

Trillende snaren

Onderzoek naar het spectrum van de bosonische snaar

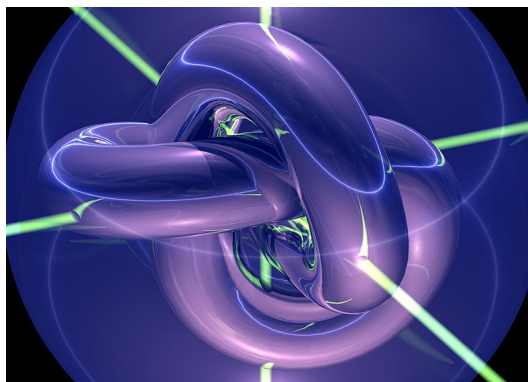
Tweedejaars project natuurkunde

Reinier de Adelhart Toorop,
Dave de Jonge,
Sander Mooij

9 juni 2004

Samenvatting

Dit project gaat over snaartheorie. Snaartheorie probeert de algemene relativiteitstheorie te unificeren met de quantummechanica. Snaartheorie is voorlopig niets meer dan een theorie: het is (nu nog) onmogelijk een experiment op te stellen om haar te testen. Wij hebben de bosonische snaar behandeld. Om de bewegingsvergelijking van de in ruimtetijd bewegende snaar te bepalen hebben we zijn actie geminimaliseerd. Vervolgens bleek dat de gequantiseerde oplossing de interpretatie van snaren als deeltjes mogelijk gemaakt. Zo heeft de open snaar een toestand die met het klassieke foton correspondeert en de gesloten snaar kan het graviton beschrijven. We hebben echter ook toestanden gevonden die “onmogelijke” deeltjes beschrijven, zoals het *tachyon* dat met een “imaginaire” massa sneller dan het licht beweegt.



Inhoudsopgave

1	Introductie in de snaartheorie	5
2	Maxwell en Yang-Mills	7
3	Het puntdeeltje	9
3.1	Het klassieke puntdeeltje	9
3.2	Het relativistische puntdeeltje	11
3.3	Het quantummechanische puntdeeltje	14
4	Snaren	15
4.1	De actie van snaren	15
4.2	Herschrijving van deze actie	17
4.3	Reparametriseren	20
4.4	De bewegingsvergelijking	20
4.5	De snaar als verzameling harmonische oscillatoren	21
4.6	Het oplossen van de bewegingsvergelijking	23
4.7	Quantisatie	25
4.8	Beperkingen op de Hilbertruimte	28
4.9	De “schone” Hilbertruimte	31
5	Deeltjes	32
5.1	Open Snaren	32
5.1.1	Het tachyon	32
5.1.2	Het foton	33
5.1.3	Andere open Snaren	35
5.2	Gesloten snaren	36

5.2.1	Nog een tachyon	36
5.2.2	Twee onmogelijke deeltjes	36
5.2.3	Het graviton	37
A	Appendix: wat wiskundige methoden	40
A.1	Het variatieprincipe	40
A.2	Ontwikkeling tot op eerste orde	40
A.3	Commutatoren	40
A.4	De Dirac deltafunctie	41
A.5	Determinanten	42
A.6	Het oppervlak van een wereldvlak	42

Inleiding

Het doel van ons verslag is om te laten zien hoe de snaartheorie deeltjes weet te identificeren met trillende snaren.

Het eerste hoofdstuk introduceert de snaartheorie. Het laat zien welke plek zij inneemt in de theoretische natuurkunde, vertelt over haar geschiedenis en behandelt ook de problemen van de snaartheorie (het feit dat de snaartheorie louter “onmeetbare” voorspellingen doet). Dit hoofdstuk is heel algemeen, het gaat over “de snaartheorie”. In de rest van het verslag beperken we ons tot één variant: de bosonische snaar.

Het tweede hoofdstuk behandelt de wetten van Maxwell en een stukje Yang-Millstheorie. Dit lijkt misschien niet te passen in een verslag over snaartheorie. De reden dat we het toch hebben opgenomen is dat met deze kennis over fotonen later duidelijk in te zien is welke “triltoestand” van een snaar het foton beschrijft.

In het volgende hoofdstuk behandelen we het puntdeeltje. We proberen de meest algemene bewegingsvergelijking voor een vrij deeltje te vinden. We vinden daarnaast ook een “beperkende vergelijking” (de mass-shell-equation) die een extra eis aan de beweging van ons deeltje oplegt. Daarna quantiseren we onze oplossing, dat wil zeggen we schrijven de gevonden vergelijkingen als operatorvergelijkingen. Het nut van dit hoofdstuk is dat zowel het concept (het zoeken naar een bewegingsvergelijking en een beperkende vergelijking) als de wiskundige hulpmiddelen (met name het variatieprincipe) steeds weer terugkomen in de latere berekeningen.

Goed. Nu hebben we genoeg om de hete brij heen gedraaid. Hoofdstuk vier gaat over snaren! Eerst vinden we een uitdrukking voor de actie van een trillende snaar. Met het variatieprincipe vinden we een bewegingsvergelijking voor onze snaar. We quantiseren de oplossing en vinden dan de Hilbertruimte waarin alle mogelijke triltoestanden van onze snaar bevat zijn. Tijdens deze hele berekening zijn we weer op een paar beperkende vergelijkingen gestuit. Deze gebruiken we om de niet-fysische toestanden uit de Hilbertruimte te zuiveren.

Het vijfde hoofdstuk maakt de cirkel rond: we weten verschillende toestanden te identificeren met deeltjes. We vinden fotonen en gravitonen. Ook komen we nog een bijzonder vreemd deeltje tegen: het zogenaamde tachyon, dat met zijn imaginaire massa en superluminale beweging weinig kans maakt daadwerkelijk te bestaan.

1 Introductie in de snaartheorie

Sinds er verschillende theorieën in de natuurkunde zijn, proberen fysici deze samen te brengen in meer omvattende theorieën. Toen het aankwam op de structuur van de bestaande materie, hadden reeds de oude Grieken ideeën dat deze uit één of enkele materialen opgebouwd waren. Eerst waren er theorieën met de vier elementen aarde, lucht, vuur en water (*Thales, Anaximenes, Empedocles*), later kwam Democritus met zijn “atoomtheorie”. Dit allemaal natuurlijk nog op filosofische gronden.

In 1869 gaf Dimitri Mendeljev dit in zijn versie van de atoomtheorie (periodiek systeem) een meer wetenschappelijke basis en hiermee was de eerste grote unificatie van deeltjestheorie een feit. Later (o.a. Rutherford) werd uiteraard bekend dat er nog een onderliggende structuur bestaat, die de bouw van atomen zelf beschrijft, met deeltjes als elektronen, protonen en neutronen (en daaronder weer de zes soorten quarks).

Op het gebied van krachtentheorie was het uiteindelijk J.C. Maxwell die de ogenschijnlijk verschillende theorieën van Elektriciteit en Magnetisme unificeerde. Later bleek dat er naast deze Elektromagnetische kracht nog slechts drie andere krachten waren: de welbekende zwaartekracht en twee kernkrachten: de sterke en de zwakke.

Tot 1920 waren echter alleen de elektromagnetische en de zwaartekracht bekend. De zwaartekracht wordt uitstekend beschreven door Einsteins algemene relativiteitstheorie (ART). Aan de andere kant kon met quantummechanica de elektromagnetische kracht beschreven worden.

Het was Einsteins “droom” deze 2 krachten te verenigen, of, met andere woorden quantummechanica en algemene relativiteitstheorie in één model onder te brengen. In 1921 en 1934 werd het probleem nog ingewikkelder toen de twee kernkrachten werden ontdekt. Men slaagde er met de jaren wel in deze twee en het elektromagnetisme samen te smeden tot geünificeerde theorieën, waarvan het standaardmodel het meest volledige resultaat is.

In 1968 komt de snaartheorie op het wereldtoneel. De Italiaan Gabriele Veneziano komt met een nieuw wiskundig model voor de sterke wisselwerking. Fysische interpretatie volgt twee jaar later als Nambu, Susskind en Nielsen zich realiseren dat de gevonden theorie die het spectrum van een deeltje beschrijft, ook op te vatten is als de quantummechanica van een oscillerende snaar. De oorspronkelijke theorie, die erop gericht was om de sterke wisselwerking te beschrijven, is nooit zeer populair geworden en wordt later verworpen ten gunste van het standaardmodel.

Ook wanneer in 1974 blijkt dat snaartheorie gravitonen kan beschrijven en dus feitelijk de ART en de quantummechanica weet te verenigen bevat ze nog teveel anomalieën om serieus genomen te worden. Anomalieën zijn wiskundige onvolkomenheden die betekenen dat een theorie niet kan kloppen.

Pas in 1984, als John Schwarz en Michael Green de meest dreigende anomalieën tegen elkaar weg laten vallen, wordt de snaartheorie algemeen geaccepteerd als kandidaat voor de “theorie van alles”. Dat wil echter niet zeggen dat de nieuwe theorie van een “Grand Cosmic

Symphony” niet voor problemen blijft zorgen. Een groot probleem is dat de snaartheorie een hoger dimensionaal wereldbeeld beschrijft. De bosonische snaartheorie waar de rest van dit verslag over gaat heeft 26 dimensies (25 ruimte en 1 tijd) nodig. Meer moderne, supersymmetrische snaartheorieën (de supersnaren), hebben iets minder dimensie nodig en komen op 10 (9 ruimtedimensies en 1 tijdsdimensie). Het begin van een verklaring hiervoor werd raar genoeg al in 1921 gegeven door Kaluza en Klein. Zij kwamen (onafhankelijk) met een theorie die de ART en de EMW unificeerde maar daarbij uitging van een wereld met vier ruimtedimensies. De vierde ruimtedimensie is opgerold tot een klein cirkeltje. De bekende snaardeskundige Brian Greene (zie [3]) vergelijkt dit met een kabel. Vanuit de verte lijkt de kabel een 1-dimensionaal “streepje” met alleen maar een lengte. Dichterbij gekomen blijkt de kabel echter ook een breedte te hebben. Een mier op de kabel kan in twee richtingen lopen, langs de kabel of eromheen. Zo beschouwden Kaluza en Klein de extra dimensie, als een extreem kleine, opgerolde dimensie. Later werd dit idee uitgebreid tot een wereld van tien dimensies: 1 tijdsdimensie, 3 uitgestrekte ruimtedimensies en 6 opgerolde dimensies.

Een ander probleem was dat er alleen al van supersnaartheorie 5 verschillende varianten ontstonden. Alle vijf varianten voldeden aan de axioma’s van de snaartheorie maar waren niet in overeenkomst met elkaar. Voor dit probleem werd in 1995 een spectaculaire verklaring gegeven door Ed Witten. Hij voerde nog een extra dimensie in en legde de basis voor M-theorie. Het bleek dat alle vijf de varianten van snaartheorie bijzondere gevallen van de M-theorie zijn op te vatten. M-theorie gaat verder in op de ideeën uit de snaartheorie, maar gaat zelf niet meer over snaren. M-theorie gaat meer over membranen, maar het precieze hoe en waarom is nog zeer onduidelijk. Dat M-theorie buiten het bestek van dit project valt moge duidelijk zijn.

Het is duidelijk dat het idee van trillende snaren in een elfdimensionale wereld behoorlijk contra-intuïtief klinkt en dus de acceptatie van de theorie bemoeilijkt. Om echt geaccepteerd te worden zal de mathematische schoonheid van de theorie niet volstaan. Er zullen experimenten gedaan moeten worden. Met de huidige technologie is dat onmogelijk. Er wordt veel verwacht van de Large Hadron Collider die in 2007 in Genève gereed zal zijn, maar de kans dat die echt overtuigend bewijsmateriaal zal leveren lijkt toch niet erg groot. Het lijkt zelfs maar de vraag of er ooit testopstellingen gebouwd zullen kunnen worden die snaar-experimenten aankunnen. De effecten spelen zich immers op dusdanig kleine schaal af dat er enorme energieën nodig zijn, waarvan het twijfelachtig is of ze met deeltjesversnellers te bereiken zijn.

Zolang er geen concrete experimenten gedaan zijn blijft de snaartheorie een theorie met feitelijk geen enkel bestaansrecht. Tot die tijd zal de snaartheorie beschouwd moeten worden als een ongefundeerde maar wonderschone samensmelting van natuurkunde en wiskunde die wellicht ooit ons gehele beeld van de natuur zal vullen.

2 Maxwell en Yang-Mills

Het lijkt misschien vreemd om een verslag met als onderwerp snaartheorie te beginnen met een hoofdstuk over elektromagnetische theorie. Het blijkt echter dat één van de makkelijkste deeltjes die met de bosonische snaartheorie te beschrijven zijn, het foton is. Om dit in voldoende mate te kunnen herkennen is enige kennis van elektromagnetische theorie noodzakelijk. Bovendien levert dit hoofdstuk al direct heel veel methoden en technieken die in het vervolg nuttig zullen blijken.

De klassieke Maxwellwetten (met c op 1 gesteld) luiden als volgt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}. \quad (4)$$

Hierbij staat ρ voor de ladingsdichtheid en stelt de vector \vec{J} de vrije stroom voor. \vec{J} is eventueel vectorieel te ontbinden: $\vec{J} = J_x \hat{x} + J_y \hat{y} + J_z \hat{z}$.

We gaan deze wetten nu op een andere (handigere) wijze schrijven. Daarvoor gebruiken we de uitgebreide vectorpotentiaal $\vec{A} = (V, A_x, A_y, A_z)$. Hierin is V de scalaire elektrische potentiaal en dus eigenlijk op te vatten als A_t). Het blijkt dat de Maxwellwetten nu als volgt geschreven kunnen worden (zie [4]):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (6)$$

Aan formule (5) en (6) is te zien dat de vectorpotentiaal \vec{A} niet eenduidig bepaald is, er staan alleen maar afgeleides van A in de formule. Je kan een functie bij A optellen zonder dat \vec{E} en \vec{B} veranderen veranderen, mits deze functie te schrijven is als de gradiënt van een andere functie λ . (Met andere woorden: mits deze functie een conservatief veld genereert.) Dit is een voorbeeld van een ijktheorie (*gauge theory*): we kunnen onze A “ijken” door zelf een functie te kiezen die we bij A optellen. Zo schrijven we A in een zo geschikt mogelijke vorm.

Formeel is dus de volgende transformatie toegestaan:

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \delta A_\mu, \quad (7)$$

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda. \quad (8)$$

N.B. $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

We ijken nu zo dat geldt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\partial V}{\partial t}. \quad (9)$$

(Let op: het linkerdeel slaat alleen op A_x, A_y, A_z !)

Deze transformatie wordt de *Lorentz gauge* genoemd. Het formele bewijs dat deze transformatie inderdaad toegestaan is valt helaas buiten ons bereik.

Door het rechterlid naar links te halen volgt $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial t}$. Kortweg

$$\partial^\mu A_\mu = 0. \quad (10)$$

Voor de vectorpotential \vec{A} en zijn Fouriergetransformeerde geldt de volgende relatie (D staat voor het aantal dimensies. In 3 dimensies heb je b.v. $dx dy dz = d^3x$ als integratievariabelen.):

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int ik^\mu A_\mu(k) e^{ik^\mu x^\mu} d^D k = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \lambda = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int ik^\mu \lambda(k) e^{ik^\mu x^\mu} d^D k = \delta A_\mu. \quad (12)$$

Hieruit vinden we:

$$k^\mu A_\mu = 0, \quad (13)$$

$$\delta A^\mu(k) = ik^\mu \lambda(k). \quad (14)$$

Deze twee formules zijn heel belangrijk. We zullen laten zien dat sommige triltoestanden van de snaar zich aan identieke formules houden. Zo identificeren we snaren met fotonen.

3 Het puntdeeltje

Als we met snaren gaan werken, zullen we vooral trachten bewegingsvergelijkingen te bepalen en op te lossen. Om enigszins grip te krijgen op de technieken die hiervoor nodig zijn, hebben we de benodigde handelingen eerst uitgevoerd voor een vrij puntdeeltje, waarvan we al min of meer weten hoe het beweegt, namelijk in een rechte lijn.

3.1 Het klassieke puntdeeltje

Klassieke puntdeeltjes bewegen langs een rechte lijn. In de normale ruimte (de \mathbb{R}^3) is een rechte lijn namelijk de kortste weg tussen twee punten. Laten we dit nagaan.

De totale weglengte wordt gegeven door:

$$L = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial x^1(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2}. \quad (15)$$

Dit is als volgt in te zien:

Als we λ laten lopen en deze met $d\lambda$ toeneemt, neemt de afgelegde weg in x-richting met $\frac{\partial x^1(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda$ toe, die in de y-richting met $\frac{\partial x^2(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda$ en in z-richting met $\frac{\partial x^3(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda$. De totale toename is uiteraard $\sqrt{\left(\frac{\partial x^1(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2} d\lambda$ (Pythagoras). Door λ te laten lopen van λ_0 tot λ_1 ontstaat de totale weglengte (formule 15), die uiteraard onafhankelijk is van de gekozen parametrisatie.

Nu willen we onderzoeken aan welke bewegingsvergelijkingen $x^i(\lambda)$ moet voldoen als we eisen dat het pad een minimale lengte moet hebben. Hiervoor gebruiken we het variatieprincipe: we verstoren b.v. $x^1(\lambda)$ en eisen dat de lengteverandering van het pad voor elke verstoring $\delta x^1(\lambda)$ nul is. Als aan deze eis voldaan is hebben we een extreme situatie gevonden. (Zie ook de appendix.)

Dus: $x^1(\lambda) \rightarrow x^1(\lambda) + \delta x^1(\lambda)$:

$$L[x^1 + \delta x^1] = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}(x^1(\lambda) + \delta x^1(\lambda))\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2}.$$

Het kwadraat ontwikkelen tot op eerste orde geeft:

$$L[x^1 + \delta x^1] = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial x^1(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2} + 2 \frac{\partial x^1(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\delta x^1(\lambda)}{\partial \lambda}.$$

De laatste term is klein ten opzichte van de eerste drie; daarom kan de wortel ontwikkeld volgens formule 87, zodat

$$\begin{aligned} L[x^1 + \delta x^1] &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \left(\sqrt{\left(\frac{\partial x^1(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2} + \frac{2 \frac{\partial x^1(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial \delta x^1(\lambda)}{\partial \lambda}}{2\sqrt{\dots}} \right) \\ &= L[x^1] + \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \frac{\frac{\partial x^1(\lambda)}{\partial \lambda}}{\sqrt{\dots}} \frac{\partial \delta x^1(\lambda)}{\partial \lambda}. \end{aligned}$$

De laatste term kan 1x partieel geïntegreerd worden. De stokterm valt dan weg omdat het begin- en eindpunt van het pad niet gevarieerd wordt.

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \frac{\frac{\partial x^1(\lambda)}{\partial \lambda}}{\sqrt{\dots}} \frac{\partial \delta x^1(\lambda)}{\partial \lambda} = - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\frac{\partial x^1(\lambda)}{\partial \lambda}}{\sqrt{\dots}} \right) \delta x^1(\lambda).$$

En dit moet 0 opleveren voor alle $\delta x^1(\lambda)$, zodat volgt:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\frac{\partial x^1(\lambda)}{\partial \lambda}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x^1(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2}} \right) = 0.$$

We vinden dus dat de raaklijn aan de $x^1(\lambda)$ niet mag veranderen als λ verandert. We hebben een rechte lijn gevonden. De bewegingsvergelijking gaat er nog duidelijker uit zien als we ons realiseren dat we altijd zo'n parametrisatie kunnen kiezen dat geldt:

$$\left(\frac{\partial x^1(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2 = 1.$$

Immers $\left(\frac{\partial x^1(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2$ is een soort snelheid in het kwadraat en de snelheid kan altijd zo gekozen worden dat deze 1 is.

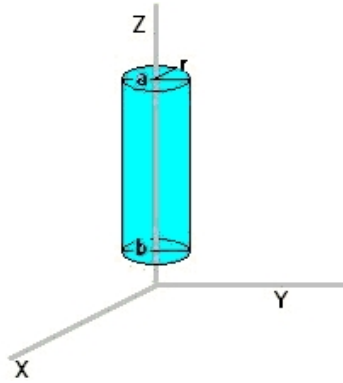
De gevonden bewegingsvergelijking reduceert nu tot

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial x^1(\lambda)}{\partial \lambda} \right) = 0,$$

oftewel,

$$\frac{\partial^2 x^1(\lambda)}{\partial \lambda^2} = 0.$$

Nu is zeer duidelijk geworden dat de in de \mathbb{R}^3 de kortste weg tussen twee punten gegeven wordt door een rechte lijn.



Figuur 1: De parametrisatie van het relativistische deeltje.

3.2 Het relativistische puntdeeltje

Voor het relativistisch puntdeeltje stappen we nu over van de \mathbb{R}^3 naar de $\mathbb{R}^{3,1}$, we werken nu dus met de Minkowski metriek $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. In plaats van een lengte L praten we nu liever over een actie S :

$$S = -m \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \sqrt{-\left(\frac{\partial x^0(\tau)}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^1(\tau)}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2(\tau)}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3(\tau)}{\partial \tau}\right)^2}.$$

of korter:

$$S = -m \int d\tau \sqrt{|\dot{x}^2|}. \quad (16)$$

We integreren nu dus over τ . \dot{x}^2 is een afkorting van $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu$. Uiteraard is ook deze actie weer onafhankelijk van de gekozen parametrisatie.

Het probleem met deze uitdrukking voor de actie is dat er moeilijk mee te werken is, vanwege het wortelteken. Om dit te verhelpen is een ingenieuze truc bedacht. We voeren een extra veld $e(\tau)$ in. Dit zal de uitdrukking voor de actie versimpelen maar wel een extra eis opleggen aan de bewegingsvergelijking. Dat is logisch: het e -veld is een nieuwe vrijheidsgraad die er met de beperkende eis weer uitvalt. We beschouwen nu de actie:

$$S[e] = \frac{1}{2} \int d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{e} - em^2 \right). \quad (17)$$

Door met behulp van het variatieprincipe de veldvergelijking voor e af te leiden is in te zien dat deze actie equivalent is aan (maar wel veel makkelijker dan) de eerst beschouwde

actie (vgl 16):

$$\begin{aligned}
S[e] &= \frac{1}{2} \int d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{e} - em^2 \right); \\
S[e + \delta e] &= \frac{1}{2} \int d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{e + \delta e} - (e + \delta e)m^2 \right) \\
&\text{Met formule 88 uit de appendix volgt nu:} \\
&= \frac{1}{2} \int d\tau \left(\dot{x}^2 \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \delta e \right) - em^2 - \delta em^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \int d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{e} - em^2 \right) + \frac{1}{2} \int d\tau \left(-\frac{\delta e}{e^2} \dot{x}^2 - \delta em^2 \right) \\
&= S[e] + \frac{1}{2} \int d\tau \left(\left(-\frac{1}{e^2} \dot{x}^2 - m^2 \right) \delta e \right).
\end{aligned}$$

En het laatste is weer minimaal voor alle δe :

$$-\frac{1}{e^2} \dot{x}^2 - m^2 = 0,$$

waaruit volgt:

$$e^2 m^2 + \dot{x}^2 = 0. \quad (18)$$

Hiermee kan de eerste actie overgaan in de nieuwe. Gebruik $\dot{x}^2 = \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$. Uit de speciale relativiteitstheorie is bekend dat dit is kleiner dan 0. Schrijf daarom $\dot{x}^2 = -|\dot{x}^2|$.

Nu kan e dus gedefinieerd worden als $e = \frac{\sqrt{|\dot{x}^2|}}{m}$. Dit invullen in de actie volgens (17) geeft

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \int d\tau \left(\frac{-|\dot{x}^2|}{e} - em^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \int d\tau \left(-\sqrt{|\dot{x}^2|} m - \sqrt{|\dot{x}^2|} m \right) \\
&= -m \int d\tau \sqrt{|\dot{x}^2|}.
\end{aligned}$$

Dus (17) leidt tot (16) en beide acties zijn inderdaad equivalent.

Net als de vorige actie is ook deze actie weer parametrizatie-invariant. Deze symmetrie geeft ons de vrijheid om zelf het veld e kiezen. We kiezen hiervoor: $e = 1$. Straks zullen we zien hoe handig deze keus is.

De actie wordt nu

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \{ \dot{x}^2 - m^2 \}. \quad (19)$$

Met her variatieprincipe kunnen we de bewegingsvergelijkingen voor x^i afleiden. We beginnen met x^0 .

$$\begin{aligned} S[x^0 + \delta x^0] &= \frac{1}{2} \int d\tau \{ -(\dot{x}^0 + \delta \dot{x}^0)^2 + (\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2 - m^2 \} \\ &= \frac{1}{2} \int d\tau \{ -(\dot{x}^0)^2 - 2\dot{x}^0 \delta \dot{x}^0 + (\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2 - m^2 \} \\ &= \frac{1}{2} \int d\tau \{ -(\dot{x}^0)^2 + 2\ddot{x}^0 \delta x^0 + (\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2 - m^2 \}. \end{aligned}$$

En als dit 0 moet zijn voor alle δx^0 , moet dus gelden: $\ddot{x}^0 = 0$.

Voor de vergelijkingen voor x^1, x^2 en x^3 kan exact dezelfde redenering gevolgd worden. We komen dus op de bewegingsvergelijking

$$\ddot{x}^\mu = 0. \quad (20)$$

Het relativistisch puntdeeltje beweegt dus langs een rechte lijn door de Minkowski-ruimte.

(N.B. In de Minkowski-ruimte is een rechte lijn juist de langste afstand tussen twee punten, als je de eigentijd van de waarnemer als definitie van ‘‘lengte’’ beschouwt. Langs een rechte lijn bewegen betekent dan immers met een constante snelheid bewegen, dus steeds in hetzelfde inertiaalstelsel zitten. Voor alle ‘‘bewegende’’ waarnemers gaat minder tijd voorbij dan voor de aan zijn inertiaalstelsel gebonden waarnemer. Denk hierbij aan de tweelingparadox.)

Laten we dan nu kijken welke beperkende eis er volgt uit onze keuze voor e .

$$e^2 m^2 + \dot{x}^2 = 0.$$

Als we hierin invullen $e=1$ en bedenken dat \dot{x}^μ niets anders is dan p^μ komen we op de bekende ‘‘mass-shell-equation’’:

$$p^2 + m^2 = 0. \quad (21)$$

Nu blijkt het voordeel van de keuze e . De beperkende vergelijking heeft nu een hele duidelijke fysische interpretatie. Een vrij deeltje kan niet zomaar elke willekeurige vierimpuls bezitten, de massa m bepaalt de vierimpuls van een deeltje, die de ‘‘gewone’’ impuls en de totale energie bevat. Uit de speciale relativiteitstheorie is dit bekend:

$$E^2 - p_x^2 c^2 - p_y^2 c^2 - p_z^2 c^2 = m^2 c^4. \quad (22)$$

En met $\vec{p} = (E, p^x, p^y, p^z)$ en $c = 1$ volgt de mass-shell equation.

We concluderen dat het vrije relativistische puntdeeltje langs een rechte lijn door de Minkowski-ruimte beweegt met een impuls die correspondeert met de massa m .

3.3 Het quantummechanische puntdeeltje

De volgende stap is het quantiseren van de zojuist afgeleide theorie. We schrijven de gevonden bewegingsvergelijking als volgt:

$$x^\mu(\tau) = x_0^\mu + p^\mu \tau.$$

Hier staat feitelijk niets meer dan dat de bewegingsvergelijking voor x een constante term en een lineaire term heeft en verder niks, m.a.w. de tweede afgeleide is nul. Dat is precies wat we wilden hebben.

We veranderen x_0^μ en p^μ nu in operatoren en beschouwen de algemene commutatierelatie tussen plaats en impuls:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu] = i\eta^{\mu\nu}. \quad (23)$$

We vullen de $x^\mu(\tau)$ in die we gevonden hebben:

$$\begin{aligned} [\hat{x}_0^\mu + \hat{p}^\mu \tau, \hat{p}^\nu] &= i\eta^{\mu\nu}, \\ [\hat{x}_0^\mu, \hat{p}^\nu] + [\hat{p}^\mu \tau, \hat{p}^\nu] &= i\eta^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

De tweede commutator moet wel 0 zijn. Immers, τ kan als een constante gezien worden, aangezien de relatie op ieder tijdstip moet gelden. En voor de overblijvende commutator is bekend dat $[\hat{p}^\mu, \hat{p}^\nu] = 0$. Dus geldt:

$$[\hat{x}_0^\mu, \hat{p}^\nu] = i\eta^{\mu\nu}. \quad (24)$$

We werken nu in een Hilbertruimte met viervectoren $|k^\nu\rangle$ die de toestand van ons deeltje beschrijven. Maar lang niet elke toestand $|k^\nu\rangle$ is fysisch mogelijk, we hebben nog steeds de mass-shell-equation die beperkingen oplegt. Deze verschijnt nu als eigenwaardevergelijking waar de viervectoren $|k^\nu\rangle$ aan moeten voldoen:

$$k^2 |k^\nu\rangle = -m^2 |k^\nu\rangle. \quad (25)$$

Op deze manier selecteren we de fysisch toegestane toestanden $|k^\nu\rangle$. Onze Hilbertruimte bestaat nu uit impuls-eigentoestanden. Opnieuw correspondeert de impuls van een toestand met de massa m .

Hiermee hebben we het hele recept dat we willen toepassen op de snaren in de volgende sectie alvast doorlopen bij het puntdeeltje. Op naar de snaren!

4 Snaren

Wat we in het vorige hoofdstuk voor puntdeeltjes hebben laten zien, willen we in dit hoofdstuk herhalen, maar dan voor snaren. Ons onderzoek heeft zich daarbij voornamelijk toegespitst op de bosonische snaar. Deze heeft het voordeel deze relatief eenvoudig te beschrijven te zijn. In het moderne toponderzoek speelt deze echter een ondergeschikte rol.

4.1 De actie van snaren

In de vorige sectie zijn we uitgegaan van de actie van een puntdeeltje:

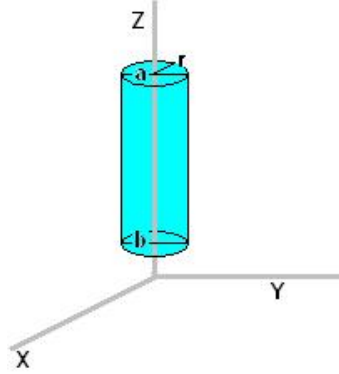
$$S = -m \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \sqrt{\left| \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \right|}. \quad (26)$$

Dit geeft (in Minkowski-metriek) feitelijk de lengte van de wereldlijn van dit deeltje aan. Bij een snaar is het echter niet zozeer de lengte van de wereldlijn die er toe doet, maar de (mantel)oppervlakte van de “wereldcilinder”. Het is dus eerst zaak een goede formule te vinden voor de oppervlakte van een cilinder in de ruimtetijd. Omdat de oppervlakte een 2-D verschijnsel is, in tegenstelling tot de 1-D lengte van de lijn, moet een parametrisatie geschieden aan de hand van twee parameters. We kiezen hiervoor τ , die dezelfde interpretatie heeft als bij het puntdeeltje, namelijk de eigentijd, en σ , die tussen 0 en 2π varieert en die als het ware om de snaar loopt. Een voor de hand liggende keuze voor de nieuwe actie S is nu door naast de wortel waarin naar τ gedifferentieerd wordt een identieke wortel toe te voegen met differentiaties naar σ :

Figuur 2: De parameters τ en σ

$$A \stackrel{?}{=} \int_0^{2\pi} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau d\sigma \left(\sqrt{\left| \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \right|} \right) \left(\sqrt{\left| \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right|} \right). \quad (27)$$

Deze formule blijkt bijvoorbeeld correct te zijn als we een cilinder om de Z-as beschrijven (voor het gemak in de gewone \mathbb{R}^3 ; zie figuur 3):



Figuur 3: De cilinder om de Z-as

In deze cilindercoördinaten ($x = r \cos \sigma$, $y = r \sin \sigma$, $z = \tau$), geldt inderdaad

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{2\pi} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right)^2} d\tau d\sigma \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{\left(\frac{\partial(r \cos \sigma)}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial(r \sin \sigma)}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial \tau}\right)^2} \cdot \\
 &\quad \sqrt{\left(\frac{\partial(r \cos \sigma)}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial(r \sin \sigma)}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial \sigma}\right)^2} d\tau d\sigma \\
 &= \int_0^{2\pi} r d\sigma \cdot \int_{\tau_0}^{\tau_1} 1 d\tau = 2\pi r(\tau_1 - \tau_0).
 \end{aligned}$$

Dit is de correcte oppervlakte van een cilinder. Echter, in het geval van de cilinder om de Z-as, staan de τ en de σ richting steeds loodrecht op elkaar en dat blijkt een voorwaarde te zijn om formule 27 te mogen toepassen. Gelukkig kan (27) eenvoudig gegeneraliseerd worden in het geval dat de τ en de σ richting niet loodrecht staan. In dat geval moet er (binnen één grote wortel) namelijk alleen nog een kruisterm ingevoegd worden $-2\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}$.

Nu kan de algemeen geldige formule opgemaakt worden:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau d\sigma \sqrt{-\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} + 2 \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}}. \quad (28)$$

Het minteken staat misschien anders dan verwacht (zeker gezien het voorbeeld met de cilinder in de \mathbb{R}^3), maar dat is weer vanwege de Minkowski-metrick. Het argument van de wortel in formule 28 blijkt precies een determinant te zijn (met een extra minteken) als we

τ hernoemen tot σ^0 en σ tot σ^1 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} - 2 \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} + \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} & \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} & \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^0} & \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma^0} \\ \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^1} & \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma^1} \end{pmatrix} \\
&= \det_{\alpha,\beta} \begin{pmatrix} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} & \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma^\beta} \end{pmatrix}. \tag{29}
\end{aligned}$$

Nu we dit weten, kunnen we de actie van een snaar bepalen (dus het analogon van formule 26): In plaats van tussen τ_0 en τ_1 loopt de variabele τ nu tussen $-\infty$ en ∞ ; immers we beschrijven een vrije snaar en deze zal nooit in de tijd ontstaan of verdwijnen.

$$S = -T \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau d\sigma \sqrt{-\det_{\alpha,\beta} \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma^\beta} \right)}. \tag{30}$$

In deze formule komt een T voor. Deze staat voor de spanning op de snaar en heeft dimensie energie/lengte (of in eenheden waar $\hbar = c = 1$ en waarin energie en $1/\text{lengte}$ hetzelfde zijn dus E^2 of $1/l^2$), zodat het geheel dimensieloos is. Formule 30 kan ook (verkort) worden geschreven als:

$$S = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu)}. \tag{31}$$

α En β nemen de waardes 0 en 1 aan en deze staan dus respectievelijk voor τ en σ . De ‘‘afleiding’’ die hier gegeven is, is nogal intuïtief. Een nettere wiskundige afleiding is in de appendix gegeven (sectie A.6).

4.2 Herschrijving van deze actie

Het probleem met deze uitdrukking voor de actie is dat er, net als eerder in de uitdrukking voor de actie van het relativistisch puntdeeltje, een wortelteken instaat waardoor er lastig mee te werken is. De vorige keer hebben we dit opgelost door een hulpveld e in te voeren. Deze keer voeren we een symmetrische twee bij twee tensor $h_{\alpha\beta}$ in. De actie ziet er nu makkelijker uit:

$$S = -T' \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu. \tag{32}$$

Met h wordt de determinant van $h_{\alpha\beta}$ bedoeld, en $h^{\alpha\beta}$ is de inverse van $h_{\alpha\beta}$.

De rest van deze paragraaf laat zien dat deze uitdrukking equivalent is aan de oorspronkelijke uitdrukking voor de actie. Het wordt nogal een pittige rekenpartij.

Eerst zoeken we eerst de veldvergelijkingen voor $h_{\alpha\beta}$. Deze vullen we terug in, in formule 32 We doen dit door $h_{\alpha\beta}$ op tensorniveau te verstoren tot tot $h_{\alpha\beta} + \delta h_{\alpha\beta}$ en te kijken wat de gevolgen zijn voor de actie als geheel. In formule 32 verandert dan zowel de $\sqrt{-h}$ als de $h^{\alpha\beta}$

Laten we eerst kijken wat er met $\det(h_{\alpha\beta} + \delta h_{\alpha\beta})$ gebeurt. Dit is nodig in verband met de $\sqrt{-h}$:

$$\begin{aligned} \det(h_{\alpha\beta} + \delta h_{\alpha\beta}) &= \det[h_{\alpha\gamma}(\delta_{\beta}^{\gamma} + h^{\gamma\lambda}\delta h_{\lambda\beta})] \\ &= \det(h_{\alpha\gamma}) \cdot \det(\delta_{\beta}^{\gamma} + h^{\gamma\lambda}\delta h_{\lambda\beta}) \\ &= \det(h_{\alpha\gamma})(1 + h^{\beta\lambda}\delta h_{\lambda\beta}). \end{aligned} \quad (33)$$

De laatste stap is geldig omdat de determinant van de eenheidsmatrix (weergegeven met δ_{β}^{γ}) plus een kleine matrix ($h^{\gamma\lambda}\delta h_{\lambda\beta}$) gelijk is aan 1 plus het spoor van die matrix (zie formule 96 in de appendix).

Het regeltje van 33 gaan we nu toepassen op de $\sqrt{-h}$ die in de actie voorkomt:

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-h} &:= \sqrt{-(h + \delta h)} - \sqrt{-h} \\ \text{“verandering”} &\quad \text{“nieuw - oud”} \\ &= \sqrt{-\det(h_{\alpha\gamma}) \det(\delta_{\beta}^{\gamma} + h^{\gamma\lambda}\delta h_{\lambda\beta})} - \sqrt{-\det(h_{\alpha\beta})} \\ &= \sqrt{-\det(h_{\alpha\gamma})} \sqrt{(1 + h^{\beta\lambda}\delta h^{\beta\lambda})} - \sqrt{-\det(h_{\alpha\beta})} \\ &= \sqrt{-\det(h_{\alpha\gamma})} + \frac{1}{2} \sqrt{-\det(h_{\alpha\gamma})} h^{\beta\lambda} \delta h^{\beta\lambda} - \sqrt{-\det(h_{\alpha\beta})} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-\det(h_{\alpha\gamma})} h^{\beta\lambda} \delta h^{\beta\lambda} \\ &= \sqrt{-h} h_{\alpha\beta} \delta h_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Verder wordt in de actie $h_{\alpha\beta}$ beïnvloed. In verband met het omhoog en omlaag halen van de β geldt het volgende:

$$\delta h_{\alpha\beta} = -h_{\alpha\gamma} \delta h_{\gamma\theta} h^{\theta\beta}.$$

We hebben nu gevonden hoe de veranderingen van de componenten van formule 32 veranderen. Nu kunnen we kijken wat de totale verandering is.

$$\begin{aligned} S &= -T' \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X_{\mu} \\ \Rightarrow & -T' \int d\tau d\sigma \left(\sqrt{-h} + \frac{1}{2} \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \delta h_{\alpha\beta} \right) (h^{\alpha\beta} - h^{\alpha\gamma} \delta h_{\gamma\theta} h^{\theta\beta}) (\partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X_{\mu}) \\ &= -T' \int d\tau d\sigma \left(\sqrt{-h} h^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \delta h_{\alpha\beta} h^{\gamma\theta} (\partial_{\gamma} X^{\mu} \partial_{\theta} X_{\mu}) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{-h} h^{\alpha\gamma} \delta h_{\gamma\theta} h^{\theta\beta} \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X_{\mu} + O(\delta^2) \right). \end{aligned}$$

Dus:

$$\delta S = -T' \int d\tau d\sigma \left[\left(\frac{1}{2} \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \delta h_{\alpha\beta} h^{\gamma\theta} (\partial_\gamma X^\mu \partial_\theta X_\mu) \right) - \left(\sqrt{-h} h^{\alpha\gamma} \delta h_{\gamma\delta} h^{\theta\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \right) \right].$$

Misschien is het overzichtelijk om in de laatste term de indices te shiften: $\gamma \leftrightarrow \alpha$ en $\theta \leftrightarrow \beta$. Deze wordt dan $-\sqrt{-h} h^{\alpha\gamma} \delta h_{\alpha\beta} h^{\theta\beta} \partial_\gamma X^\mu \partial_\delta X_\mu$.

Als we eisen dat $\delta S = 0$ voor alle $\delta h_{\alpha\beta}$, dan is de volgende grootheid ook 0:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} h^{\gamma\theta} (\partial_\gamma X^\mu \partial_\theta X_\mu) - h^{\alpha\gamma} h^{\theta\beta} \partial_\gamma X^\mu \partial_\delta X_\mu = 0. \quad (34)$$

Deze T heeft bovenindices. Die kunnen we omlaag brengen door $T^{\alpha'\beta'}$ met $h_{\alpha\alpha'} h_{\beta\beta'}$ te vermenigvuldigen (bedenk dat de h's met onderindex de inverses zijn van die met bovenindex en er dus geldt: $h^{\alpha'\gamma} h^{\beta\theta'} h_{\alpha\alpha'} h_{\beta\beta'} = \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\theta$). Nu volgt $T_{\alpha\beta}$:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\theta} (\partial_\gamma X^\mu \partial_\theta X_\mu) - \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu = 0. \quad (35)$$

Door een functie Ω in te voeren volgens $\Omega = \frac{2}{h^{\gamma\theta} (\partial_\gamma X^\mu \partial_\theta X_\mu)}$ is dit te herschrijven tot:

$$h_{\alpha\beta} = \Omega \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu. \quad (36)$$

Deze uitdrukkingen gaan we straks invullen voor $h_{\alpha\beta}$ vullen we in in vergelijking 32, maar we gaan die formule eerst even herschrijven met behulp van de net gedefinieerde Ω , terwijl we $\sqrt{-h}$ juist uitschrijven:

$$\begin{aligned} S &= -T' \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \\ &\Rightarrow -T' \int d\tau d\sigma \sqrt{h_{01}^2 - h_{11} h_{00}} \frac{1}{\Omega}. \end{aligned} \quad (37)$$

We kunnen nu binnen de wortel de oplossingen van formule 36; alle termen in de wortel hebben twee keer een factor Ω , zodat we Ω buiten haakjes mogen halen. De $\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$ -termen geven precies $\sqrt{(\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu)^2 - (\partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu)(\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu)}$ en inderdaad is het argument van de wortel precies als (min) een determinant te schrijven: $\sqrt{-\det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu)}$. Al met al volgt:

$$S = -(2T') \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu)}.$$

Na al dit rekenwerk zijn we nu waar zijn wilden: we hebben precies de eerste uitdrukking voor de actie terug, alleen met $T = 2T'$. Beide uitdrukkingen zijn dus inderdaad equivalent, we mogen voor ons gemak de tweede uitdrukking blijven gebruiken.

4.3 Reparametriseren

Deze actie heeft drie symmetrieën. We kunnen τ en σ naar keuze reparametriseren tot functies van τ en σ (*reparametrisatie-invariantie*). Dat zijn dus twee symmetriën. Verder kunnen we $h_{\alpha\beta}$ vermenigvuldigen met een vrij te kiezen functie $\Omega(\sigma, \tau)$. Dit kan omdat de inverse $h_{\alpha\beta}$ dan een term Ω^{-1} gaat bevatten die precies wegvalt tegen Ω . Deze vorm van symmetrie heet Weyl-herschaling.

We kunnen deze 3 symmetrieën gebruiken om $h_{\alpha\beta}$ in de volgende vorm te schrijven:

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Voor deze tensor geldt $h = -1$, zodat $\sqrt{-h} = 1$. Verder geldt $h_{00} = -1$; $h_{11} = 1$ en $h_{01} = 0$. Dit vullen we in, de nu verkregen actie wordt de “vrije actie” S_f genoemd:

$$S_f := -T' \int d\tau d\sigma \left(-\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu + \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu \right). \quad (39)$$

Deze actie lijkt erg veel op de actie die we gebruikten voor het puntdeeltje (19) als je bedenkt dat $\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu = \dot{x}^2$. De kern van de snaartheorie is dat we nu de massa m van het puntdeeltje vervangen hebben door $\partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu$, de kromming van een snaar. Dit is niet zo vreemd aangezien een trillende snaar een bepaalde trillingsenergie heeft die een puntdeeltje niet heeft. En zoals bekend is massa equivalent aan energie. We hebben dus de energie van de rustmassa ($E = mc^2$) van het puntdeeltje vervangen door de trillingsenergie van een snaar.

Invullen in de bewegingsvergelijkingen van $h_{\alpha\beta}$ geeft de volgende vergelijkingen:

$$\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu = 0, \quad (40)$$

$$\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu = -\partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu. \quad (41)$$

Deze twee vergelijkingen zijn belangrijke *constraints* die grenzen opleggen aan de theorie. We zullen ze in de volgende sectie uitgebreid bespreken.

Eerst zullen we uit de “vrije actie” de bewegingsvergelijkingen voor een “vrije snaar” afleiden.

4.4 De bewegingsvergelijking

Om de bewegingsvergelijkingen te bepalen schrijven we S_f (39) eerst uit naar zijn componenten X^μ en gaan dan deze weer met het variatieprincipe verstoren.

$$S_f = -T' \int d\tau d\sigma \left((X_\tau^0)^2 - (X_\tau^1)^2 - (X_\tau^2)^2 - (X_\tau^3)^2 - (X_\sigma^0)^2 + (X_\sigma^1)^2 + (X_\sigma^2)^2 + (X_\sigma^3)^2 \right).$$

De superscripts 0, 1, 2, 3 slaan uiteraard op t, x, y, z en de subscripts τ en σ geven differentiatie naar de betreffende variabele aan. Variëren we bijvoorbeeld X^0 , dan volgt:

$$S[X^0 + \delta X^0] = -T' \int d\tau d\sigma \left((X_\tau^0)^2 + 2X_\tau^0 \delta X_\tau^0 - (X_\tau^1)^2 - (X_\tau^2)^2 - (X_\tau^3)^2 - (X_\sigma^0)^2 - 2X_\sigma^0 \delta X_\sigma^0 + (X_\sigma^1)^2 + (X_\sigma^2)^2 + (X_\sigma^3)^2 \right). \quad (42)$$

Na eenmaal partieel integreren volgt:

$$S[X^0 + \delta X^0] = -T' \int d\tau d\sigma \left((X_\tau^0)^2 + 2X_{\tau\tau}^0 \delta X^0 - (X_\tau^1)^2 - \dots - (X_\sigma^0)^2 - 2X_{\sigma\sigma}^0 \delta X^0 + (X_\sigma^1)^2 + \dots \right).$$

Hieruit volgt $X_{\tau\tau}^0 = X_{\sigma\sigma}^0$. En omdat een exact analoge redenering opgaat voor de andere coördinaten, geldt in het algemeen

$$X_{\tau\tau}^\mu = X_{\sigma\sigma}^\mu. \quad (43)$$

Dit is een heel belangrijk punt. Uit de eerste vergelijking voor de actie van een snaar (32) hebben we, met behulp van de $h^{\alpha\beta}$ tensor, de bewegingsvergelijking gevonden waar een trillende snaar aan voldoet (43). Het gebruik van deze tensor (of beter gezegd: het invullen van zijn componenten) heeft ons daarnaast ook aan twee beperkende vergelijkingen geholpen: vergelijking 40 en 41.

4.5 De snaar als verzameling harmonische oscillatoren

We zien dat de snaar aan een golfvergelijking voldoet. Omdat een snaar zoals we al wisten een soort cilinder in de ruimte-tijd beschrijft, kunnen we een Fourierontwikkeling naar σ maken voor X^μ :

$$X^\mu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\sigma} f_n^\mu(\tau).$$

Dit gebruiken we om de gevonden vergelijking 43 om te schrijven:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\sigma} f_{n\tau\tau}^\mu(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 e^{in\sigma} f_n^\mu(\tau).$$

Oftewel, voor elke n moet gelden:

$$f_{n\tau\tau}^\mu = -n^2 f_n^\mu(\tau).$$

We kunnen deze Fourierontwikkeling ook voor de vrije actie S_f gebruiken. Vergelijking 39 gaat over in

$$S_f = -T' \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau d\sigma \left(- \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\sigma} f_{n\tau}^\mu \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ip\sigma} f_{p\mu\tau} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} iq e^{iq\sigma} f_q^\mu \sum_{l=-\infty}^{\infty} ile^{il\sigma} f_{l\mu} \right).$$

Haal nu de sigma-integraal binnen de (dubbele) som:

$$S_f = -T' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(- \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i(n+p)\sigma} d\sigma f_{n\tau}^\mu f_{p\mu\tau} - \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} ql e^{i(q+l)\sigma} d\sigma f_q^\mu f_{l\mu} \right).$$

De integralen over σ zijn 0, tenzij $n + p = 0$. In dit geval is de integraal gelijk aan 2π . Invullen hiervan met $n = -p$ en $q = -l$ in de actie geeft:

$$\begin{aligned} S_f &= T' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi f_{n\tau}^\mu f_{-n\mu\tau} - \sum_{q=-\infty}^{\infty} 2\pi q^2 f_q^\mu f_{-q\mu} \right) \\ &= 2\pi T' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(f_{n\tau}^\mu f_{-n\mu\tau} - n^2 f_n^\mu f_{-n\mu} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Deze f_n^μ zijn niet reëel maar voldoen aan $(f_n^\mu(\tau))^* = f_{-n}^\mu(\tau)$. Daarom ligt het voor de hand om, voor $n > 0$, te schrijven $f_n^\mu(\tau) = r_n^\mu(\tau) + is_n^\mu(\tau)$ en $f_{-n}^\mu(\tau) = r_n^\mu(\tau) - is_n^\mu(\tau)$ met r en s reëel. Omdat f_0^μ wel reëel is hoeven we deze niet te veranderen. Als we dit willen invullen in de actie, moeten we deze eerst een beetje herschrijven om van de sommen met n tussen $-\infty$ en ∞ te herschrijven tot sommen met positieve n .

$$\begin{aligned} S_f &= 2\pi T' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(f_{n\tau}^\mu f_{-n\mu\tau} - n^2 f_n^\mu f_{-n\mu} \right) \\ &= 2\pi T' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(f_{n\tau}^\mu f_{-n\mu\tau} - n^2 f_n^\mu f_{-n\mu} \right) + f_{0\tau}^\mu f_{-0\mu\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_{n\tau}^\mu f_{-n\mu\tau} - n^2 f_n^\mu f_{-n\mu} \right) \right\} \\ &= 2\pi T' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_{n\tau}^\mu f_{-n\mu\tau} - n^2 f_n^\mu f_{-n\mu} \right) + f_{0\tau}^\mu f_{-0\mu\tau}. \end{aligned}$$

Nu kunnen we de f -functies herschrijven en er volgt:

$$\begin{aligned} S_f &= 2\pi T' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau 2 \sum_{n=1}^{\infty} (r_{n\tau}^\mu + is_{n\tau}^\mu)(r_{n\tau\mu} - is_{n\mu\tau}) - n^2 (r_n^\mu + is_n^\mu)(r_{n\mu} - is_{n\mu}) + f_{0\tau}^\mu f_{-0\mu\tau} \\ &= 2\pi T' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau 2 \sum_{n=1}^{\infty} (r_{n\tau}^\mu r_{n\mu\tau} + s_{n\tau}^\mu s_{n\mu\tau} - n^2 (r_n^\mu r_{n\mu} + s_n^\mu s_{n\mu})) + f_{0\tau}^\mu f_{-0\mu\tau} \\ &= 2\pi T' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left((\dot{r}_n^\mu \dot{r}_{n\mu} - n^2 r_n^\mu r_{n\mu}) + (\dot{s}_n^\mu \dot{s}_{n\mu} - n^2 s_n^\mu s_{n\mu}) \right) + \dot{f}_0^\mu \dot{f}_0^\mu + 0^2 f_0^\mu f_{0\mu}. \end{aligned}$$

In de laatste uitdrukking van S_f herkennen we nu we de actie van twee sets van harmonische oscillatoren! De actie van een harmonische oscillator is immers:

$$S = \frac{m}{2} \int d\tau \dot{q}^\mu \dot{q}_\mu - \omega^2 q^\mu q_\mu.$$

Er lijkt echter wel direct een probleem te ontstaan: voor iedere harmonische oscillator is de grondtoestandsenergie immers $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Sommeren we dit over alle staten, dan ontstaat er een divergerende som:

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \hbar n = \infty.$$

Van energie is de absolute waarde echter niet zozeer van belang, men is in de natuurkunde voornamelijk geïnteresseerd in energie-verschillen. Deze oneindige grondtoestandsenergie is in principe dus niet zo erg. Om er mee te kunnen rekenen wordt een wiskundige truc toegepast die “renormalisatie” genoemd wordt. We kunnen de volgende functie definiëren:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^x. \quad (45)$$

Voor de energie geldt dan $E = \hbar f(1)$. Maar omdat deze functie alleen convergeert voor $x < 1$ kijken we naar de analytische voortzetting f^* van f die wel gedefinieerd is voor $x = 1$ en voor $x < 1$ overeenkomt met f . Het blijkt dat $f^*(1) = -1/12$. We kunnen dus deze waarde toekennen aan de grondtoestandsenergie.

4.6 Het oplossen van de bewegingsvergelijking

Om de bewegingsvergelijking 43 op te lossen gebruiken we een bekende truc die ook wel de methode van D’Alembert genoemd wordt. Hiertoe definiëren we:

$$\sigma^+ := \sigma + \tau \quad \text{en} \quad \sigma^- := \sigma - \tau.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial \sigma^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \sigma^+} + \frac{\partial \sigma^-}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \sigma^-} = \frac{\partial}{\sigma^+} + \frac{\partial}{\sigma^-}.$$

En op dezelfde manier voor $\frac{\partial}{\partial \sigma}$:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma^+} - \frac{\partial}{\partial \sigma^-}.$$

Nu wordt de bewegingsvergelijking een stuk makkelijker op te lossen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \sigma^+} - \frac{\partial}{\partial \sigma^-}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \sigma^+} + \frac{\partial}{\partial \sigma^-}\right)^2 X^\mu(\sigma^+, \sigma^-) = 0.$$

Na uitschrijven van deze kwadraten blijft over:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^+} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma^-} X^\mu(\sigma^+, \sigma^-) \right) = 0.$$

Nu zullen we deze uitdrukking eerst naar σ^+ en vervolgens naar σ^- primitiveren.

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^-} X^\mu(\sigma^+, \sigma^-) = f(\sigma^-)$$

$$X^\mu(\sigma^+, \sigma^-) = F(\sigma^-) + g(\sigma^+) = F(\tau - \sigma) + g(\tau + \sigma).$$

Omdat we praten over een gesloten snaar moet gelden:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi),$$

$$\Rightarrow F(\tau - \sigma - 2\pi) + g(\tau + \sigma + 2\pi) - F(\tau - \sigma) - g(\tau + \sigma) = 0,$$

$$\Rightarrow F(\tau - \sigma - 2\pi) - F(\tau - \sigma) = g(\tau + \sigma) - g(\tau + \sigma + 2\pi) = c.$$

Omdat σ^- en σ^+ onafhankelijk zijn is c een constante (principe van scheiding van variabelen). Nu definiëren we

$$F(x) := f'(x) - \frac{x}{2\pi}c$$

zodat volgt:

$$f'(\tau - \sigma - 2\pi) - \frac{(\tau - \sigma - 2\pi)c}{2\pi} - f'(\tau + \sigma) + \frac{(\tau - \sigma)c}{2\pi} = c$$

$$\Rightarrow f'(\tau - \sigma - 2\pi) - f'(\tau + \sigma) = 0.$$

Nu hebben we dus een periodieke functie f' en die kunnen we schrijven als Fouriersom:

$$F(x) = \sum_n f_n e^{inx} - \frac{xc}{2\pi}.$$

Dit doen we op dezelfde manier voor g . De algemene oplossing wordt dan:

$$\sum_n f_n e^{in(\tau-\sigma)} + \sum_n g_n e^{in(\tau+\sigma)} - \frac{c}{2\pi}(\tau - \sigma) - \frac{c}{2\pi}(\tau + \sigma).$$

En met $x_0 := f_0 + g_0$ en $v_0 := -\frac{c}{\pi}$ volgt

$$X(\tau, \sigma) = x_0 + v_0\tau + \sum_{n \neq 0} f_n e^{in(\tau-\sigma)} + \sum_{n \neq 0} g_n e^{in(\tau+\sigma)}.$$

We hebben nu een uitdrukking gevonden voor de bewegingen van een gesloten snaar. Merk op dat de eerste twee termen $x_0 + v_0\tau$ opnieuw een rechte lijn beschrijven net zoals de beweging van een klassiek puntdeeltje. Dit keer komen er echter nog twee sommen bij

die de trilling van de snaar rondom zijn massamiddelpunt beschrijven. De eerste som heeft een complexe e-macht met als exponent $in(\tau - \sigma)$, dit is een golf die in de negatieve σ -richting loopt, met hoekfrequentie n . De andere som beschrijft de golven die de andere kant op lopen. In de literatuur worden f_n en g_n meestal aangegeven met respectievelijk $\frac{\alpha_n}{n\sqrt{4\pi T'}}$ en $\frac{\tilde{\alpha}_n}{n\sqrt{4\pi T'}}$, al worden er in de literatuur veel verschillende conventies gebruikt wat betreft de factoren 4π etc. We hebben geprobeerd onze eigen weg hierin te vinden, al is dit misschien niet altijd gelukt.

Hierdoor wordt de uiteindelijke vergelijking voor X de volgende:

$$X(\tau, \sigma) = x_0 + v_0\tau + \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n\sqrt{4\pi T'}} e^{in(\tau - \sigma)} + \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n}{n\sqrt{4\pi T'}} e^{in(\tau + \sigma)}. \quad (46)$$

Aangezien $X(\tau, \sigma)$ een fysische grootheid is moet het een reële waarde hebben. De e -machten $e^{in(\tau + \sigma)}$ en $e^{im(\tau + \sigma)}$ zijn lineair onafhankelijk als $|n| \neq |m|$ dus als de som reëel is moet voor alle n gelden dat $\alpha_n e^{in(\tau + \sigma)}$ de complex geconjugeerde is van $\alpha_{-n} e^{i(-n)(\tau + \sigma)}$:

$$\begin{aligned} \alpha_n e^{in(\tau + \sigma)} &= (\alpha_{-n} e^{i(-n)(\tau + \sigma)})^* = \alpha_{-n}^\dagger e^{-i(-n)(\tau + \sigma)} = \alpha_{-n}^\dagger e^{in(\tau + \sigma)} \\ &\Rightarrow \alpha_n = \alpha_{-n}^\dagger. \end{aligned}$$

En op dezelfde manier:

$$\tilde{\alpha}_n = \tilde{\alpha}_{-n}^\dagger.$$

Om de theorie te quantiseren moeten de vrijheidsgraden van deze vergelijking (dat zijn de x_0 , de v_0 , de α_n en de $\tilde{\alpha}_n$) vervangen worden door operatoren. De α_n en $\tilde{\alpha}_n$ worden dan de bekende stapoperatoren horende bij de harmonische oscillatoren met hoekfrequentie n . Hierbij verhoogt α_n de energie indien $n < 0$ en verlaagt α_n de energie indien $n > 0$.

4.7 Quantisatie

Nu we de klassieke bewegingsvergelijkingen voor een trillende snaar opgelost hebben willen we de theorie graag quantiseren. Uit de quantummechanica is de volgende relatie bekend (we stellen $\hbar = 1$):

$$[\hat{p}, \hat{x}] = -i. \quad (47)$$

Nu willen we deze relatie generaliseren zodat we hem in de snaartheorie kunnen toepassen. Stel dat we op een bepaald moment tegelijkertijd de positie van een punt op de snaar en de impuls van een ander punt op de snaar willen bepalen. Aangezien er een bepaalde afstand tussen de twee punten zit is het theoretisch onmogelijk dat de beide metingen elkaar zullen beïnvloeden. Kortom: de operatoren $\hat{P}(\tau, \sigma)$ en $\hat{X}(\tau, \sigma')$ commuteren als $\sigma \neq \sigma'$. Als we de impuls en de plaats van hetzelfde punt willen bepalen gaat dit natuurlijk niet op en geldt weer de normale commutatatie-relatie tussen \hat{x} en \hat{p} . Dit kunnen we samenvatten door de commutatierelatie te herformuleren tot:

$$[\hat{P}^\mu(\tau, \sigma), \hat{X}^\nu(\tau, \sigma')] = -i\delta(\sigma - \sigma')\eta^{\mu\nu}.$$

Om aan deze formule te kunnen voldoen, moeten de commutatoren van de ingrediënten van P en X op een bepaalde manier samenhangen. Een heleboel zullen 0 zijn, maar enkele belangrijke commutatoren zijn niet nul. Om dit aan te tonen, definiëren we P^μ volgens een definitie die analoog is aan $p = mv$ uit de klassieke mechanica. P^μ is op een constante (de massa of hier de spanning) maal de afgeleide van de plaats.

$$\hat{P}^\mu := T' \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = T' \left(v_0^\mu + \sum_n \frac{\alpha_n^\mu i e^{in(\tau+\sigma)}}{\sqrt{4\pi T'}} + \sum_n \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu i e^{in(\tau-\sigma)}}{\sqrt{4\pi T'}} \right).$$

We kunnen nu de commutator van $\hat{P}^\mu(\tau, \sigma)$ en $\hat{X}^\nu(\tau, \sigma')$ uit schrijven. We willen dus dat deze uiteindelijk $-i\delta(\sigma - \sigma')\eta^{\mu\nu}$ wordt: de generalisatie van $[\hat{p}, \hat{x}] = -i$. Dit zal alleen lukken als we de commutatierelaties voor p_0 (gedefinieerd als $2\pi v_0 T'$; deze keuze is niet erg elegant, aangezien ze afwijkt van die voor P , maar dit was de enige manier waarop we de commutatierelaties konden laten sluiten), x_0 α , en $\tilde{\alpha}$ handig “kiezen”. Dat zullen we hier doen.

$$\begin{aligned} [\hat{P}^\mu(\tau, \sigma), \hat{X}^\nu(\tau, \sigma')] &= T' \left[v_0^\mu + \sum_n \frac{\alpha_n^\mu i e^{in(\tau+\sigma)}}{\sqrt{4\pi T'}} + \sum_n \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu i e^{in(\tau-\sigma)}}{\sqrt{4\pi T'}} \right. \\ &\quad \left. x_0^\nu + v_0 \tau + \sum_m \frac{\alpha_m^\nu e^{in(\tau+\sigma')}}{m\sqrt{4\pi T'}} + \sum_m \frac{\tilde{\alpha}_m^\nu e^{in(\tau-\sigma')}}{m\sqrt{4\pi T'}} \right]. \end{aligned}$$

Dit is te herschrijven tot

$$\begin{aligned} [\hat{P}^\mu(\tau, \sigma), \hat{X}^\nu(\tau, \sigma')] &= \left[\frac{p_0^\mu}{2\pi} + \sum_n \sqrt{T'} \frac{\alpha_n^\mu i e^{in(\tau+\sigma)}}{\sqrt{4\pi}} + \sum_n \sqrt{T'} \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu i e^{in(\tau-\sigma)}}{\sqrt{4\pi}} \right. \\ &\quad \left. x_0^\nu + v_0 \tau + \sum_m \frac{\alpha_m^\nu e^{in(\tau+\sigma')}}{m\sqrt{4\pi T'}} + \sum_m \frac{\tilde{\alpha}_m^\nu e^{in(\tau-\sigma')}}{m\sqrt{4\pi T'}} \right]. \end{aligned}$$

We weten al dat \hat{x}_0 en \hat{p}_0 niet met elkaar commuteren. En uit de quantummechanica is ook bekend dat de commutatoren van de “stapoperatoren” $[\hat{\alpha}_n, \hat{\alpha}_n^\dagger]$ en $[\hat{\tilde{\alpha}}_n, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\dagger]$ ongelijk nul zijn. We mogen aannemen dat alle andere commutatoren wel gelijk aan nul zijn, want de verschillende stapoperatoren werken op verschillende onafhankelijke oscillatoren. We hebben nu de volgende drie commutatierelaties:

$$[\hat{p}_0^\mu, \hat{x}_0^\nu] = A\eta^{\mu\nu}, \quad (48)$$

$$[\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] = B(m)\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}, \quad (49)$$

$$[\hat{\tilde{\alpha}}_m^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\nu] = C(m)\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}. \quad (50)$$

We zullen nu laten zien dat dit inderdaad leidt tot de gegeven relatie. Uitschrijven van de commutator $[P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')]$ leidt tot een heleboel commutatoren, waarvan de meesten dus gelijk zijn aan nul. Er blijft over:

$$[\hat{P}^\mu(\tau, \sigma), \hat{X}^\nu(\tau, \sigma')] = [\frac{\hat{P}_0^\mu}{2\pi}, \hat{x}_0^\nu] + \sum_n \sum_m [\hat{\alpha}_n^\mu, \hat{\alpha}_m^\nu] \frac{i}{4\pi n} e^{i(n+m)\tau} e^{i(n\sigma+m\sigma')} + \sum_n \sum_m [\hat{\alpha}_n^\mu, \hat{\alpha}_m^\nu] \frac{i}{4\pi n} e^{i(n+m)\tau} e^{-i(n\sigma+m\sigma')}.$$

Dit geeft na invullen van de gegeven commutatierelaties (48 - 50):

$$A\eta^{\mu\nu} - i\eta^{\mu\nu} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{4\pi m} (B(m)e^{im(\sigma-\sigma')} + C(m)e^{im(\sigma-\sigma')}).$$

Nu kiezen we: $A = -i$ en $B(m) = C(m) = m$ (zoals commutatierelaties voor impuls, plaats en stapoperatoren ook horen te zijn), zodat volgt:

$$[\hat{P}^\mu(\tau, \sigma), \hat{X}^\nu(\tau, \sigma')] = \frac{1}{2\pi} (-i\eta^{\mu\nu} - i\eta^{\mu\nu} \sum_{m \neq 0} e^{im(\sigma-\sigma')}).$$

Merk op dat we de eerste term $-i\eta^{\mu\nu}$ nu kunnen beschouwen als de $m = 0$ term van de som zodat we deze term binnen de som kunnen halen:

$$[\hat{P}^\mu(\tau, \sigma), \hat{X}^\nu(\tau, \sigma')] = \frac{1}{2\pi} (-i\eta^{\mu\nu} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{im(\sigma-\sigma')}).$$

Met behulp van de definitie $\delta(\sigma - \sigma') = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in(\sigma-\sigma')}$ (zie vergelijking 95 in de appendix) vinden we dan inderdaad :

$$[\hat{P}^\mu(\tau, \sigma), \hat{X}^\nu(\tau, \sigma')] = -i\delta(\sigma - \sigma')\eta^{\mu\nu}.$$

We kunnen nu de totale Hilbertruimte beschrijven waarin onze snaar trilt. We gaan uit van een grondtoestand $|K\rangle$. Alle harmonische oscillatoren waaruit de snaar bestaat zijn dan in de grondtoestand. Nu kunnen we op elke oscillator een willekeurig aantal van de de "omhoog gerichte" stapoperatoren $\hat{\alpha}_{-m}^\mu$ en $\hat{\alpha}_{-q}^\nu$ laten werken.

We hebben zo, uit de oorspronkelijke bewegingsvergelijking voor X^μ , de Hilbertruimte van mogelijke toestanden voor de trillende snaar gevonden:

$$\mathcal{H} = \text{Span} \left\{ \hat{\alpha}_{-n_1}^{\mu_1} \cdots \hat{\alpha}_{-n_r}^{\mu_r} \hat{\alpha}_{-q_1}^{\nu_1} \cdots \hat{\alpha}_{-q_s}^{\nu_s} |K\rangle \right\}. \quad (51)$$

Deze uitdrukking voor de Hilbertruimte is voor trillende gequantiseerde snaren hetzelfde als de vergelijking $\ddot{x}^\mu = 0$ voor een relativistisch puntdeeltje: de meest algemene bewegingsvergelijking.

4.8 Beperkingen op de Hilbertruimte

Bij het relativistisch puntdeeltje hebben we gezien dat er, nadat we de bewegingsvergelijking gevonden hadden, er nog een beperking was om rekening mee te houden: de mass-shell-equation. Deze verkregen we uit de bewegingsvergelijking voor het e -veld. Ook nu is dat het geval. Bij het vinden van de bewegingsvergelijking voor de snaar hebben we een tensor $h_{\alpha\beta}$ ingevoerd, die we zelf ingevuld hebben:

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (52)$$

Hieruit volgden de vergelijkingen:

$$\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu = 0, \quad (53)$$

$$\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu = -\partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu. \quad (54)$$

We gaan nu kijken welke beperkende voorwaarden deze vergelijkingen op onze Hilbertruimte leggen. Daartoe proberen we ze op “quantummechanische vorm” te brengen (als operatorvergelijking te schrijven).

Door beide vergelijkingen te combineren volgen twee nieuwe vergelijkingen die op het eerste gezicht de situatie niet veel helderder maken, maar het nut van de gekozen combinaties zal snel duidelijk worden. We schrijven de vergelijkingen als volgt om:

$$\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu + 2\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu + \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu = 0, \quad (55)$$

$$\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu - 2\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu + \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu = 0. \quad (56)$$

Uit de eerste vergelijking volgt:

$$\begin{aligned} & (\partial_\tau X^\mu + \partial_\sigma X^\mu)^2 = 0, \\ & (v_0^\mu + \frac{2}{\sqrt{4\pi T'}} \sum_{m \neq 0} i\alpha_m^\mu e^{im(\tau+\sigma)})^2 = 0, \\ & (v_0^\mu)^2 + \frac{4}{\sqrt{4\pi T'}} (v_0^\mu \sum_{m \neq 0} i\alpha_m^\mu e^{im(\tau+\sigma)}) + (\frac{2}{\sqrt{4\pi T'}} \sum_{m \neq 0} i\alpha_m^\mu e^{im(\tau+\sigma)})^2 = 0, \\ & (v_0^\mu)^2 + \frac{4}{\sqrt{4\pi T'}} (v_0^\mu \sum_{m \neq 0} i\alpha_m^\mu e^{im(\tau+\sigma)}) + (\frac{4}{4\pi T'} \sum_{m \neq 0} \sum_{n \neq 0} -\alpha_m^\mu \alpha_n^\mu e^{inm(\tau+\sigma)}) = 0, \\ & (v_0^\mu)^2 + \frac{4}{\sqrt{4\pi T'}} \sum_{m \neq 0} (iv_0^\mu \alpha_m^\mu + \frac{4}{4\pi T'} \sum_{n \neq 0} -\alpha_m^\mu \alpha_n^\mu e^{in(\tau+\sigma)}) e^{im(\tau+\sigma)} = 0. \end{aligned} \quad (57)$$

We definiëren: $v_0^\mu := \frac{\alpha_0^\mu}{\sqrt{4\pi T'}}$ en zien dat alle termen nu een factor $\frac{1}{4\pi T'}$ hebben. Deze gooien we weg, zodat volgt:

$$\alpha_0 \alpha_0 + 4 \sum_{m \neq 0} \left(\sum_n -\alpha_m^\mu \alpha_n^\mu e^{in(\tau+\sigma)} \right) e^{im(\tau+\sigma)} = 0. \quad (58)$$

En door de volgorde van de sommatie een beetje anders te kiezen volgt:

$$\sum_m \left[\sum_n \alpha_{-n}^\mu \alpha_{(m+n)\mu} \right] e^{im(\tau+\sigma)} = 0. \quad (59)$$

Of: als we definiëren $L_m := \sum_n \alpha_{-n}^\mu \alpha_{(m+n)\mu}$:

$$\sum_m L_m e^{im(\tau+\sigma)} = 0. \quad (60)$$

Op analoge wijze volgt uit de tweede vergelijking (deze schrijven als $(\partial_\tau X^\mu - \partial_\sigma X^\mu)^2 = 0$) de relatie

$$\sum_m \left[\sum_n \tilde{\alpha}_{-n}^\mu \tilde{\alpha}_{(m+n)\mu} \right] e^{im(\tau+\sigma)} = 0, \quad (61)$$

kortweg

$$\sum_m \tilde{L}_m e^{im(\tau+\sigma)} = 0. \quad (62)$$

Het voordeel van deze twee nieuwe vergelijkingen is dat α en $\tilde{\alpha}$ nu gescheiden zijn. Daarom kozen we juist deze combinaties. Bovendien is er een perfecte symmetrie ontstaan tussen L_m en \tilde{L}_m .

Nu we de vergelijkingen zo omgeschreven hebben kunnen we ze quantiseren. We gaan van L_m en \tilde{L}_m operatoren maken. Zolang m ongelijk is aan 0 betekent dat simpelweg dat we een dakje op onze L_m en \tilde{L}_m zetten:

$$\hat{L}_m = \sum_n \hat{\alpha}_{-n}^\mu \hat{\alpha}_{(m+n)\mu} \quad m \neq 0, \quad (63)$$

$$\hat{\tilde{L}}_m = \sum_n \hat{\tilde{\alpha}}_{-n}^\mu \hat{\tilde{\alpha}}_{(m+n)\mu} \quad m \neq 0. \quad (64)$$

Voor $m = 0$ hebben we echter een commutatatieprobleem. We kunnen daar hier verder niet op ingaan. De “nul-operatoren” zien er daarom als volgt uit:

$$\hat{L}_0 = 2 \sum_{n>0} \hat{\alpha}_{-n}^\mu \hat{\alpha}_{n\mu} + \hat{\alpha}_0^\mu \hat{\alpha}_{0\mu} - 2, \quad (65)$$

$$\hat{\tilde{L}}_0 = 2 \sum_{n>0} \hat{\tilde{\alpha}}_{-n}^\mu \hat{\tilde{\alpha}}_{n\mu} + \hat{\tilde{\alpha}}_0^\mu \hat{\tilde{\alpha}}_{0\mu} - 2. \quad (66)$$

Deze vergelijkingen zijn enigzins bizar. De -2 komt erg onverwachts, en deze vergelijkingen leggen bovendien de eis van het aantal dimensies op: dit moeten er 26 zijn, anders komt de theorie niet uit. Dit interessante fenomeen valt helaas buiten het bereik van ons project.

De vraag is nu hoe we de eis 60 in een quantummechanische toestandsvergelijking overbrengen. Een eerste gedachte zou zijn om te eisen dat voor elke m zou moeten gelden $\hat{L}_m|\Psi\rangle = 0$. Deze eis blijkt echter zo sterk te zijn dat we geen enkele toestand in de Hilbertruimte overhouden; de theorie is dood. We hebben een minder sterke eis nodig. De juiste eis blijkt gelukkig ook minder sterk te zijn. Vergelijking 60 impliceert namelijk (slechts) dat we bij een *meting* van L_m altijd nul zullen vinden: $\langle\Psi_1|\hat{L}_m|\Psi_2\rangle = 0$. Als we nu bedenken dat de operatoren \hat{L}_m en \hat{L}_{-m} elkaars hermitisch toegevoegden zijn (dat is zo omdat \hat{a}_m en \hat{a}_{-m} dat ook zijn) volgt de eis

$$\hat{L}_m|\Psi\rangle = 0 \quad \forall m \geq 0. \quad (67)$$

Deze relatie zorgt precies voor de eis $\langle\Psi_1|\hat{L}_m|\Psi_2\rangle = 0$. Immers voor $m \geq 0$ annihileert $\hat{L}_m|\Psi_2\rangle$, terwijl voor $m < 0$ juist $\langle\Psi_1|$ wordt geannihileerd:

$$\langle\Psi_1|\hat{L}_m = \hat{L}_{-m}|\Psi_1^\dagger\rangle = 0. \quad (68)$$

Met de zojuist opgelegde eis hebben we bereikt dat de Hilbertruimte nu alleen nog maar uit fysische toestanden bestaat. Er zit echt nog een klein addertje onder het gras: sommige toestanden zijn ononderscheidbaar en worden in feite dubbel geteld. We zullen dat laten zien aan de hand van een voorbeeld.

Stel dat $|\chi_1\rangle$ en $|\chi_2\rangle$ fysische toestanden zijn en dat geldt $|\chi_1\rangle - |\chi_2\rangle = \hat{L}_k|F\rangle$. $|F\rangle$ is hier een willekeurige toestand en k is kleiner dan 0 (anders volgt triviaal dat $|\chi_1\rangle = |\chi_2\rangle$).

We kunnen $|\chi_1\rangle$ en $|\chi_2\rangle$ nu niet meer van elkaar onderscheiden. Want neem een fysische toestand $\langle\eta|$:

$$\begin{aligned} \langle\eta|\chi_1\rangle - \langle\eta|\chi_2\rangle &= \langle\eta|\chi_1 - \chi_2\rangle \\ &= \langle\eta|\hat{L}_{-k}|F\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

(In de laatste stap annihileert de \hat{L} operator met negatieve index de bra $\langle\eta|$.) We zien dus dat, hoewel $|\chi_1\rangle$ en $|\chi_2\rangle$ misschien best verschillend kunnen zijn, we zo'n verschil nooit zullen kunnen meten. Het enige wat we kunnen meten zijn de inprodukten $\langle\eta|\chi_1\rangle$ en $\langle\eta|\chi_2\rangle$ en die zijn identiek. Er bestaat dus een equivalentie tussen $|\chi_1\rangle$ en $|\chi_2\rangle$.

4.9 De “schone” Hilbertruimte

We concluderen dat de toestanden $|\Psi\rangle$ waarin onze trillende snaar zich bevinden in de volgende opgeschoonde Hilbertruimte:

$$\mathcal{H} = \text{Span}\left\{\hat{\alpha}_{-n_1}^{\mu_1} \cdots \hat{\alpha}_{-n_r}^{\mu_r} \hat{\alpha}_{-q_1}^{\nu_1} \cdots \hat{\alpha}_{-q_s}^{\nu_s} |K\rangle\right\} \quad \hat{L}_m |\Psi\rangle = 0 \quad (m \geq 0). \quad (69)$$

Hierin bevinden zich nog een heleboel equivalente toestanden, dus deze ruimte wordt nog uitgedeeld naar zijn equivalentieklassen.

5 Deeltjes

We hebben nu genoeg kennis om na te gaan welke toestanden van onze snaren fysische deeltjes voorstellen. Tot nu toe heeft onze aanpak zich vooral op gesloten snaren toegepast. Dit is natuurlijk niet een noodzakelijke beperking. Maar nu we de eigenschappen van gesloten snaren hebben is het niet lastig meer om ook de open snaren te beschrijven. Hierbij loopt de integraal over sigma in formule 30 niet tot 2π , maar bijvoorbeeld slechts tot π . We zullen dit geval niet helemaal gaan behandelen, maar slechts intuïtief duidelijk maken welke veranderingen nodig zijn.

In sectie 4.6 is aangetoond dat de $\hat{\alpha}_m$ en de $\hat{\tilde{\alpha}}_m$ operatoren (en hiermee dus ook de \hat{L}_m en de $\hat{\tilde{L}}_m$ operatoren, die hier lineaire combinaties van zijn), respectievelijk te maken hebben met een lopende golf met de klok mee en tegen de klok in. In een gesloten snaar kunnen die twee lopende golven perfect naast elkaar bestaan; ze gaan immers “dwars door elkaar heen”. In een open snaar echter zal een golf die de ene kant op beweegt aan het uiteinde reflecteren en terug gaan lopen, zodat de naar links en naar rechts lopende golf nu geen onafhankelijke verschijnselen zijn.

Om deze reden is een voor de beschrijving van de open snaar slechts een ‘set’ operatoren nodig om volledig beschreven te worden. We kiezen ervoor om bij de beschrijving van de open snaar dezelfde notatie te gebruiken als bij de open snaar, alleen “vergeten” we alle operatoren met tildes.

5.1 Open Snaren

Voor open snaren worden in het algemeen toestanden gegeven door

$$|\Psi\rangle = \varepsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r} \hat{\alpha}_{-n_1}^{\mu_1} \hat{\alpha}_{-n_2}^{\mu_2} \cdots \hat{\alpha}_{-n_r}^{\mu_r} |K\rangle, \quad (70)$$

waarin de ε een verzameling scalairen is die uiteindelijk een zesentwintig dimensionale lineaire combinatie oplevert.

5.1.1 Het tachyon

De grondtoestand van de open snaar is een toestand $|K\rangle$ waarop nog geen enkele $\hat{\alpha}$ -operator werkt. Dat wil dus zeggen dat alle harmonische oscillatoren in de grondtoestand zitten. We zullen nu aantonen dat deze toestand voldoet aan de eis 67 en daarom inderdaad in de Hilbertruimte zit, maar wel vreemde eigenschappen heeft.

De eis $L_m|K\rangle = 0$ moet gelden voor alle $m \geq 0$. Beschouw eerst het geval $m > 0$.

Omdat de \hat{a}_m^μ -operator voor $m > 0$ een annihilatie operator is (zie sectie 4.6, geldt

$$\hat{a}_m^\mu |K\rangle = 0 \quad m > 0. \quad (71)$$

Beschouw nu $\hat{a}_{m-n}^\mu \hat{a}_n^\mu |K\rangle$. Voor $n > 0$ annihileert de tweede \hat{a} de toestand. En als $n \leq 0$ dan is $m - n$ wèl groter dan 0, dus dan zorgt de eerste operator voor annihilatie (aangezien de verschillenden \hat{a} 's commuteren, is het geen probleem dat deze vooraan staat in plaats van direct bij de te annihileren toestand). Maar de \hat{L}_m -operator is louter een combinatie van deze $\hat{a}_{m-n}^\mu \hat{a}_n^\mu$ stukjes. Conclusie: de grondtoestand voldoet aan de eis 67 voor $m > 0$.

Het geval $m = 0$ blijkt iets lastiger. \hat{L}_0 kan geschreven worden als $2 \sum_{n>0} (\hat{a}_{-n}^\mu \hat{a}_{n\mu}) + \hat{a}_0^\mu \hat{a}_{0\mu} - 2$. De termen in de som verdwijnen volgens een argument dat analoog is aan het bovenstaande. Dat geldt echter niet voor de \hat{p}^μ termen. Dit zijn eigenfuncties van $|K\rangle$ met eigenwaarde p^μ zodat volgt:

$$(\hat{a}_{0\mu} \hat{a}_{0\mu} - 2)|K\rangle = 0. \quad (72)$$

Omdat er een verband bestaat tussen de impuls en de massa van een deeltje (voor het puntdeeltje was dit bijvoorbeeld weergegeven in formule 25), kunnen we dit interpreteren als een vergelijking die ons iets over de massa van het deeltje vertelt. Ook voor de snaren geldt de mass-shelequation $p^\mu p_\mu + m^2 = 0$. We gebruiken nu dat $p^\mu = \sqrt{\pi T'} \hat{a}_0^\mu$, dit volgt uit onze definities van \hat{a}_0 en p^μ beide in termen van v_0 . De T' die hier in voorkomt, is de constante uit vergelijking 32. Het is belangrijk te beseffen dat deze positief is. Er volgt nu namelijk:

$$\hat{a}_0^2 = 2, \quad (73)$$

$$p^2 = 2\pi T', \quad (74)$$

$$m^2 = -2\pi T'. \quad (75)$$

Met andere woorden: we hebben een deeltje gevonden met negatieve massa-kwadraat. Omdat dit sneller dan het licht beweegt, wordt het *Tachyon* genoemd (Grieks: $\tau\alpha\chi\upsilon\varsigma$ = snel). Dat de theoretici hier niet echt blij mee zijn, moge duidelijk zijn. Men heeft vele pogingen ondernomen om van deze vreemde toestand af te komen door op een of andere manier aan te tonen dat dit niet echt de grondtoestand is, maar tot op heden heeft dit niet met al te veel succes gehad. Overigens hebben de supersymmetrische 10- en 11-dimensionale theorieën geen tachyon en dit is dan ook een belangrijke reden dat deze populairder zijn dan de bosonische snaartheorie.

5.1.2 Het foton

Als we de $\hat{a}_{-n_i}^{\mu_i}$ -operatoren laten werken neemt de massa-kwadraat toe. Als de \hat{a}_{-1} -operator er precies één keer werkt op de grondtoestand, ontstaat een deeltje dat massaloos is. Het bekendste massaloze deeltje uit het standaardmodel is het foton. We zullen zien dat dit massaloze open snaartje daar inderdaad veel eigenschappen van heeft. Maar laten we eerst

controleren dat dit deeltje met $|\Psi\rangle = \varepsilon_\mu \hat{\alpha}_{-1}^\mu |K\rangle$ inderdaad in de Hilbertruimte thuishoort en massaloos is.

Aan de eis $\hat{L}_m |\Psi\rangle = 0$ wordt voor bijvoorbeeld $m = 3$ weer makkelijk voldaan. De enige 'gevaarlijke' termen van de \hat{L}_m operator zijn die waarin een $\hat{\alpha}_1^\mu$ voorkomt (alleen deze commuteren niet met $\hat{\alpha}_{-1}^\mu$, zie 49, maar het is makkelijk na te gaan dat daar dan altijd een $\hat{\alpha}_p^\mu$ naast staat met $p > 0$ (in dit geval een $\hat{\alpha}_2^\mu$). Deze $\hat{\alpha}_p^\mu$ commuteert met de beide $\hat{\alpha}_{-1}^\mu$'s en kan dus naar voren gehaald worden om de $|K\rangle$ te annihilieren.

Anders wordt het als we \hat{L}_1 gaan bekijken. Hierin komt een term voor met een $\hat{\alpha}_{-1}^\mu$, die gesecondeerd wordt door een $\hat{\alpha}_0^\mu$, oftewel (op een constante na) \hat{p}^μ . Deze annihilereert de grondtoestand niet, maar er komt de impuls te staan. Om toch uiteindelijk op 0 uit te komen, moet er een eis aan de ε_μ opgelegd worden:

$$\varepsilon_\mu p^\mu = 0. \quad (76)$$

De eis dat $\hat{L}_0 |\Psi\rangle = 0$ levert de massaloosheid:

$$\hat{L}_0 \hat{\alpha}_{-1}^\mu |K\rangle = (2 \sum_{n>0} (\hat{\alpha}_{-n}^\mu \hat{\alpha}_n^\mu) + \hat{\alpha}_0^\mu \hat{\alpha}_{0\mu} - 2) \hat{\alpha}_{-1}^\mu |K\rangle. \quad (77)$$

Dit is eenvoudig op te lossen met behulp van de commutator tussen \hat{L}_0 en $\hat{\alpha}_{-p}^\mu$ (zie 49 en 91):

$$\begin{aligned} [\hat{L}_0, \hat{\alpha}_{-p}^\mu] &= [2 \sum_{n>0} (\hat{\alpha}_{-n}^\mu \hat{\alpha}_n^\mu) + \hat{\alpha}_0^\mu \hat{\alpha}_{0\mu} - 2, \hat{\alpha}_{-p}^\mu] \\ &\text{alleen één term van de som doet mee: die met } n = p \\ &= 2 [\hat{\alpha}_{-p}^\mu \hat{\alpha}_p^\mu, \hat{\alpha}_{-p}^\mu] \\ &= 2 \hat{\alpha}_{-p}^\mu [\hat{\alpha}_p^\mu, \hat{\alpha}_{-p}^\mu] \\ &= 2 \hat{\alpha}_{-p}^\mu \cdot p. \end{aligned}$$

Goed, terug naar vergelijking 77. Mbv van vergelijking 90 volgt

$$\begin{aligned} \hat{L}_0 \hat{\alpha}_{-1}^\mu |K\rangle &= [\hat{L}_0, \hat{\alpha}_{-1}^\mu] |K\rangle + \hat{\alpha}_{-1}^\mu \hat{L}_0 |K\rangle \\ &= \hat{\alpha}_{-1}^\mu (2 * 1 |K\rangle + (\hat{\alpha}_0^\mu \hat{\alpha}_{0\mu} - 2) |K\rangle) \\ &= \hat{\alpha}_{-1}^\mu C p^\mu p_\mu |K\rangle \equiv 0. \end{aligned} \quad (78)$$

Zodat inderdaad volgt $p^\mu p_\mu = 0$ en $m^2 = 0$.

Bij het tachyon was het niet nodig om de extra 'identificatie-eis' te bekijken, voor het foton legt dit wel een extra *constraint* vast.

$|\Psi\rangle$ en $|\Psi'\rangle$ kunnen met elkaar geïdentificeerd worden als $|\Psi\rangle - |\Psi'\rangle = \hat{L}_{-k}|\rho\rangle$ voor een $k \geq 0$. Het blijkt dat dit mogelijk is voor $k = 1$:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle - |\Psi'\rangle &= \varepsilon_\mu \hat{\alpha}_{-1}^\mu |K\rangle - \varepsilon'_\mu \hat{\alpha}_{-1}^\mu |K\rangle \\ &= (\varepsilon_\mu - \varepsilon'_\mu) \hat{\alpha}_{-1}^\mu |K\rangle = \delta\varepsilon_\mu \hat{\alpha}_{-1}^\mu |K\rangle. \end{aligned} \quad (79)$$

Anderszijds kun je \hat{L}_{-1} eens laten werken op $|a K\rangle$:

$$\begin{aligned} \hat{L}_{-1}|a K\rangle &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{-n \mu} \hat{\alpha}_{-1+n}^\mu |a K\rangle \\ &\text{alleen de term met } n=0 \text{ geeft niets dat wegvalt} \\ &= \hat{\alpha}_{0 \mu} \hat{\alpha}_{-1}^\mu |a K\rangle = \hat{\alpha}_{-1}^\mu \hat{\alpha}_{0 \mu} |a K\rangle \\ &= \hat{\alpha}_{-1}^\mu a p_\mu |K\rangle = (a p_\mu) \hat{\alpha}_{-1}^\mu |a K\rangle. \end{aligned} \quad (80)$$

Oftewel er kan een identificatie worden gemaakt als:

$$\delta\varepsilon_\mu = a p_\mu. \quad (81)$$

Waarom fotonen?

Het is nu duidelijk dat deze trillingstoestand van de snaar een massaloze toestand is. Maar alleen dat feit is niet genoeg om de toestand direct met een foton te mogen identificeren. Nu komen echter de Yang-Mills formules goed van pas. Als we de formules aan het eind van 2 vergelijken met zojuist gevonden restricties, dan is de overeenkomst treffend:

$$\begin{array}{llll} \text{Foton:} & k^\mu A_\mu = 0 & (\text{vgl } 13) & \delta A^\mu(k) = ik^\mu \lambda(k) \quad (\text{vgl } 14) \\ \text{Snaar:} & \lambda(k) \varepsilon_\mu p^\mu = 0. & (\text{vgl } 76) & \delta\varepsilon_\mu = a p_\mu. \quad (\text{vgl } 81) \end{array}$$

Omdat onze snaar en het foton klaarblijkelijk dezelfde eigenschappen hebben, kunnen we concluderen dat de snaar inderdaad het foton beschrijft.

5.1.3 Andere open Snaren

Bij het foton is aangetoond dat als een $\hat{\alpha}_{n_i}^{\mu_i}$ -operator toegepast wordt, de massa-kwadraat toe moet nemen om aan de eis voor \hat{L}_0 te blijven voldoen. De meest bescheiden toename werd verzorgd door $\hat{\alpha}_{-1}^\mu$ en deze maakte precies de $-2\pi i T'$ van het tachyon goed. In het algemeen kan de massa geschreven worden als

$$m^2 = -2\pi T' (n_1 + n_2 + \dots + n_r - 1). \quad (82)$$

Het blijkt dat deze andere deeltjes die door open snaren beschreven worden, superzwaar zijn. De massa die ze hebben (vanwege de T') is in de orde van de elementaire massa-eenheid: de *planckmassa*, die gegeven wordt door een combinatie van de fundamentele

natuurkonstanten G , c en \hbar . En die is in SI-eenheden toevallig superzwaar:

$$m_{planck} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = \sqrt{\frac{1.05 * 10^{-34} kg m^2 s^{-2} \cdot 3.00 \cdot 10^8 m s^{-1}}{6.67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}}} = 2.16 \cdot 10^{-8} kg. \quad (83)$$

Dit is zeer veel, zelfs bijna de massa van een macroscopisch, met het blote oog zichtbaar object. Ter vergelijking: een menselijke cel weegt in de orde van 10^{-11} kilogram en een zandkorrel ongeveer 10^{-5} kg. Nog duidelijker wordt het misschien als we de planckmassa omrekenen naar gigaelektronvolt, dan is de massa $1.2 \cdot 10^{19}$ GeV, terwijl met de huidige deeltjesversnellers deeltjes geproduceerd kunnen worden met massa's tot ongeveer 1000 GeV.

Het ziet er dus niet naar uit dat dergelijke supermassieve snaren ooit ontdekt kunnen worden in laboratoria op aarde.

5.2 Gesloten snaren

Voor gesloten snaren geldt een verhaal dat goeddeels analoog is aan het verhaal dat hierboven is weergegeven voor open snaren. Wel is er natuurlijk de extra eis dat ook \hat{L}_m op een fysische toestand $|\Psi\rangle$ 0 moet geven voor alle $m \geq 0$ en kunnen we niet alleen ervoor kiezen om niet alleen $\hat{\alpha}_{-n_i}^{\mu_i}$'s op de grondtoestand te laten werken, maar ook $\hat{\alpha}_{-q_j}^{\nu_j}$'s. Een algemene toestand wordt dus beschreven door

$$|\Psi\rangle = \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_r; \nu_1 \dots \nu_s} \hat{\alpha}_{-n_1}^{\mu_1} \dots \hat{\alpha}_{-n_r}^{\mu_r} \hat{\alpha}_{-q_1}^{\nu_1} \dots \hat{\alpha}_{-q_s}^{\nu_s} |K\rangle. \quad (84)$$

We zullen weer de deeltjes met de laagste massa-kwadraat beschouwen:

5.2.1 Nog een tachyon

Ook voor gesloten snaren is de toestand $|K\rangle$ simpelweg de grondtoestand. De eisen die aan dit deeltje gesteld worden, namelijk dat zowel $\hat{L}_m |K\rangle = 0$ als $\hat{\tilde{L}}_m |K\rangle = 0$ voor $m \geq 0$ is in het eerste geval al behandeld in sectie 5.1.1 en het tweede geval gaat volledig analoog: we hebben nog een tachyon.

5.2.2 Twee onmogelijke deeltjes

Twee andere deeltjes die bestudeerd kunnen worden zijn $\varepsilon_\mu \hat{\alpha}_{-1}^\mu |K\rangle$ en $\varepsilon_\nu \hat{\alpha}_{-1}^\nu |K\rangle$. Deze deeltjes beschrijven echter geen fysische toestanden. Laten we dit voor $\varepsilon_\mu \hat{\alpha}_{-1}^\mu |K\rangle$ nagaan. De \hat{L}_m -eis is al in sectie 5.1.2 behandeld. Dit levert onder andere de eis dat $m^2 = 0$. Als we de $\hat{\tilde{L}}_m$ -eisen nagaan, moeten we echter bedenken dat alle $\hat{\alpha}_{-q_j}^{\nu_j}$'s van deze operator

commuteren met de $\hat{\alpha}_{-1}^{\mu}$ van de toestand en dat er voor de tildewereld hier dus als het ware een grondtoestand staat. Maar dan eis je de inmiddels beruchte negatieve massa kwadraat (vergelijking 75). Deze twee eisen zijn met elkaar in tegenspraak, dus de twee genoemde deeltjes kunnen niet bestaan.

5.2.3 Het graviton

De toestand $\varepsilon_{\mu;\nu}\hat{\alpha}_{-1}^{\mu}\hat{\tilde{\alpha}}_{-1}^{\nu}|K\rangle$ ontloopt bovengenoemde bezwaren; omdat de $\hat{\alpha}$ en de $\hat{\tilde{\alpha}}$ symmetrisch voorkomen, geeft zowel de wereld met als zonder tilde een massaloos deeltje aan.

Tot zover niets bijzonders. Maar enige overpeinzing leert dat dit deeltje precies spin $2\hbar$ heeft. De spin (in eenheden van \hbar) blijkt namelijk samen te hangen met het aantal vrije indices en dit zijn er twee: μ en ν). Net zo heeft het foton van sectie 5.1.2 één vrije index en dus spin $1\hbar$. Dit verklaart ook meteen de term bosonische snaartheorie: het aantal vrije indices moet natuurlijk altijd een geheel getal zijn en de deeltjes met gehele spin die hieruit te voorschijn komen zijn dus steeds bosonen.

Het niet kunnen beschrijven van fermionen is een groot nadeel van deze theorie, maar het wel kunnen beschrijven van een deeltje met spin $2\hbar$ is misschien wel een nog groter voordeel. Alle krachtdragers van het standaardmodel (fotonen, W^+, W^-, Z bosonen en gluonen) hebben namelijk spin-1 en de bijbehorende ijk-theorieën kunnen het geval spin-2 niet aan en kunnen daarom quantumzwaartekracht niet beschrijven. Met deze theorie of, waarschijnlijker, met de afgeleide 10 en 11-dimensionale supersnaartheoriën (die overigens wel fermionen aankunnen) zal dat mogelijk wel gaan lukken en vanwege deze unificerende kracht is het dat de snaartheorie zo populair is.

Conclusie

We concluderen dat de bosonische snaartheorie trillende snaren met deeltjes weet te identificeren. Zo verklaart één van de toestanden van de open snaar het gedrag van het foton en beschrijft een toestand van de gesloten snaar het graviton. Dit opent de mogelijkheden voor een theorie van quantumgravitatie. Ook hebben we het zeer bizarre tachyon gevonden.

Nawoord

Met dit project hebben we een klein kijkje kunnen nemen in de wereld van de snaartheoretici en een iets beter beeld kunnen krijgen in het interessante werk dat zij doen.

In de vijf maanden dat we ons met de snaartheorie bezig gehouden hebben zijn we onder de indruk geraakt van de elegante ideeën in deze wetenschap. Het is ons echter ook duidelijk geworden dat de (super)snaartheorie nog lang niet af is, al lijkt met de ontdekking van M-theorie een grote stap voorwaarts te zijn gezet. In dit vakgebied is nog veel werk te doen, waarvoor wij ons over een paar jaar zeker aanbevolen zullen houden.

Wij danken onze begeleider Jan de Boer voor zijn begeleiding van ons project. We vinden het erg leuk dat het op deze universiteit mogelijk is dat (tweedejaars)studenten door zulke topwetenschappers worden begeleid.

Dit project is oorspronkelijk in januari begonnen als onderdeel van het zogenaamde “honours” traject. Hierdoor hebben niet alleen wij als tweedejaars de projectgroep bij Jan gevolgd, ook twee eerstejaars natuurkunde en een tweedejaars wiskunde hebben meegedaan. Van Arie, Loek en Maarten hebben we veel kunnen opsteken en zij hebben ons zeker geholpen, waarvoor dank. Tenslotte willen we Chris van Weert en Welmoet Damsma bedanken, die het mogelijk hebben gemaakt dat dit extra lange project is opgezet.

Referenties

- [1] R.H. Dijkgraaf *Caputcollege string theory*, Mastercollege UvA (2001)
- [2] B.Greene *The elegant universe*, Vintage (2000)
- [3] D.J. Griffiths *Introduction to quantummechanics*, Prentice Hall (1995)
- [4] D.J.Griffiths *Introduction to Electromechanics*, Prentice Hall (1999)
- [5] Marion en Thornton *Classical Mechanics of particles and systems 5th edition*, Thomson Learning (2004)
- [6] J. Meadows *Geschiedenis van de Wetenschap*, Uniepers (1997)

- [7] P. de Paepe *syllabus Varia*, UvA (2003)
- [8] S. Mukhi *The Theory of Strings: A Detailed Introduction*
(<http://theory.tifr.res.in/mukhi/Physics/string2.html>)
- [9] www.superstringtheory.com
- [10] M.J.G. Veltman *Elementaire deeltjes fysica*, NIKHEF 2002

A Appendix: wat wiskundige methoden

In de berekeningen van de acties hierboven is het gebruik van een aantal wiskundige methoden veelvuldig nodig geweest. Hier zullen we enkele van deze technieken kort behandelen, zodat in de werkelijke berekening een korte verwijzing kan volstaan.

A.1 Het variatieprincipe

In ons onderzoek zijn we dikwijls acties tegengekomen die van een aantal functies van variabelen afhingen zoals $x^i(\lambda)$. We wilden dan onderzoeken hoe we deze actie konden minimaliseren. In deze gevallen bleek het variatieprincipe een handig middel. We verstoorde een van de functies met een extra term $\delta x^i(\lambda)$ (die 0 moet zijn in de eindpunten) en beschouwden de infinitesimale verandering van de actie (δS) als gevolg hiervan en eisten dat deze voor alle $\delta x^i(\lambda)$ nul is. Een en ander is uitgebreid behandeld in de tweedejaarsvakken Wiskunde N1 en Klassieke Mechanica. In de bronvermelding is het studiemateriaal van deze vakken opgenomen: [5] en [7].

A.2 Ontwikkeling tot op eerste orde

Bij bovenstaande infinitesimale verandering van de actie is het nodig tot op eerste orde in $\delta x^i(\lambda)$ uit te werken. Uit de eerstejaarscalculus zijn de formules voor het ontwikkelen van een wortel en een breuk rond het punt $x = 1$ bekend:

$$\sqrt{1 + \varepsilon} \simeq 1 + \frac{1}{2}\varepsilon \quad (85)$$

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} \simeq 1 - \varepsilon. \quad (86)$$

Meestal echter willen we niet rond het punt $x = 1$ ontwikkelen, maar rond een ander punt. Er volgt nu zeer direct (voor $A \gg B$):

$$\sqrt{A + B} = \sqrt{A} \sqrt{1 + \frac{B}{A}} \simeq \sqrt{A} \left(1 + \frac{B}{2A}\right) = \sqrt{A} + \frac{B}{2\sqrt{A}} \quad (87)$$

$$\frac{1}{A + B} = \frac{1}{A} \frac{1}{1 + \frac{B}{A}} \simeq \frac{1}{A} \left(1 - \frac{B}{A}\right) = \frac{1}{A} - \frac{B}{A^2}. \quad (88)$$

A.3 Commutatoren

Bij het rekenen met quantumoperatoren, komen dikwijls commutatoren om de hoek kijken. Zoals bekend uit bijvoorbeeld het eerstejaarscollege quantummechanica zij deze

gedefinieerd als:

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (89)$$

Het is haast triviaal om te zeggen dat hieruit volgt:

$$\hat{A}\hat{B} = [\hat{A}, \hat{B}] + \hat{B}\hat{A}, \quad (90)$$

maar dit wordt wel zeer vaak toegepast.

In het tweede jaar is de volgende zeer belangrijke relatie afgeleid:

$$[\hat{A} \hat{B}, \hat{C}] = \hat{A} [\hat{B}, \hat{C}] - [\hat{A}, \hat{C}] \hat{B}. \quad (91)$$

Door deze te herschrijven volgt simpel:

$$[\hat{P}, \hat{Q} \hat{R}] = -[\hat{Q} \hat{R}, \hat{P}] = -\left(\hat{Q} [\hat{R}, \hat{P}] - [\hat{Q}, \hat{P}] \hat{R}\right) = \hat{Q} [\hat{P}, \hat{R}] - [\hat{P}, \hat{Q}] \hat{R}. \quad (92)$$

Soms is het nodig operatoren hermitisch te conjugereren. Omdat geldt $(\hat{A} \hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$, dus met omdraaiende volgorde, geldt:

$$[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = -[\hat{A}^\dagger, \hat{B}^\dagger] = [\hat{B}^\dagger, \hat{A}^\dagger]. \quad (93)$$

A.4 De Dirac deltafunctie

In de commutatierelaties van een snaar kan in het rechterlid een Dirac deltafunctie voorkomen $\delta(\sigma - \sigma')$. Het blijkt moeilijk hiermee te werken, tenzij we de deltafunctie omschrijven naar een meer werkbare vorm. We mogen de deltafunctie herschrijven als:

$$\delta(\sigma - \sigma') = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in(\sigma - \sigma')}. \quad (94)$$

In deze vorm blijft immers de definitie van de deltafunctie $\int_0^{2\pi} \delta(\sigma - \sigma') f(\sigma') d\sigma' = f(\sigma)$ geldig als we voor f een lineaire combinatie van e- machten invullen: $f(\sigma') = \sum_m a_m e^{im\sigma'}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \delta(\sigma - \sigma') f(\sigma') d\sigma' &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_n a_m e^{in\sigma} e^{i(m-n)\sigma'} d\sigma' \\ &\quad \text{(dit is alleen iets als } m = n\text{)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_m a_m e^{in\sigma} d\sigma' \\ &\quad \text{(in de integrand komt helemaal geen } \sigma'\text{ meer voor,} \\ &\quad \text{dus de integraal over } \sigma'\text{ is } 2\pi\text{)} \\ &= \sum_m a_m e^{in\sigma} = f(\sigma). \end{aligned} \quad (95)$$

A.5 Determinanten

Het begrip determinant is in de eerstejaarscolleges lineaire algebra zeer uitgebreid aan bod gekomen. Daarvan zijn onder andere de volgende formules bekend:

$$\begin{aligned}\det M &= \prod \lambda_i \quad (\text{het product van de eigenwaarden}) \\ &= \exp(\sum \log \lambda_i) \\ &= \exp \text{ spoor} (\log M).\end{aligned}$$

Hierop gebaseerd is de volgende ontwikkeling van de determinant van de eenheidsmatrix plus een kleine matrix A :

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{1} + A) &= \exp \text{ spoor} (\log \mathbf{1} + A) \\ &= \exp \text{ spoor} [A + A^2/2 + \dots] \\ &\simeq \exp \text{ spoor} [A] \\ &= 1 + \text{ spoor} [A] + \frac{1}{2} \text{ spoor}^2 [A] \\ &\simeq 1 + \text{ spoor} [A].\end{aligned}\tag{96}$$

A.6 Het oppervlak van een wereldvlak

Om het wereldvlak van een snaar te parametriseren hebben we twee parameters nodig: een periodieke: σ die de snaar op één bepaald moment parametrizeert en een tijdachtige parameter τ die geïnterpreteerd kan worden als de proper-time van de snaar. De positie van een willekeurig punt op de snaar wordt dus gegeven door een afbeelding $X^\mu(\tau, \sigma)$ van de cilinder $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{R})$ naar de Minkowski-ruimte (of een hoger dimensionale ruimte). Hierbij loopt de index μ over het aantal dimensies. We gaan er vanuit dat deze afbeelding overal differentieerbaar is en dat het wereldvlak oriënteerbaar is. Om de oppervlakte te berekenen kiezen we eerst een klein oppervlakje op de cilinder, bijvoorbeeld het vierkant met de hoekpunten $(0, 0)$, $(\Delta\tau, 0)$, $(0, \Delta\sigma)$ en $(\Delta\tau, \Delta\sigma)$. Dit oppervlakje zal in eerste orde benadering worden afgebeeld op een parallellogrammetje. Voor een parallellogram opgespannen door de vectoren \vec{x}, \vec{y} geldt:

$$\text{opp} = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}.\tag{97}$$

Dit volgt direct uit de stelling van Pythagoras en de definitie van het standaard-inproduct. We willen nu het oppervlak berekenen van het parallellogram opgespannen door de vectoren $\vec{X}^\mu(\Delta\tau, 0) - \vec{X}^\mu(0, 0)$ en $\vec{X}^\mu(0, \Delta\sigma) - \vec{X}^\mu(0, 0)$. Kiezen we $\Delta\tau$ en $\Delta\sigma$ infinitesimaal dan kunnen we deze vectoren respectievelijk schrijven als $\frac{\partial \vec{X}^\mu}{\partial \tau}|_{(0,0)} d\tau$ en $\frac{\partial \vec{X}^\mu}{\partial \sigma}|_{(0,0)} d\sigma$ oftewel: $\partial_\tau \vec{X}^\mu d\tau$ en $\partial_\sigma \vec{X}^\mu d\sigma$. Nu volgt voor het oppervlak van dit parallellogrammetje:

$$\text{opp} = \sqrt{|\partial_\tau X^\mu d\tau|^2 |\partial_\sigma X^\mu d\sigma|^2 - \langle \partial_\tau \vec{X}^\mu d\tau, \partial_\sigma \vec{X}^\mu d\sigma \rangle^2}$$

$$opp = d\tau d\sigma \sqrt{|\partial_\tau X^\mu|^2 |\partial_\sigma X^\mu|^2 - \langle \partial_\tau \vec{X}^\mu, \partial_\sigma \vec{X}^\mu \rangle^2}.$$

Dit kunnen we uitschrijven als:

$$opp = d\tau d\sigma \sqrt{-(\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu)(\partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu) + (\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu)^2}.$$

Merk op dat er onder de wortel een $-$ teken bij is gekomen omdat we werken met de Minkowski-metrik i.p.v. het standaard-inproduct. Om nu het totale oppervlak van het wereldvlak te verkrijgen hoeven we dit alleen nog maar over de gehele cilinder te integreren:

$$opp = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau d\sigma \sqrt{-(\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu)(\partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu) + (\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu)^2}. \quad (98)$$

De uitdrukking onder de wortel heeft de vorm van een determinant, dus dit kunnen we nog korter schrijven als:

$$opp = \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu)}.$$

Om het oppervlak te gebruiken als de actie van een snaar moeten we de uitdrukking nog dimensieloos maken m.b.v. een constante $-T'$. Deze constante heeft dimensie energie/lengte en stelt de spanning op de snaar voor.

$$S = -T' \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu)}. \quad (99)$$