

Gewarpte Extra Dimensies

Milenna van Dijk

begeleider: Jan de Boer

30th July 2007

Abstract

Misschien leven wij in meer dan vier dimensies. Modellen die uitgaan van extra dimensies zijn onder andere de Randall-Sundrummodellen I en II met een gewarpte extra dimensie en respectievelijk twee branen en één braan. Het model met één braan (RSII model) geeft een oneindige extra dimensie, het model met twee branen (RSI model) geeft een oplossing voor het hiërarchieprobleem. Voor deze modellen wordt de achtergrondmetriek bepaald en worden de gevolgen voor zwaartekracht in vier dimensies uitgewerkt. Er wordt ook nagegaan hoe de straal van de extra dimensie gestabiliseerd kan worden. Het blijkt dat we in beide modellen vierdimensionale Newtoniaanse zwaartekracht terugkrijgen. Het model met twee branen kan binnenkort getest worden in de LHC.

Contents

1	Waarom Extra Dimensies?	3
2	Basisprincipes	5
2.1	Kaluza-Kleindeeltjes	5
2.2	Metriek	6
2.3	Kromming	7
2.4	Planckmassa	8
2.5	Velden	8
2.6	Yukawapotential	9
3	(Gewarpte) Extra Dimensies	10
3.1	ADD Model	10
3.2	Randall-Sundrum Model I	12
3.2.1	Opzet	12
3.2.2	Metriek	14
3.2.3	Zwaartekracht	19
3.2.4	Hiërarchieprobleem	21
3.3	Randall Sundrum Model II	22
3.3.1	Opzet	23
3.3.2	Golffuncties van de Kaluza-Kleindeeltjes	23
3.3.3	Zwaartekracht	32
4	Goldberger-Wise Mechanisme	33
5	Signalen in Deeltjesversnellers	37
6	Conclusie	39

1 Waarom Extra Dimensies?

Wanneer je om je heen kijkt kun je drie ruimtelijke dimensies onderscheiden. Tegenwoordig weten sommige mensen dat er nog een vierde dimensie is, namelijk tijd. Daar houdt het voor de meeste op, de lezers van science fiction uitzonderd. Binnen de theoretische fysica is het echter al lang niet meer vreemd om over extra ruimtelijke dimensies te praten.

Het idee om extra dimensies binnen de natuurkunde te gebruiken stamt al uit het begin van de twintigste eeuw toen Klein en Kaluza een opgerolde dimensie voorstelden als poging om Electrodynamicica en Relativiteitstheorie te kunnen vereenzelvigen. Dit maakte duidelijk dat een extra dimensie niet in strijd was met de natuurkunde, maar er waren niet veel mensen die daadwerkelijk geloofden dat onze ruimtetijd uit meer dan vier dimensies bestond. Het is Kaluza en Klein niet gelukt om Electrodynamicica en de Relativiteitstheorie te verenigen en er is tot vele decennia later niet meer serieus nagedacht over extra dimensies.

Eén van de belangrijke doelen binnen de natuurkunde is om de vier fundamentele krachten (zwaartekracht, electromagnetische kracht, sterke- en zwakke kernkracht) te verenigen in één theorie. Dit is tot op heden niet gelukt, maar een mogelijke kandidaat hiervoor is snaartheorie. Deze theorie gaat ervan uit dat er zes of zeven ruimtelijke extra dimensies bestaan. Alhoewel niet iedereen in deze theorie gelooft, is hij zo bekend dat natuurkundigen niet raar meer op kijken bij het noemen van extra dimensies.

Bij energieën boven 1 TeV zijn de electromagnetische en de zwakke kernkracht verenigd. In de zogenaamde Grand Unified Theories (GUTs) wordt de sterke kernkracht met de electrozwakke kracht verenigd. Wanneer we echter alle krachten in één theorie willen verenigen, moet er een energie zijn waarop al deze krachten even sterk zijn. Zwaartekracht is 10^{16} keer zo klein als de electrozwakke kracht en pas bij energieën van de orde van de Planckschaal, de schaal waarop zwaartekracht even sterk is als de andere krachten, is het misschien mogelijk om de krachten te verenigen. Wanneer we alle krachten zouden samenvoegen in één theorie, volgen uit deze theorie niet automatisch de sterkten die wij van de krachten kennen. Het is nodig om het grote verschil in energieschalen met de hand in de theorie in te voeren. Natuurkundigen vinden dit echter niet mooi. Men wil een theorie vinden waaruit alle krachten volgen zonder waarden te moeten instellen. Men verwacht daarom dat er een onderliggend principe is dat de hiërarchie veroorzaakt, maar het is niet duidelijk wat voor principe dit is. Dit grote verschil in orden vormt een probleem dat ook wel het hiërarchieprobleem wordt genoemd. Hieraan ligt ten grondslag dat de gravi-

tatieconstante van Newton heel erg klein is. Deze constante is evenredig met de inverse van de Planckmassa in het kwadraat. Omdat deze Planckmassa heel groot is, is zwaartekracht heel zwak. De electrozwakkekracht is van veel kleinere massa's afhankelijk en is daarom veel sterker. Het hiërarchieprobleem is belangrijk binnen dit verslag, aangezien het eerste model dat ik zal bespreken een mogelijke oplossing hiervoor biedt.

Extra dimensies veroorzaken dat gravitatiekracht op een andere manier afhangt van de afstand tussen de massa's dan volgens de wet van Newton. Zwaartekracht werkt echter alleen anders op afstanden even groot of kleiner dan de schaal van de extra dimensie. Zwaartekrachtexperimenten zijn tot op de schaal van een millimeter gedaan. Deze experimenten en alle andere zwaartekrachtexperimenten die op grotere schaal zijn gedaan bevestigen de wet van Newton. Een opgerolde extra dimensie moet dus kleiner zijn dan een millimeter om overeen te komen met de gedane experimenten.

Het concept van een opgerolde dimensie kan worden verduidelijkt aan de hand van een voorbeeld. Wanneer wij van grote afstand naar een waslijn kijken, zien we een ééndimensionale lijn. Wanneer we echter op de schaal van de omtrek van de lijn kijken, zoals ook een spinnetje doet dat over de lijn loopt, kunnen we een extra bewegingsrichting onderscheiden. Het spinnetje kan in twee dimensies bewegen, voor- en achteruit langs de lijn of om de lijn heen. Hetzelfde geldt voor een opgerolde extra dimensie: alleen wanneer we experimenten doen op de schaal van de extra dimensie of kleiner, kunnen we die extra dimensie waarnemen.

Opgerolde dimensies werden lange tijd gezien als de enige mogelijkheid waarop extra dimensies in onze wereld konden bestaan. Sinds de komst van snaartheorie is dit veranderd. In deze theorie werkt men namelijk met zogenaamde 'branen'. Dit zijn objecten die een andere dimensionaliteit hebben dan de overige ruimtetijd, de 'bulk' genaamd (zie fig.1). Een braan is voor te stellen als een membraan dat zich in de ruimte bevindt. De velden en krachten kunnen gebonden zijn aan een braan of ze kunnen leven in alle dimensies. Een meer precieze naam voor branen is p -branen waarbij p het aantal ruimtelijke dimensies aangeeft. In een wereld met $p + 1$ dimensies kunnen branen met 0 tot p dimensies bestaan. Een 0-braan is een puntdeeltje, een 1-braan is een string, enzovoorts. Aan het eind van de vorige eeuw werd voor het eerst duidelijk dat wanneer men branen in een theorie opneemt, het ook mogelijk is dat er grotere extra dimensies bestaan. De modellen die ik in dit verslag beschrijf zijn gebaseerd op het idee dat wij leven op een 3-braan die zich bevindt in een 4+1 dimensionale bulk met een gewarpte extra dimensie. Deze zijn bedacht door Lisa Randall en Raman Sundrum en bevatten één gewarpte extra dimensie.

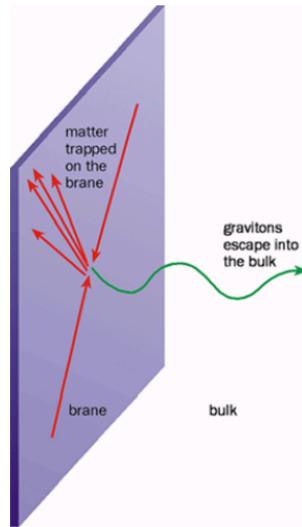


Figure 1: Een afbeelding van een braan waaraan het Standaard Model gebonden is en de bulk waarin gravitonen zich bewegen. De bulk heeft een hogere dimensionaliteit dan de braan.

2 Basisprincipes

Om de modellen van Randall en Sundrum te analyseren is het nodig om wat voorkennis te hebben. Daar zal ik mee beginnen.

2.1 Kaluza-Kleindeeltjes

Zoals genoemd hebben Kaluza en Klein opgerolde extra dimensies voorgesteld. Een gevolg van een opgerolde extra dimensie is dat deeltjes, bijvoorbeeld gravitonen, ook in die extra dimensie kunnen bewegen. Hierdoor krijgen ze een impuls in de extra dimensie. Omdat wij ons echter niet realiseren dat de extra dimensie bestaat, denken we dat deze impuls massa is, vanwege de vergelijking voor de vierimpuls

$$E^2 = p^2 c^2 + p_4^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2.1)$$

Waarbij p_4 de impuls in de extra dimensie is die wij samen met de echte massa m scharen onder de term massa.

Een deeltje kan, wanneer het zich in de extra dimensionale richting beweegt, alleen een golflengte hebben die een geheel aantal keer in de omtrek van de opgerolde dimensie past $n\lambda = 2\pi r$ met r de straal van de extra dimensie en n een geheel getal. Aangezien de impuls samenhangt met de

golflengte volgens $p = h/\lambda$ geldt voor p

$$p = \frac{n\hbar}{r} \quad (2.2)$$

Dit laat zien dat de impuls in de extra dimensie gequantiseerd is. Omdat wij de impuls in de extra dimensie zien als massa, zullen wij een heel spectrum aan deeltjes waarnemen die de eigenschappen hebben van deeltjes die wij kennen, maar een andere, gequantiseerde massa hebben.

2.2 Metriek

De ruimtetijd wordt beschreven door een metriek. In de Euclidische ruimte wordt de grootte van een infinitesimaal lijnstukje gegeven door

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 \quad (2.3)$$

$$= (dx^1, dx^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix} = \sum_{i,j} dx^i \delta_{ij} dx^j \quad (2.4)$$

$$= dx^i \delta_{ij} dx^j \quad (2.5)$$

Hier is δ_{ij} de metriek in Cartesische coördinaten van de Euclidische ruimte. Volgens de Einstein sommatieconventie moet er over indices, die één keer boven en één keer beneden voorkomen, gesommeerd worden en mag het somteken worden weggelaten.

Vlakke ruimtetijd wordt in vier dimensies weergegeven door

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.6)$$

met η de Minkowski-metriek

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

voor vier dimensies en $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ waarbij de nulcomponent tijd (ct) aanduidt en de andere drie componenten de drie spatiële richtingen (x_1, x_2, x_3). De generalisatie naar een d -dimensionale Minkowski-ruimte is

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx_d^2 \quad (2.8)$$

Hier is d het aantal ruimtelijke dimensies en $dx_d^2 = \sum_{i=1}^d (dx^i)^2$. Verschillende auteurs houden er verschillende conventies op na en de Minkowski-metriek wordt ook wel eens geschreven met $+dt^2$ en $-dx^2$. In dit verslag heeft de tijdscomponent een minteken en de plaatscomponenten hebben een plusteken. We nemen $c = 1$.

2.3 Kromming

De ruimtetijd in de modellen die ik ga beschrijven is gekromd. De bovenstaande metriek kunnen we daarom niet gebruiken.

In een vlakke ruimte is de som van de hoeken van een driehoek gelijk aan π radialen. In een gekromde ruimte is dit niet het geval. De som van de hoeken van een driehoek op bijvoorbeeld het oppervlak van een bol (dus een positief gekromde ruimte) is gelijk aan $\pi + A/r^2$, met A de oppervlakte van de driehoek en r de straal van de bol. Ook is het oppervlak van een bol in een gekromde ruimte niet gelijk aan $4\pi r^2$. Dit zijn slechts enkele kenmerken van een gekromde ruimte.

Kromming kan uit de metriek worden berekend. Daartoe moeten eerst Christoffelsymbolen worden berekend. Deze worden gegeven door

$$\Gamma_{jk}^l = \frac{1}{2}g^{li}(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk}) \quad (2.9)$$

Dit zijn geen tensoren en dragen daarom de naam symbool. In een vlakke Cartesische ruimte zijn deze symbolen nul, maar in een ander coördinatenstelsel zijn de Christoffelsymbolen voor een vlakke ruimte niet nul. Met behulp van de Christoffelsymbolen kan de zogenaamde Riemann-tensor geconstrueerd worden. Deze tensor beschrijft de mate van kromming van een ruimte. Wanneer de Riemann-tensor nul is, is de ruimte vlak. De Riemann-tensor wordt op de volgende manier gegeven door Christoffelsymbolen

$$R^l_{ijk} = \partial_j \Gamma_{ik}^l - \partial_i \Gamma_{jk}^l + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l \quad (2.10)$$

We kunnen de Riemann-tensor over j contraheren en we verkrijgen dan de Ricci-tensor

$$R_{ik} = \partial_j \Gamma_{ik}^j - \partial_i \Gamma_{jk}^j + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^j - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^j \quad (2.11)$$

Deze tensor is symmetrisch. Wanneer we weer een contractie uitvoeren vinden we de Ricci-scalar, ook wel krommingsscalar genoemd

$$R = R^i_i = R^j_{ijk} g^{ik} \quad (2.12)$$

De manier waarop ruimtetijd wordt gekromd door de aanwezigheid van massa en energie wordt beschreven door de Einstein-vergelijking. Deze ziet er als volgt uit

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G_N T_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

De linkerkant van de vergelijking geeft de kromming weer, de rechterkant energie die de kromming veroorzaakt. Rechts staat namelijk de Stress(-energie-momentum)tensor T , die energie- en impulsdichtheid beschrijft.

De Einsteinvergelijking met $T = 0$ kan worden afgeleid door de Einstein-Hilbert actie te extremaliseren. Deze actie ziet er als volgt uit

$$S = \int \frac{c^4}{16\pi G_N} d^4x \sqrt{-g} R \quad (2.14)$$

Hierin is $g = \det(g_{\mu\nu})$ en R de Ricci scalar. Wanneer er aan deze actie een Lagrangiaandichtheid met materievelden wordt toegevoegd en we vervolgens die actie extremaliseren, volgt de rechterkant van de Einsteinvergelijking uit de toegevoegde Lagrangiaandichtheid.

2.4 Planckmassa

De Newtonconstante komt ook voor in de Einsteinvergelijking. We kunnen de Newtonconstante schrijven in termen de Planckmassa, M_{PL} . Deze wordt gevonden door een constante met dimensie massa in termen van de natuurlijke constanten, G_N , c en \hbar , te schrijven

$$M_{PL} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} \quad (2.15)$$

De waarde van de Planckmassa is $\sim 10^{19}$ GeV/c². Het feit dat de Planckmassa zo groot is vindt men terug in de kleine waarde van zwaartekracht, aangezien zwaartekracht evenredig is met de inverse van de Planckmassa in het kwadraat. Wanneer de Planckmassa een kleinere waarde zou hebben, zou zwaartekracht dus sterker zijn.

2.5 Velden

Einstein's Algemene Relativiteitstheorie zegt dat zwaartekracht in feite gerealiseerd wordt door kromming van de ruimtetijd. De andere fundamentele krachten worden beschreven door een veld in de ruimtetijd.

Een veld wordt beschreven door een actie, S . De actie is de tijdsintegraal over de Lagrangiaan. De Lagrangiaan L wordt verkregen door de potentiële energie van de kinetische energie af te trekken. De Lagrangiaan is ook de ruimtelijke integraal over de Lagrangiaandichtheid \mathcal{L} . Vanuit de actie kan men de bewegingsvergelijking, de Euler-Lagrange vergelijking voor het veld afleiden door de actie te extremaliseren. Het resultaat hiervan is

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \right) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \quad (2.16)$$

Een fysisch systeem heeft bepaalde symmetrieën. Daarom moet ook de actie die het systeem beschrijft invariant zijn onder die symmetrieën. Hiervan maakt men gebruik wanneer men een actie opstelt. Vele experimenten

wijzen uit dat onze wereld lokaal (op kleine afstanden) Poincaré-invariant is. Dit houdt in dat de natuurwetten invariant zijn onder translaties, rotaties en Lorentztransformaties. Wanneer men een model opstelt dat toepasbaar moet zijn op onze wereld, wordt daaraan de eis gesteld dat het Poincaré-invariant is. De simpelste Lagrangiaan voor een scalarveld dat aan Poincaré-invariantie voldoet en ook een massa heeft is de volgende

$$L = - \int d^d x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2) \quad (2.17)$$

De bewegingsvergelijking volgt gemakkelijk:

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi = (-\partial_t^2 + \nabla_d^2 - m^2) \phi = 0 \quad (2.18)$$

Deze vergelijking heet de Klein-Gordon vergelijking. De oplossing voor deze vergelijking is $\phi = A e^{i(\omega t - k \cdot x)} + B e^{-i(\omega t - k \cdot x)}$. Wanneer we deze oplossing voor ϕ in de bewegingsvergelijking (2.18) invullen volgt de dispersierelatie: $\omega^2 = \vec{k}^2 + m^2$. De Klein-Gordonvergelijking kan gezien worden als het equivalent van de Schrödingervergelijking voor relativistische quantummechanica.

Wanneer het massieve scalarveld een tijdsafhankelijke bron heeft, wordt de golfvergelijking

$$(-\partial_t^2 + \nabla_d^2 - m^2) \phi = \rho(x) \quad (2.19)$$

Deze vergelijking is voor $m = 0$ de bekende Poissonvergelijking. De (statische) oplossing voor bovenstaande vergelijking (2.19), is

$$\phi(x) = \int d^d x' G(x, x') \rho(x') \quad (2.20)$$

met $G(x, x')$ de Green's functie

$$G(x, x') = - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ik \cdot (x-x')}}{k^2 + m^2} \quad (2.21)$$

2.6 Yukawapotentiaal

Krachten die door een massief deeltje gemedieerd worden, veroorzaken een potentiaal die de Yukawapotentiaal wordt genoemd. Deze ziet er in drie dimensies als volgt uit

$$V(r) = -C g^2 \frac{e^{-mr}}{r} \quad (2.22)$$

met C een constante die afhankelijk is van de interactie tussen de massieve deeltjes, deze is positief wanneer de kracht aantrekkend is en negatief wanneer de kracht afstotend is. g is de koppelingsconstante die de sterkte van

de kracht weergeeft en r is de afstand tot de bron. Uit de vorm van deze potentiaal blijkt dat de kracht een eindige draagkracht heeft, proportioneel met de inverse van de massa. Wanneer m naar nul gaat, krijgen we een vorm van de Coulombpotentiaal terug. Het minteken voor de potentiaal geeft aan dat het een aantrekkende kracht betreft.

Hierboven is uitgelegd dat wanneer opgerolde extra dimensies bestaan, dit resulteert in gequantiseerde massieve deeltjes. Dit betekent dat er massieve gravitonen zullen bestaan. Deze interageren niet via de Newtonpotentiaal maar via de Yukawapotentiaal. De gravitatiepotentiaal zal, zoals we later zullen zien, bestaan uit de gewone Newtonpotentiaal door het normale graviton en een som van Yukawapotentialen, voor elk massief graviton met massa m één.

3 (Gewarpte) Extra Dimensies

In dit deel zullen we twee modellen van gewarpte extra dimensies analyseren. Eerst zullen we echter kort een model behandelen dat geen gewarpte extra dimensie bevat. In dit model is er wel een braan aanwezig en het biedt ook een mogelijke oplossing van het hiërarchieprobleem. Na deze paragraaf zal er af en toe verwezen worden naar dit model om als vergelijking te dienen.

3.1 ADD Model

In de introductie is uitgelegd dat wanneer er wordt nagedacht over extra dimensies, dit vaak in de context gebeurt van heel kleine compacte extra dimensies. Dit is echter in de afgelopen tien jaar veranderd. In 1998 ontwikkelden Arkani-Hamed, Dvali en Dimopoulos een model met brannen dat het hiërarchieprobleem in een ander licht plaatste. Het verschil in ordes tussen de Planck- en de electrozwakke schaal is omgezet naar een kleiner verschil tussen de electrozwakke schaal en de inverse van de straal van de extra dimensie [2]. Het probleem heeft zich dus verplaatst naar een kleiner ordeverschil, maar dit verschil heeft nog steeds een verklaring nodig. Arkani-Hamed en collega's postuleerden een d -dimensionale ruimtetijd, met $n = d - 3$ extra opgerolde dimensies en een 3-braan. Wij en alle fundamentele krachten behalve zwaartekracht zijn gebonden aan de braan. Omdat zwaartekracht kromming van (de gehele) ruimtetijd is kan deze niet gebonden zijn aan slechts een deel van de ruimte. In snaartheorie zijn de bosonen van de sterke, zwakke en electromagnetische kracht open snaren waarvan de uiteinden binden aan de braan. Het graviton is echter een gesloten snaar en kan zich dus niet binden. De opzet van dit model is daarom logisch wanneer men naar snaartheorie kijkt.

Alleen zwaartekracht kan ons iets vertellen over de extra dimensies, omdat de andere velden gebonden zijn aan onze braan, waardoor de extra dimensies voor die velden als het ware niet bestaan. Omdat zwaartekracht zo zwak is zijn er maar weinig aanwijzingen dat er een extra dimensie is. De reden dat zwaartekracht zo zwak is, is dat die over vijf dimensies verspreid is. Daardoor is zwaartekracht in vier dimensies zwak en veel kleiner dan de andere krachten. Een deel van de zwaartekracht gaat als het ware verloren aan de vijfde dimensie. De extra dimensies moeten klein zijn, omdat we met zwaartekrachtexperimenten altijd zwaartekracht volgens de wet van Newton meten.

Zoals reeds gezegd hangt zwaartekracht samen met de Planckmassa. In hogere dimensies is er echter een andere Planckmassa. In het ADD model wordt de relatie tussen de Planckmassa in vier dimensies, M_{PL} , en de Planck massa, M , in hogere dimensies gegeven door $M_{PL}^2 = M^{n+2}V_n$ waarbij n wederom het aantal extra dimensies is en $V_n = r^n$ het volume van de extra dimensies met straal r . Deze verhouding kan men op verschillende manieren afleiden. Ik zal het laten zien met behulp van de Einstein-Hilbert actie, waarvan ook de Einsteinvergelijking kan worden afgeleid

$$S = \int \frac{c^4}{16\pi G_N} d^4x \sqrt{-g} R \sim M_{PL}^2 \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (3.1)$$

Hierin is $g = \det(g_{\mu\nu})$ en R de Ricci scalar. We gaan ervan uit dat deze actie dezelfde vorm heeft in hogere dimensies, maar met een Planck massa, metriek en Ricciscalar voor n -dimensies. Voor een vlakke ruimtetijd, waarop zich kleine verstoringen, $h_{\mu\nu}$, bevinden, met n opgerolde (niet gekromde) extra dimensies geldt de volgende metriek

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)) dx^\mu dx^\nu + r^2 d\phi_n^2 \quad (3.2)$$

Hier is r de straal van de extra dimensies en $d\phi_n^2$ is de lengte van een infinitesimaal lijnstukje in een vlakke extra dimensie n . De determinant van de metriek in d -dimensies is dan $g^{(4+n)} = r^{2n} g^{(4)}$, met $g^{(4)}$ de determinant van de metriek in vier dimensies. De Ricciscalar voor $4 + n$ dimensies is hetzelfde als die voor vier dimensies aangezien de extra dimensie vlak is. Daarom zal de actie in $4 + n$ dimensies er zo uit zien

$$S_{4+n} \sim \int d^{4+n}x \sqrt{-g_{4+n}} R_{4+n} M_{(4+n)}^{n+2} = \int d\phi_n r^n \int d^4x \sqrt{-g_4} R_4 M_{(4+n)}^{n+2} \quad (3.3)$$

We voeren de integraal over ϕ uit, waarbij deze het volume over de extra dimensies geeft, omdat geen van de termen van ϕ afhangen. We vergelijken vervolgens de actie voor d dimensies met die voor vier dimensies (3.1) en zien dat

$$M_{PL}^2 = M_{(4+n)}^{n+2} V_n \quad (3.4)$$

We hebben nu een relatie afgeleid tussen de waarde van de Planckmassa in vier dimensies en de Planckmassa in de gehele ruimtetijd. Om het hiërarchieprobleem op te lossen nemen we voor M_{PL} de waarde die wij meten en voor $M_{(4+n)} \sim 1 \text{ TeV}$ de waarde waarvoor zwaartekracht dezelfde orde van grootte zou hebben als de overige krachten. Afhankelijk van het aantal dimensies kunnen we de straal van de extra dimensies berekenen uit bovenstaande vergelijking [1, 4].

Voor een 'oplossing' van het hiërarchieprobleem moeten er minimaal twee extra dimensies zijn. Uit bovenstaande relatie blijkt namelijk dat wanneer er één extra dimensie zou zijn, deze dimensie (voor een oplossing van het hiërarchieprobleem) een straal moet hebben die zo groot is als afstanden in ons zonnestelsel. We weten echter dat op deze afstand de wet van Newton werkt. Als er twee extra dimensies zijn, moeten ze ongeveer zo groot zijn als een millimeter, met meer dan twee dimensies kunnen de extra dimensies kleiner zijn, zoals uit de relatie blijkt.

3.2 Randall-Sundrum Model I

In hoofdstuk 1 is beschreven dat extra dimensies een straal moeten hebben die kleiner of gelijk is aan de kleinste afstand waarop zwaartekracht gemeent is. Dit komt omdat zwaartekracht alleen op de schaal van de extra dimensie verandert. Lisa Randall en Raman Sundrum hebben laten zien dat het echter ook mogelijk is dat er extra dimensies bestaan die groter zijn dan de afstand waarop zwaartekracht is getest. Dit is mogelijk wanneer de extradimensionale ruimte gewarpt is. Een gewarpte dimensie is een dimensie die zo vervormd is dat de ruimtetijd aan het éne eind van de extra dimensie kleiner is dan aan het andere eind. Wanneer je je langs de dimensie zou bewegen zou je langzaam vergroten of verkleinen (zie Fig.2). Deze vervorming wordt veroorzaakt door een cosmologische constante. Naarmate de ruimte vergroot langs de extra dimensie, verkleinen massa en energie.

3.2.1 Opzet

Het scenario van Randall en Sundrum om het hiërarchieprobleem op te lossen ziet er als volgt uit.

Er zijn twee 3-branen die een extra dimensie ϕ begrenzen. Deze extra dimensie is opgerold en we werken met een spiegelsymmetrie. Dit betekent dat de ruimte een cirkel is waarvoor geldt dat deze gespiegeld is ten opzichte van $\phi = 0$. Alles wat op ϕ gebeurt, vindt ook plaats op $-\phi$ dus $(x, \phi) = (x, -\phi)$. ϕ loopt van $-\pi$ tot π maar om de metriek te kunnen bepalen, zijn alleen de punten van 0 tot π nodig. Eén braan, de zichtbare braan (braan 1) waarop wij en het Standaard Model leven bevindt zich op $\phi = \pi$. De andere braan (braan 2), die voor ons onzichtbaar is en waarop, zoals we later zullen

zien, zwaartekracht de grootste waarde heeft, bevindt zich op $\phi = 0$. Op de 3-branen kunnen alleen 3 + 1-dimensionale veldentheorieën voorkomen (zie Fig. 2). De metriek van de branen is het niet-extradimensionale deel van de metriek van de bulk op de aangegeven waarde van ϕ .

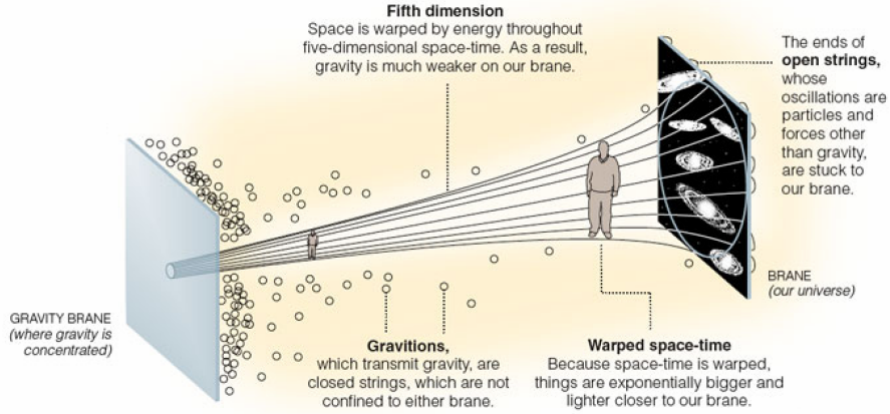


Figure 2: Het Randall-Sundrummodel I. Links is de braan waarop zwaartekracht groot is, rechts is de braan waarop wij leven. De ruimtetijd wordt groter naarmate je je meer naar rechts beweegt.

De acties die Randall en Sundrum gebruiken om dit model te beschrijven zijn de volgende

$$S = S_{\text{zwaartekracht}} + S_{\text{zichtbaar}} + S_{\text{onzichtbaar}} \quad (3.5)$$

$$S_{\text{zwaartekracht}} = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-G} (-\Lambda + 2M^3 R) \quad (3.6)$$

$$S_{\text{zichtbaar}} = S_1 = \int d^4x \sqrt{-g_{(1)}} (\mathcal{L}_1 - V_1) \quad (3.7)$$

$$S_{\text{onzichtbaar}} = S_2 = \int d^4x \sqrt{-g_{(2)}} (\mathcal{L}_2 - V_2) \quad (3.8)$$

Hier zijn M en R de Planckmassa respectievelijk de Ricciscalar in 4 + 1 dimensies. Voor de metriek van de branen geldt dat

$$g_{\mu\nu}^{(1)}(x^\mu) = G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = \pi) \quad (3.9)$$

$$g_{\mu\nu}^{(2)}(x^\mu) = G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = 0) \quad (3.10)$$

met G_{MN} de metriek van de gehele ruimtetijd en $M, N = \mu, \phi$ met $\mu = 0, 1, 2, 3$ [2]. In de Lagrangiaandichtheid $\mathcal{L}_{1,2}$ van de branen is de energie opgenomen die zich op de branen bevindt, behalve de vacuümenergie $V_{1,2}$

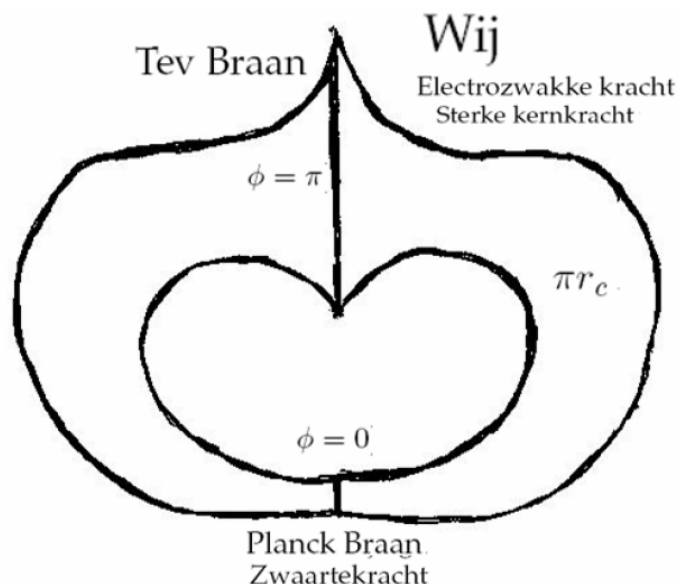


Figure 3: Een plaatje van het Randall-Sundrum I waaruit duidelijk wordt dat de extra dimensie is opgerold.

van de braan. Deze vacuümenergie wordt veroorzaakt door de braantensie en eventuele andere velden die zorgen voor een permanente vacuümenergie. Branen met positieve tensie hebben een minimale energie wanneer ze oneindig klein zijn. Daarentegen hebben branen met negatieve tensie een minimale energie wanneer ze oneindig groot zijn. De branen zijn oneindig groot en hebben een vacuümenergie, analoog met een uitgerekte veer. De braan met negatieve tensie is analoog met een veer die steeds minder energie heeft naarmate de veer meer is uitgerekt. Dit is heel eigenaardig en is lastig te realiseren in snaartheorie. De vacuümpotentialen van de branen zijn een voortdurende bron voor zwaartekracht en veroorzaken een kromming van de bulk, die de dubbele afgeleide van de warping op de plaats van de braan precies tegenwerkt [2].

3.2.2 Metriek

Deze opzet kunnen we beschrijven aan de hand van een metriek. Om deze metriek te vinden, moeten we de Einsteinvergelijking oplossen. We nemen daartoe een ansatz voor de metriek en vullen deze in de vergelijking in, zodat we de constanten kunnen bepalen. De Einsteinvergelijking kunnen we vinden door de actie te variëren naar de metriek G_{MN} en dit nul te stellen. We stellen de Lagrangiaandichtheden van de branen op nul,

zodat we eventuele zwaartekracht veroorzaakt door velden op de branen niet meenemen. Dit zal ons uiteindelijk een 'achtergrondmetriek' geven die weergeeft hoe de ruimte-tijd wordt gewarpt door de vacuümpotentialen en de cosmologische constante. De variatie van bovenstaande actie (3.5) ziet er als volgt uit

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\delta S}{\delta G^{MN}} = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi & \left[-\sqrt{-G} \frac{\delta \Lambda}{\delta G^{MN}} - \Lambda \frac{\delta \sqrt{-G}}{\delta G^{MN}} \right. \\
& \left. + 2M^3 \left(R \frac{\delta \sqrt{-G}}{\delta G^{MN}} + \sqrt{-G} \frac{\delta R}{\delta G^{MN}} \right) \right] \\
& - \int d^4x \frac{\delta \sqrt{-g^{(1)}}}{\delta G^{MN}} V_1 + \sqrt{-g^{(1)}} \frac{\delta V_1}{\delta G^{MN}} \\
& - \int d^4x \frac{\delta \sqrt{-g^{(2)}}}{\delta G^{MN}} V_2 + \sqrt{-g^{(2)}} \frac{\delta V_2}{\delta G^{MN}} \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Het is het gemakkelijkst om dit in stukjes uit te werken. Er geldt dat $\delta \sqrt{-G} = -\frac{1}{2} \sqrt{-G} G_{MN} \delta G^{MN}$ (zie bijvoorbeeld [3]). Er geldt verder $\delta R = \delta R_{MN} G^{MN} + R_{MN} \delta G^{MN}$. De eerste term aan de rechterkant is een totale afgeleide en je kunt (m.b.v. de stelling van Stokes) laten zien dat deze term naar nul gaat wanneer we erover integreren. Daarom kunnen we in de actie $\frac{\delta R}{\delta G^{MN}} = R_{MN}$ invullen (zie voor details [3]). De tensies van de branen en de cosmologische constante zijn niet afhankelijk van de metriek. Wanneer we bovenstaande invullen in (3.11) zien we dat

$$\begin{aligned}
0 = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi & 2M^3 \left(R_{MN} \sqrt{-G} - \frac{1}{2} \sqrt{-G} R G_{MN} + \frac{1}{2} \sqrt{-G} \Lambda G_{MN} \right) \\
& + \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-g^{(1)}} V_1 g_{\mu\nu}^{(1)} \frac{\partial g_{\mu\nu}^{(1)}}{\partial G^{MN}} + \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-g^{(2)}} V_2 g_{\mu\nu}^{(2)} \frac{\partial g_{\mu\nu}^{(2)}}{\partial G^{MN}} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

De afgeleiden in de braanintegralen geven respectievelijk

$$\left[\frac{\delta G^{\mu\nu}}{\delta G^{MN}} \right]_{\phi=\pi} = \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi - \pi) \quad (3.13)$$

$$\left[\frac{\delta G^{\mu\nu}}{\delta G^{MN}} \right]_{\phi=0} = \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi) \quad (3.14)$$

De bewegingsvergelijking die volgt uit de variatie van de actie is dan

$$\begin{aligned}
\sqrt{-G} (R_{MN} - \frac{1}{2} G_{MN} R) = -\frac{1}{4M^3} & [\Lambda \sqrt{-G} G_{MN} \\
+ V_1 \sqrt{g^{(1)}} g_{\mu\nu}^{(1)} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi - \pi) & + V_2 \sqrt{g^{(2)}} g_{\mu\nu}^{(2)} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi)] \quad (3.15)
\end{aligned}$$

We hebben nu de Einsteinvergelijking gevonden voor dit model. De oplossing hiervan moet wel overeen komen met de wereld die wij kennen. We

gaan ervan uit dat onze vierdimensionale wereld Poincaréinvariant is. Dit betekent dat aan de volgende eisen moet zijn voldaan. De branen zijn vlak en er mag alleen kromming van de ruimte zijn in de vijfde dimensie, veroorzaakt door een cosmologische constante van de bulk en de vacuumpotentialen van de branen. Op elke plaats met vaste ϕ moet er een vlakke ruimte zijn, gegeven door de Minkowski-metrick. De componenten van de metrick mogen alleen van ϕ afhangen [4]. Een standaardmetrick voor vijf dimensies die voldoet aan vierdimensionale Poincaréinvariantie, ziet er als volgt uit

$$ds^2 = e^{-A(\phi)} dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} + r_c^2 d\phi^2 \quad (3.16)$$

De e-macht is de factor die in de ϕ -dimensie de warping veroorzaakt en wordt daarom ook wel de warpfactor genoemd [4]. Deze factor veroorzaakt dat massa, energie, ruimte en tijd op verschillende plaatsen langs de extra dimensie verschillende waarden hebben. r_c is de straal van de extra dimensie en is onafhankelijk van ϕ . De lengte van de extra dimensie is πr_c . We willen nu $A(\phi)$ bepalen. Dit doen we door de gevonden Einstein-vergelijkingen op te lossen voor bovenstaande metrick (3.16). We beginnen met de Riccitenor te bepalen. De Christoffelsymbolen worden allen nul, behalve

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\phi = \Gamma_{\nu\mu}^\phi &= \frac{1}{2} g^{\phi i} (\partial_\nu g_{i\mu} + \partial_\mu g_{i\nu} - \partial_i g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r_c^2} A'(\phi) e^{-A(\phi)} \eta_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\phi}^\mu = \Gamma_{\phi\nu}^\mu &= \frac{1}{2} g^{\mu i} (\partial_\phi g_{i\nu} + \partial_\nu g_{i\phi} - \partial_i g_{\nu\phi}) = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} A'(\phi) g_{\alpha\nu} \\ &= -\frac{1}{2} A'(\phi) \delta_\nu^\mu \end{aligned} \quad (3.18)$$

De twee componenten van de Riccitenor die niet nul zijn, zijn daarom de volgende

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \partial_\phi \Gamma_{\mu\nu}^\phi + \Gamma_{\mu\nu}^\phi \Gamma_{\phi\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha\nu}^\phi \Gamma_{\phi\mu}^\alpha - \Gamma_{\phi\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\phi \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r_c^2} e^{-A(\phi)} \left[(A''(\phi) - A'^2(\phi)) \eta_{\mu\nu} - 2A'^2(\phi) \eta_{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} A'^2(\phi) \eta_{\alpha\nu} \delta_\mu^\alpha + \frac{1}{2} A'^2(\phi) \eta_{\alpha\mu} \delta_\nu^\alpha \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r_c^2} e^{-A(\phi)} \eta_{\mu\nu} (A''(\phi) - 2A'^2(\phi)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} R_{\phi\phi} &= -\partial_\phi \Gamma_{\alpha\phi}^\alpha - \Gamma_{\beta\phi}^\alpha \Gamma_{\alpha\phi}^\beta \\ &= 2A''(\phi) - \left(-\frac{1}{2} A'(\phi) \delta_\alpha^\beta\right) \left(-\frac{1}{2} A'(\phi) \delta_\beta^\alpha\right) \\ &= 2A''(\phi) - A'^2(\phi) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Vervolgens gaan we ook de Ricciscalar bepalen

$$\begin{aligned}
R = G^{MN} R_{MN} &= G^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + G^{\phi\phi} R_{\phi\phi} \\
&= \frac{1}{2} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \frac{1}{r_c^2} (A''(\phi) - 2A'^2(\phi)) + \frac{1}{r_c^2} (2A''(\phi) - A'^2(\phi)) \\
&= \frac{4A''(\phi)}{r_c^2} - \frac{5A'^2(\phi)}{r_c^2} \tag{3.21}
\end{aligned}$$

We kunnen nu de Einsteinvergelijking voor de $\mu\nu$ - en de $\phi\phi$ -component bepalen door bovenstaande in te vullen

$$\begin{aligned}
\sqrt{-G}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}R) &= -\frac{1}{4M^3}(\Lambda\sqrt{-G}G_{\mu\nu} + V_1\sqrt{g_{(1)}}g_{\alpha\beta}^{(1)}\delta_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta\delta(\phi-\pi) \\
&\quad + V_2\sqrt{g_{(2)}}g_{\alpha\beta}^{(2)}\delta_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta\delta(\phi)) \\
&\Leftrightarrow \\
r_c e^{-2A} \left[\frac{1}{2r_c^2} e^{-A} \eta_{\mu\nu} (A'' - 2A'^2) - \frac{1}{2r_c^2} e^{-A} \eta_{\mu\nu} (4A'' - 5A'^2) \right] \\
&= -\frac{1}{4M^3} \left[\Lambda e^{-3A} \eta_{\mu\nu} r_c + V_1 e^{-3A(\pi)} \eta_{\mu\nu} \delta(\phi - \pi) + V_2 e^{-3A(0)} \eta_{\mu\nu} \delta(\phi) \right] \\
&\Leftrightarrow \\
\frac{3}{2}(A'^2 - A'') &= -\frac{1}{4M^3}(\Lambda r_c^2 + V_1 r_c \delta(\phi - \pi) + V_2 r_c \delta(\phi)) \tag{3.22}
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\sqrt{-G}(R_{\phi\phi} - \frac{1}{2}G_{\phi\phi}R) &= -\frac{1}{4M^3}(\Lambda\sqrt{-G}G_{\phi\phi} + V_1\sqrt{g_{(1)}}g_{\alpha\beta}^{(1)}\delta_\phi^\alpha\delta_\phi^\beta\delta(\phi-\pi) \\
&\quad + V_2\sqrt{g_{(2)}}g_{\alpha\beta}^{(2)}\delta_\phi^\alpha\delta_\phi^\beta\delta(\phi)) \\
&\Leftrightarrow \sqrt{-G} \left[2A'' - A'^2 - \frac{1}{2}r_c^2 \left(\frac{4A''}{r_c^2} - \frac{5A'^2}{r_c^2} \right) \right] = -\frac{1}{4M^3}(\Lambda\sqrt{-G}G_{\phi\phi}) \\
&\Leftrightarrow \frac{3}{2}A'^2 = -\frac{1}{4M^3}\Lambda r_c^2 \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Uit de tweede vergelijking (3.23) en het feit dat $(x, \phi) = (x, -\phi)$ volgt $A(\phi)$

$$A(\phi) = r_c |\phi| \sqrt{\frac{-\Lambda}{6M^3}} + \text{Constante} \tag{3.24}$$

De integratieconstante kunnen we altijd wegwerken door middel van een herschaling en daarom stellen we deze constante op nul. We weten nu de warpfactor en dus ook de metriek

$$ds^2 = e^{-r_c |\phi| \sqrt{\frac{-\Lambda}{6M^3}}} dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} + r_c^2 d\phi^2 \tag{3.25}$$

Uit de functie voor $A(\phi)$ (3.24) blijkt dat de cosmologische constante een negatieve waarde moet hebben. Dit betekent dat de ruimtetijd een zogenaamde vijfdimensionale AntideSitter ruimtetijd is [2]. We zullen nu de eerste Einsteinvergelijking (3.22) oplossen. We vinden dan een verband tussen de braanpotentialen en de cosmologische constante. Hiertoe gaan we eerst de tweede afgeleide van $A(\phi)$ bepalen

$$A''(\phi) = 2r_c \sqrt{\frac{-\Lambda}{6M^3}} (\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)) \quad (3.26)$$

Wanneer we de vergelijkingen (3.22) en (3.23) van elkaar aftrekken volgt

$$\frac{3}{2}A''(\phi) = \frac{1}{4M^3}r_c(V_1\delta(\phi - \pi) + V_2\delta(\phi)) \quad (3.27)$$

Door de vergelijking voor A'' (3.26) in vergelijking (3.27) in te vullen komen we tot deze vergelijking

$$\sqrt{\frac{-\Lambda}{6M^3}} (\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)) = \frac{1}{12M^3} (V_1\delta(\phi - \pi) + V_2\delta(\phi)) \quad (3.28)$$

Deze vergelijking kan gemakkelijk worden opgelost in termen van V en Λ . Het is echter handig om de oplossing van bovenstaande vergelijking op te schrijven door een auxiliaire parameter k in te voeren. Dit leidt tot een relatie tussen de cosmologische constante en de braanpotentialen in termen van k

$$V(2) = -V(1) = 24M^3k, \quad \Lambda = -24M^3k^2 \quad (3.29)$$

De braantensies en de tweede afgeleide van de warpfactor heffen elkaar precies op. Dit zorgt ervoor dat er geen vierdimensionale cosmologische constante is, waardoor de branen vlak zijn. Dit willen we ook omdat onze vierdimensionale wereld min of meer vlak is. In dit scenario zijn de branen grenzen, maar in een model waarin de extra dimensie ook na de branen doorgaat klappt de warping om bij elke braan (zie fig.4). Dit is in de volgende paragraaf belangrijk wanneer we de golf functie van het graviton uitrekenen. Deze is namelijk niet normaliseerbaar, wanneer de warping bij de braan niet omklapt.

De metriek in termen van k die uit deze berekeningen volgt is de volgende:

$$ds^2 = e^{2kr_c|\phi|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2 \quad (3.30)$$

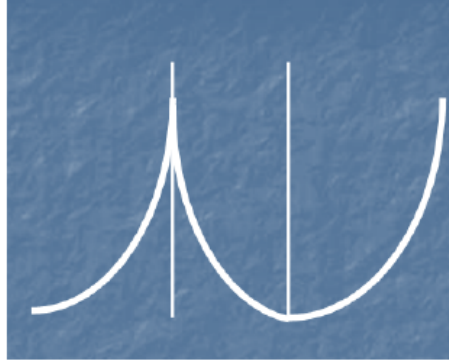


Figure 4: De warping weergegeven door de kromme klapt om bij de branen, weergegeven door de verticale lijnen.

3.2.3 Zwaartekracht

De waarde die we kiezen voor de straal van de extra dimensie, r_c , om het hiërarchieprobleem op te lossen, is zo klein dat de extra dimensie geen gevolgen zal hebben voor zwaartekrachtexperimenten in onze wereld. Om dat na te gaan is het handig om een effectieve actie op te stellen. Een effectieve actie is een actie die alleen relevant is voor bepaalde energieën en hogere energieprocessen buiten beschouwing laat. Omdat wij in de (nabije) toekomst geen hele hoge energieën zullen bereiken is een effectieve actie voldoende om te begrijpen of zwaartekracht anders zal zijn als gevolg van een extra dimensie. De metriek die we tot nu toe behandeld hebben, geeft weer hoe de achtergrondruimtetijd eruit ziet. Daarbovenop bestaan kleine fluctuaties, waarvan het belangrijk is om te weten hoe die zich gedragen voor zwaartekracht. Wanneer we zwaartekracht gaan onderzoeken moeten we daarom kleine gravitatiefluctuaties, $h_{\mu\nu}$, toevoegen aan de Minkowski-metriek. Deze fluctuaties zijn in de vier dimensionale effectieve theorie gravitonen [2]. De metriek ziet er nu als volgt uit

$$ds^2 = e^{-2kT(x)|\phi|}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x))dx^\mu dx^\nu + T^2(x)d\phi^2 \quad (3.31)$$

$T(x)$ is een modulusveld, dat een willekeurige potentiaal kan hebben. De verwachtingswaarde van dit veld is r_c . Deze metriek geeft voor elke constante waarde van $T(x)$ een oplossing van de Einsteinvergelijking. Voor dit Randall-Sundrum model is het echter essentieel dat er een potentiaal met een minimum voor r_c gegenereerd wordt. Door dit minimum wordt het modulusveld gestabiliseerd op r_c . Goldberger en Wise hebben aangetoond dat er een mechanisme bestaat om het veld vast te leggen, zie hoofdstuk 4. Daarom zullen we in het vervolg stellen $T(x) = r_c$.

De tensorfluctuaties veranderen langzaam en zijn erg klein. Hogere orde termen in de fluctuatie kunnen alleen groot worden voor hoge energieën. Een effectieve actie, waarbij wordt uitgegaan van lage energieën, is daarom veel eenvoudiger dan de gewone actie. Wanneer we de effectieve actie integreren over de extra dimensie laat dat zien hoe zwaartekracht in vier dimensies werkt in termen van de parameters van de extra dimensie. Op die manier kunnen we afleiden hoe wij zwaartekracht zullen waarnemen wanneer het RSI model blijkt te kloppen. We gaan nu de vierdimensionale effectieve actie afleiden voor bovenstaande metriek (3.31) met $T(x) = r_c$. De Riccitor in vijf dimensies $R_{\mu\nu}^{(5)}$ bevat de Riccitor in vier dimensies $R_{\mu\nu}^{(4)}$, gemaakt van $g_{\mu\nu}^{(4)} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu}^{(5)} = R_{\mu\nu}^{(4)} + 8k\delta(r_c\phi) + 16k^2 \quad (3.32)$$

Wanneer we het deel van de effectieve actie bestuderen dat de metriek in vier dimensies bevat, kunnen we een verband afleiden tussen de Planckmassa in vijf en in vier dimensies. De Ricciscalar in vijf dimensies bevat de Ricciscalar in vier dimensies $R^{(5)} \supset R^{(4)} e^{2kr_c|\phi|}$. Het verband tussen de wortel van de determinant van de metriek in vijf dimensies en in vier dimensies is $\sqrt{-G} = r_c e^{-4kr_c|\phi|} \sqrt{-g_{(4)}}$ met $g_{(4)}$ de determinant van $(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$. Omdat we nagaan hoe zwaartekracht zal werken, concentreren we ons op de term in de actie voor zwaartekracht en laten we de cosmologische constante achterwege. Als we bovenstaande metriek (3.31) invullen in de algemene actie (3.5) zal alleen de Einstein-Hilbertactie (3.6) een bijdrage leveren aan de zwaartekracht. De effectieve actie gaat dan als

$$S_{eff} \supset \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi 2M^3 r_c e^{-2kr_c|\phi|} \sqrt{-g_{(4)}} R_4 \quad (3.33)$$

Als we nu deze effectieve actie vergelijken met de reguliere actie in vier dimensies (3.1) kunnen we een verband tussen de Planckmassa in vier dimensies en die in vijf dimensies afleiden

$$M_{PL}^2 = M^3 r_c \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-2kr_c|\phi|} = \frac{M^3}{k} (1 - e^{-2kr_c\pi}) \quad (3.34)$$

Dit verband is eenzelfde soort verband als we voor het ADD model hebben afgeleid (3.4). We kunnen hieraan zien hoe sterk zwaartekracht bij ons is, afhankelijk van de Planckconstante in de gehele ruimtetijd. Wat hieraan opvalt is dat de Planckmassa in vier dimensies maar weinig afhangt van de grootte van de extra dimensie. Later zullen we zien dat dit zelfs betekent dat r_c naar oneindig kan gaan.

3.2.4 Hiërarchieprobleem

Om het hiërarchieprobleem op te lossen gaan we ervan uit dat er één fundamentele schaal is. Dit betekent dat of de Planckschaal fundamenteel is, of de elektrozwakke schaal. In het ADD model is de fundamentele schaal de elektrozwakke en heeft zwaartekracht ook deze schaal. Omdat zwaartekracht verdeeld wordt over meer dimensies is hij in vier dimensies zwak.

In het Randall-Sundrummodel wordt aangenomen dat alle massa's op de Planckbraan van de orde van de Planckmassa zijn en daar is deze schaal fundamenteel. Op onze braan worden massa's echter onderdrukt door de warping en zijn ze daarom veel kleiner. De sterkte van een kracht hangt af van de massa van het boson dat de kracht overbrengt (2.22). Dit betekent dat de krachten, die aan onze braan gebonden zijn, veel groter zijn dan zwaartekracht, die afhangt van de niet onderdrukte Planckmassa. Dit zullen we hieronder aantonen. We nemen een complex scalair veld (het Higgsveld) en gaan daarvan de effectieve actie bepalen

$$S \supset \int d^d x \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (|H|^2 - v_0^2)^2 \right] \quad (3.35)$$

Hierin is H het complexe scalaire veld en v_0 een massaparameter. We nemen aan dat de actie van het veld op beide branen gelijk is.¹ We willen nu de actie op de braan in vijf dimensies vergelijken met een effectieve actie op de braan in termen van $g_{\mu\nu}^{(4)} = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$. Uit (3.9) en (3.10) blijkt dat de metriek op de onzichtbare braan gelijk is aan de effectieve vierdimensionale metriek $g_{\mu\nu}^{(4)}$. Er is daar daarom geen verschil tussen een vierdimensionale effectieve actie en de echte vierdimensionale actie. Echter, op de braan waarop wij leven, de zichtbare braan, geldt dat de metrieken zich als volgt verhouden $g_{\mu\nu}^{(1)} = e^{-2kr_c\pi} g_{\mu\nu}^{(4)}$. Wanneer we dit invullen in de actie blijkt

$$S_1 \supset \int d^4 x e^{-4kr_c\pi} \sqrt{g_{(4)}} \left[g_{(4)}^{\mu\nu} e^{2kr_c\pi} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (|H|^2 - v_0^2)^2 \right] \quad (3.36)$$

Dit veld moet genormaliseerd worden en daarom maken we de substitutie $H \rightarrow e^{kr_c\pi} H$ [2]. Daaruit volgt de effectieve actie

$$S_{eff} \supset \int d^4 x \sqrt{-g_{(4)}} \left[g_{(4)}^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (|H|^2 - e^{-2kr_c\pi} v_0^2)^2 \right] \quad (3.37)$$

Wanneer we dit vergelijken met de actie in vier dimensies voor dit veld

$$S_{(4)} \supset \int d^4 x \sqrt{-g_{(4)}} \left[g_{(4)}^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (|H|^2 - v^2)^2 \right] \quad (3.38)$$

¹Vanwege de tegenovergestelde tensies van de branen zijn de branen niet gelijk. De aanname die we maken, dat de acties van de velden op beide branen gelijk zijn, is daarom niet vanzelfsprekend. We hopen echter dat deze aanname in de toekomst gerechtvaardigd zal worden.

zien we dat de relatie tussen de massaparameter die wij meten, v , en de fundamentele massaparameter, v_0 de volgende is

$$v = e^{-kr_c\pi} v_0 \quad (3.39)$$

Dit betekent dat de massa die wij meten een factor $e^{-kr_c\pi}$ kleiner is dan de eigenlijke massa v_0 . We nemen hierbij aan dat v_0 van de orde van de Planckmassa is. Hierboven hadden we al berekend dat de Planckmassa in vier dimensies nauwelijks verandert wanneer k van dezelfde orde is als de Planckmassa. Dit is een gedeeltelijke oplossing voor het hiërarchieprobleem, omdat alle andere massa's (dus ook die van de W en Z bosonen) eigenlijk groter zijn dan wij denken. Voor een juiste waarde van kr_c zijn de massa's van de W en Z bosonen van de orde die wij meten in vier dimensies, dit is voor $kr_c \sim 12$. Deeltjes op de Planckbraan hebben een veel grotere massa, zwaartekracht is daar daarom veel sterker dan op onze braan waar alle massa's een orde 10^{16} kleiner zijn. De fundamentele krachten zijn daar allen van dezelfde orde van grootte. Er is echter geen reden waarom kr_c precies de juiste waarde zou hebben. Net als bij het ADD model is de grote hiërarchie tussen de Planckschaal en de electrozwakke schaal opgelost, maar in de plaats daarvan komt de vraag waarom kr_c de juiste waarde heeft. Voor een volledige oplossing van het hiërarchieprobleem moet deze vraag ook beantwoord worden.

We kunnen ook de TeV schaal als fundamenteel stellen door een transformatie van $x^\mu \rightarrow e^{kr_c\pi} x^\mu$. Het gevolg is dat massa's op onze braan gelijk zijn aan wat we meten maar op de onzichtbare braan een factor $e^{kr_c\pi}$ groter worden gemeten dan ze eigenlijk zijn. In de volgende paragraaf zullen we zien dat de golf functie van zwaartekracht het grootst is bij de onzichtbare braan, daarom ook wel de Planckbraan genoemd. Deze functie gaat ongeveer als de warpfactor. Daarom is de kans dat een graviton zich bevindt in de buurt van de zichtbare braan heel klein, wat resulteert in de zwakte van zwaartekracht in onze wereld.

3.3 Randall Sundrum Model II

In de voorgaande paragraaf is een kleine extra dimensie behandeld. Deze dimensie moest klein zijn om het hiërarchieprobleem op te lossen. We gaan nu een model met een grote extra dimensie analyseren, maar dit lost het hiërarchieprobleem niet op. Tot het RSII model werd ontdekt waren grote ($> \text{mm}$) extra dimensies uit den boze, omdat ze niet in overeenstemming waren met de wet van Newton voor gravitatiekracht. Dit model laat zien dat er zelfs een oneindig grote extra dimensie kan bestaan. Dit is mogelijk omdat ruimtetijd gewarpt is en daardoor gravitatiekracht gelokaliseerd is op de braan. Bij het ADD model werd gravitatiekracht verdund door de extra dimensies, maar in dit model blijft zwaartekracht door lokalisatie

‘sterk’. De golffunctie van het graviton is groot op de braan en valt snel af hoe verder er van de braan wordt afgeweken. De kans dat een graviton zich ver van de braan bevindt, is dus heel klein, waardoor zwaartekracht groot blijft in de buurt van de braan.

3.3.1 Opzet

Het scenario lijkt op dat voor het RSI model (paragraaf 3.2) met het verschil dat er maar één braan is. We hebben de tweede braan op oneindig geplaatst en daarmee een oneindig grote extra dimensie gecreëerd. De coördinaat van de extra dimensie, die in paragraaf (3.2.1) $r_c\phi$ wordt genoemd, heet nu y . De metriek wordt dan

$$ds^2 = e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (3.40)$$

De braan met positieve tensie (braan 2) bevindt zich op $y = 0$. In de actie (3.7) voor de branen is er een positieve V_2 -term in plaats van een negatieve en de actie voor braan 1 laten we weg. Dezelfde relatie (3.29) tussen de braanpotentiaal en de cosmologische constante in termen van k geldt. Weer geldt dat de cosmologische constante van de bulk de positieve tensie van de braan op $y = 0$ precies teniet doet.

3.3.2 Golffuncties van de Kaluza-Kleindeeltjes

We hebben in het RSI model gezien dat zwaartekracht nauwelijks afhangt van de straal van de extra dimensie. Daarom lijkt een oneindig grote extra dimensie een mogelijkheid. Ook voor het RSII model geldt dezelfde effectieve actie en relatie tussen de Planckmassa’s, (3.33) en (3.34) met de substitutie $r_c\phi \rightarrow y$. We kunnen echter niet meteen concluderen dat een oneindig grote extra dimensie mogelijk is. Er moet eerst nagegaan worden hoe de gravitongolffunctie er uitziet en of er geen Kaluza-Kleindeeltjes ontstaan die een (grote) Yukawapotentiaal veroorzaken, waardoor de zwaartekracht niet meer alleen van de Newtonpotentiaal afhangt. Om dit te onderzoeken gaan we de golffuncties van alle verschillende Kaluza-Kleindeeltjes berekenen, waarbij het vierdimensionale graviton gelijk is aan het Kaluza-Kleindeeltje zonder massa. Bij het RSI model volstond het om de effectieve actie te berekenen die geldig is voor energieën die kleiner zijn dan de massa van het lichtste Kaluza-Kleindeeltje. Voor het RSII model is er echter een continu spectrum van massa’s. Dit betekent dat er voor elke energie Kaluza-Kleindeeltjes kunnen bestaan.

We gaan dus de golffunctie van de Kaluza-Kleindeeltjes bepalen. We moeten hiertoe eerst de bewegingsvergelijking opstellen voor de metriek waaraan een kleine fluctuatie $h_{\mu\nu}$ is toegevoegd. Deze fluctuaties zijn kleine veranderingen in het gravitationele veld, welke je kunt zien als deeltjes (gravitonen en Kaluza-Klein deeltjes). De fluctuatie heeft de volgende vorm:

$h(x, y) = \psi(y)e^{ip \cdot x}$. Er geldt dat $p^2 = -m^2$. We gaan deze nieuwe metriek

$$ds^2 = \left(e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, y) \right) dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (3.41)$$

invullen in de reeds berekende Einsteinvergelijking (3.15) uit paragraaf (3.2.2). We hebben in dit geval één braan, de braan die in vergelijking (3.15) braan 2 wordt genoemd. Voordat we beginnen aan deze berekening moet eerst opgemerkt worden dat we gebruik maken van de zogenaamde Randall-Sundrum ijking: $\partial^\mu h_{\mu\nu} = h_\mu^\mu = 0$. We gaan een gelineariseerde vergelijking opstellen, daarom gaan we maar tot orde h . Verder is η de tensor die indices naar boven of naar beneden kan halen bij $h_{\mu\nu}$, dus bijvoorbeeld $\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h_\mu^\mu = 0$. Dit maakt de berekening een stuk korter. Laten we eerst nagaan of de determinant van de metriek verandert

$$\sqrt{-\det(G+h)} = \sqrt{-\det(G) \det(1+G^{-1}h)} \quad (3.42)$$

$$\det(1+A) \simeq \text{spoor}(A) - \frac{1}{2} \text{spoor}(A^2) + \frac{1}{2} \text{spoor}^2(A) \quad (3.43)$$

met G de oorspronkelijke metriek (zonder fluctuatie) en h de fluctuatie. Het spoor van $G^{-1}h = h_\mu^\mu$ met bovenstaande ijking is nul. Het spoor van deze matrix in het kwadraat bevat alleen termen van orde h^2 . Daarom valt dit deel van de determinant weg en blijft de oorspronkelijke determinant over $\sqrt{-G} = e^{-4k|y|}$. Ook $\sqrt{g_{(2)}} = 1$ blijft hetzelfde als voor de toevoeging van de fluctuatie.

Laten we vervolgens nagaan hoe de Riccitenor verandert. Hierbij nemen we aan dat de fluctuatie niet alleen erg klein is maar ook erg langzaam verandert. Dit betekent dat niet alleen orde h^2 en hoger wegvalt maar ook $h_{\mu\nu} \partial_y h_{\mu\nu}$ en $\partial_y h_{\mu\nu} \partial_y h_{\mu\nu}$. Tevens is de x -afgeleide van h natuurlijk weer van orde h . Alle Christoffelsymbolen met twee y -indices zijn nul. Voor R_{yy} blijven dan alleen de volgende componenten over

$$R_{yy} = -\partial_y \Gamma_{\alpha y}^\alpha - \Gamma_{\alpha y}^\beta \Gamma_{\beta y}^\alpha \quad (3.44)$$

met

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha y}^\alpha &= \frac{1}{2} G^{\alpha\lambda} (\partial_y G_{\alpha\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{2k|y|} \eta^{\alpha\lambda} - e^{4k|y|} h^{\alpha\lambda}) (-2k \text{sgn}(y) e^{-2k|y|} \eta_{\alpha\lambda} + \partial_y h_{\alpha\lambda}) \\ &= -k \text{sgn}(y) \delta_\alpha^\alpha \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\Gamma_{\alpha y}^\beta = \frac{1}{2} G^{\beta\lambda} \partial_y G_{\lambda\alpha} = -k \text{sgn}(y) \delta_\alpha^\beta + \frac{1}{2} e^{2k|y|} \partial_y h_\alpha^\beta + k \text{sgn}(y) e^{2k|y|} h_\alpha^\beta \quad (3.46)$$

$$\Gamma_{\beta y}^\alpha = -k \text{sgn}(y) \delta_\beta^\alpha + \frac{1}{2} e^{2k|y|} \partial_y h_\beta^\alpha + k \text{sgn}(y) e^{2k|y|} h_\beta^\alpha \quad (3.47)$$

Dit resulteert in dezelfde yy -component van de Riccitenor als we hadden gevonden voor de metriek zonder fluctuatie (3.20)

$$R_{yy} = 8k\delta(y) - 4k^2 \quad (3.48)$$

De $\mu\nu$ -component van de Riccitenor geeft wat meer rekenwerk en is wel veranderd. Wanneer we alleen de Christoffelsymbolen die niet nul zijn of wegvallen vanwege hogere machten van h meenemen ziet deze Riccitenor er zo uit

$$R_{\mu\nu} = \partial_y \Gamma_{\mu\nu}^y + \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^y \Gamma_{y\alpha}^\alpha - \Gamma_{y\nu}^\beta \Gamma_{\beta\mu}^y - \Gamma_{\alpha\nu}^y \Gamma_{y\mu}^\alpha \quad (3.49)$$

met

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \frac{1}{2} G^{\alpha\lambda} (\partial_\mu G_{\nu\lambda} + \partial_\nu G_{\lambda\mu} - \partial_\lambda G_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} e^{2k|y|} (\partial_\mu h_\nu^\alpha + \frac{1}{2} \partial_\nu h_\mu^\alpha - \frac{1}{2} \partial_\lambda h_{\mu\nu} \eta^{\alpha\lambda}) \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^y = \frac{1}{2} G^{yy} (-\partial_y G_{\mu\nu}) = k \operatorname{sgn}(y) e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_y h_{\mu\nu} \quad (3.51)$$

$$\Gamma_{y\nu}^\beta = -k \operatorname{sgn}(y) \delta_\nu^\beta + \frac{1}{2} e^{2k|y|} \partial_y h_\nu^\beta + e^{2k|y|} k \operatorname{sgn}(y) h_\nu^\beta \quad (3.52)$$

$$\Gamma_{\beta\mu}^y = k \operatorname{sgn}(y) e^{-2k|y|} \eta_{\beta\mu} - \frac{1}{2} \partial_y h_{\beta\mu} \quad (3.53)$$

$$\Gamma_{\alpha\nu}^y = k \operatorname{sgn}(y) e^{-2k|y|} \eta_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \partial_y h_{\alpha\nu} \quad (3.54)$$

$$\Gamma_{y\mu}^\alpha = -k \operatorname{sgn}(y) \delta_\mu^\alpha + \frac{1}{2} e^{2k|y|} \partial_y h_\mu^\alpha + e^{2k|y|} k \operatorname{sgn}(y) h_\mu^\alpha \quad (3.55)$$

De Ricci tensor wordt nu

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= 2k\delta(y) e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} - 2k^2 e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_y^2 h_{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{2k|y|} \eta^{\alpha\lambda} \partial_\alpha \partial_\lambda h_{\mu\nu} \\ &\quad + (k \operatorname{sgn}(y) e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_y h_{\mu\nu}) (-k \operatorname{sgn}(y) \delta_\alpha^\alpha) \\ &\quad - (-k \operatorname{sgn}(y) \delta_\nu^\beta + \frac{1}{2} e^{2k|y|} \partial_y h_\nu^\beta + k \operatorname{sgn}(y) e^{2k|y|} h_\nu^\beta) (k \operatorname{sgn}(y) e^{-2k|y|} \eta_{\beta\mu} - \frac{1}{2} \partial_y h_{\beta\mu}) \\ &\quad - (k \operatorname{sgn}(y) e^{-2k|y|} \eta_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \partial_y h_{\alpha\nu}) (-k \operatorname{sgn}(y) \delta_\mu^\alpha + \frac{1}{2} e^{2k|y|} \partial_y h_\mu^\alpha + k \operatorname{sgn}(y) e^{2k|y|} h_\mu^\alpha) \\ &= 2k\delta(y) e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_y^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} e^{2k|y|} \eta^{\alpha\lambda} \partial_\alpha \partial_\lambda h_{\mu\nu} - 4k^2 e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} - 2k^2 h_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Vervolgens kunnen we de Ricciscalar berekenen

$$\begin{aligned}
R &= R_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + R_{yy}G^{yy} \\
&= \left(e^{2k|y|}\eta^{\mu\nu} - e^{4k|y|}h^{\mu\nu} \right) \left(2k\delta(y)e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu} - 4k^2\eta_{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\partial_y^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}e^{2k|y|}\eta^{\alpha\lambda}\partial_\alpha\partial_\lambda h_{\mu\nu} + 2k^2 h_{\mu\nu} \right) + 8k\delta(y) - 4k^2 \\
&= 16k\delta(y) - 20k^2
\end{aligned} \tag{3.57}$$

en

$$G_{\mu\nu}R = (e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(16k\delta(y) - 20k^2) \tag{3.58}$$

Laten we nu nagaan wat er aan de rechterkant van de Einsteinvergelijking staat

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4M^3} \left[\Lambda\sqrt{-G} G_{MN} + V\sqrt{g} g_{\mu\nu} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(y) \right] \\
&= -\frac{1}{4M^3} \left[-24k^2 M^3 e^{-4k|y|} (e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \right. \\
&\quad \left. + 24k M^3 (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \right]
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Aan beide kanten van de Einsteinvergelijking staan termen met $\eta_{\mu\nu}$ en termen met $h_{\mu\nu}$. De eerste zijn de termen die ook in de vergelijking voorkomen met de oorspronkelijke metriek (3.16) en vallen dus tegen elkaar weg. We hoeven daarom alleen de termen met $h_{\mu\nu}$ mee te nemen

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-G}(R_{MN} - \frac{1}{2}G_{MN}R) = -\frac{1}{4M^3} \left(\Lambda\sqrt{-G} G_{MN} + V\sqrt{g} g_{\mu\nu} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(y) \right) \\
\Leftrightarrow &e^{-4k|y|} \left(-\frac{1}{2}\partial_y^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}e^{2k|y|}\eta^{\alpha\lambda}\partial_\alpha\partial_\lambda h_{\mu\nu} - 2k^2 h_{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}(16k\delta(y)h_{\mu\nu} - 20k^2 h_{\mu\nu}) \right) \\
&= 6k^2 e^{-4k|y|} h_{\mu\nu} - 6k h_{\mu\nu} \delta(y) \\
\Leftrightarrow &-\frac{1}{2}\partial_y^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}e^{2k|y|}\eta^{\alpha\lambda}\partial_\alpha\partial_\lambda h_{\mu\nu} + 2k^2 h_{\mu\nu} - 2k\delta(y)h_{\mu\nu} = 0
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Wanneer we nu $h = \psi(y)e^{ip \cdot x}$ invullen en vervolgens door $e^{ip \cdot x}$ delen volgt

$$\left[-\frac{1}{2}\partial_y^2 - 2k\delta(y) + 2k^2 - \frac{m^2}{2}e^{2k|y|} \right] \psi(y) = 0 \tag{3.61}$$

We hebben nu een bewegingsvergelijking gevonden voor de Kaluza-Klein-deeltjes. In deze vergelijking geeft m de massa in vier dimensies van het betreffende Kaluza-Klein-deeltje weer. Om de golffunctie $\psi(y)$ van deze deeltjes te vinden, is het gemakkelijker om de bovenstaande vergelijking in

een andere vorm te schrijven, namelijk in een niet-relativistisch quantummechanische vorm [5].

Bij het oplossen van bovenstaande differentiaalvergelijking moeten we er rekening mee houden dat de straal welliswaar op oneindig is gezet, maar dat we nog wel met spiegelsymmetrie werken. Daarom kunnen we alleen even functies beschouwen. We nemen $z \equiv \frac{\text{sgn}(y)}{k} (e^{k|y|} - 1)$, $\psi(z) \equiv \psi(y)e^{k|y|/2}$. Wanneer we dit invullen in bovenstaande vergelijking vinden we de nieuwe vergelijking. Daartoe zullen we eerst de dubbele afgeleide van $\psi(y)$ in termen van $\psi(z)$ naar y bepalen, met

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2\delta(y)(e^{k|y|} - 1)}{k} + e^{k|y|} = e^{k|y|} \quad (3.62)$$

vanwege de deltafunctie in de eerste term. Dan is de dubbele afgeleide

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dy} \psi(z) e^{-k|y|/2} \right) \\ = & \frac{d}{dy} \left(-\frac{k}{2} \text{sgn}(y) e^{-k|y|/2} \psi(z) + e^{-k|y|/2} \frac{d\psi(z)}{dz} \frac{dz}{dy} \right) \\ = & -k\delta(y) e^{-k|y|/2} \psi(z) + \frac{k^2}{4} e^{-k|y|/2} \psi(z) - \frac{k}{2} \text{sgn}(y) e^{-k|y|/2} \frac{d\psi(z)}{dz} \frac{dz}{dy} \\ & + \frac{k}{2} \text{sgn}(y) e^{k|y|/2} \frac{d\psi(z)}{dz} + e^{3k|y|/2} \frac{d^2\psi(z)}{dz^2} \\ = & -k\delta(y) e^{-k|y|/2} \psi(z) + \frac{k^2}{4} e^{-k|y|/2} \psi(z) + e^{3k|y|/2} \frac{d^2\psi(z)}{dz^2} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Aangezien $\text{sgn}(y) = \text{sgn}(z)$, $\delta(y) = \delta(z)$ en $|y| = \frac{\ln(k|z|+1)}{k}$ wordt de vergelijking in quantummechanische vorm

$$\begin{aligned} & -\frac{m^2}{2} e^{3k|y|/2} \psi(z) + \frac{1}{2} k\delta(y) e^{-k|y|/2} \psi(z) - \frac{k^2}{8} e^{-k|y|/2} \psi(z) \\ & - \frac{1}{2} e^{3k|y|/2} \frac{d^2\psi(z)}{dz^2} - 2k\delta(y) e^{-k|y|/2} \psi(z) + 2k^2 e^{k|y|/2} \psi(z) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{15k^2}{8(k|z|+1)^2} - \frac{3}{2} k\delta(z) \right] \psi(z) = \frac{m^2}{2} \psi(z) \end{aligned} \quad (3.64)$$

De laatste twee termen aan de linkerkant van de vergelijking zijn de quantummechanische potentiaal. De potentiaal heeft een piek, door de eerste term, met daarin een krater door de deltafunctie. Vanwege zijn vorm wordt deze potentiaal ook wel de vulkaanpotentiaal genoemd (zie fig. 5).

Uit deze potentiaal kunnen we verschillende eigenschappen van de Kaluza-Kleindeeltjes opmaken. De potentiaal gaan naar nul voor $|z| \rightarrow \infty$, de

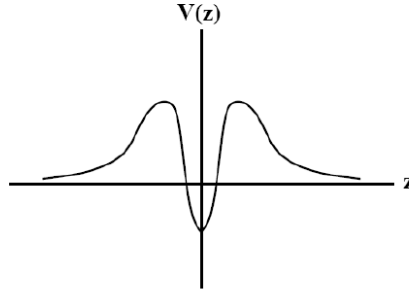


Figure 5: De vulkaanpotentiaal, die zorgt dat het graviton bij de braan ge-localiseerd is en de Kaluza-Kleindeeltjes ver van de braan blijven.

vergelijking die dan volgt heeft vlakke golven als oplossingen. De Kaluza-Kleindeeltjes met een massa groter dan nul zijn ver van de braan vlakke golven. De kans dat deze deeltjes zich in de buurt van de braan bevinden is klein, omdat de deeltjes dan door de potentiaal moeten tunnelen. We zien ook dat de deeltjes geen gequantiseerde massa's hebben, maar dat er een deeltje is voor elke massa $m^2 > 0$ [4, 5]. De kans dat een Kaluza-Kleindeeltje op de braan terecht komt kun je berekenen met behulp van een WKB-benadering en is heel klein, dit wordt bijvoorbeeld gedaan in [4]. De golf functie van het graviton volgt door de bewegingsvergelijking (3.64) voor een Kaluza-Kleindeeltje met massa $m = 0$ op te lossen. De golf functie is

$$\psi(z) = \frac{N_0}{k(k|z| + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.65)$$

Om vierdimensionale zwaartekracht terug te krijgen moet de golf functie normaliseerbaar zijn

$$\int_0^{z_c} dz \left(\frac{1}{k(k|z| + 1)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 = -\frac{1}{2k^3(kz_c + 1)^2} + \frac{1}{2k^3} \quad (3.66)$$

met z_c de straal van de extra dimensie in z -coördinaten. Het blijkt dus dat voor elke straal van de extra dimensie (dus ook voor oneindig) de golf functie normaliseerbaar is. De normalisatieconstante is $N_0 = \sqrt{2k^3}$. Aan de formule voor de golf functie kun je zien dat hij de grootste waarde heeft op de braan ($z = 0$) en dan aan beide kanten snel afvalt. Dit betekent dat zwaartekracht daar de grootste waarde heeft en dat de kans dat een graviton zich ver van de braan bevindt klein is.

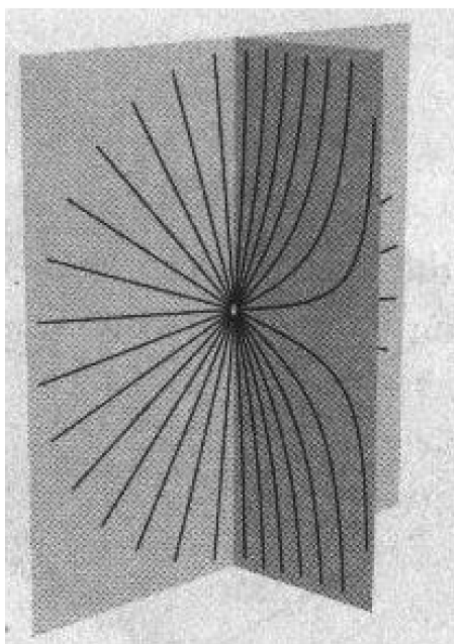


Figure 6: Een afbeelding van de spreiding van zwaartekracht. Op de braan is zwaartekracht gelijkmatig verdeeld, terwijl hij in de bulk in de buurt van de braan blijft.

De bovenstaande vergelijking (3.64) is een vorm van de Besseldifferentiaalvergelijking en de oplossing hiervan is een combinatie van Besselfuncties. De standaard vorm van deze Besselvergelijking is de volgende

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2\alpha - 1}{x} \frac{d\psi}{dx} + (\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2} + \frac{\alpha^2 - n^2\gamma^2}{x^2})\psi = 0 \quad (3.67)$$

met als oplossing voor gehele n

$$y = x^\alpha [AJ_n(\beta x^\gamma) + BY_n(\beta x^\gamma)] \quad (3.68)$$

Als we dit vergelijken met vergelijking (3.64) lijken we de volgende waarden te moeten nemen: $\alpha = \frac{1}{2}$, $x = |z| + \frac{1}{k}$, $\gamma = 1$, $\beta = m$ en $n = 2$. Laten we nagaan of dit klopt. Eerst schrijven we de dubbele afgeleide naar x om in een dubbele afgeleide naar y :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d^2\psi}{dz^2} \frac{dz^2}{dx} + \frac{d\psi}{dz} \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2\psi}{dz^2} + 2\delta(z) \frac{d\psi}{dz} \quad (3.69)$$

Wanneer we de dubbele afgeleide invullen in (3.67) en delen door twee, krijgen we

$$\frac{1}{2} \frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{m^2}{2} \psi - \frac{15k^2}{8(|z|k + 1)^2} \psi - \delta(z) \frac{d\psi}{dz} = 0 \quad (3.70)$$

We zien dat vergelijking (3.64) en (3.70) aan elkaar gelijk zijn als de volgende randvoorwaarde geldt:

$$\frac{d\psi}{dz} = -\frac{3k}{2}\psi(z) \quad (3.71)$$

Deze randvoorwaarde geldt op de braan bij $z = 0$. We kunnen de constanten A en B bepalen aan de hand van deze voorwaarde. Eerst nemen we voor de Besselfuncties de limiet voor kleine $\frac{m}{k}(|z| + 1)$. Voor deze limiet geldt

$$J_n(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$J_2(m(|z| + \frac{1}{k})) \sim \frac{m^2(|z| + \frac{1}{k})^2}{8} \quad (3.72)$$

$$Y_n(x) \rightarrow -\frac{\Gamma(n)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n - \frac{1}{\pi}$$

$$Y_2(m(|z| + \frac{1}{k})) \sim -\frac{4}{\pi m^2(|z| + \frac{1}{k})^2} - \frac{1}{\pi} \quad (3.73)$$

Wanneer we deze limiet, die geldt voor grote afstanden [5] invullen in de algemene oplossing van de Besselvergelijking (3.68) krijgen we het volgende

$$\psi_m \sim N_m(|z| + \frac{1}{k})^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{4B}{\pi m^2(|z| + \frac{1}{k})^2} - \frac{B}{\pi} + \frac{Am^2(|z| + \frac{1}{k})^2}{8} \right) \quad (3.74)$$

Hierin is N_m de normalisatieconstante. Wanneer we deze golf functie invullen in de randvoorwaarde op $z = 0$ (3.71) kunnen we de constanten A en B bepalen

$$N_m \left(\frac{6B}{\pi m^2(|z| + \frac{1}{k})^{\frac{5}{2}}} - \frac{B}{2\pi(|z| + \frac{1}{k})^{\frac{1}{2}}} + \frac{5Am^2(|z| + \frac{1}{k})^{\frac{3}{2}}}{16} \right)_{z=0}$$

$$= \frac{-3k}{2} N_m \left(-\frac{4Bk^{\frac{3}{2}}}{\pi m^2} - \frac{B}{\pi\sqrt{k}} + \frac{m^2 A}{8k^{\frac{5}{2}}} \right) \quad (3.75)$$

Uit deze vergelijking volgen de waarden voor A en B

$$B = \frac{Am^2\pi}{4k^2} \quad (3.76)$$

wanneer we $B = 1$ stellen geeft dit $A = \frac{4k^2}{\pi m^2}$. De golf functie voor de verschillende Kaluza-Kleindeeltjes met massa m wordt dan

$$\psi_m \sim N_m(|z| + \frac{1}{k})^{\frac{1}{2}} \left[\frac{4k^2}{\pi m^2} J_2(m(|z| + \frac{1}{k})) + Y_2(m(|z| + \frac{1}{k})) \right] \quad (3.77)$$

We hebben nu de golffunctie berekend van de Kaluza-Kleindeeltjes in het model met één braan en een oneindig grote extra dimensie. In de vorige paragraaf zijn we nog niet nagegaan hoe de golffunctie er uitziet voor het RSI model. De afleiding is gelijk aan het bovenstaande behalve dat we de term voor de eerste braan laten staan. Dit resulteert in een extra deltafunctie voor $z_c \equiv \frac{e^{k\pi r_c} - 1}{k}$. Er ontstaat hierdoor een nieuwe randvoorwaarde analoog met de eerste randvoorwaarde die we hebben gevonden.

$$\left. \frac{d\psi}{dz} \right|_{z=z_c} = -\frac{3k}{2(kz_c + 1)}\psi(z_c) \quad (3.78)$$

De golffunctie van het graviton voldoet aan deze voorwaarde, maar de golffuncties van de andere Kaluza-Kleindeeltjes niet. Er zijn vanwege deze voorwaarde alleen deeltjes met een bepaalde massa toegestaan, terwijl er met een oneindige extra dimensie een continu spectrum aan Kaluza-Kleindeeltjes was. Zoals men verwacht voor een opgerolde extra dimensie, is er een discreet spectrum aan Kaluza-Kleindeeltjes. Wanneer de straal van de extra dimensie groot is (grote z_c) geldt de limiet voor grote mz

$$J_n(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \pi/4\right)$$

$$J_2(mz) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi mz}} \cos\left(mz - \frac{5\pi}{4}\right) \quad (3.79)$$

$$Y_n(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Y_2(mz) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi mz}} \sin\left(mz - \frac{5\pi}{4}\right) \quad (3.80)$$

Wanneer we de golffunctie voor grote mz invullen in bovenstaande randvoorwaarde (3.78) vinden we dat de massa's gequantiseerd zijn met waarden van ongeveer $\frac{1}{z_c}$. De waarde voor de normalisatieconstante is $N_m \sim \frac{\pi m^{5/2}}{4k^2 \sqrt{z_c}}$. De waarde voor de normalisatieconstante in geval van een oneindige extra dimensie gaat als $N_m \sim \frac{\pi m^{5/2}}{4k^2}$ [5].

De golffuncties moesten tot nu toe een even functie zijn, vanwege de symmetrie waarin we werkten. Door echter zowel even als oneven functies toe te staan hebben we een extra dimensie die, aan beide kanten van nul, naar oneindig gaat en niet meer 'opgerold' is [5].

3.3.3 Zwaartekracht

De Yukawapotential is de potential die ontstaat bij uitwisseling van een massief deeltje. Aangezien er, behalve het massaloze graviton, een heel spectrum van Kaluza-Kleindeeltjes is, ziet de gravitatiepotential er anders uit dan in vier dimensies. Er is een term afkomstig van het graviton die gelijk is aan de Newtonpotential. Elk Kaluza-Kleindeeltje voegt ook een Yukawapotential toe aan de zwaartekrachtspotential. Dit resulteert in een som van Yukawapotentialen over elke mogelijke massa van een Kaluza-Kleindeeltje. Wanneer de extra dimensie oneindig groot is, is er een continu spectrum aan massa's en wordt de som een integraal. De constante van Newton, G_N , gaat als $\frac{1}{M_{PL}^2}$ in vier dimensies en de vijfdimensionale Newtonconstante, $G_N^{(5)}$, gaat als $G_N^{(5)} \sim \frac{1}{M^3} = \frac{G_N}{k}$ in vijf dimensies. Er komt ook een factor $\frac{m}{k}$ in de integraal die afkomstig is van de golf functie van de Kaluza-Kleindeeltjes wanneer de Yukawapotential berekend wordt [5]. De gravitatiepotential gaat daarom als

$$V(r) \sim G_N \frac{m_1 m_2}{r} + \int_0^\infty dm \frac{G_N}{k} \frac{m_1 m_2 e^{-mr}}{r} \frac{m}{k} \quad (3.81)$$

De integraal in deze vergelijking is een standaardintegraal met de waarde

$$\int e^{-mr} m dm = \frac{1}{r^2} \quad (3.82)$$

De gravitatiepotential is dan

$$V(r) \sim G_N \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 + \frac{1}{r^2 k^2}\right) \quad (3.83)$$

We zien dat wanneer kr groot is, we de normale Newtonpotential krijgen. Aan vergelijking (3.34) zien we dat wanneer we aannemen dat de Planck-massa in vijf dimensies, M , van dezelfde orde is als de Planck-massa in vier dimensies, M_{PL} , ook k van orde M_{PL} moet zijn. We nemen r rond 1 mm omdat dit de kleinste afstand is, waarop is vastgesteld dat zwaartekracht volgens de wet van Newton werkt. We zien dat $\frac{1}{r^2 k^2}$ heel klein is. We hebben nu laten zien dat een oneindig grote extra dimensie strookt met de metingen die tot nu toe zijn gedaan op zwaartekracht.

Aan de uitdrukking voor de Yukawapotential kun je zien dat er een extra term $\frac{1}{k^2}$ is. Deze geeft weer dat de productie van de Kaluza-Klein deeltjes op de braan wordt onderdrukt met deze factor ten opzichte van de productie van het graviton. Eén factor $\frac{1}{k}$ volgt uit de Newtonconstante en één factor $\frac{1}{k}$ volgt uit de golf functie op de braan in de limiet voor kleine m (3.72) en (3.73). Aangezien k heel groot is, is deze factor heel klein. De kans dat

een Kaluza-Kleindeeltje geproduceerd wordt, is onderdrukt met een factor $\frac{p^2}{k^2}$, met p de impuls van het proces [5]. Aangezien we k van de orde van de Planckmassa nemen is deze kans ontzettend klein en is het dus niet raar dat, als het RSII model een model van onze wereld is, we nooit Kaluza-Klein deeltjes hebben waargenomen. Deze kans is zelfs zo klein dat het onwaarschijnlijk is dat we deze deeltjes ooit zullen produceren [5]. Het is mogelijk dat er energieverlies in deeltjesversnellers optreedt door koppeling tussen gravitonen en Kaluza-Kleindeeltjes. De overlap van de golffunctie van het graviton en de golffuncties van de Kaluza-Kleindeeltjes wordt pas groot op grote afstand van de braan. De amplitude van de gravitonfunctie is daar echter heel erg klein. De kans dat er door koppeling tussen de gravitonen en de Kaluza-Kleindeeltjes energieverlies optreedt is daarom verwaarloosbaar klein [5].

We hebben aangetoond dat het mogelijk is dat er een oneindig grote, gewarpte extra dimensie bestaat. De gevolgen voor zwaartekracht in vier dimensies van dit model zijn zo klein, dat we ze niet kunnen detecteren. Het is daarom zeer moeilijk om de oneindige extra dimensie te bewijzen. Dit zal niet mogelijk zijn in deeltjesversnellers, maar misschien dat er cosmologische of astrofysische indicaties voor de extra dimensie zijn.

4 Goldberger-Wise Mechanisme

Zoals reeds genoemd is het RSI model een mogelijke oplossing voor het hiërarchieprobleem. Dit is echter alleen het geval als de warpfactor de juiste waarde heeft op de braan. Voor een oplossing van het hiërarchieprobleem moet $kr_c \sim 12$ zijn. We weten op welke waarde de straal van de extra dimensie gestabiliseerd moet zijn, wanneer we aannemen dat k van de orde van de Planckmassa is. Een mogelijk mechanisme voor deze stabilisatie is het mechanisme dat Walter Goldberger en Mark Wise hebben bedacht in 1999 [6]. Het blijkt dat dit mechanisme kan zorgen voor een stabilisatie op de waarde die we willen, zonder dat er een parameter hoeft te worden bijgesteld. Ik zal dit mechanisme hieronder kort behandelen.

In het RSI model is de straal van de extra dimensie de vacuümverwachtingswaarde van een vierdimensionaal modulusveld. Om dit veld te stabiliseren op de verwachtingswaarde is er een potentiaal nodig. Een manier om zo'n potentiaal te genereren is door middel van een scalarveld met massa m in de bulk. Dit scalarveld heeft gelocaliseerde potentialen op de branen.

We voegen de volgende actie toe aan de reeds genoemde actie voor het RSI

model (3.5)

$$S = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \left[\frac{1}{2} \sqrt{-G} (-G^{AB} \partial_A \Phi \partial_B \Phi - m^2 \Phi^2) - \sqrt{|g_1|} \lambda_1 (\Phi^2 - v_1^2)^2 \delta(\phi - \pi) - \sqrt{|g_2|} \lambda_2 (\Phi^2 - v_2^2)^2 \delta(\phi) \right] \quad (4.1)$$

met m de massa van het veld. De braantermen zien er op deze manier uit vanwege de analogie met de Higgsactie (zie (3.36)), waarbij $(\Phi^2 - v^2)^2$ een potentiaal is met een minimum op $\Phi = v$ en λ de koppelingsconstante. Aan deze actie kunnen kinetische termen worden toegevoegd maar die hebben geen invloed op de resultaten van de onderstaande berekening [6]. We werken met de metriek van het RSI model (3.16).

We gaan berekenen waar de potentiaal, die door dit veld gegenereerd wordt, een minimum heeft, omdat de straal op die waarde gestabiliseerd is. We gaan eerst een oplossing voor Φ bepalen. Daartoe leiden we met behulp van de Euler-Lagrangevergelijking de bewegingsvergelijking af. Het is echter het gemakkelijkst om eerst een substitutie te maken $r_c \phi \rightarrow y$. We gaan ervan uit dat Φ alleen van y afhankelijk is, dan ziet de bewegingsvergelijking er als volgt uit

$$\begin{aligned} \partial_y \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_y \Phi)} \right) &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi} \\ \Leftrightarrow e^{-4k|y|} (4k \operatorname{sgn}(y) \partial_y \Phi - \partial_y^2 \Phi + m^2 \Phi) + 4e^{-4kr_c \pi} \lambda_1 \Phi (\Phi^2 - v_1^2) \delta(y - r_c \pi) \\ &+ 4\lambda_2 \Phi (\Phi^2 - v_2^2) \delta(y) = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Wanneer we uit de buurt blijven van de grenzen van de extra dimensie, kunnen we de termen met deltafuncties weg laten. Een oplossing van de vergelijking die dan ontstaat is in de vorm van $Ae^{+by} + Be^{-by}$. We vullen $\Phi(y) = e^{aky}$ in in de bewegingsvergelijking (4.2) zonder deltafunctie termen. We vinden dan

$$ak^2(a - 4) = m^2 \quad (4.3)$$

Hieruit bepalen we a en de algemene oplossing voor de bewegingsvergelijking zonder deltafuncties is vervolgens

$$\Phi(y) = e^{2k|y|} \left[Ae^{k|y| \sqrt{4 + \frac{m^2}{k^2}}} + Be^{-k|y| \sqrt{4 + \frac{m^2}{k^2}}} \right] \quad (4.4)$$

We kunnen de coëfficiënten A en B bepalen door randvoorwaarden op te leggen. Deze vinden we door de algemene oplossing in de bewegingsvergelijking (4.2) in te vullen en vervolgens de overeenkomende deltafuncties bij

elkaar te nemen. Voor het gemak noemen we $\nu = \sqrt{4 + \frac{m^2}{k^2}}$ dan volgt

$$k(2 + \nu)A\delta(y) + k(2 - \nu)B\delta(y) - 2\lambda_2\Phi(0)[\Phi(0)^2 - v_2^2]\delta(y) = 0 \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} k(2 + \nu)e^{k\pi r_c(2+\nu)}A\delta(y - \pi r_c) + k(2 - \nu)e^{k\pi r_c(2-\nu)}B\delta(y - \pi r_c) \\ - 2\lambda_1\Phi(r_c\pi)[\Phi(r_c\pi)^2 - v_1^2]\delta(y - \pi r_c) = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Aangezien deze vergelijkingen niet gemakkelijk zijn op te lossen, doen we dit alleen voor grote $\lambda_{1,2}$. Uit de bewegingsvergelijking volgt dan dat het veld moet voldoen aan de volgende randvoorwaarden: $\Phi(0) = v_2$ en $\Phi(\pi r_c) = v_1$. Met deze randvoorwaarden kunnen we de coëfficiënten A en B oplossen

$$\begin{aligned} A + B &= v_2 \\ e^{k\pi r_c(2+\nu)}A + e^{k\pi r_c(2-\nu)}B &= v_1 \\ B &= \frac{v_1 - v_2e^{k\pi r_c(2+\nu)}}{e^{k\pi r_c(2-\nu)} - e^{k\pi r_c(2+\nu)}} \\ A &= \frac{v_2e^{k\pi r_c(2-\nu)} - v_1}{e^{k\pi r_c(2-\nu)} - e^{k\pi r_c(2+\nu)}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

We nemen aan dat $m/k \ll 1$ zodat we de benadering kunnen maken dat $\nu = 2 + \epsilon$, met $\epsilon \simeq \frac{m^2}{4k^2}$ een klein getal. Wanneer we A en B expanderen en termen van de orde $e^{-6k\pi r_c}$ en hoger verwaarlozen, vinden we het volgende

$$\begin{aligned} B &= \frac{v_2 - v_1e^{-k\pi r_c(2+\nu)}}{1 - e^{k\pi r_c((2-\nu)-(2+\nu))}} \simeq (v_2 - v_1e^{-k\pi r_c(2+\nu)})(1 + e^{k\pi r_c(2-\nu)-(2+\nu)}) \\ &= v_2(1 + e^{-2k\pi r_c\nu}) - v_1e^{-k\pi r_c(2+\nu)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$A = \frac{v_2e^{k\pi r_c((2-\nu)-(2+\nu))} - v_1e^{-k\pi r_c(2+\nu)}}{e^{k\pi r_c((2-\nu)-(2+\nu))} - 1} \simeq v_1e^{-k\pi r_c(2+\nu)} - v_2e^{-2k\pi r_c\nu} \quad (4.9)$$

Het scalarveld creëert een potentiaal voor r_c . We kunnen de effectieve potentiaal in vier dimensies vinden door bovenstaande oplossing in te vullen in de actie en vervolgens te integreren over ϕ . Goldberger en Wise hebben dit gedaan en de effectieve potentiaal is voor grote kr_c en wanneer hogere ordes in ϵ verwaarloosd worden [6]

$$\begin{aligned} V(r_c) &= k\epsilon v_2^2 + 4ke^{-4k\pi r_c}(v_1 - v_2e^{-\epsilon kr_c\pi})^2 \left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right) \\ &\quad - k\epsilon v_2e^{-(4+\epsilon)kr_c\pi}(2v_1 - v_2e^{-\epsilon kr_c\pi}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Wanneer we vervolgens de termen van orde ϵ verwaarlozen, behalve in de exponent, krijgen we de volgende uitdrukking voor de potentiaal

$$V(r_c) = 4ke^{-4k\pi r_c}(v_1 - v_2e^{-\epsilon k\pi r_c})^2 \quad (4.11)$$

De potentiaal heeft een minimum wanneer $v_1 - v_2e^{-\epsilon k\pi r_c} = 0$. Het modulusveld zal gestabiliseerd zijn op het minimum van de potentiaal. De straal van de extra dimensie wordt dan gegeven door

$$kr_c = \frac{4k^2}{\pi m^2} \ln \frac{v_2}{v_1} \quad (4.12)$$

Wanneer m^2/k^2 van de orde 0.1 is en $\ln(v_2/v_1) \sim 1$ krijgen we gemakkelijk een waarde kr_c van orde 10. We zochten $kr_c \sim 12$ om het hiërarchieprobleem op te lossen. Dit krijgen we bijvoorbeeld wanneer $v_2/v_1 = 1.5$ en $m/k = 0.2$.

Wanneer dit scalarveld wordt toegevoegd aan het RSI model ontstaat er een potentiaal met een minimum waarin het modulusveld zich kan stabiliseren. De waarden voor v_1 , v_2 , m en k moeten wel een bepaalde verhouding hebben om de juiste waarde voor kr_c te verkrijgen. Deze waarden hoeven echter maar op één cijfer achter de komma nauwkeurig te zijn. Dan ontstaat de hiërarchie tussen de electrozwakke kracht en zwaartekracht vanzelf. Zonder het RSI model en dit mechanisme moet het ordeverschil tussen de electrozwakke kracht en zwaartekracht met de hand in een theorie worden ingevoerd. Door toedoen van het Goldberger-Wise mechanisme in combinatie met het Randall-Sundrum model I lijkt de hiërarchie natuurlijk te zijn, maar er is nog wel de vraag waarom het minimum v_2 anderhalf keer zo groot is als v_1 . Hier is (nog) geen verklaring voor (ook niet voor de waarden van m en k).

In hun artikel tonen Goldberger en Wise aan dat het redelijk is om grote waarden voor λ te nemen en dat het scalarveld dat we invoeren geen invloed heeft op de metriek. Dit komt omdat de stresstensor veroorzaakt door dit veld veel kleiner is dan die veroorzaakt door de cosmologische constante van de bulk. Dit mechanisme geeft dus een goede mogelijke oplossing van het modulusprobleem, waarbij er voor het Randall Sundrum I model alleen *finetuning* hoeft op te treden voor de cosmologische constante van de bulk. De juiste waarde van de straal van de extra dimensie is een gevolg van de waarden waarop de potentiaal van het nieuwe scalarveld op de branen een minimum hebben. Het modulusveld is massief en kan daarom vereenzelvigd worden met een deeltje. Dit nieuwe deeltje wordt het radion genoemd [9].

5 Signalen in Deeltjesversnellers

In het voorafgaande hoofdstuk zijn modellen voor gewarpte extra dimensies besproken. Dit zijn mooie theorieën, maar we willen ze ook kunnen testen. Dit kan misschien in deeltjesversnellers.

Volgens het Randall-Sundrum model I zijn alle massaparameters op onze braan van de orde van een TeV. Wanneer men in een deeltjesversneller Kaluza-Kleindeeltjes zou creëren, ontstaan deze deeltjes op onze braan. Daarom zullen de gecreeëerde Kaluza-Klein-deeltjes ook energieën van de orde van een TeV hebben. In paragraaf (3.3.2) is genoemd dat de deeltjes gequantiseerd zijn in ordes van $1/z_c \simeq 1 \text{ TeV}$ voor het Randall-Sundrum model I. Er zullen dus deeltjes zijn met massa $\simeq 1 \text{ TeV} \simeq 2 \text{ TeV}$, etc. In het genoemde ADD model zullen Kaluza-Kleindeeltjes daarentegen te dicht bij elkaar liggen om er één te kunnen detecteren. Voor het verschil tussen de massa's van de Kaluza-Kleindeeltjes in het ADD model geldt namelijk [14].

$$\Delta m \simeq M \left(\frac{M}{\overline{M}_{PL}} \right)^{2n} \quad (5.13)$$

met n het aantal extra dimensies en $\overline{M}_{PL} = \frac{M_{PL}}{\sqrt{8\pi}}$. We nemen aan dat de Planckmassa in hogere dimensies $M \simeq 1 \text{ TeV}$ is. Voor twee extra dimensies is $\Delta m = 4 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$ en voor vier extra dimensies is $\Delta m = 20 \text{ KeV}$. Het Randall-Sundrummodel en het ADD model zullen dus verschillende signatuur ten toon stellen [8].

Om de deeltjes te kunnen detecteren moeten ze niet te zwak koppelen aan materie. Het graviton koppelt via zwaartekracht en koppelt dus heel zwak. Omdat op de braan bij z_c de Kaluza-Kleindeeltjes een maximum of een minimum moeten hebben, wat volgt uit de randvoorwaarde op de braan bij z_c (3.78), zijn de golffuncties van de orde van $1/\sqrt{z_c}$. Wanneer we dit vergelijken met de golffunctie van het graviton zien we dat deze golffuncties op de braan bij z_c , kz_c keer groter zijn dan die van het graviton. De massieve Kaluza-Kleindeeltjes koppelen daarom $kz_c \simeq 10^{16}$ keer sterker dan het graviton [5]. Het feit dat de Kaluza-Kleindeeltjes volgens de TeV schaal koppelen en een duidelijk massaspectrum hebben, maakt het waarschijnlijk dat als wij in een Randall-Sundrum I model blijken te leven, wij dit binnenkort kunnen testen.

Hoe zullen we die deeltjes herkennen? Omdat de Kaluza-Kleindeeltjes dezelfde eigenschappen (op massa na) hebben als het graviton, zullen ze spin 2 hebben. Hoewel de deeltjes meteen vervallen in Standaard Modeldeeltjes, kan de spin van het oorspronkelijke deeltje worden afgeleid uit de hoeken die de de vervalsproducten maken. De Kaluza-Klein deeltjes kunnen op vele manieren vervallen. De processen met de minste achtergrondruis zijn

$$q\bar{q}, gg \rightarrow G \rightarrow l^+l^- \text{ (Drell-Yan productie)}$$

$$q\bar{q}, gg \rightarrow G \rightarrow q\bar{q}, gg \text{ (dijets)}$$

waarbij q een quark, g een gluon, G het Kaluza-Kleindeeltje en l een lepton. Het is ook mogelijk dat het Kaluza-Kleindeeltje vervalt naar $\gamma\gamma$, W^+W^- of ZZ [8, 7]. Aan de energie van de vervalsproducten kan worden afgeleid wat de massa van het Kaluza-Kleindeeltje was.

Omdat de LHC een energie zal hebben van 14 TeV, zullen daar waarschijnlijk, indien dit model klopt, Kaluza-Kleindeeltjes worden gemaakt. Totdat deze versneller van start gaat volgend jaar, wordt er ook in andere versnellers gezocht. In de Tevatron van Fermilab zijn verschillende pogingen gedaan om aanwijzingen voor het Randall-Sundrum model I te vinden. Er wordt daar gezocht naar leptonen en fotonen als vervalsproducten. Er is echter nog niets gevonden. Daarom kan men een aantal limieten stellen aan de massa van het eerste Kaluza-Kleindeeltje, M_1 , en aan de waarde van $k\sqrt{8\pi}/M_{PL}$, parameters die voor experimentatoren het handigst zijn om mee te werken [7]. Voor een massa van $500 \text{ GeV}/c^2$ voor het eerste Kaluza-Kleindeeltje moet $k\sqrt{8\pi}/M_{PL}$ kleiner zijn dan 0.04, 0.06, 0.065 voor verval naar respectievelijk twee fotonen, twee elektronen en twee muonen. In het plaatje is dit afgebeeld (Fig. 7).

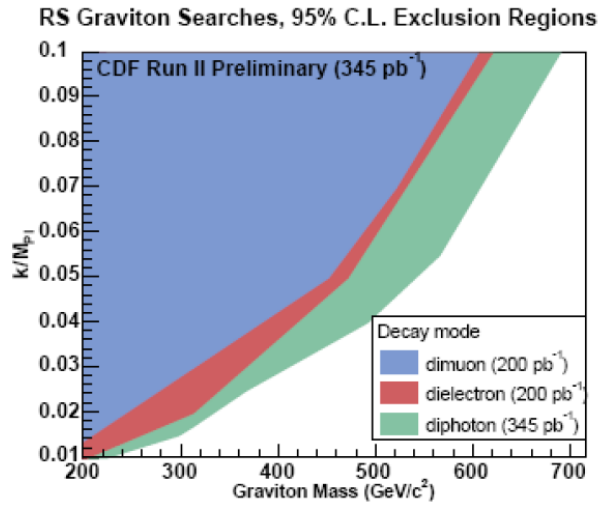


Figure 7: Deze afbeelding toont de minimale waarden die mogelijk zijn voor $k\sqrt{8\pi}/M_{PL}$ en M_1 . Kleinere waarden zouden al gedetecteerd zijn. Voor dimuon verval zijn alleen de waarden rechts van het blauwe gebied mogelijk, voor dielektron geval rechts van het rode gebied en voor difotonverval de waarden rechts van het groene gebied.

Een andere aanwijzing voor het RSI model zou het detecteren van het radion zijn. Dit deeltje kan verschillende massa's hebben, afhankelijk van de

waarden van v_1 en v_2 (zie hoofdstuk 4). Men verwacht dat de massa zal liggen tussen 10 GeV en $e^{-k\pi r_c} M_{PL} \sim 1 \text{ TeV}$ [9, 10]. Ook dit deeltje kan dus in de LHC worden gemaakt. Het RSII model mimiekt zwaartekracht in vier dimensies zo goed, dat het nog niet bekend is hoe we dit model zouden kunnen aantonen.

6 Conclusie

Extra dimensies vormen al bijna een eeuw een manier om problemen in de natuurkunde op te lossen. In dit verslag worden de (relatief nieuwe) Randall-Sundrum modellen met een gewarpde extra dimensie behandeld. Er is uitgewerkt hoe de achtergrondmetriek eruit ziet en wat de gevolgen zijn voor zwaartekracht in onze wereld. We hebben een oplossing voor het hiërarchieprobleem behandeld en er is aangetoond dat een oneindig grote extra dimensie mogelijk is. Welliswaar is aangetoond dat de effecten van een extra dimensie op zwaartekracht overeenkomen met de wet van Newton, maar we zijn niet nagegaan of zwaartekracht volgens Einstein ook behouden is. Dit is echter wel door Randall en Sundrum gedaan [5]. Er is kort behandeld hoe we deze modellen kunnen herkennen in deeltjesversnellers, maar de mogelijke cosmologische en astrofysische implicaties blijven onbesproken.

Deze modellen zijn bijna tien jaar geleden opgesteld, intussen is er veel nieuw onderzoek gedaan aan de hand van deze modellen en gewarpde extra dimensies. Ten eerste is er nagegaan hoe het Standaard Model zou werken. De velden van het Standaard Model zijn wel gebonden aan de braan, maar de extra dimensie zou eventueel toch het Standaard Model kunnen beïnvloeden. Hiernaar is onderzoek gedaan door verschillende fysici, zie bijvoorbeeld [8, 13] en de RS modellen lijken ook wat betreft het Standaard Model te kloppen. De mogelijkheid dat er wel Standaard-Modelvelden in de bulk zijn is ook onderzocht [12]. Verder heeft Lisa Randall met Andreas Karch aangetoond dat het ook mogelijk is dat er bijvoorbeeld vijf dimensies op één plaats zijn en op andere plaatsen tien [11]. Ook dan is zwaartekracht gelokaliseerd en is Newtoniaanse zwaartekracht behouden. Daarnaast is het idee van twee branen ook gebruikt als mogelijke oplossing voor de hiërarchieën tussen Standaard Modeldeeltjes [13]. Dit zijn maar enkele voorbeelden van onderzoek op dit gebied. Het blijven echter slechts mooie theorieën totdat ze experimenteel kunnen worden aangetoond. Het Randall-Sundrum model I kan, als het klopt, waarschijnlijk getest worden in de LHC. Misschien weten we volgend jaar met zekerheid dat er meer dimensies bestaan!

References

- [1] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, "The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter", *Phys.Lett.* **B429** (1998) 263-272, hep-ph/9803315
- [2] L. Randall and R. Sundrum, "A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension", *Phys.Rev.Lett.* **83** (1999) 3370-3373, hep-ph/9905221
- [3] S. Carroll, "Spacetime and Geometry", Pearson Education 2004
- [4] C. Csaki, "TASI Lectures on Extra Dimensions and Branes", 2004, hep-ph/0404096
- [5] L. Randall and R. Sundrum, "An Alternative to Compactification", *Phys.Rev.Lett.* **83** (1999) 4690-4693, hep-th/9906064
- [6] W. Goldberger and M. Wise, "Modulus Stabilization with Bulk Fields", *Phys.Rev.Lett.* **83** (1999) 4922-4925, hep-ph/9907447
- [7] G. Landsberg, "Collider Searches for extra dimensions", Proceedings of SLAC Summer Institute, 2004, hep-ex/0412028
- [8] H. Davoudiasl, J.L. Hewett and T.G. Rizzo "Warped Phenomenology", *Phys.Rev.Lett.* **84** (2000) 2080, hep-ph/9909255
- [9] G. D. Kribs, "Physics of the radion in the Randall-Sundrum scenario", eConf C010630 (2001) P317, hep-ph/0110242
- [10] C. Csaki, M. L. Graesser and G. D. Kribs, "Radion Dynamics and Electroweak Physics", *Phys.Rev.* **D63** (2001) 065002, hep-th/0008151
- [11] A. Karch and L. Randall, "Locally Localized Gravity", *JHEP* 0105 (2001) 008, hep-th/0011156
- [12] H. Davoudiasl, J.L. Hewett and T.G. Rizzo, "Bulk Gauge Fields in the Randall-Sundrum Model", *Phys.Lett.* **B473** (2000) 43-49, hep-ph/9911262
- [13] N. Rius and V. Sanz, "Dynamical Symmetry Breaking in Warped Compactifications", *Phys.Rev.* **D64** (2001) 075006, hep-ph/0103086
- [14] G. F. Giudice, R. Rattazzi and J. D. Wells, "Quantum Gravity and Extra Dimensions at High-Energy Colliders", *Nucl.Phys.* **B544** (1999) 3-38, hep-ph/9811291