde geldt:

$$\begin{aligned} [Q^\dagger, H] &= Q^\dagger H - HQ^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger AA^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger AA^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

2.4. Symmetriebreking

We hebben in de vorige sectie gezien dat een Hamiltoniaan van een supersymmetrisch systeem moet voldoen aan de relaties (7) tot en met (9). Als de Hamiltoniaan van een systeem in het algemeen aan deze relaties voldoet, enkel de grondtoestand *niet*, dan zeggen we dat de supersymmetrie van dit systeem *gebroken* is.

Laten we eerst nogmaals kijken wat er gebeurt met de grondtoestand in een *ongebroken* supersymmetrisch systeem. Voor de grondtoestand $\mid 0\rangle$ met energie nul geldt dat

$$Q^\dagger \mid 0\rangle = 0,$$

dus $Q^\dagger$ annihileert de grondtoestand, omdat die alleen een bosonisch deel bezit en $Q^\dagger$ slaat alle bosonische toestanden dood tot nul, zoals te zien is in (4).

Stel dat de energie van de grondtoestand nu *niet* nul is, maar een vaste waarde $E_0 \neq 0$ heeft. Laten we deze toestand $\mid GT\rangle$ noemen. Dan geldt voor deze toestand:

$$\begin{aligned} H \mid GT\rangle &= E_0 \mid GT\rangle \\ (QQ^\dagger + Q^\dagger Q) \mid GT\rangle &= E_0 \mid GT\rangle. \end{aligned} \tag{10}$$

Dus Q en $Q^\dagger$ annihileren de grondtoestand niet. Dit moet echter wel, want deze supercharges zijn opgebouwd uit de ladder-operatoren van zowel het bosonische als fermionische spectrum. Omdat beide supercharges een verlagings-operator bezitten, de één uit de bosonische, de ander uit de fermionische ladder, zouden deze, werkend op de *grond*toestand, de toestand moeten annihileren. Omdat dit niet gebeurt, moet er een toestand zijn met een lagere energie dan de grondtoestand, wat echter weer in tegenspraak is met de definitie van een grondtoestand.

De "oplossing" van deze tegenspraak wordt gebracht door de conditie van *normaliseerbaarheid* van golffuncties. Als supersymmetrie op deze manier gebroken is, betekent dit dat er wel een grondtoestand is met energie $E_0 \neq 0$, maar die toestand is niet normaliseerbaar. Een gevolg van het feit dat $Q^\dagger \mid GT\rangle \neq 0$ is dat er niet alleen een bosonische, maar ook een fermionische grondtoestand bestaat met gelijke energie. In deze systemen met gebroken supersymmetrie hebben de toestanden $\mid \psi_n^B\rangle$ en $\mid \psi_n^F\rangle$ dus dezelfde energie *voor alle n*. Ironisch genoeg lijkt de situatie in dit geval meer symmetrisch dan in het ongebroken geval.

Uit het voorgaande kan men afleiden dat een grondtoestand met energie nul een vereiste is voor een ongebroken supersymmetrisch systeem. Alleen op deze manier werkt het systeem op alle energieniveau's volgens de algebraïsche relaties (7)-(9). Als gevolg hiervan is deze grondtoestand een enkele "bosonische" grondtoestand. Voor deze toestand $\mid 0\rangle$ geldt dat $Q^\dagger \mid 0\rangle = 0$, maar $\mid 0\rangle \neq Q^\dagger \mid \psi\rangle$, voor alle ψ. Dit is in te zien met behulp van (4): $Q^\dagger$ stuurt elke fermionische toestand naar de bosonische en maakt van elke bosonische toestand nul. De enige toestand die door $Q^\dagger$ naar nul kan worden gebracht, terwijl de toestand zelf niet vanuit een andere fermionische toestand kan worden gegenereerd met behulp van diezelfde $Q^\dagger$ is de enige toestand zonder fermionische "partner": de grondtoestand met energie nul.

2.4.1. Voorbeeld van een gebroken supersymmetrisch systeem We bekijken nu een voorbeeld van een potentiaal waarbij supersymmetrie gebroken is. De superpotentiaal in dit geval luidt $w(x) = \lambda(x^2+a^2)$, waarbij a^2 positief is. Deze superpotentiaal behoort bij H. De tweede situatie die we beschouwen is het geval $\tilde{H}$, waarbij de superpotentiaal gegeven wordt door $\tilde{w}(x) = \lambda(x^2 - a^2)$. Nu gaan we op zoek naar een relatie tussen deze twee situaties. Deze relatie wordt verzorgd door een diagonaalmatrix D. We zullen nu deze matrix D bepalen, zodat:

$$\tilde{Q}^\dagger = e^{Dx} Q^\dagger e^{-Dx}$$

$$\tilde{Q} = e^{-Dx} Q e^{Dx}$$

De exponent van een diagonaalmatrix $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ is een diagonaalmatrix met als diagonaalelementen e^D. Laten we D berekenen aan de hand van de relatie tussen Q en $\tilde{Q}$. Dan kunnen we hierna controleren of dit ook werkt voor de relatie tussen $Q^\dagger$ en $\tilde{Q}^\dagger$. Aangezien e^{Dx} een diagonaalmatrix is, kunnen we in de afleiding de matrices weglaten en dus rekenen met:

$$Q^\dagger = A^\dagger = (-p - iw(x))$$

$$Q = A = (-p + iw(x)).$$

In de komende afleiding staat D dan ook niet voor de matrix D, maar voor de waardes van de diagonaalelementen van die matrix. Omdat de impulsoperator p bestaat uit een afgeleide, is het handig om een "testfunctie" ψ te introduceren, waardoor de juiste toepassing van de kettingregel wat soepeler verloopt. Hier gaan we dan.

$$\begin{aligned}\tilde{Q}\psi &= (e^{-Dx}Qe^{Dx})\psi = e^{-Dx}(-p + i\lambda(x^2 + a^2))e^{Dx}\psi \\ &= e^{-Dx}i\partial_x(e^{Dx}\psi) + e^{-Dx}(i\lambda(x^2 + a^2))e^{Dx} \\ &= e^{-Dx}i(De^{Dx}\psi + e^{Dx}\psi' + i\lambda(x^2 + a^2)\psi \\ &= iD\psi - p(\psi) + i\lambda(x^2 + a^2).\end{aligned}$$

Als we nu de testfunctie ψ verwijderen, blijft de volgende relatie over:

$$\tilde{Q} = -p + i\lambda(x^2 - a^2) = -p + i\lambda(x^2 + a^2) + iD.$$

En hieruit volgt de matrixwaarde D:

$$D = -2\lambda a^2,$$

waarna we ook de matrix D hebben verkregen:

$$D = \begin{pmatrix} -2\lambda a^2 & 0 \\ 0 & -2\lambda a^2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

2.5. De Witten Index

Om te bepalen of een systeem de supersymmetrie breekt of niet is het mogelijk om gebruik te maken van de Witten Index. Deze index geeft het verschil in aantal van de bosonische en fermionische grondtoestanden [5]:

$$I = n_B^{(E=0)} - n_F^{(E=0)}.$$

We kunnen dan zien dat als $I \neq 0$ dan is er minstens één supersymmetrische grondtoestand en dus is supersymmetrie niet gebroken. Om symmetriebreking te hebben moet dus $I = 0$ gelden. Zelfs als dat geldt kan het nog zijn dat er evenveel bosonische als fermionische grondtoestanden zijn met energie nul, waardoor superssymmetrie dan niet gebroken is ondanks dat $I = 0$.

Een andere manier om de Witten Index te definiëren is door te stellen dat [4]:

$$I = Tr(-1)^F.$$

Hier is F het fermion nummer en de trace loopt over alle toestanden van de super-Hamiltoniaan H, zie (6). Deze twee schrijfwijzen zijn hetzelfde omdat we al zagen (sectie 2.1) dat voor elk energieniveau die niet $E = 0$ heeft er altijd een bosonische en fermionische toestand zijn die bij elkaar horen. Dus de bijdrage aan de Witten Index die deze toestanden geven is dan $+1$ voor de bosonische toestand, want voor een boson is het fermion nummer 0, en -1 voor de fermionische toestand, want het fermion nummer is 1. Vervolgens vallen in de trace de $+1$ en -1 tegen elkaar weg en blijft dus alleen het aantal toestanden met $E = 0$ over.

De Witten Index is een topologische index, dat betekent dat de index niet verandert als de parameters van de theorie waarmee we werken een beetje worden aangepast. Dit kan heel handig gebruikt worden. We kunnen nu namelijk de parameters zo kiezen dat de berekening van de Witten Index simpel is en dan is het antwoord nog steeds hetzelfde als bij de originele waardes. We zullen een voorbeeld geven, daarvoor nemen we de superpotentiaal: $w(x) = \lambda(x - x_0)$ De grondtoestand van het systeem moet voldoen aan $Q_1 \mid \psi\rangle = 0$. Als we dit uitschrijven krijgen we dat:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x\psi = -\lambda(x - x_0)\sigma_z\psi.$$

Oplossen hiervan geeft:

$$\psi(x) = \exp\left(-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}((x - x_0)^2 - x_0^2)\sigma_z\right)\psi(0).$$

Voor elke waarde van $\lambda > 0$ hebben we dat alleen de bosonische kant te normaliseren is en dus is $I = 1$, voor alle $\lambda < 0$ is alleen de fermionische kant te normaliseren en dus $I = -1$. We zien dat de precieze waarde van λ niet uitmaakt voor de uitkomst bij I, alleen het globale gedrag van de superpotentiaal is van belang.

2.6. De Supersymmetrische Lagrangiaan

Tot nu toe hebben we alleen maar met Hamiltonianen gewerkt, maar we kunnen ook een supersymmetrische Lagrangiaan maken. We zullen hier de supersymmetrische Lagrangiaan geven (zoals in [5]) en laten zien dat hij supersymmetrisch is:

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - [w(x)]^2 + i\psi^\dagger\frac{d\psi}{dt} - \frac{1}{\sqrt{2}}w'(x)[\psi^\dagger, \psi].$$

Hierin is ψ een fermionische variabele, dus $\psi\psi^\dagger = -\psi^\dagger\psi$. Allereerst vinden we met behulp van de Euler-Lagrange vergelijkingen de bewegingsvergelijkingen voor x, ψ en $\psi^\dagger$, die zijn:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2w(x)w'(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}w''(x)[\psi, \psi^\dagger] = 0, \tag{12}$$

$$-i\frac{d\psi}{dt} + \frac{2}{\sqrt{2}}w'(x)\psi = 0, \tag{13}$$

$$-i\frac{d\psi^\dagger}{dt} - \frac{2}{\sqrt{2}}w'(x)\psi^\dagger = 0. \tag{14}$$

De supersymmetrie transformatie wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}
x &\rightarrow x + \delta x = x + \epsilon^\dagger \psi + \psi^\dagger \epsilon, \\
\psi &\rightarrow \psi + \delta\psi = \psi + \epsilon \left(\alpha \frac{dx}{dt} + \beta W(x) \right), \\
\psi^\dagger &\rightarrow \psi^\dagger + \delta\psi^\dagger = \psi^\dagger + \epsilon^\dagger \left(\alpha^* \frac{dx}{dt} + \beta^* W(x) \right).
\end{aligned}$$

Met ϵ de parameter van de transformatie, α en β twee complexe getallen en $W'(x) = w(x)$. Om nu te laten zien dat de lagraniaan supersymmetrisch is moeten we laten zien dat de verandering in eerste orde in ϵ nul is onder de transformatie. We werken eerst aparte stukjes uit om de techniek duidelijk te maken:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{d(x+\delta x)}{dt}\right)^2.$$

Nu moeten we dus die variatie uitwerken zodat alleen lineaire termen in ϵ (dus in δx) blijven staan:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx + d\delta x}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{dt}\frac{d\delta x}{dt},$$

en dus zien we dat de variatie in deze term wordt:

$$\delta\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d(x+\delta x)}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{dx}{dt}\frac{d\delta x}{dt}.$$

Nu moeten we dit principe ook toepassen op de andere termen.

$$\begin{aligned}
\delta[w(x)]^2 &= [w(x+\delta x)]^2 - [w(x)]^2 \\
&= [w(x) + w'(x)\delta x + O(\delta x^2)]^2 - [w(x)]^2 \\
&= [w(x)]^2 + 2w(x)w'(x)\delta x + O(\delta x^2) - [w(x)]^2 \\
&= 2w(x)w'(x)\delta x.
\end{aligned}$$

We hebben hier in de tweede regel de Taylor-expansie van $w(x)$ rond x gebruikt. In de volgende term staan twee verschillende variabelen, die moeten we allebei variëren en alleen de lineaire termen in de variatie houden, dus ook het product van beide variaties verwaarlozen we:

$$\begin{aligned}
\delta i\psi^\dagger \frac{d\psi}{dt} &= i(\psi^\dagger + \delta\psi^\dagger)\frac{d(\psi+\delta\psi)}{dt} - i\psi^\dagger\frac{d\psi}{dt} \\
&= i\psi^\dagger\frac{d\psi}{dt} + i(\delta\psi^\dagger)\frac{d\psi}{dt} + i\psi^\dagger\frac{d\delta\psi}{dt} - i\psi^\dagger\frac{d\psi}{dt} + O(\delta\psi^\dagger\delta\psi) \\
&= i\delta\psi^\dagger\frac{d\psi}{dt} + i\psi^\dagger\frac{d\delta\psi}{dt}.
\end{aligned}$$

Dan nog de laatst term:

$$\begin{aligned}\delta\frac{1}{\sqrt{2}}w'(x)[\psi^\dagger,\psi] &= \frac{1}{\sqrt{2}}w'(x+\delta x)[\psi^\dagger+\delta\psi^\dagger,\psi+\delta\psi]-\frac{1}{\sqrt{2}}w'(x)[\psi^\dagger,\psi]\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(w'(x)+w''(x)\delta x+O(\delta x^2))((\psi^\dagger+\delta\psi^\dagger)(\psi+\delta\psi)\\ &\quad -(\psi+\delta\psi)(\psi^\dagger+\delta\psi^\dagger))-\frac{1}{\sqrt{2}}w'(x)[\psi^\dagger,\psi]\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}w''(x)\delta x[\psi^\dagger,\psi]+\frac{1}{\sqrt{2}}w'(x)([\delta\psi^\dagger,\psi]+[\psi^\dagger,\delta\psi]).\end{aligned}$$

Nu stoppen we alles bij elkaar en vinden:

$$\begin{aligned}\delta L = &\frac{dx}{dt}\frac{d\delta x}{dt}-2w(x)w'(x)\delta x+i\delta\psi^\dagger\frac{d\psi}{dt}+i\psi^\dagger\frac{d\delta\psi}{dt}\\ &-\frac{1}{\sqrt{2}}w''(x)\delta x[\psi^\dagger,\psi]-\frac{1}{\sqrt{2}}w'(x)([\delta\psi^\dagger,\psi]+[\psi^\dagger,\delta\psi]).\end{aligned}$$

Dan gaan we de bewegingsvergelijkingen gebruiken om dit te versimpelen. Met (12) vermenigvuldigd met δx vinden we:

$$\begin{aligned}\delta L = &\frac{dx}{dt}\frac{d\delta x}{dt}+\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+i\delta\psi^\dagger\frac{d\psi}{dt}+i\psi^\dagger\frac{d\delta\psi}{dt}\\ &-\frac{1}{\sqrt{2}}w'(x)([\delta\psi^\dagger,\psi]+[\psi^\dagger,\delta\psi]).\end{aligned}$$

Nu merken we op dat ψ een fermionische variabele is, dus dit wordt:

$$\delta L = \frac{dx}{dt}\frac{d\delta x}{dt}+\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+i\delta\psi^\dagger\frac{d\psi}{dt}+i\psi^\dagger\frac{d\delta\psi}{dt}-\frac{2}{\sqrt{2}}w'(x)(\delta\psi^\dagger\psi-\delta\psi\psi^\dagger).$$

Dan gaan we nu (13) vermenigvuldigd van links met $\delta\psi^\dagger$ gebruiken:

$$\delta L = \frac{dx}{dt}\frac{d\delta x}{dt}+\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+i\psi^\dagger\frac{d\delta\psi}{dt}+\frac{2}{\sqrt{2}}w'(x)\delta\psi\psi^\dagger.$$

Nu gebruiken we (14) vermenigvuldigd van links met $\delta\psi$:

$$\delta L = \frac{dx}{dt}\frac{d\delta x}{dt}+\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+i\psi^\dagger\frac{d\delta\psi}{dt}-i\delta\psi\frac{d\psi^\dagger}{dt}.$$

We verwisselen weer een ψ en een $\psi^\dagger$:

$$\delta L = \frac{dx}{dt}\frac{d\delta x}{dt}+\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+i\psi^\dagger\frac{d\delta\psi}{dt}+i\frac{d\psi^\dagger}{dt}\delta\psi.$$

Als laatste stap herkennen we hier nu een totale afgeleide in, namelijk:

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x+i\psi^\dagger\delta\psi\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}(\epsilon^\dagger\psi+\psi^\dagger\epsilon)+i\psi^\dagger\epsilon\left(\alpha\frac{dx}{dt}+\beta W(x)\right)\right),$$

en we zien dus dat de Lagrangiaan supersymmetrisch is op een totale afgeleide na.

3. Toepassingen

3.1. Landau Levels

Net zoals een elektron in een atoom alleen bepaalde banen kan beschrijven, kan een geladen deeltje in een cyclotron (zoals bijvoorbeeld de Tevatron) ook alleen vaste, gequantiseerde banen afleggen. De bijbehorende energieniveau's worden Landau levels genoemd (naar Lev Landau).

We beschouwen nu het systeem van een spin-$\frac{1}{2}$, geladen deeltje (massa m, lading e) in een constant magneetveld dat in de z-richting staat, zodat de beweging van het deeltje in het x-y vlak is. Voor dit systeem kan de Hamiltoniaan worden geschreven als

$$H = \frac{1}{2m}(p_x + \frac{e}{c}A_x)^2 + \frac{1}{2m}(p_y + \frac{e}{c}A_y)^2 + \boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}, \tag{15}$$

waarbij

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2mc}g_e\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma},$$

met g_e de elektron g-factor, die nagenoeg 2 is en daardoor wegvalt tegen de 2 in de noemer erna en $\boldsymbol{\sigma}$ is de Pauli-matrix vector. Als we nu de vector-potentiaal $\mathbf{A}$ zo kiezen dat $\mathbf{A} = (-yB, 0, 0)$ en het inproduct $\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$ uitschrijven, dan vereenvoudigt de Hamiltoniaan (15) tot

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m\omega_c^2y^2 - \omega_c y p_x + \frac{1}{2}\hbar\omega_c\sigma_z, \tag{16}$$

waarbij $\omega_c = \frac{Be}{mc}$ de cyclotron-frequentie is, het dubbele van de Larmor-frequentie. De Hamiltoniaan 16 bestaat eigenlijk uit twee Hamiltonianen: de bosonische H_B met eigenwaarde van $\sigma_z = -1$ en de fermionische H_F met eigenwaarde van $\sigma_z = +1$. De eigenwaarden vormen twee ladders van energie niveau's (Landau levels). De energie-eigenwaarden worden in het algemeen gegeven door:

$$E_{n,\sigma_z} = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma_z).$$

De bosonische ladder, met $\sigma_z = -1$ heeft dus energieën

$$E_n^B = \hbar\omega_c n,$$

terwijl de energieën voor de fermionische ladder, $\sigma_z = +1$ worden gegeven door

$$E_n^B = \hbar\omega_c(n + 1).$$

Dit is eigenlijk precies hetzelfde plaatje als waarmee we begonnen, bij de supersymmetrische harmonische oscillator. We hebben twee energieladders met gelijke energieën, behalve de grondtoestand. Deze grondtoestand (met energie nul) is alleen aanwezig in de bosonische ladder.

Supersymmetrie kan ook worden toegepast in cyclotron-systemen waarbij *geen* rekening wordt gehouden met spin. In dit geval ontstaan er $l = n - 1$ energie-ladders, die met de gebruikelijke A- en $A^\dagger$-operatoren aan elkaar worden gerelateerd. Voor een beschrijving van dit systeem, zie [6]

3.2. Fokker Planck

Naast de Landau energieniveau's is het ook mogelijk om supersymmetrie te gebruiken bij de Fokker-Planck vergelijking. Deze vergelijking beschrijft hoe een kansverdeling evolueert in de tijd onder invloed van buitenaf. De Fokker-Planck vergelijking is [7]:

$$\partial_t P(x,t) = \partial_x(P\partial_x U(x)) + T\partial_x^2 P(x,t) \tag{17}$$

De tijdsevolutie van de kansverdeling wordt bepaald door een deterministische kracht, dat is de term met $\partial_x U(x)$, met $U(x)$ een klassieke potentiaal. Daarnaast is er thermische beweging en die wordt gegeven door de tweede term van het rechter lid.

We kunnen (17) omschrijven naar de Schrödinger vergelijking door $P(x,t) = e^{-U(x)/2T}\psi(x,t)$ te stellen. We vinden dan:

$$\partial_t \psi = T\partial_x^2\psi + \psi\left(-\frac{(\partial_x U)^2}{4T} + \frac{\partial_x^2 U}{2}\right)$$

Door vervolgens te nemen dat $\psi(x,t) = e^{-\lambda t}\phi(x)$ krijgen we:

$$\lambda\phi = -T\partial_x^2\phi + \phi\left(\frac{(\partial_x U)^2}{4T} - \frac{\partial_x^2 U}{2}\right)$$

Als we dan $w(x) = \frac{\partial_x U}{2T}$ nemen, zien we dat dit te schrijven is als:

$$\lambda\phi = TH_B\phi$$

Als het systeem een evenwichtstoestand heeft moet er in ieder geval een toestand ϕ_0 zijn zodat $H_B\phi_0 = 0$. Immers die toestand heeft geen tijdsafhankelijk deel en is dus in evenwicht. De evolutie van de kansverdeling naar het evenwicht wordt bepaald door de kleinste tijdsafhankelijkheid, die bijdrage heeft de langste tijd nodig om uit te sterven. Deze kleinste tijdsafhankelijkheid wordt gegeven door de kleinste positieve eigenwaarde van H_B. We zoeken dus E_1.

Om die te bepalen komt supersymmetrie van pas. Omdat we er van uitgaan dat er een evenwichtsituatie is weten we dat H_B een eigenwaarde nul heeft en dus is de supersymmetrie niet gebroken. Als we dus over gaan op H_F weten we dat daar de laagste energietoestand degene is met energie E_1. Vervolgens kunnen we in V_F deze grondtoestand proberen te vinden om E_1 te bepalen en dus te achterhalen hoe lang het systeem nodig heeft om naar het evenwicht te evolueren, zie ook [8].

4. Conclusie

Supersymmetrie werd in eerste instantie alleen toegepast in de quantumveldentheorie, waar het een mogelijke verklaring gaf voor een aantal problemen uit de snaartheorie en deeltjesfysica. Wij hebben uitgezocht hoe je deze symmetrie ook kunt gebruiken in de quantummechanica. Daar blijkt de symmetrie een één-op-één correspondentie te geven tussen de energieniveau's van twee Hamiltonianen. De grondtoestand is de uitzondering op deze regel en is daardoor heel belangrijk voor de breking van de supersymmetrie. Aan het eind hebben we ook nog gezien dat we de methodes uit supersymmetrische quantummechanica gebruikt kunnen worden in systemen waar supersymmetrie in eerste instantie niet direct betrekking op lijkt te hebben.

5. Referenties

[1] The TEVNPH Working Group "Combined CDF and DØUpper Limits on Standard Model Higgs-Boson Production with up to 4.2 fb^{-1} of Data" *http://www-cdf.fnal.gov/physics/new/hdg/results/comb_090313/cdf9713.pdf*, 2009

[2] G. Hinshaw et al., "FIVE-YEAR WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE OBSERVATIONS: DATA PROCESSING, SKY MAPS, AND BASIC RESULTS" *The Astrophysical Journal Supplement Series* ***180*** *225-245*, 2009, zie tabel 7, pagina 242

[3] D.J. Griffiths, "Introduction to Quantum Mechanics" *Pearson Prentice Hall*, 2005, ISBN: 0131911759

[4] T. Wellman "An Introduction to Supersymmetry in Quantum Mechanical Systems" *http://physics.brown.edu/physics/undergradpages/theses/SeniorThesis_Wellman.pdf*, 2003

[5] P. Binétruy "Supersymmetry: Theory, Experiment and Cosmology" *Oxford University Press*, 2006, ISBN: 0198509545

[6] H. Maier-Metz, "Supersymmetry in Landau levels" *European Journal of Physics* ***19*** *137-141*, 1998

[7] N.G. van Kampen, "Stochastic Processes in Physics and Chemistry" *Elsevier Science Publishers*, 1987, ISBN: 0444866507

[8] B.K. BAGCHI, "Supersymmetry In Quantum And Classical Mechanics" *Chapman & Hall/CRC*, 2001, ISBN: 1584881976