

# **Analyse 3: Functietheorie**

P.J.I.M. de Paepe      Jan Wiegerinck

21 januari 2014



# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>In het complexe vlak</b>	<b>7</b>
1.1	Complexe getallen . . . . .	7
1.2	Topologie . . . . .	8
1.3	(Stuksgewijs) gladde krommen . . . . .	10
1.4	Uniforme convergentie . . . . .	11
1.5	Machtreeksen . . . . .	13
1.6	Machtreeksen en definities van belangrijke functies . . . . .	14
1.7	Manipuleren van (macht)reeksen . . . . .	15
1.8	Analytische functies . . . . .	17
1.9	Complex-differentieerbare functies . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Het uitgebreide complexe vlak</b>	<b>25</b>
2.1	Uitbreiding van het complexe vlak . . . . .	25
2.2	Gebroken lineaire transformaties . . . . .	27
2.3	De Riemannsfeer . . . . .	30
2.4	$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . . . . .	31
<b>3</b>	<b>De Cauchy-Riemann vergelijkingen en conforme afbeeldingen</b>	<b>35</b>
3.1	Complexe differentieerbaarheid en reële differentieerbaarheid . . . . .	35
3.2	Harmonische functies . . . . .	37
3.3	Conforme afbeeldingen . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Meerwaardige functies</b>	<b>43</b>
4.1	De complexe $e$ -macht . . . . .	43
4.2	Meerwaardige functies . . . . .	44
4.3	Holomorfe takken . . . . .	45
4.4	Constructie van holomorfe takken . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Integratie</b>	<b>51</b>
5.1	Integratie over stuksgewijs gladde krommen . . . . .	51
5.2	Hoofdstelling van de complexe integraalrekening . . . . .	54
5.3	De stelling van Cauchy, zwakke vorm . . . . .	56
5.4	De Cauchy getransformeerde en analyticiteit . . . . .	58
5.5	De stelling van Cauchy . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Contourintegratie</b>	<b>67</b>
6.1	Voorbeelden . . . . .	67

6.2	Lijst van de lemma's . . . . .	76
<b>7</b>	<b>Toepassingen van Cauchy, Reeksen van holomorfe functies</b>	<b>79</b>
7.1	Cauchyschattingen en gevolgen . . . . .	79
7.2	De stelling van Weierstraß . . . . .	80
7.3	Laurentreeksen . . . . .	83
7.4	Nulpunten van holomorfe functies . . . . .	85
7.5	Singulariteiten en Laurentreeksen . . . . .	87
7.5.1	Ophefbare singulariteiten . . . . .	87
7.5.2	Polen . . . . .	89
7.5.3	Essentiële singulariteiten . . . . .	91
<b>8</b>	<b>Meer Functietheorie</b>	<b>99</b>
8.1	Existentie van holomorfe takken . . . . .	99
8.2	Harmonisch geconjugeerde . . . . .	99
8.3	Nulpunten van holomorfe functies en uniciteit . . . . .	100
8.4	Singuliere randpunten . . . . .	101
8.5	Het argumentprincipe . . . . .	102
8.6	Open afbeeldingsstelling . . . . .	105
8.7	Inverse-functiestelling . . . . .	107
8.8	Substitutiestelling . . . . .	108

# Voorwoord

Functietheorie is het eerste analysevak waarbij je werkelijk afstand neemt tot de middelbare-school-wiskunde. De resultaten zijn verbluffend. Je leert technieken om integralen als

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

en sommen als

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

uit te rekenen. Bedenk dat je voor aanvang van dit college net kon bewijzen dat er eindige waarden uitkomen! Het maken van dit soort sommetjes is het calculusgedeelte van het vak.

De wiskundige analyse zit hem in het rechtvaardigen van de technieken. Maar er is veel meer. Een functie als  $\frac{\sin x}{x}$  is een voorbeeld van een *analytische* of *holomorfe* functie. Voor dit soort functies werken de technieken uit dit college. De analyse maakt het ook mogelijk om allerlei verrassende eigenschappen van dit soort functies te bewijzen. We verkrijgen zo bijvoorbeeld de *stelling van Liouville*, die zegt dat een functie op  $\mathbb{C}$  die begrensd en holomorf is, constant moet zijn, of de *hoofdstelling van de Algebra*: “Ieder niet constant polynoom in  $\mathbb{C}[x]$  heeft tenminste één nulpunt in  $\mathbb{C}$ .” Het bewijs zal niet meer dan twee regels beslaan.

De eerste echte stellingen uit de functietheorie werden door Euler (1707-1783) gevonden. Daarmee is functietheorie een betrekkelijk oud onderdeel van de wiskunde. Dit zien we ook in de naam terug. Functie wordt hier gebruikt met de oude betekenis in gedachte, namelijk een functie die door een nette formule gegeven is. De functietheorie in deze syllabus berust vooral op het werk van Cauchy (1789-1857) en verder op dat van Weierstraß (1815-1897) en van Riemann (1826-1866). Cauchy benaderde de functietheorie via zijn integraalvoorstelling, Weierstraß werkte vooral met machtreeksen en Riemann's uitgangspunt was zijn differentiaalvergelijking. Dit alles komt in dit college aan de orde.

Dit college is echter niet meer dan een inleiding; in het midden van de 19de eeuw was al meer over functietheorie bekend dan wij behandelen.

De literatuur voor een basiscollege functietheorie is overweldigend. Bijvoorbeeld:

- Robert E. Greene en Steven G. Krantz, *Function Theory of One Complex Variable*, 3de uitgave, AMS 2006;
- John B. Conway, *Functions of one complex variable I*, Springer, 1978;
- Nevanlinna-Paatero, *Introduction to complex analysis*, Chelsea (Academisch);

## *Inhoudsopgave*

- M.R. Spiegel, *Theory and problems of complex variables*, Mc Graw-Hill (Niet Academisch, voor de resultaatgerichte student, veel opgaven);
- R.A. Kortram, *De theorie van complexe functies*, Epsilon uitgaven, 1989.

Rest mij om Jeroen Zuiddam te bedanken voor zijn geweldige bijdrage aan het beter leesbaar maken van deze syllabus en het up to date brengen van de sourcefiles.

Jan Wiegerinck  
januari 2012

# 1 In het complexe vlak

## 1.1 Complexe getallen

De verzameling van de complexe getallen wordt aangegeven met  $\mathbb{C}$ . Uit calculus weten we dat  $\mathbb{C}$  uit  $\mathbb{R}^2$  verkregen wordt door hierop een vermenigvuldiging te definiëren. Met  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  correspondeert  $x + iy \in \mathbb{C}$ , en de vermenigvuldiging is gedefinieerd door  $(x + iy)(u + iv) = xu - yv + i(xv + yu)$ . We herhalen enkele hoofdpunten. Voor  $z = x + iy$  definiëren we het *reële deel* van  $z$  als

$$\operatorname{Re} z = x \in \mathbb{R}$$

en het *imaginaire deel* van  $z$  als

$$\operatorname{Im} z = y \in \mathbb{R}.$$

De complexe getallen worden getekend in een plat vlak (het complexe vlak) met twee onderling loodrechte assen. Op de plaats met eerste coördinaat  $x$  en tweede coördinaat  $y$  wordt  $z = x + iy$  getekend.

Een tweede manier om  $z$  te bepalen is om gebruik te maken van poolcoördinaten van  $z$  en dus te schrijven

$$x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi. \quad (1.1)$$

We noemen  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  de *modulus* of *absolute waarde* van  $z$ , aangegeven met  $|z|$ . Dit is met Pythagoras de afstand tussen  $(0, 0)$  en  $(x, y)$ . We noemen  $\varphi$  het *argument* van  $z$ , verkregen door  $\varphi$  uit (1.1) op te lossen en aangegeven door  $\arg z$ . Meetkundig is  $\arg z$  de hoek tussen de positieve reële as en de halfrechte door de oorsprong (het complexe getal 0) en  $z$ . Deze hoek, ofwel de oplossing  $\varphi$  van (1.1), is slechts op veelvoud van  $2\pi$  na bepaald. We kunnen nu een verdere specificatie maken, bijvoorbeeld door te eisen dat de waarde van het argument van een punt  $z$  in het interval  $(-\pi, \pi]$  ligt. We spreken dan over de *hoofdwaarde* van het argument van  $z$ , notatie  $\operatorname{Arg} z$ . Deze functie is continu, behalve op de negatieve reële as. Een andere elegante oplossing is  $\arg z$  te definiëren als de verzameling van alle  $\varphi$  die aan (1.1) voldoen. We komen hier in hoofdstuk 3 uitgebreid op terug. Vaak maakt het niet uit welke oplossing we hebben. Dan schrijven we gewoon  $\arg z = \varphi$ .

Optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling van complexe getallen (het laatste als de noemer ongelijk aan 0 is) gebeurt op de gebruikelijke manier.

We vatten het verband tussen pool- en rechthoekige coördinaten nog eens samen. Als  $z \in \mathbb{C}$  met  $z \neq 0$ , en  $r, \varphi \in \mathbb{R}$  met  $r > 0$  (!) dan geldt

$$|z| = r \text{ en } \arg z = \phi \iff z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

## 1 In het complexe vlak

Nog wat feiten. Er geldt dat  $|zw| = |z| \cdot |w|$ ,  $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$  en voor  $z$  en  $w$  ongelijk aan 0,  $\arg zw = \arg z + \arg w \pmod{2\pi}$  en  $\arg \frac{z}{w} = \arg z - \arg w \pmod{2\pi}$ . Verder gelden de zeer belangrijke *driehoeksongelijkheden*

$$\left| |z| - |w| \right| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|.$$

Enkele notaties voor speciale verzamelingen. Onder  $B(a, r)$  verstaan we de schijf  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ . En  $C(a, r)$  is de cirkel  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$ . Tot slot,  $A(a, r_1, r_2)$  is de ring (annulus)  $\{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - a| < r_2\}$ .

## 1.2 Topologie

Een deelverzameling  $A$  van  $\mathbb{C}$  heet *open* als voor elke  $a \in A$  er een  $\epsilon > 0$  is met  $B(a, \epsilon) \subset A$ . Een deelverzameling  $B$  van  $\mathbb{C}$  heet *gesloten* als  $\mathbb{C} \setminus B$  open is. Een deelverzameling  $K$  van  $\mathbb{C}$  is *compact* dan en slechts dan als iedere overdekking van  $K$  met open deelverzamelingen kan worden uitgedund tot een overdekking met eindig veel verzamelingen, dan en slechts dan als  $K$  zowel gesloten als begrensd is. De belangrijkste stelling over compacte verzamelingen (zie college Topologie) zegt dat het beeld van een compacte verzameling onder een continue functie weer compact is. Een speciaal geval min of meer bekend uit eerdere analysecursussen luidt als volgt.

**Stelling 1.2.1.** *Als  $K$  compact is en  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  continu is, dan is  $f$  naar boven begrensd op  $K$ , en neemt zelfs een grootste waarde (maximum) aan op  $K$ . Net zo is  $f$  naar beneden begrensd op  $K$  en neemt  $f$  een kleinste waarde aan.*

Een niet-lege deelverzameling  $X$  van  $\mathbb{C}$  heet *onsamenhangend* of splitsbaar als er open verzamelingen  $A$  en  $B$  zijn met  $X \subset A \cup B$  en  $A \cap B = \emptyset$  zo, dat  $A \cap X \neq \emptyset$  en  $B \cap X \neq \emptyset$ .

Een niet-lege deelverzameling  $X$  van  $\mathbb{C}$  heet *samenhangend* als hij niet on samenhangend is, dus wanneer voor alle open verzamelingen  $A$  en  $B$  met  $X \subset A \cup B$  en  $A \cap B = \emptyset$  geldt dat  $A \cap X = \emptyset$  of  $B \cap X = \emptyset$ . Een niet-lege open samenhangende deelverzameling  $G$  van  $\mathbb{C}$  noemen we een *gebied*. Denk er aan als aan een (niet-lege) open verzameling die uit ‘één stuk’ bestaat.

Uit eerdere analysecursussen weten we dat een interval in  $\mathbb{R}$  samenhangend is. Verder wordt in het college Topologie bewezen dat het beeld van een samenhangende verzameling onder een continue afbeelding samenhangend is.

Een voorbeeld van de dadelijk te behandelen zogeheten stuksgewijs gladde krommen bestaat uit een aantal achter elkaar geschakelde gerichte lijnstukjes die allemaal horizontaal of verticaal lopen. Zo’n kromme heet een *traplijn* en is wegens de vorige opmerking samenhangend. De eindpunten van de lijnstukjes heten knooppunten. We zullen altijd aannemen dat er geen snijpunten liggen in het inwendige van een lijnstuk. Dit kan bereikt worden door eventueel knooppunten toe te voegen en lijnstukken in meerdere lijnstukken op te delen.

**Stelling 1.2.2** (Karakterisering gebieden). *Laat  $G$  een niet-lege open deelverzameling van  $\mathbb{C}$  zijn. Dan zijn equivalent:*



1.  $G$  is een gebied.
2. Elk tweetal punten  $z$  en  $w$  in  $G$  is te verbinden door een traplijn in  $G$  met  $z$  en  $w$  als eindpunten.

*Bewijs.* (i)  $\implies$  (ii) Kies  $z$  (even vast) in  $G$  en definieer

$$E = \{w \in G \mid \text{er is een traplijn in } G \text{ die } z \text{ en } w \text{ verbindt}\}.$$

Dan is  $E$  open. Immers, er is voor iedere  $w \in E$  een schijf  $B(w, r) \subset G$ . Een punt  $u$  in  $B(w, r)$  kun je met een traplijn (bestaande uit twee stukken) verbinden met  $w$  en dit punt, vanwege  $w \in E$ , weer via een traplijn in  $G$  met  $z$ . Doorloop de twee traplijnen nu na elkaar. Er volgt  $u \in E$ , oftewel  $E$  is open.

Laat  $A = G \setminus E$ . Laat  $w \in A$  en  $B(w, r) \subset G$ . Als  $u$  in  $B(w, r)$  zit, en in  $E$  zou zitten, dan zou  $z$  via een traplijn in  $G$  met  $u$  te verbinden zijn en dus via een traplijn met  $w$  (door  $u$  met  $w$  te verbinden via een traplijntje in  $B(w, r)$ ). Dus zou  $w \in E$ , in tegenspraak met  $w \in A$ . En dus geldt  $u \in A$ , dus  $A$  is open. Vanwege de samenhang van  $G$  moet  $A$  of  $E$  leeg zijn. Maar  $E$  bevat zeker het punt  $z$ . Dus  $A$  is leeg, ofwel  $E = G$ . Klaar.

(ii)  $\implies$  (i) Laat  $A$  en  $E$  open met  $G = A \cup E$  en  $A \cap E = \emptyset$  en stel  $A \neq \emptyset$  en  $E \neq \emptyset$ . Kies  $z \in A$  en  $w \in E$ . Verbind  $z$  en  $w$  door een traplijn  $T$  in  $G$ . Deze traplijn is samenhangend, maar zou door  $A$  en  $E$  gesplitst worden, tegenspraak.

Voor de volledigheid ook het bewijs dat een traplijn (of eigenlijk het interval  $[0, 1]$ ) samenhangend is. Maak een continue functie  $g : [0, 1] \rightarrow T$  met  $g(0) = z$  en  $g(1) = w$  zodat als je het interval  $[0, 1]$  in de natuurlijke richting, dus van links naar rechts doorloopt, dat dan  $g(t)$  de traplijn van  $z$  naar  $w$  doorloopt. Laat  $s$  het supremum zijn van  $\{t \in [0, 1] \mid g(t) \in A\}$ . Ga na dat  $g(s) \notin A$  en  $g(s) \notin E$ , een tegenspraak. Dus  $G$  is een gebied.  $\square$

Tot slot van deze sectie nog een resultaat dat we later een aantal keren zullen gebruiken.

**Stelling 1.2.3** (Karakterisering continue geheelwaardige functies op een gebied).  
Als  $G$  een gebied is en  $f : G \rightarrow \mathbb{Z}$  continu is, dan is  $f$  een constante functie.

*Bewijs.* Ga na dat  $f^{-1}(V)$  open is in  $G$  voor elke deelverzameling  $V$  van  $\mathbb{Z}$ . Kies een punt  $a \in G$ . Definieer  $A = f^{-1}(\{f(a)\})$  en  $B = f^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \{f(a)\})$ . Dan zijn zowel  $A$  als  $B$  open. Hun vereniging is  $G$ . Ze zijn disjunct, en omdat  $G$  een gebied is moet  $A$  of  $B$  leeg zijn. Maar  $A$  is niet-leeg want  $a \in A$ . Dus  $B$  is leeg, dus  $G = A$ , dus  $f$  is constant (met waarde  $f(a)$ ).  $\square$

Zie het college *Topologie* voor een algemene context van de betreffende begrippen.

### 1.3 (Stuksgewijs) gladde krommen

Een kromme  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^2$  is een continue afbeelding

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

In gedachten identificeren we een kromme vaak met zijn beeld, bestaande uit de punten  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  waarbij de variabele  $t$  het interval  $[a, b]$  doorloopt. De  $x$ - en de  $y$ -coördinaat van de punten van  $\gamma$  zijn continue functies van  $t$ . We noteren vectoren ook in rijvorm, als dit makkelijker schrijft. We noemen  $\gamma(a) = (x(a), y(a))$  het *beginpunt* en  $\gamma(b) = (x(b), y(b))$  het *eindpunt* van  $\gamma$ . Wanneer begin- en eindpunt van  $\gamma$  samenvallen,  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , heet  $\gamma$  *gesloten*. Als  $\gamma$  injectief is heet de kromme *enkelvoudig* en met een *enkelvoudig gesloten kromme* bedoelen we een kromme  $\gamma$  met  $\gamma(a) = \gamma(b)$  en  $\gamma|_{[a,b]}$  injectief (in feite gaat het hier dus om een injectieve continue afbeelding van de cirkel naar  $\mathbb{R}^2$ ). De figuur ‘acht’ is dus niet enkelvoudig, een cirkel (éénmaal doorlopen) wel.

Wanneer we aan de kromme denken als geïdentificeerd met zijn beeld, noemen we de functie  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$  een *parametrisering* van de kromme. Een parametrisering  $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$  heet een *herparametrisering* van de kromme  $\gamma$  als er een stijgend *homeomorfisme*, dat is een stijgende continue afbeelding met continue inverse,  $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$  bestaat met  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$ . Onder de afbeeldingen  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$  en  $\tilde{\gamma}$  worden de punten van het beeld in dezelfde volgorde doorlopen (maar met een verschillende ‘snelheid’).

Twee krommen die door herparametrisering in elkaar zijn over te voeren noemen we *equivalent*. Equivalentie van krommen is inderdaad een equivalentierelatie op de verzameling krommen. De eigenschappen *enkelvoudig* en *gesloten* blijven behouden onder herparametrisering. Voor de meeste toepassingen, en zeker als we de kromme met zijn beeld willen identificeren, volstaat de equivalentieklasse van de kromme. Equivalente krommen hebben immers dezelfde beeldverzameling in  $\mathbb{R}^2$ . Het omgekeerde is niet het geval: Neem de krommen  $(\cos t, \sin t)$  en  $(\cos 3t, \sin 3t)$ , beide gedefinieerd op  $[0, 2\pi]$ . Het beeld is in beide gevallen de eenheidscirkel, maar de krommen zijn niet equivalent, want de eerste is enkelvoudig en de tweede niet.

Wanneer we  $\gamma$  in plaats van met een stijgend homeomorfisme, met een dalend homeomorfisme samenstellen, zal de nieuwe kromme het beeld van de oude in omgekeerde richting doorlopen. Beginpunt voor de ene is eindpunt voor de andere, en omgekeerd. De verzameling van krommen die uit  $\gamma$  door een homeomorfisme op het parameter-interval kan ontstaan, valt in twee klassen uiteen, de ene bestaat uit equivalente krommen die behoren bij stijgende homeomorfismen, de andere ontstaat uit  $\gamma$  door dalende homeomorfismen. Dit zijn de twee *oriëntaties* van  $\gamma$ .

Voor een kromme  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , is  $\gamma^-$  de kromme  $\gamma^- : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(-t)$ . Deze heeft de andere, zogenaamde *tegengestelde*, oriëntatie.

Via de identificatie  $\mathbb{R}^2 \leftrightarrow \mathbb{C}$  is een kromme in  $\mathbb{R}^2$  te identificeren met een kromme in  $\mathbb{C}$ , door  $(x(t), y(t)) \leftrightarrow x(t) + iy(t)$ .

Een kromme heet *differentieerbaar* als  $\gamma$  differentieerbaar is, en  $C^1$  als  $\gamma$  van klasse  $C^1$  is (i.e. differentieerbaar met continue afgeleide).

Tenslotte zeggen we dat de kromme *glad* is, als  $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$  voor elke waarde van  $t$ . Dat betekent dat de kromme in elk punt  $\gamma(t)$  (tenminste) een raaklijn bezit.

De raaklijn aan  $\gamma$  in het punt  $\gamma(c) = (x(c), y(c))$  heeft de volgende vectorvoorstelling:

$$(x, y) = (x(c), y(c)) + \lambda(x'(c), y'(c)) \text{ met } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Merk nu op dat een gladde kromme  $\gamma$  in een punt van het beeld best meer raaklijnen kan hebben, namelijk precies als  $\gamma(c_1) = \gamma(c_2)$  en de richtingen van  $\gamma'(c_1)$  en  $\gamma'(c_2)$  verschillen.

We kunnen  $\gamma$  ook zien als gladde kromme in het complexe vlak  $\mathbb{C}$  met parametrisering  $t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$  met  $t \in [a, b]$ . Hierin is  $t \mapsto \gamma(t)$  van klasse  $C^1$ ,  $\gamma'(t) \neq 0$  voor alle  $t$  en indien  $\gamma$  enkelvoudig is,  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$  voor alle  $t_1 \neq t_2$ . De raaklijn aan  $\gamma$  door het punt  $\gamma(c)$  is dan uniek en ziet er zó uit:

$$\{z : z = \gamma(c) + \lambda\gamma'(c) \text{ met } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Voor enkelvoudig gesloten krommen  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  en analoog voor  $\mathbb{R}^2$ , zullen we voor gladheid eisen dat naast  $\gamma \in C^1$  en  $\gamma' \neq 0$  ook  $\gamma'(a) = \gamma'(b)$ , want we willen hier geen verschillende raaklijnen in een beeldpunt.

De lengte  $l(\gamma)$  van een  $C^1$  kromme  $\gamma$  is gelijk aan  $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$ , of als de complexe parametrisering gebruikt wordt:  $\int_a^b |\gamma'(t)| dt$ , vgl: "Analyse: van  $\mathbb{R}$  naar  $\mathbb{R}^n$ ".

Je kunt een aantal gladde krommen achter elkaar doorlopen, wanneer het eindpunt van een kromme met het beginpunt van de volgende kromme samenvalt, bijvoorbeeld de drie zijden van een driehoek. Je spreekt dan over een *stuksgewijs gladde kromme*. Een *contour* is een stuksgewijs gladde enkelvoudig gesloten kromme. De figuur 'acht' is dus geen contour, een cirkel (éénmaal doorlopen) wel.

## 1.4 Uniforme convergentie

In het onderstaande herhalen we in complexe setting enige bekende resultaten uit eerdere analysecursussen over uniforme convergentie van rijen en reeksen van functies. De bewijzen kunnen eenvoudig naar de complexe setting gegeneraliseerd worden. Als  $f$  een complexwaardige functie op een verzameling  $A \subset \mathbb{C}$  is dan bedoelen we met  $\|f\|_A$  de waarde  $\|f\|_A = \sup \{|f(z)| \mid z \in A\}$  dus de supremumnorm van  $f$  op  $A$ . Als  $|f|$  niet naar boven begrensd is, dan verstaan we hieronder  $\|f\|_A = \infty$ .

Gegeven nu is een rij complexwaardige functie's  $f_1, f_2, f_3, \dots$  en een functie  $f$  op een verzameling  $A$ . We geven nu enkele definities en resultaten.

De rij  $f_1, f_2, f_3, \dots$  convergeert *puntsgewijs* op  $A$  naar  $f$  betekent:

$$\forall z \in A \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Merk op:  $N$  hangt van  $\epsilon$  en  $z$  af.

## 1 In het complexe vlak

De rij  $f_1, f_2, f_3, \dots$  convergeert *uniform* op  $A$  naar  $f$  betekent:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall z \in A : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Anders gezegd:  $\|f - f_n\|_A \rightarrow 0$  als  $n \rightarrow \infty$ . Merk op:  $N$  hangt niet van  $z$  af!

Natuurlijk geldt: als de rij  $f_1, f_2, f_3, \dots$  uniform op  $A$  convergeert naar  $f$ , dan convergeert zij ook puntsgewijs op  $A$  naar diezelfde functie  $f$ .

We zeggen ook: de rij  $f_1, f_2, f_3, \dots$  convergeert uniform op  $A$  als de rij  $f_1, f_2, f_3, \dots$  uniform op  $A$  convergeert naar een zekere functie  $f$  op  $A$ .

Zonder bewijs vermelden we nog:

$f_1, f_2, f_3, \dots$  convergeert uniform op  $A$

$$\iff$$

$f_1, f_2, f_3, \dots$  is uniform Cauchy op  $A$ , dat wil zeggen:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, m > N : \|f_n - f_m\|_A < \epsilon.$$

We zeggen dat de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  uniform convergeert op de verzameling  $A$  als de rij  $s_1, s_2, s_3, \dots$  van de partiële sommen van deze reeks van functies uniform convergeert op  $A$ .

Een belangrijk criterium voor uniforme convergentie van functiereeksen is het *criterium van Weierstraß*:

Als er een rij positieve getallen  $(a_n)$  bestaat met

- $|f_n(z)| \leq a_n \forall z \in A \forall n \in \mathbb{N}$ ,
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  is convergent,

dan convergeert  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  uniform op  $A$ . Want (zie je eerste analyse cursus voor de laatste implicatie):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ convergeert uniform op } A \\ \iff \\ \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > m > N : \|f_{m+1} + \dots + f_n\|_A < \epsilon \\ \iff \\ \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > m > N : a_{m+1} + \dots + a_n < \epsilon \\ \iff \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ is convergent.} \end{aligned}$$

Ook de volgende stelling zullen we hier niet bewijzen.

**Stelling 1.4.1** (Erfelijkheid continuïteit). *Als de rij  $f_1, f_2, f_3, \dots$  uniform op  $A$  naar  $f$  convergeert en de functies  $f_1, f_2, f_3, \dots$  continu zijn op  $A$ , dan is  $f$  ook continu op  $A$ .*

**Voorbeeld 1.4.2.**  $A = [0, r]$  met zekere vaste  $r$  met  $0 < r \leq 1$  en  $f_n(z) = z^n$  voor  $n = 1, 2, 3, \dots$ . We berekenen eerst de puntsgewijze limiet. Deze is gelijk aan

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq z < 1; \\ 1 & \text{als } z = 1. \end{cases}$$

Als  $0 < r < 1$ , dan  $\|f_n - f\|_A = r^n \rightarrow 0$  als  $n \rightarrow \infty$ . Dus de convergentie is uniform op  $A$ .

Als  $r = 1$ , dan is de limietfunctie  $f$  niet continu op  $A$ , terwijl de functies  $f_1, f_2, f_3, \dots$  dat wel zijn. De convergentie kan dus niet uniform zijn op  $A$ .

## 1.5 Machtreksen

**Definitie 1.5.1.** Een *machtrees* om  $a$  is een functiereeks van de vorm

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n.$$

Als de machtrees in een punt  $b$  convergent is, dan is zij (zelfs absoluut) convergent voor alle  $z$  met  $|z - a| < |b - a|$ . Immers, omdat  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(b - a)^n$  convergent is, geldt  $c_n(b - a)^n \rightarrow 0$  als  $n \rightarrow \infty$ . Er is dus een  $M$  met  $|c_n(b - a)^n| \leq M$  voor alle  $n$ . En dus

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z - a)^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(b - a)^n| \cdot \left| \frac{z - a}{b - a} \right|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{z - a}{b - a} \right|^n, \quad (1.2)$$

en dat is een convergente meetkundige reeks.

Dit feit gebruikend volgt dat er een  $R$  is zo, dat de machtrees convergent is voor  $|z - a| < R$  en divergent als  $|z - a| > R$ . Aanwijzing: bekijk

$$\sup \left\{ |z - a| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n \text{ is convergent} \right\}.$$

We noemen  $B(a, R)$  de convergentieschijf van de machtrees, en  $R$  de *convergentiestraal*. In punten van de cirkel  $C(a, R)$  kan de reeks zowel convergent als divergent zijn. Opmerking: het kan gebeuren dat  $R = 0$  (een weinig interessante situatie) of  $R = \infty$ .

**Gevolg 1.5.2.** *Ga na dat uit (1.2) volgt dat de machtrees uniform convergent is op verzamelingen van de vorm  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$  met  $0 < r < R$ , dus op compacte deelverzamelingen van de convergentieschijf.*

De volgende formules om de convergentiestraal uit te rekenen kennen we uit eerdere analysecursussen:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

## 1 In het complexe vlak

waarbij je  $\infty$  moet lezen voor  $\frac{1}{0}$  en 0 voor  $\frac{1}{\infty}$ . Let wel, als de rij van wortels niet naar boven begrensd is, dan is de lim sup per afspraak  $\infty$ . Zo niet, dan bestaat de lim sup (vgl. Analyse van op de lijn!) dus convergent. Als de rij  $\sqrt[1]{|c_1|}, \sqrt[2]{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, \dots$  convergent is, dan is de lim sup gelijk aan de limiet van de rij.

Een andere formule is

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|,$$

mits deze limiet bestaat.

## 1.6 Machtreksen en definities van belangrijke functies

We brengen de meetkundige reeks in herinnering en definiëren de complexe  $e$ -macht door zijn machtreks, en ook de complexe cosinus en sinus. We geven ook twee belangrijke eigenschappen van deze functies.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots \text{ met } R = 1; \\ e^z &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \text{ met } R = \infty; \\ \cos z &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \text{ met } R = \infty; \\ \sin z &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \text{ met } R = \infty; \end{aligned}$$

Voor  $z \in \mathbb{C}$  geldt:  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ . Voor  $z \in \mathbb{R}$  zijn  $e^z$ ,  $\cos z$  en  $\sin z$  dezelfde functies als vroeger.

Als  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  en  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  absoluut convergente reeksen zijn met som  $A$ , respectievelijk  $B$ , dan is de reeks  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  gegeven door  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ , het zogeheten *Cauchyproduct* van de reeksen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  en  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ , ook convergent met som  $C = AB$  (geen bewijs, zie Opgave 1.5).

**Voorbeeld 1.6.1.** Als toepassing van het Cauchyproduct tonen we een belangrijke rekenregel van de complexe  $e$ -macht aan:  $e^z e^w = e^{z+w}$  voor  $z, w \in \mathbb{C}$ . We herleiden:

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}.$$

De derde gelijkheid volgt uit het binomium van Newton.

**Gevolg 1.6.2.** Vanwege

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b), \quad (z = a + ib)$$

geldt

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \text{ en } \arg e^z = \operatorname{Im} z.$$

**Voorbeeld 1.6.3.** Het Cauchyproduct van de machtreeks  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  met zichzelf is de volgende machtreeks met convergentiestraal  $R = 1$ , dus

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = 1 + 2z + 3z^2 + \dots = \frac{1}{(1-z)^2} \text{ met } |z| < 1.$$

## 1.7 Manipuleren van (macht)reeksen

Wat gebeurt er als we een functie of machtreeks in een machtreeks substitueren? Eerst enkele voorbeelden.

**Voorbeeld 1.7.1.** Substitutie van  $1/z$ . Omdat

$$e^w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!},$$

vinden we ook met  $w = 1/z$

$$e^{1/z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{n!}.$$

Er is convergentie voor iedere eindige waarde van  $w = 1/z$  dus als  $z \neq 0$ , en uniforme convergentie op gebieden  $\{|z| \geq M\}$  met  $M > 0$ .

Op dezelfde manier krijgen we uit

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n,$$

met  $w = 1/z$ , dat

$$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 z^n.$$

Deze reeks convergeert als  $|1/z| = |w| < 1$ , dus als  $|z| > 1$ . De convergentie is uniform op gebieden  $\{|z| \geq M\}$  met  $M > 1$ .

1 In het complexe vlak

**Voorbeeld 1.7.2.** We zoeken de machtreeksontwikkeling van  $f(z) = \frac{1}{1-z^2-z^3}$  om 0 en willen de termen tot en met die van  $z^8$  bepalen. We zien  $f$  als de samenstelling van  $z^2 + z^3$  met  $\frac{1}{1-w}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z^2-z^3} &= 1 + (z^2 + z^3) + (z^2 + z^3)^2 + (z^2 + z^3)^3 + (z^2 + z^3)^4 + \dots \\ &= 1 + z^2 + z^3 + z^4 + 2z^5 + (1+1)z^6 + 3z^7 + (3+1)z^8 + \dots \end{aligned}$$

Coëfficiënten tussen haakjes zijn opgebouwd uit bijdragen van verschillende termen uit de eerste regel.

Vraag is of dit altijd mag en kan. De volgende propositie zegt hier iets over. De machtreeksen zijn om 0 gecentreerd, maar de resultaten zijn hetzelfde voor een ander centrum. We schrijven voor  $n > 0$   $f(w) = P(w) + R(w)$ , waar  $P(w) = \sum_{j=0}^n a_j w^j$  een polynoom van graad  $n$  is, en  $R(w) = f(w) - P(w)$ , de rest in de Taylorontwikkeling, waarvan we weten (Stelling van Taylor, Analyse van  $\mathbb{R}$  naar  $\mathbb{R}^n$  dat  $\lim_{w \rightarrow 0} R(w)/w^n = 0$ . Net zo schrijven we  $g(z) = p(z) + r(z)$ , waarbij nu  $g(0) = p(0) = 0$ , dus  $p(z) = \sum_{j=1}^n b_j z^j$ , en  $r(z) = g(z) - p(z)$ , met  $\lim_{z \rightarrow 0} r(z)/z^n = 0$ . Dan geldt:

**Propositie 1.7.3.** *Met de notaties als hierboven geldt*

$$f(g(z)) = P(p(z)) + \rho(z),$$

met  $\lim_{z \rightarrow 0} \rho(z)/z^n = 0$ .

*Bewijs.* Uitschrijven geeft,

$$f(g(z)) = P(p(z) + r(z)) + R(g(z)) = P(p(z)) + r(z)Q(p(z), r(z)) + R(g(z)).$$

Hier is  $Q(z, w)$  een (onbelangrijk) polynoom in  $z$  en  $w$ , bepaald door de eigenschap  $P(z + w) = P(z) + wQ(z, w)$ . Merk op dat

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{r(z)Q(p(z), r(z))}{z^n} = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{R(g(z))}{z^n} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{R(g(z))}{g(z)^n} \frac{g(z)^n}{z^n} = 0.$$

Daarmee is de propositie bewezen. □

Merk op dat  $P(p(z)) = \sum_{j=0}^n a_j (p(z))^j$  in het algemeen ook termen van graad groter dan  $n$  bevat, die hoeft je natuurlijk niet expliciet uit te rekenen als je alleen de Taylorontwikkeling tot op orde  $n$  wilt uitrekenen. Ze kunnen in de restterm “geabsorbeerd” worden. Vooruitkijkend naar de volgende twee secties merken we op dat we *niet* bewezen hebben is dat de samenstelling van twee analytische functies analytisch is. Dat volgt eenvoudig zo gauw we in een later hoofdstuk gezien hebben dat “complex-differentieerbaar” impliceert “analytisch”. We weten nu *wel* hoe we de coëfficiënten van de machtreeks van een samengestelde functie kunnen uitrekenen, onder aanname van analyticiteit.

Het vinden van de coëfficiënten van het product van machtreeksen gaat analoog (of merk op dat  $2fg = (f + g)^2 - f^2 - g^2$  zodat het een combinatie is van optellen en samenstellen met  $w \mapsto w^2$ ).



**Voorbeeld 1.7.4.** Bepaal de eerste 5 termen in de Taylorontwikkeling van de tangens.

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{\cos z} &= \frac{\sin z}{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + r(z)} \\ &= \sin(z) \left( 1 + \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4!} - r(z) \right) + \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4!} - r(z) \right)^2 \right) + \dots \\ &= \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + R(z) \right) \left( 1 + \frac{z^2}{2} + \left( -\frac{1}{4!} + \frac{1}{4} \right) z^4 + \rho(z) \right) \\ &= z + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} \right) z^3 + \left( -\frac{1}{4!} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3!} \frac{1}{2} + \frac{1}{5!} \right) z^5 + \tilde{R}(z). \end{aligned}$$

De coëfficiënten zijn met opzet niet uitgewerkt, zodat je kunt achterhalen hoe ze tot stand zijn gekomen. In de tweede stap gebruikten we de ontwikkeling

$$\frac{1}{1 - g(z)} = 1 + g(z) + g(z)^2 + \dots,$$

voor  $|g(z)| < 1$ . De functies  $R, r, \rho$  en  $\tilde{R}$  zijn resttermen met de eigenschap dat zij begrensd zijn door een constante maal  $|z|^6$  voor  $|z| < 1$ .

## 1.8 Analytische functies

Laat  $f$  gedefinieerd zijn op een open verzameling  $O$  (meestal is dat een gebied), dan heet  $f$  *analytisch* op  $O$  als er bij ieder punt  $a \in O$  een  $r_a > 0$  bestaat zo, dat  $f$  op  $B(a, r_a)$  de somfunctie is van een machtreeks om het punt  $a$ . Je zegt wel dat  $f$  in een machtreeks om  $a$  te ontwikkelen is.

Voorbeelden van analytische functies zijn veeltermen. De betreffende machtreeksen breken zelfs af. Een ander voorbeeld is  $e^z$  op  $G = \mathbb{C}$ . Het is niet genoeg om te zeggen dat  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  voor elke  $z \in \mathbb{C}$ . Dat zegt alleen dat  $e^z$  om 0 te ontwikkelen is in een machtreeks die naar  $e^z$  convergeert.

Laat  $a \in \mathbb{C}$ . Dan geldt voor alle  $z \in \mathbb{C}$  dat

$$e^z = e^{a+(z-a)} = e^a e^{z-a} = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!} (z-a)^n,$$

en dus is  $e^z$  om elk punt  $a$  in een machtreeks te ontwikkelen.

## 1.9 Complex-differentieerbare functies

Laat  $f$  gedefinieerd zijn op een open verzameling  $O$  (meestal is dat weer een gebied) en laat  $a \in O$ , dan heet  $f$  *complex-differentieerbaar* in  $a$  als

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

## 1 In het complexe vlak

bestaat; de waarde van de limiet heet dan de *afgeleide* van  $f$  in het punt  $a$ , notatie  $f'(a)$ .

De functie heet complex-differentieerbaar of *holomorf* op  $O$  als  $f$  complex-differentieerbaar is in elk punt van  $O$ .

De definitie lijkt sprekend op die van gewone differentieerbaarheid in  $\mathbb{R}$ . Het grote verschil zit hem in het feit dat  $h$  in  $\mathbb{C}$  naar 0 gaat. Dit maakt het bestaan van de limiet veel zeldzamer, en veel gladde functies zullen niet complex differentieerbaar zijn. Aan de andere kant, veel eigenschappen betreffende complex-differentieerbaarheid worden bewezen zoals in de vroegere vertrouwde situatie. We noemen er een paar.

- $f$  complex-differentieerbaar in  $a \implies f$  continu in  $a$ .
- Als  $f$  en  $g$  complex-differentieerbaar zijn in  $a$  dan ook  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $\alpha f$ ,  $f \cdot g$ ,  $f/g$  met de gebruikelijke rekenregels.
- Zij  $g : O_1 \rightarrow O_2$  en  $f : O_2 \rightarrow \mathbb{C}$ . Als  $g$  complex-differentieerbaar is in  $a$  en  $f$  complex-differentieerbaar is in  $b = g(a)$ , dan is  $f \circ g$  complex-differentieerbaar in  $a$  en  $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$  (de kettingregel).

**Voorbeeld 1.9.1.** Een constante functie  $f$  is in elk punt  $a$  complex-differentieerbaar met  $f'(a) = 0$ .

Omgekeerd, als  $f$  complex-differentieerbaar is op een gebied  $G$  en  $f'$  is de nul-functie, dan is  $f$  een constante functie. Dat volgt door aan te tonen dat  $f$  constant is op alle horizontale en verticale lijnstukken in  $G$  (gebruik de karakterisering van gebieden). We zullen zelfs laten zien dat  $f$  constant is op elk willekeurig lijnstuk  $[a, b]$  in  $G$  (met  $a$  en  $b$  in  $\mathbb{C}$ ). Definieer de functie  $g$  op  $[0, 1]$  door  $g(t) = f(a + t(b - a))$  dan geldt (ga dat na!) dat  $g'(t) = f'(a + t(b - a)) \cdot (b - a) = 0 \cdot (b - a) = 0$ , dus  $g$  is constant op  $[0, 1]$ , ofwel  $f$  is constant op  $[a, b]$ .

**Voorbeeld 1.9.2.** De functie  $f(z) = z$  is in elk punt  $a$  complex-differentieerbaar met  $f'(a) = 1$ .

**Voorbeeld 1.9.3.** Als gevolg van de rekenregels boven zijn nu alle veeltermen complex-differentieerbaar op  $\mathbb{C}$  en alle *rationale* functies, dat zijn quotiënten van veeltermen, zijn complex-differentieerbaar buiten de nulpunten van de noemer.

**Voorbeeld 1.9.4.** De functie  $f(z) = \bar{z}$  is in geen enkel punt  $a$  complex-differentieerbaar! Kijk maar, de limiet voor  $h \rightarrow 0$  van

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\overline{a+h} - \bar{a}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

bestaat niet, want als je via de reële as naar 0 loopt dan komt er 1 uit deze limiet, en als je via de imaginaire as loopt dan krijg je  $-1$ .

**Stelling 1.9.5** (Differentiatiestelling). *Als  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  convergent is op  $B(a, r)$ , dan is de somfunctie*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

holomorfe op  $B(a, r)$ . En op  $B(a, r)$  geldt dat

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1} = c_1 + 2c_2(z-a) + 3c_3(z-a)^2 + \dots$$

*Bewijs.* We beginnen met wat opmerkingen. De convergentiestraal van de machtreeks  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$  is gelijk aan die van  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^n$  (het scheelt immers maar een extra factor  $z-a$ ), dus gelijk aan die van  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n$  omdat in de uitdrukking voor de convergentiestraal geldt:

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n c_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

want  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

Stel je nu voor dat de stelling al bewezen is voor  $a = 0$ . Er geldt dus: als  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  convergent is op  $B(0, r)$ , dan is de somfunctie  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  holomorfe op  $B(0, r)$ . En op  $B(0, r)$  geldt dat  $g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ .

Bekijk nu  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ . Deze reeks is convergent op  $B(a, r)$ . Laat de somfunctie gegeven zijn door  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$  op  $B(a, r)$ . Dan is  $f(z) = g(z-a)$  en dus is  $f$  (als samenstelling van holomorfe functies) holomorfe op  $B(a, r)$ . Met de kettingregel volgt  $f'(z) = g'(z-a) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$  op  $B(a, r)$ .

Het is dus voldoende aan te tonen dat de stelling geldt voor reeksen met de oorsprong als centrum. Neem een vaste  $z \in B(0, r)$  in gedachten. Kies hierbij een getal  $\rho$  met  $|z| < \rho < r$  en laat  $0 < |h| < \rho - |z|$ , dan is  $|z| + |h| < \rho$ , in het bijzonder ligt  $z+h$  in  $B(0, r)$ . Er geldt voor  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right| &= \left| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} z^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |h|^{k-1} |z|^{n-k} = \frac{(|z| + |h|)^n - |z|^n}{|h|} - n |z|^{n-1} \\ &\leq n(|z| + |h|)^{n-1} \leq n \rho^{n-1}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

De voorlaatste ongelijkheid volgt uit de middelwaardstelling voor reële functies, gecombineerd met de monotonie van  $t \mapsto nt^{n-1}$  op de positieve reële as.

Nu zullen we bewijzen dat

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left( \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right) \right|$$

willekeurig klein is als  $h$  voldoende dicht bij 0 ligt. Laat  $\epsilon > 0$ .

Kies vervolgens  $N$  zo groot, dat  $\sum_{n=N+1}^{\infty} n |c_n| \rho^{n-1} < \epsilon$ . Zo'n  $N$  bestaat omdat

## 1 In het complexe vlak

$\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|\rho^{n-1}$  convergent is, immers de machtreeks  $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$  is convergent op  $B(0, r)$  dus absoluut convergent in  $\rho$ .

Kies vervolgens een  $\delta > 0$  zo, dat geldt:

$$|h| < \delta \implies \left| \sum_{n=2}^N c_n \left( \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right) \right| < \epsilon$$

Dit kan omdat de veelterm  $\sum_{n=2}^N c_n \left( \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right)$  (met  $h$  als veranderlijke) continu is in 0 en in 0 de waarde 0 heeft.

Nu is

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left( \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right) \right| \\ & \leq \left| \sum_{n=2}^N c_n \left( \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \left( \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right) \right| \\ & \leq \left| \sum_{n=2}^N c_n \left( \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right) \right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2n|c_n|\rho^{n-1} \\ & < \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon \text{ als } 0 < |h| < \min \{ \delta, \rho - |z| \}. \quad \square \end{aligned}$$

Je kunt deze differentiatiestelling herhaald toepassen en vindt dan ook nog  $f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)nc_n(z-a)^{n-2} = 1 \cdot 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(z-a) + 3 \cdot 4c_4(z-a)^2 \cdots$  op  $B(a, r)$ , etcetera. Door in deze reeksontwikkelingen steeds  $z = a$  in te vullen zie je dat geldt:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Later zullen we holomorfe functies in een omgeving van een punt  $a$  proberen te schrijven als de somfunctie van een convergente machtreeks om het punt  $a$ . Hierboven staat dat er maar één zo'n kandidaatmachtreeks is, namelijk de reeks  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$ . We spreken over de *Taylorreeks* van  $f$  om  $a$ , of de *Taylorontwikkeling* van  $f$  om  $a$ .

**Gevolg 1.9.6.** *De functie  $e^z$  is gedefinieerd middels een machtreeks en is dus holomorfe op  $\mathbb{C}$ . Omdat  $\cos z$  en  $\sin z$  uitgedrukt kunnen worden in de complexe  $e$ -macht zijn ook deze functies holomorfe op  $\mathbb{C}$ . Er geldt dat de afgeleide van  $e^z$  gelijk aan  $e^z$  is, die van  $\sin z$  is  $\cos z$  en die van  $\cos z$  is  $-\sin z$ .*

**Gevolg 1.9.7** (analyticiteit impliceert holomorfie). *Als  $f$  analytisch is op een gebied  $G$ , dan is  $f$  holomorfe op  $G$ .*

Met gebruik van de differentiatiestelling en de manipulatietechnieken is het mogelijk van een hoop reeksen de gesloten vorm te bepalen. Een (gecompliceerd) voorbeeld:

**Voorbeeld 1.9.8.** Schrijf de volgende oneindige som in gesloten vorm:

$$\frac{1}{3!} + \frac{z}{7!} + \frac{z^2}{11!} + \frac{z^3}{15!} + \dots$$

Deze reeks lijkt verwant aan de sinus, maar we missen de helft van de termen, die van 5!, 9!, en de tekens zijn ook niet goed. Het is nu handig om in het hoofd te hebben hoe de sinus, cosinus, en ook de sinus hyperbolicus (i.e.  $\frac{e^z - e^{-z}}{2}$ ) of cosinus hyperbolicus (i.e.  $\frac{e^z + e^{-z}}{2}$ ) uit de  $e$ -macht ontstaan en wat het effect is op de machtreks. We doen de sinus voor

$$2i \sin z = e^{iz} - e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

De termen met even exponenten vallen weg.

Iets dergelijks moeten we nog eens bereiken voor de gegeven reeks. Enig experimenteren leert ons

$$i \sin(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Optellen bij de sinusreeks geeft

$$\sin(z) + i \sin(iz) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3+4n}}{(3+4n)!}.$$

We delen door  $2z^3$  en stellen daarna  $z^4 = w$ . We vinden

$$\frac{1}{3!} + \frac{w}{7!} + \frac{w^2}{11!} + \frac{w^3}{15!} \dots = - \frac{\sin(w^{1/4}) + i \sin(i(w^{1/4}))}{2w^{(3/4)}}.$$

Blijkbaar maakt het niet uit welke waarde van de wortel je kiest!

Zonder commentaar nog een voorbeeld.

**Voorbeeld 1.9.9.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = g(z).$$

$$g(z) = z \left( \sum_{n=0}^{\infty} n z^n \right)' = z \left( z \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \right)' = z \left( \frac{z}{(1-z)^2} \right)' = \frac{z^2 + z}{(1-z)^3}.$$

## Opgaven

**Opgave 1.1.** Bepaal een parametervoorstelling voor het interval  $[a, b]$  met  $a, b \in \mathbb{C}$ .

**Opgave 1.2.** Bepaal een parametervoorstelling voor de cirkel  $C(a, r)$  met  $a \in \mathbb{C}$  en  $r > 0$ .

**Opgave 1.3.** Los op:

1.  $z^3 = -8i$
2.  $z^4 = -1$
3.  $\sin z = \frac{5}{3}$

**Opgave 1.4.** Ontbind de veelterm  $x^4 + 1$  over  $\mathbb{R}$ .

**Opgave 1.5.** Bewijs dat het Cauchyproduct van twee absoluut convergente reeksen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  en  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  met respectievelijke som  $A$  en  $B$ , ook convergent is, en wel met som  $AB$ .

**Opgave 1.6.** In de theorie is aangetoond dat  $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$  voor  $|z| < 1$  door gebruik van een Cauchyproduct. Toon dit ook op een andere manier aan.

**Opgave 1.7.** Laat zien dat  $\sum_{n=0}^{\infty} (1-|z|)z^n$  convergeert op  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ . Bepaal ook de somfunctie.

Op welke van de schijven  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$  met  $r \leq 1$  is de convergentie uniform?

**Opgave 1.8.** Laat zien dat de functiereeks  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{inz}$  uniform convergent is op het halfvlak  $\{\operatorname{Im} z \geq b\}$  waarin  $b$  een positief reëel getal is. Bepaal ook de somfunctie van deze reeks.

**Opgave 1.9.** Laat zien dat  $\operatorname{Re} z$  in geen enkel punt complex-differentieerbaar is. Onderzoek in welke punten  $|z|^2$  complex-differentieerbaar is.

**Opgave 1.10.** Zij  $f$  holomorfe op een gebied  $G$ . Zij  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \in G\}$ . Bewijs dat  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  holomorfe is op  $H$ .

**Opgave 1.11.** Laat zien dat  $\sin z$  en  $\cos z$  analytisch zijn op  $\mathbb{C}$ .

**Opgave 1.12.** Laat zien dat  $\frac{1}{z-1}$  analytisch is op  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

## Tentamenopgaven

**Opgave 1.13.** In welke punten is de functie

$$8x^2y^2 - 4y^2 + i(2xy^3 - yx^3 + 4xy)$$

complex differentieerbaar?

**Opgave 1.14.** Laat zien dat

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-z)^2}$$

uniform op compacte verzamelingen in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  convergeert, en daar een continue functie voorstelt.

**Opgave 1.15.** Bewijs dat de functie  $\cot(\pi z) (= \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)})$  uniform begrensd is op de zijden van vierkanten met hoekpunten  $\pm(N + 1/2) \pm i(N + 1/2)$ ,  $N \in \mathbb{N}$ .

**Opgave 1.16.** Beschouw de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nz}{e^n}.$$

(i) Bewijs dat de reeks uniform convergeert op verzamelingen van de vorm

$$\{z = x + iy \mid |y| < 1 - \delta\},$$

met  $\delta > 0$ .

(ii) Bepaal de somfunctie op  $\{z = x + iy : |y| < 1\}$ .

**Opgave 1.17.** Beschouw de reeks

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2^n z^{1+n}}{(2n)!} + \sum_{n < 0} \frac{(-1)^n z^{3n}}{(n-1)}.$$

Bepaal van deze reeks het convergentiegebied en de somfunctie.

**Opgave 1.18.** Beschouw de volgende reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(2n)!}.$$

Bepaal het convergentiegebied en de somfunctie van deze reeks.

**Opgave 1.19.** Gegeven is de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{-n}}{(2n+1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}.$$

Bepaal het convergentiegebied en de somfunctie van deze reeks.





## 2 Het uitgebreide complexe vlak

We breiden het complexe vlak  $\mathbb{C}$  uit tot  $\mathbb{C}^*$  door een punt ‘ $\infty$ ’ toe te voegen. Vervolgens definiëren we een topologie op  $\mathbb{C}^*$  en kijken we naar continue afbeeldingen en homeomorfismen. We zien dat de translatie, dilatatie, rotatie en inversie homeomorfismen zijn.

Daarna bekijken we *gebroken lineaire transformaties*, afbeeldingen van de vorm

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

met  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  en  $ad - bc \neq 0$ . Deze afbeeldingen kunnen worden gezien als combinaties van translaties, dilataties, rotaties en inversies. Een gebroken lineaire transformatie beeldt cirkels af op cirkels, waar cirkels ook een oneindige straal mogen hebben.

Tenslotte zien we dat het uitgebreide complexe vlak homeomorf is met een boloppervlak. Deze constructie versterkt ons inzicht in waar het punt  $\infty$  zich bevindt. We noemen de bol die bij deze constructie hoort de *Riemannsfeer*.

### 2.1 Uitbreiding van het complexe vlak

Zoals we zullen zien, is het nuttig het complexe vlak  $\mathbb{C}$  te vergroten door er één punt aan toe te voegen, het punt  $\infty$ .

**Definitie 2.1.1.** Het *uitgebreide complexe vlak* is de verzameling

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Voor sommige punten  $z \in \mathbb{C}$  kunnen we betekenis geven aan optelling en vermenigvuldiging met en deling door  $\infty$ :

$$\begin{aligned}\infty + z &= \infty, \\ \infty \cdot z &= \infty \quad (\text{als } z \neq 0), \\ \frac{z}{\infty} &= 0, \\ \frac{z}{0} &= \infty \quad (\text{als } z \neq 0).\end{aligned}$$

Merk op dat  $\mathbb{C}^*$  hiermee *geen* lichaam wordt. We brengen een topologische structuur aan in  $\mathbb{C}^*$  door te zeggen welke deelverzamelingen open zijn.

**Definitie 2.1.2.** De *open deelverzamelingen van  $\mathbb{C}^*$*  zijn:

## 2 Het uitgebreide complexe vlak

1. de open deelverzamelingen van  $\mathbb{C}$ ;
2. de deelverzamelingen van  $\mathbb{C}^*$  van de vorm

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\} \cup \{\infty\} \cup O,$$

met  $M$  een positief reëel getal en  $O$  een open verzameling in  $\mathbb{C}$ .

De zo verkregen topologische ruimte  $\mathbb{C}^*$  is *compact*, vgl. Opgave 2.1.

Laat  $X$  en  $Y$  twee topologische ruimten zijn en  $f : X \rightarrow Y$  een afbeelding. We herinneren ons dat  $f$  continu is in een punt  $x \in X$  als voor elke open omgeving  $U$  van  $f(x)$  er een open omgeving  $V$  van  $x$  is zo, dat  $V \subseteq f^{-1}(U)$  en dat  $f$  continu op  $X$  is, als  $f$  continu is in elk punt van  $X$ . Als  $f$  continu en bijectief is en de inverse  $f^{-1}$  is ook continu, dan heet  $f$  een *homeomorfisme*.

**Stelling 2.1.3.** *De onderstaande functies zijn continu op  $\mathbb{C}^*$  en zelfs homeomorfsmen:*

$$\begin{array}{ll} z \mapsto z + a & \text{translatie over } a \in \mathbb{C}; \\ z \mapsto tz & \text{dilatatie (vermenigvuldiging) met } t \in \mathbb{R}, t > 0; \\ z \mapsto \alpha z & \text{rotatie over } \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1; \\ z \mapsto \frac{1}{z} & \text{inversie.} \end{array}$$

*Bewijs voor  $z \mapsto \frac{1}{z}$ .* Er zijn twee moeilijke punten,  $\infty$  en  $0$ . Laat  $h(z) = \frac{1}{z}$  gedefinieerd op  $\mathbb{C}^*$ . Voor elke  $\epsilon > 0$  geldt

$$z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| > \epsilon^{-1}\} \cup \{\infty\} \implies h(z) \in B(0, \epsilon).$$

Dus  $h(z)$  is continu in  $\infty$ . Voor continuïteit in  $0$  kiezen we een omgeving van  $h(0) = \infty$ . Deze omgeving bevat een verzameling

$$U_\infty = \{z \in \mathbb{C} : |z| > M\} \cup \{\infty\}.$$

Kies  $\delta = 1/M$ . Als  $z \in B(0, \delta)$  zal  $h(z) \in U_\infty$ . □

In het algemeen kan men continuïteit in het punt  $\infty$  van een willekeurige functie  $f$  die gedefinieerd is op een omgeving van  $\infty$ , vertalen in continuïteit in het punt  $0$  van de functie

$$g(z) = \begin{cases} f(\frac{1}{z}) & \text{als } z \neq 0; \\ f(\infty) & \text{als } z = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Inderdaad, zij weer  $h(z) = 1/z$  op  $\mathbb{C}^*$ . Dan is  $f \circ h = g$  en  $g \circ h = f$ . Omdat  $h$  continu is, is  $f$  continu dan en slechts dan als  $g$  continu is.

**Voorbeeld 2.1.4.** Bekijk de functie

$$f(z) = \frac{z}{z^3 + 1}$$

met  $f(\infty) = 0$ . De bijbehorende functie  $g$  gedefinieerd volgens (2.1) voldoet aan

$$g(z) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1/z}{(1/z)^3+1} = \frac{z^2}{1+z^3} & \text{als } z \neq 0; \\ f(\infty) = 0 & \text{als } z = 0. \end{cases}$$

Er geldt  $g(z) = \frac{z^2}{1+z^3}$  voor alle  $z$  nabij het punt 0. Deze functie is continu in 0 dus  $f$  is continu in  $\infty$ .

Op analoge manier behandelen we continuïteit van een functie  $f$  naar  $\mathbb{C}^*$ . Stel  $f(z_0) = \infty$ . Stel  $g = 1/f = h \circ f$  en  $1/g = f = h \circ g$ , dan volgt uit de continuïteit van  $h$  dat  $f$  continu is in  $z_0$  dan en slechts dan als  $g$  continu is in  $z_0$ . Omdat  $g(z_0) = 0$  kan je dit laatste op de gewone manier controleren.

## 2.2 Gebroken lineaire transformaties

**Definitie 2.2.1.** Een *gebroken lineaire transformatie* (GLT) is een afbeelding van  $\mathbb{C}^*$  naar  $\mathbb{C}^*$  de vorm

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\},$$

$$f(\infty) = \frac{a}{c}, \quad f(-d/c) = \infty,$$

met  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  en  $ad - bc \neq 0$ .

Voor  $c = 0$  kan een GLT  $f$  geschreven worden als

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Voor  $c \neq 0$  als

$$f(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}}.$$

Een GLT is dus een combinatie van translaties, inversies, dilataties en rotaties. Omdat al deze samenstellende afbeeldingen homeomorfismen van  $\mathbb{C}^*$  zijn, is een willekeurige GLT dat ook.

Een GLT is holomorf in elk punt van  $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$  (als  $c \neq 0$ ). Analoog aan 2.1 *definiëren* we complexe differentieerbaarheid van  $f$  in het punt  $\infty$  via de inversie  $z \rightarrow \frac{1}{z}$  door te eisen dat de functie  $g(z) = f(1/z)$  complex-differentieerbaar is in het punt 0. Complexe differentieerbaarheid in  $-\frac{d}{c}$  wordt gedefinieerd door te eisen dat  $1/f$  complex-differentieerbaar is in  $-\frac{d}{c}$ . De functie uit het voorbeeld boven is holomorf op een omgeving van  $\infty$ . Een algemeen kader vind je in Sectie 2.4.

We gaan nu na wat het beeld is van een (segment van een) cirkel of rechte lijn in het (uitgebreide) complexe vlak onder een GLT en ook wat het beeld is van verwante gebieden als een schijf of halfvlak

## 2 Het uitgebreide complexe vlak

Elke cirkel of lijn in het complexe vlak kan beschreven worden door de vergelijking

$$A|z|^2 + 2 \operatorname{Re} Bz + C = 0$$

waarin  $A, C \in \mathbb{R}$  en  $|B|^2 > AC$ . Immers, als  $A \neq 0$  dan geeft dit

$$\left| z + \frac{\overline{B}}{A} \right|^2 = z\overline{z} + \frac{zB}{A} + \frac{\overline{zB}}{A} + \frac{|B|^2}{A^2} = \frac{|B|^2 - AC}{A^2},$$

een cirkel dus. Als  $A = 0$  en  $B = a + ib \neq 0$ , dan staat er

$$ax - by + \frac{C}{2} = 0,$$

een lijn dus.

Door aan een lijn het punt  $\infty$  toe te voegen ontstaat een lijn in het uitgebreide complexe vlak. Lijnen en cirkels noemen we samen *gegeneraliseerde cirkels*.

De verzameling

$$\left\{ z : A|z|^2 + 2 \operatorname{Re} Bz + C < 0 \right\},$$

waarin  $A, C \in \mathbb{R}$  en  $|B|^2 > AC$ , stelt een halfvlak, schijf of buitengebied van een cirkel voor. Dat gaat net als boven, bijvoorbeeld, als  $A > 0$  staat hier een schijf:

$$\left| z + \frac{\overline{B}}{A} \right|^2 < \frac{|B|^2 - AC}{A^2},$$

als  $A < 0$  het buitengebied van een cirkel, en als  $A = 0$  een halfvlak. We noemen deze gebieden *gegeneraliseerde schijven*.

**Definitie 2.2.2.** Een *gegeneraliseerde cirkel* is een cirkel of een lijn.

**Stelling 2.2.3.** *GLT's voeren (segmenten van) gegeneraliseerde cirkels over in (segmenten van) gegeneraliseerde cirkels en voeren gegeneraliseerde schijven over in gegeneraliseerde schijven.*

*Bewijs.* Onder translaties, dilataties en rotaties gaan lijnen in lijnen over en cirkels in cirkels. De gegeneraliseerde cirkel  $A|z|^2 + 2 \operatorname{Re} Bz + C = 0$  met  $A, C \in \mathbb{R}$  en  $|B|^2 > AC$  gaat onder  $w = \frac{1}{z}$  over in  $A + 2 \operatorname{Re} \overline{B}w + C|w|^2 = 0$ , weer een gegeneraliseerde cirkel. Een open (of gesloten) segment van een gegeneraliseerde cirkel  $C$  gaat over in een open (of gesloten) segment van het beeld van  $C$  omdat open, gesloten en samenhang behouden blijven onder homeomorfisme. Men moet hier wel bedenken dat het punt  $\infty$  meedoet. Het beeld van  $[-1, 1]$  onder  $1/z$  is  $(-\infty, 1] \cup \{\infty\} \cup [1, \infty)$ .

Onder translaties, dilataties en rotaties gaan gegeneraliseerde schijven in zichzelf over, terwijl onder  $w = \frac{1}{z}$  de verzameling  $\{z : A|z|^2 + 2 \operatorname{Re} Bz + C < 0\}$ , met  $A, C \in \mathbb{R}$  en  $|B|^2 > AC$ , overgaat in  $A + 2 \operatorname{Re} \overline{B}w + C|w|^2 > 0$ , weer een gegeneraliseerde schijf. Omdat iedere GLT een samenstelling is van translaties, dilataties, inversies en rotaties, bewijst dit de stelling.  $\square$

**Voorbeeld 2.2.4.** Bekijk de GLT

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}.$$

1. Dit is een GLT met reële coëfficiënten. Omdat gegeneraliseerde cirkels op gegeneraliseerde cirkels worden afgebeeld (Stelling 2.2.3), geldt

$$\mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

bijjectief. Dit is natuurlijk ook rechtstreeks in te zien.

2. In het bijzonder geldt

$$0 \mapsto -1, \quad 1 \mapsto \infty, \quad -1 \mapsto 0,$$

dus gebruikend dat segmenten op segmenten worden afgebeeld geldt  $[-1, 1] \rightarrow [-\infty, 0]$ . Maar dan ook wegens homeomorfisme

$$\mathbb{C}^* \setminus [-1, 1] \text{ bijjectief op } \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

3. Bekijk de eenheidscirkel  $C(0, 1)$ . Er geldt  $f(i) = (i+1)/(i-1) = -i$ . Het beeld van  $C(0, 1)$  is een gegeneraliseerde cirkel, die door  $f(1) = \infty$ ,  $f(-1) = 0$  en  $f(i) = -i$  gaat. Conclusie:  $f(C(0, 1)) = \{\operatorname{Re} z = 0\} \cup \{\infty\}$ .

Hieruit volgt dat  $f$  de schijf  $B(0, 1)$  op één van de gegeneraliseerde schijven  $\{\operatorname{Re} z > 0\}$  of  $\{\operatorname{Re} z < 0\}$  afbeeldt. Maar  $f(0) = -1$ , dus  $f(B(0, 1)) = \{\operatorname{Re} z < 0\}$  en dan ook  $f(\mathbb{C}^* \setminus \overline{B(0, 1)}) = \{\operatorname{Re} z > 0\}$ .

*Opmerking.* Als  $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  een GLT is met  $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, \infty \mapsto \infty$ , dan geldt achtereenvolgens  $c = 0$  (omdat  $\infty \mapsto \infty$ ),  $b = 0$  (omdat  $0 \mapsto 0$ ) en  $a = d$  vanwege  $1 \mapsto 1$ , en dus is  $g(z) = z$  voor alle  $z$ . Hiermee kunnen we de volgende stelling bewijzen.

**Stelling 2.2.5.** *Laat  $z_1, z_2, z_3$  drie verschillende punten zijn in het uitgebreide complexe vlak en  $w_1, w_2, w_3$  ook drie verschillende punten in  $\mathbb{C}^*$ . Dan bestaat er precies één GLT  $f$  met  $f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2, f(z_3) = w_3$  en deze voldoet aan*

$$\frac{f(z) - w_1}{f(z) - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

*Bewijs.* Definieer

$$A(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Dit is een GLT met  $z_1 \mapsto 0, z_2 \mapsto \infty, z_3 \mapsto 1$ . Net zo beeldt

$$B(w) = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$$

## 2 Het uitgebreide complexe vlak

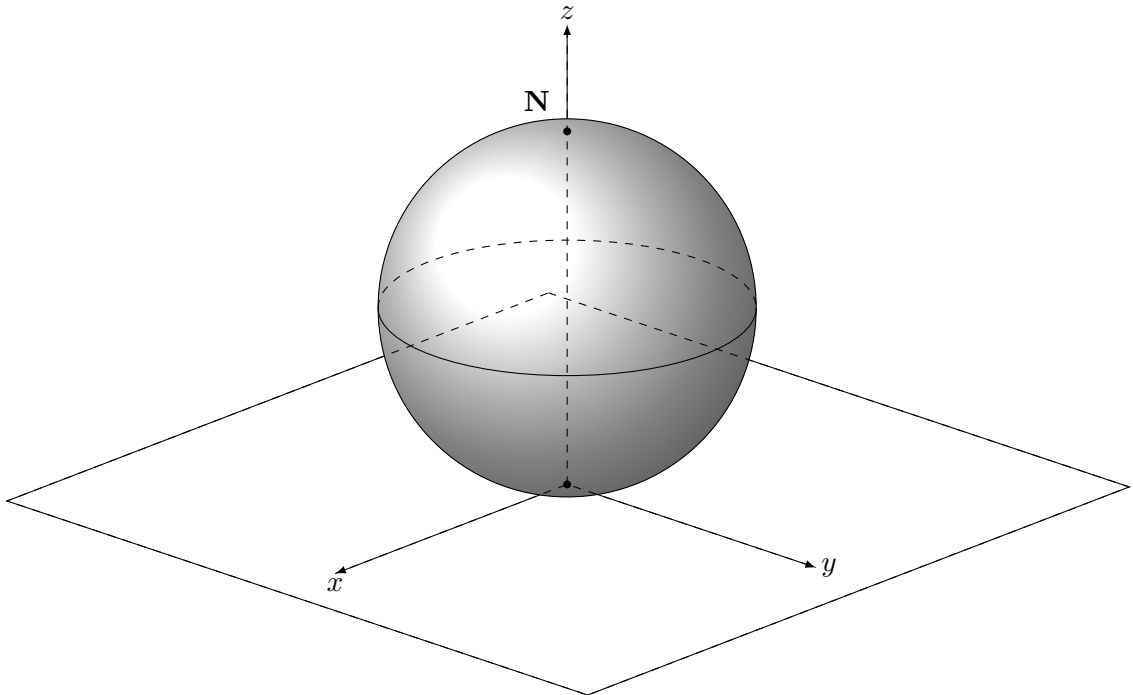
de punten  $w_1, w_2, w_3$  af op respectievelijk  $0, \infty$  en  $1$ . Bekijk  $f(z) = B^{-1} \circ A$ . Dit is een GLT die de punten  $z_1, z_2, z_3$  op respectievelijk  $w_1, w_2, w_3$  afbeeldt. Als nu  $g$  een GLT is met de gevraagde eigenschappen, geldt dat  $(B \circ g \circ A^{-1})(u) = u$  voor  $u = 0, 1, \infty$  en wegens Opmerking 2.2 voor alle  $u$ , oftewel  $g(z) = B^{-1} \circ A(z)$  voor alle  $z$ .  $\square$

*Opmerking.* GLT's zijn voorbeelden van biholomorfe afbeeldingen, holomorfe afbeeldingen met holomorfe inverse. In hoofdstuk 4 zullen we nog een mooie eigenschap van zulke afbeeldingen tegenkomen: zij behouden hoeken tussen krommen. In hoofdstuk 3 (en latere hoofdstukken) zullen we zien hoe je biholomorfie kunt gebruiken om problemen over moeilijke gebieden over te zetten naar soortgelijke, maar eenvoudiger problemen op makkelijker gebieden.

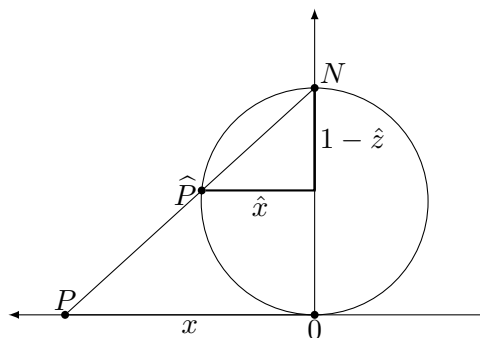
### 2.3 De Riemansfeer

Beschouw het complexe vlak  $\mathbb{C}$  als het  $xy$ -vlak in  $\mathbb{R}^3$  en laat  $S$  een bol met straal  $\frac{1}{2}$  zijn die  $\mathbb{C}$  raakt in de oorsprong (zie figuur 2.1),

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$



Figuur 2.1: De bol  $S$ : een bol met straal  $\frac{1}{2}$  die ' $\mathbb{C}$ ' raakt in de oorsprong.



Figuur 2.2: Dwarsdoorsnede van de Riemannsfeer.

Als je open verzamelingen in  $\mathbb{R}^3$  doorsnijdt met sfeer of vlak, dan definieert dit de open verzamelingen in sfeer of vlak die aldus topologische ruimten worden (met de zogeheten *relatieve topologie*). Je kunt het vlak weer uitbreiden met een extra punt  $\infty$  en zoals we eerder deden open verzamelingen in het uitgebreide vlak toevoegen die dit extra punt bevatten.

Zij  $P = (x, y, 0)$  een punt in het  $\mathbb{C}$ -vlak. Construeer de lijn  $PN$  tussen  $P$  en de noordpool  $N = (0, 0, 1)$ . Deze lijn snijdt  $S$  in een punt,  $\hat{P} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ , zie Figuur 2.3. Laat  $f(x + iy)$  de afbeelding zijn die op deze wijze een punt in  $\mathbb{C}$  op de sfeer afbeeldt.

Met gebruikmaking van wat meetkunde in de driehoek bepaald door  $(x, y, 0)$ , de oorsprong en  $N$ , zie je in dat geldt  $\frac{\hat{x}}{x} = \frac{\hat{y}}{y} = \frac{1-\hat{z}}{1}$  zie Figuur 2.2. We combineren dit met  $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + (\hat{z} - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ . Door  $\hat{x}$  en  $\hat{y}$  te elimineren, vinden we

$$(x^2 + y^2 + 1)\hat{z}^2 - 2(x^2 + y^2 + \frac{1}{2})\hat{z} + \hat{z}^2 - \hat{z} = 0.$$

Dit geeft  $\hat{z} = (x^2 + y^2)/(x^2 + y^2 + 1)$  en vervolgens dat

$$f(x + iy) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Je breidt dit uit met  $f(\infty) = N$ . Deze functie  $f$  is een homeomorfisme tussen het uitgebreide complexe vlak en de zogeheten *Riemannsfeer*.

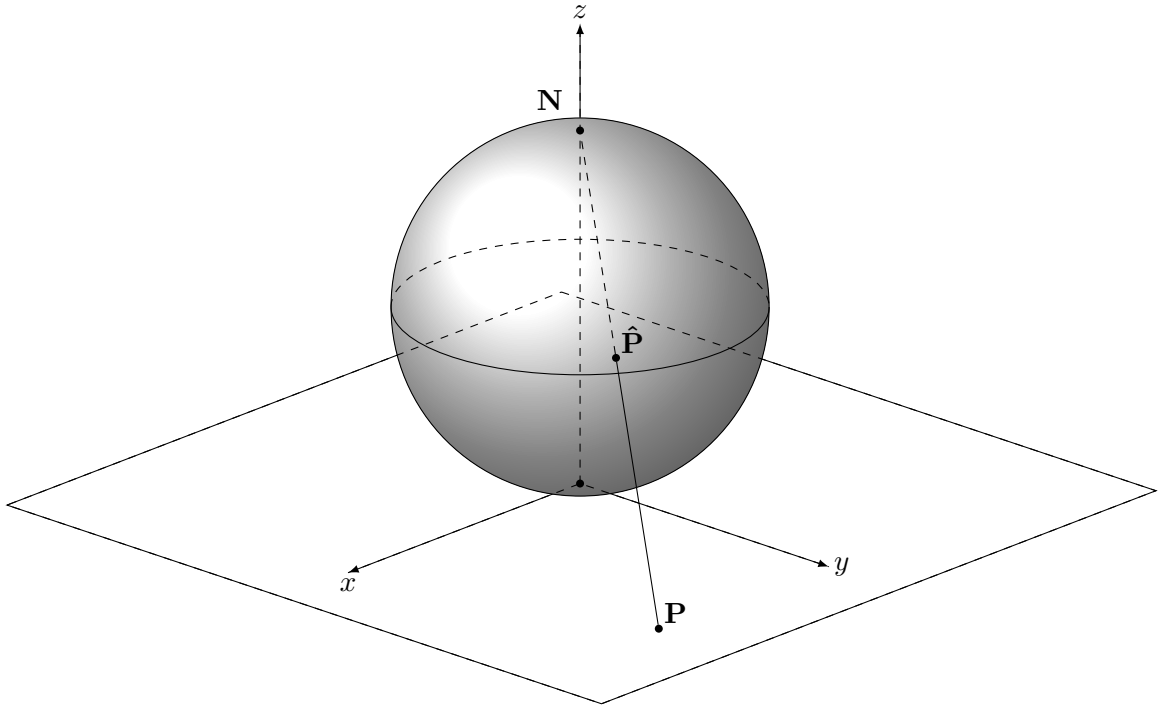
Een cirkel op de sfeer ontstaat door de sfeer te doorsnijden met een vlak  $Ax + By + Cz = D$ . Deze cirkel correspondeert in het uitgebreide complexe vlak met het inverse beeld onder  $f$ , dus met  $Ax + By + C(x^2 + y^2) = D(x^2 + y^2 + 1)$ . Dit is een cirkel in het vlak als  $C \neq D$ , en is een lijn als  $C = D$  (het vlak  $Ax + By + Cz = D$  gaat dan door de noordpool). Cirkels op de sfeer corresponderen aldus met gegeneraliseerde cirkels in het uitgebreide complexe vlak.

## 2.4 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

Leg een equivalentierelatie op  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  door

$$(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2) \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ met } (z_1, z_2) = \lambda(w_1, w_2).$$

## 2 Het uitgebreide complexe vlak



Figuur 2.3: Projectie van  $\mathbb{C}$  op de Riemannsfeer. Het punt  $P = x + iy$  wordt afgebeeld op  $\hat{P}$ , het snijpunt van de lijn  $NP$  met de sfeer.

Merk op dat  $\lambda \neq 0$ . Twee punten in  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  zijn dus equivalent als ze in dezelfde complex ééndimensionale deelruimte van  $\mathbb{C}^2$  zitten. We noteren de equivalentieclassen met  $[z_1, z_2]$  en zetten

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[z_1, z_2] : (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\}.$$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  heet de complex projectieve lijn. Merk de analogie met reële projectieve ruimten op. In  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  onderscheiden we twee natuurlijke zogenaamde *kaarten*  $U_1$  en  $U_2$ , dat wil zeggen, deelverzamelingen van  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  die homeomorf zijn met een (open deel van)  $\mathbb{C}$ . We definiëren

$$U_1 = \{[z_1, z_2] : z_2 \neq 0\} = \{[z, 1] : z \in \mathbb{C}\}, \quad (2.2)$$

$$U_2 = \{[z_1, z_2] : z_1 \neq 0\} = \{[1, z] : z \in \mathbb{C}\}. \quad (2.3)$$

Merk op dat  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus U_1$  bestaat uit het punt  $[1, 0]$  terwijl  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus U_2$  bestaat uit het punt  $[0, 1]$ . De afbeeldingen

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_1([z_1, z_2]) = \frac{z_1}{z_2}, \quad (2.4)$$

$$\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_2([z_1, z_2]) = \frac{z_2}{z_1} \quad (2.5)$$



zijn bijectief en  $\varphi_j(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Verder is

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \varphi_2[z, 1] = \frac{1}{z} \quad \text{op } \varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Iets soortgelijks geldt voor  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ . We identificeren  $\mathbb{C}$  met  $U_1$  via  $\varphi_1$ , dus  $z \leftrightarrow [z, 1]$ ;  $\infty$  correspondeert dan met  $[1, 0]$ . Als  $z \rightarrow \infty$  gaat  $[z, 1] = [1, 1/z]$  naar  $[1, 0]$ . We zien dat  $\varphi_1$  voortzet tot een homeomorfisme van  $\mathbb{C}^*$  naar  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .

Het voordeel van deze benadering is dat  $\infty$  geen speciale status meer heeft. Het is een gewoon punt in de kaart  $U_2$ . Een functie  $f$  gedefinieerd op een open stuk  $G \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  is per definitie holomorfe als  $f \circ \varphi_i^{-1}$  holomorfe is op  $G_i = \varphi_i(G \cap U_i)$  ( $i = 1, 2$ ). Ga na dat dit met de eerdere definitie overeenstemt.

Bekijk eens een bijectieve lineaire afbeelding  $A$  van  $\mathbb{C}^2$  op  $\mathbb{C}^2$ . De determinant van de bijbehorende matrix is ongelijk 0, en de verzameling van deze afbeeldingen wordt aangegeven met  $Gl(2, \mathbb{C})$ . Het is duidelijk dat een afbeelding  $A \in Gl(2, \mathbb{C})$  complex ééndimensionale deelruimten van  $\mathbb{C}^2$  in dito deelruimten overvoert. Met andere woorden  $A$  induceert een afbeelding  $[A] : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  door  $[A][z_1, z_2] = [A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}]$ . Ga na dat dit niet van de keuze van de representant van  $[z_1, z_2]$  afhankelijk is.

Wanneer  $A \in Gl(2, \mathbb{C})$  gegeven wordt door een  $2 \times 2$  matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  kunnen we het effect op  $U_1$  uitrekenen. In het geval  $cz + d \neq 0$  krijgen we

$$[A][z, 1] = [A \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}] = [az + b, cz + d] = \left[ \frac{az + b}{cz + d}, 1 \right].$$

Als  $cz + d = 0$  is  $[A][z, 1] = [1, 0]$ . Dit correspondeert met  $\infty$  wanneer we  $U_1$  met  $\mathbb{C}$  identificeren.

## Opgaven

**Opgave 2.1.** Bewijs dat  $\mathbb{C}^*$  compact is.

**Opgave 2.2.** Geef een voorbeeld van een holomorfe bijectie tussen elk paar verzamelingen.

1.  $\{|z| < 1\} \rightarrow \{\operatorname{Re} w > 0\}$
2.  $\{|z| < 1\} \rightarrow \{\operatorname{Im} w < 0\}$
3.  $\{\operatorname{Im} z < 1\} \rightarrow \{|w| < 1\}$
4.  $\{|z| < 1\} \rightarrow \{|w - 1| < 3\}$
5.  $\{\operatorname{Im} z > 0\} \rightarrow \{\operatorname{Re} w > 0\}$

**Opgave 2.3.** Geef een GLT  $f$  met  $f(-2i) = 0$ ,  $f(2) = \infty$  en  $f(0) = -i$ .

## 2 Het uitgebreide complexe vlak

**Opgave 2.4.** Bekijk de functie

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

- (i) Wat gebeurt er onder  $f$  met de reële as, de imaginaire as en de eenheidscirkel?
- (ii) Wat gebeurt er met het bovenhalfvlak, het rechterhalfvlak, de eenheidsschijf, het eerste kwadrant en de halve schijf  $\{\operatorname{Im} z > 0, |z| < 1\}$ ?

## Tentamenopgaven

**Opgave 2.5.** Zij  $|a| < 1$ . Laat zien dat  $\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$  een gebroken lineaire transformatie is die de eenheidsschijf  $D = B(0, 1)$  op zichzelf afbeeldt.

**Opgave 2.6.** Zij  $G = B(1, 1) \setminus \overline{B(1/2, 1/2)}$ . De rand van  $G$  bestaat uit twee cirkelbogen, die elkaar in 0 treffen.

- (i) Bepaal een gebroken lineaire transformatie  $f$  die  $C(1, 1)$  op  $\mathbb{R}$  afbeeldt, zo dat  $f(0) = \infty$ .
- (ii) Beschrijf het beeld van  $G$  en verklaar het antwoord.

**Opgave 2.7.** Bepaal een gebroken lineaire transformatie die het eerste kwadrant

$$\{z = x + iy \mid x, y > 0\}$$

afbeeldt op het gebied

$$G = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}.$$

**Opgave 2.8.** Houd de notatie uit Sectie 2.4. Bepaal de verzameling  $X$  van representanten in  $\mathbb{C}^2$  van de punten in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  die in  $U_1$  gegeven worden door  $\{|z| = 1\}$ ? Laat zien dat  $A \in GL(2, \mathbb{C})$  de verzameling  $X$  invariant laat dan en slechts dan als  ${}^t\bar{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Bepaal vervolgens alle GLT's die  $C(0, 1)$  invariant laten, en alle GLT's die  $B(0, 1)$  invariant laten.

# 3 De Cauchy-Riemann vergelijkingen en conforme afbeeldingen

## 3.1 Complexe differentieerbaarheid en reële differentieerbaarheid

We gaan uit van een functie

$$f(x + iy) = \underbrace{\operatorname{Re} f(x + iy)}_{= u(x,y)} + i \underbrace{\operatorname{Im} f(x + iy)}_{= v(x,y)},$$

dus met  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  correspondeert een vectorwaardige functie  $(u, v) : \tilde{G} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  en omgekeerd. Als  $(u, v)$  een  $C^k$  afbeelding is, dwz., de partiële afgeleiden tot en met orde  $k$  bestaan en zijn continu, dan noemen we  $f$  ook  $C^k$ . Uit de definitie van complex-differentieerbaarheid volgt

**Stelling 3.1.1.** *Als  $f$  complex-differentieerbaar is in  $z_0 = x_0 + iy_0$ , dan zijn  $u$  en  $v$  in  $(x_0, y_0)$  beide partiël differentieerbaar naar  $x$  en naar  $y$  en*

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0).$$

*Bewijs.* Inderdaad,

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(z_0 + h) - u(z_0) + i(v(z_0 + h) - v(z_0))}{h}.$$

Laten we  $h$  over de reële as naar 0 gaan, dan krijgen we de eerste gelijkheid, en gaat  $h$  over de imaginaire as, dan krijgen we de tweede.  $\square$

**Stelling 3.1.2.** *Zij  $G$  een gebied in  $\mathbb{C}$  en  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Equivalent zijn equivalent*

1.  $f$  is complex-differentieerbaar in  $z_0 = x_0 + iy_0$ ;
2.  $f(z_0 + h) = f(z_0) + Ah + o(h)$  voor zekere  $A = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$ ;
- 3.

$$\begin{pmatrix} u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \\ v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)$$

voor zekere  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ;

### 3 De Cauchy-Riemann vergelijkingen en conforme afbeeldingen

4.  $(u, v) : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  is totaal differentieerbaar in  $(x_0, y_0)$  met

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0); \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (\text{vergelijkingen van Cauchy-Riemann. C-R})$$

*Bewijs.* Uit de definities volgt meteen  $1 \Leftrightarrow 2$ . Voor  $2 \Leftrightarrow 3$  merken we op dat  $Ah = (a_1 + ia_2)(h_1 + ih_2) = (a_1h_1 - a_2h_2) + i(a_2h_1 + a_1h_2)$ . En  $3 \Leftrightarrow 4$  is bekend uit de reële analyse.  $\square$

Vaak wordt aangenomen dat  $(u, v)$  van klasse  $C^1$  is op een gebied  $G \subset \mathbb{R}^2$ , uit de reële analyse is bekend dat  $(u, v)$  dan totaal differentieerbaar is in elk punt van  $G$ , en dat de afgeleide matrix continu is.

Er volgt dan:

**Gevolg 3.1.3.** Als  $u_x, u_y, v_x, v_y$  continu zijn in  $(x_0, y_0)$  en  $(u, v)$  voldoet in  $(x_0, y_0)$  aan C-R, dan is  $f$  complex-differentieerbaar in  $z_0 = x_0 + iy_0$

*Opmerking.* Veel moeilijker is de stelling van Looman–Menchoff (Geformuleerd door Montel (1913), de Nederlander Looman (1923) gaf een bewijs met een gat, dat door Menchoff (1936) is gerepareerd): Als  $f$  continu op een gebied  $G$ , de partiële afgeleiden  $u_x, u_y, v_x, v_y$  bestaan op  $G$  en aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen is voldaan, dan is  $f$  holomorf op  $G$ .

Tenslotte voeren we in

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z(x + iy) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (f_x(x, y) - if_y(x, y)), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = f_{\bar{z}}(x + iy) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (f_x(x, y) + if_y(x, y)). \quad (3.2)$$

Dit is een formele notatie, het nemen van een partiële afgeleide in de richting  $z$  of  $\bar{z}$  heeft geen betekenis. Je controleert eenvoudig dat de productregel geldt en dat de C-R vergelijkingen equivalent zijn met  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ . In deze vorm spreken we van de *complexe Cauchy-Riemann vergelijking*. Dit zegt zoveel als: “Een functie voldoet aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen als deze zonder  $\bar{z}$  te schrijven is.” In dat geval bestaat de afgeleide van  $f$  en is gelijk aan  $f_z$ . Verder is het ook eenvoudig na te gaan dat

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1. \quad (3.4)$$

**Voorbeeld 3.1.4.** De functies  $f(x + iy) = x + iy$  en  $f(x + iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$  voldoen in elk punt aan C-R.

**Voorbeeld 3.1.5.** De functie  $f(x + iy) = x - iy (= \bar{z})$  voldoet in geen enkel punt aan C-R.

**Voorbeeld 3.1.6.** De functie  $f(x + iy) = x^2 - y^2 - 2ixy (= \bar{z}^2)$  voldoet alleen in  $(0, 0)$  aan C-R.

### 3.2 Harmonische functies

Een reëelwaardige functie  $u$  op een gebied  $G$  in  $\mathbb{R}^2$  heet *harmonisch* als  $u$  van klasse  $C^2$  is op  $G$ , dat wil zeggen  $u_{xx}$ ,  $u_{xy}$ ,  $u_{yx}$ ,  $u_{yy}$  zijn continu op  $G$  (en dus de partiële afgeleiden van eerste en nulde orde óók) en

$$\Delta u \stackrel{\text{def}}{=} u_{xx} + u_{yy} = 0$$

op  $G$ . Merk op dat men dit ook kan schrijven als  $4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ .

**Stelling 3.2.1** (Het reële deel van een holomorfe functie is harmonisch). *Als  $f$  is holomorfe en van klasse  $C^2$  op  $G$ , dan is  $\text{Re } f$  harmonisch op  $G$*

*Bewijs.*  $u_x = v_y$  en  $u_y = -v_x$  (C-R)  $\implies u_{xx} = v_{yx}$  en  $u_{yy} = -v_{xy}$ . Nu optellen.  $\square$

*Opmerking.* In hoofdstuk 8 zullen we zien dat het omgekeerde van deze stelling in ieder geval lokaal waar is. Op schrijven is iedere harmonische functie het reële deel van een holomorfe functie.

### 3.3 Conforme afbeeldingen

We beginnen met een intermezzo over gladde krommen. We zullen kolom- en vectornotatie van vectoren in  $\mathbb{R}^2$  door elkaar gebruiken.

Bekijk zoals in Hoofdstuk 1.3 een *enkelvoudige gladde* kromme  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^2$  door het punt  $(x_0, y_0)$  gegeven door een parametrizing

$$p(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

met  $t \in I$  voor zeker interval  $I$ .

Hierbij is  $p$  van klasse  $C^1$ , injectief op  $I$  en

$$p'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

op  $I$ . De vector  $p'(t_0)$  bepaalt de richting van de raaklijn aan  $\gamma$  in  $(x_0, y_0) = p(t_0)$ .

Je kunt  $\gamma$  ook weer opvatten als kromme in het complexe vlak  $\mathbb{C}$  door in plaats van  $p(t) = (x(t), y(t))^T$  nu te schrijven

$$p(t) = x(t) + iy(t).$$

Gegeven is nu verder een afbeelding  $(u, v)$  van klasse  $C^1$  die een omgeving van  $(x_0, y_0)$  naar  $\mathbb{R}^2$  afbeeldt. Laat

$$D = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

### 3 De Cauchy-Riemann vergelijkingen en conforme afbeeldingen

de determinant van de Jacobiaan zijn. We veronderstellen dat  $D(x_0, y_0) \neq 0$ . Dit is equivalent met inverteerbaarheid van  $(u, v)$  op een omgeving van  $(x_0, y_0)$  met inverse ook van klasse  $C^1$  (inverse-functiestelling, Analyse 2). De kromme  $\gamma$  door  $(x_0, y_0) = p(t_0)$  gaat onder  $(u, v)$  over in een kromme  $\gamma^*$  door  $(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$  met parametrizing

$$\begin{pmatrix} u(x(t), y(t)) \\ v(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \text{ met } t \in I.$$

Merk op:

$$\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$$

gaat over in

$$\begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}.$$

Dit is een toepassing van de kettingregel.

Na dit intermezzo zijn we klaar om de volgende stelling te bewijzen. We schrijven  $u_x$  voor  $u_x(x_0, y_0)$ , idem voor  $u_y, v_x$  en  $v_y$ .

**Definitie 3.3.1.** Zij  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$  en  $f = (u + iv)$  een  $C^1$  afbeelding in een omgeving van  $(x_0, y_0)$ . heet (*direct*) *conform* of *hoektrouw* in  $(x_0, y_0)$  als  $(u, v)$  hoeken behoudt tussen gladde krommen door  $(x_0, y_0)$  (dat wil zeggen tussen de raaklijnen door  $(x_0, y_0)$  aan de krommen), zowel in grootte als oriëntatie (richting) en verder de Jacobideterminant  $D(x_0, y_0) \neq 0$ .

**Stelling 3.3.2** (Karakterisering van conformiteit). *Veronderstel dat  $f = u + iv$  waarbij  $(u, v)$  van klasse  $C^1$  is nabij  $(x_0, y_0)$ . Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

1. De afbeelding  $(u, v)$  is conform in  $(x_0, y_0)$ .
2. De Jacobimatrix van  $(u, v)$  in het punt  $(x_0, y_0)$  voldoet aan:

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi & -r \sin \phi \\ r \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \text{ voor zekere } r > 0, \phi \in \mathbb{R}.$$

*Met andere woorden, de matrix stelt een dilatatie (vermenigvuldiging met  $r$ ) samengesteld met een rotatie (over  $\phi$ ) voor.*

3.  $(u, v)$  voldoet aan C-R in  $(x_0, y_0)$  en  $u_x^2 + v_x^2 > 0$ .
4.  $f$  is complex-differentieerbaar in  $z_0 = x_0 + iy_0$  en  $f'(z_0) \neq 0$ .

*Bewijs.* We tonen aan  $(1) \implies (2)$ , hoewel je mogelijk al uit lineaire algebra weet dat een lineaire afbeelding die hoekbehoudend is door (2) gegeven wordt. De rest van het bewijs  $(2) \iff (3) \iff (4)$  en  $(2) \implies (1)$  zijn gemakkelijk.

Welnu, neem (1) aan. Omdat

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

geldt

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix}.$$

En

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

geeft

$$\begin{pmatrix} u_x + u_y \\ v_x + v_y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} u_x - u_y \\ v_x - v_y \end{pmatrix}.$$

Daaruit volgt dat

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

kolommen heeft van gelijke lengte  $r \neq 0$ , die orthogonaal zijn. Omdat de richting van de hoek behouden blijft, is

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

een veelvoud van een draaiing (en geen spiegeling).  $\square$

**Gevolg 3.3.3.** Zij  $f : G_1 \rightarrow G_2$  een bijectieve holomorfe afbeelding van klasse  $C^1$ . Veronderstel dat  $f' \neq 0$  op  $G_1$ . Dan is  $f$  inverteerbaar met inverse afbeelding  $g$ , i.e.  $f(g(w)) = w$ ,  $g(f(z)) = z$ , en er geldt

$$g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}.$$

*Bewijs.* De inverse-functiestelling uit Analyse 2 kan worden toegepast, want  $f$  is  $C^1$  en de Jacobideterminant is ongelijk 0. Omdat  $f$  conform is, is de hoek tussen twee krommen in  $G_2$  gelijk aan hoek tussen de originelen van die twee krommen in  $G_1$ . Maar dit zegt juist dat  $g$  conform is, dus complex differentieerbaar. Je zou ook de vorm van de Jacobimatrix in (2) kunnen gebruiken. Er geldt  $g(f(z)) = z$ . We passen de kettingregel toe en vinden  $g'(f(z))f'(z) = 1$ , hetgeen te bewijzen was.  $\square$

*Opmerking.* De aanname dat  $f' \neq 0$  volgt voor holomorfe functies al uit het feit dat  $f$  injectief is. Dat zullen we in een later hoofdstuk bewijzen.

**Voorbeelden 3.3.4.**

### 3 De Cauchy-Riemann vergelijkingen en conforme afbeeldingen

1. Bij  $f(z) = e^z$  gaan snijdende lijnstukken op  $x = a$  (van onder naar boven gericht, gegeven door  $b - C < y < b + C$ ) en  $y = b$  (van links naar rechts, gegeven door  $a - D < x < a + D$ ) over in snijdende krommen: het stuk van de cirkel  $|w| = e^a$  gegeven door  $b - C < \arg w < b + C$  (gericht tegen de wijzers van de klok in) en een stuk op de halflijn  $\arg w = b$  gegeven door  $e^{a-D} < |w| < e^{a+D}$  (van de oorsprong afgericht). De hoeken blijven gelijk in grootte en richting (namelijk een rechte hoek).

De strook  $a < y < b$  wordt afgebeeld op de sector  $a < \arg z < b$ . Als  $b - a < 2\pi$  is de afbeelding (globaal) injectief, als  $b - a > 2\pi$  is de afbeelding niet injectief.

2. De inverse van de afbeelding  $e^z$  zullen we  $\log z$  noemen. Er zijn problemen als  $e^z$  niet injectief is op zijn domein, maar wanneer we  $e^z$  op een strook  $a < \arg z < b$  met  $b - a < 2\pi$  bekijken, is de inverse goed gedefinieerd en conform, dus complex differentieerbaar. Dan wordt de sector op een strook afgebeeld.
3. Bij  $f(z) = z^2$  gaan in het punt  $i$  snijdende lijnstukken op de imaginaire as en op de lijn  $y = 1$  over in een stuk op de negatieve reële as en een stukje parabool die elkaar in het punt  $-1$  snijden. De hoeken blijven gelijk in grootte en richting (weer een rechte hoek). Bij in de oorsprong snijdende lijnstukken blijven de hoeken niet behouden, kijk maar naar de lijnstukken  $z = t$  met  $0 \leq t \leq 1$  en  $z = t + it$  met  $0 \leq t \leq 1$ . Wat is hier aan de hand? Het eerste kwadrant ( $0 < \arg z < \pi/2$ ) gaat over in het bovenhalfvlak ( $0 < \arg z < \pi$ ).
4. De inverse afbeelding van de afbeelding  $f : z \rightarrow z^2$  is de afbeelding  $g : w \rightarrow \sqrt{w}$ . Er doet zich een moeilijkheid voor omdat de afbeelding  $f$  niet injectief hoeft te zijn — dat hangt van zijn domein af — en het dus niet duidelijk is hoe de wortel gekozen moet worden. Maar als we  $f$  definiëren op het eerste kwadrant, is het beeld het bovenhalfvlak dus we hebben een inverse afbeelding  $g$  van het bovenhalfvlak naar het eerste kwadrant, die conform is, dus holomorf.
5. De GLT's uit het vorige hoofdstuk zijn injectieve holomorfe afbeeldingen en dus conform. Hoeken tussen generaliseerde cirkels blijven behouden.
6.  $h_\alpha : z \rightarrow z^\alpha$ , op een sector  $a < \arg z < b$  met  $b - a < 2\pi$ . Voor  $\alpha$  nemen we eerst een willekeurig reëel getal. Wat bedoelen we met  $h_\alpha$ ? De makkelijkste definitie is  $h_\alpha(z) = e^{\alpha \log z}$ . Deze afbeelding is gedefinieerd zo gauw  $\log z$  gedefinieerd is, bijvoorbeeld op een sector met opening  $C < 2\pi$ . De sector wordt afgebeeld op een sector met opening  $\alpha C$ .

*Opmerking.* De moeilijkheden met het definiëren van de inversen van niet injectieve functies, zullen we in het volgend hoofdstuk uit de weg ruimen.

*Opmerking.* We hebben in de voorbeelden gezien dat allerlei gebieden conform injectief op elkaar zijn af te beelden. De ultieme stelling in dit verband is de Riemann afbeeldingstelling. Allereerst een definitie. Een gebied  $G$  heet *enkelvoudig samenhangend* als voor iedere enkelvoudig gesloten traplijn in  $G$  het binnengebied van die



traplijn in  $G$  bevat is. De Riemann afbeeldingstelling zegt nu dat ieder enkelvoudig samenhangend gebied dat een echte deelverzameling van  $\mathbb{C}$  is, conform injectief op de eenheidsschijf kan worden afgebeeld.

## Opgaven

**Opgave 3.1.** Zij  $f$  holomorfe en van klasse  $C^2$  op een gebied  $G$ . Toon dan aan dat  $\operatorname{Im} f$  harmonisch is op  $G$ .

**Opgave 3.2.** Laat  $f(z) = z^2\bar{z}^3$ . Bereken  $f_z(z)$  en  $f_{\bar{z}}(z)$ . Idem voor  $f(z) = z^3\bar{z}^2$ .

**Opgave 3.3.** Laat  $P(x, y)$  een polynoom in twee veranderlijken zijn met complexe coëfficiënten. Bekijk  $f(z) = P(z, \bar{z})$ . Onderzoek wanneer  $f$  complex differentieerbaar is.

**Opgave 3.4.** In welke punten zijn de volgende functies complex-differentieerbaar?

1.  $f(x + iy) = e^x \cos y + ie^x \sin y$
2.  $f(x + iy) = x^2 + y^2 - 2ixy$
3.  $f(x + iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$
4.  $f(x + iy) = ax + by$
5.  $f(z) = az + b\bar{z}$

**Opgave 3.5.** Geef, zo mogelijk, voor elke functie een gebied  $G$  waarop de functie harmonisch is.

1.  $f(x + iy) = x^2 - y^2$
2.  $f(x + iy) = x^2 + y^2$
3.  $f(x + iy) = e^x \cos y$
4.  $f(x + iy) = \ln(x^2 + y^2)$
5.  $f(x + iy) = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \frac{y}{x^2+y^2}$

**Opgave 3.6.** Zij  $f$  complex-differentieerbaar en reëelwaardig op een gebied  $G$ . Toon aan dat  $f$  constant is.

**Opgave 3.7.** Beschouw de functie  $f$  op  $\mathbb{C}$  gegeven door

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4} & \text{als } z \neq 0 \\ 0 & \text{als } z = 0. \end{cases}$$

Ga na dat overal aan Cauchy-Riemann voldaan is, maar dat  $f$  niet complex-differentieerbaar is in het punt 0. Discussie!

**Opgave 3.8.** Bepaal het beeld van de horizontale en verticale lijnen ( $\{y = d\}$  en  $\{x = c\}$ ) onder de afbeelding  $z \rightarrow z^2$ .

**Opgave 3.9.** Bepaal het origineel van de horizontale en verticale lijnen ( $\{v = d\}$  en  $\{u = c\}$ ) onder de afbeelding  $z \rightarrow z^2$ .

**Opgave 3.10.** Bepaal een bijectieve conforme afbeelding van het eerste kwadrant  $\{x + iy \mid x > 0, y > 0\}$  op de schijf  $B(0, 1)$ .

## Tentamenopgaven

**Opgave 3.11.** Zij  $B$  de eenheidschijf,  $H$  het bovenhalfvlak en  $\mathcal{F}$  de verzameling gebroken lineaire transformaties die  $B$  op  $H$  afbeelden.

- (i) Bepaal een  $f \in \mathcal{F}$  zó dat  $f(0) = i$ .
- (ii) Bewijs dat onder iedere  $f \in \mathcal{F}$  de cirkels  $C(0, r)$ , ( $0 < r < 1$ ) op cirkels (en niet op rechte lijnen) worden afgebeeld.
- (iii) Beschrijf de originelen van de lijnen  $y = c$ ,  $c > 0$  onder  $f \in \mathcal{F}$ .

**Opgave 3.12.** Zij  $t > 0$ .

- (i) Laat zien dat de afbeelding  $z \mapsto e^{tz}$  de strook  $S_t = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi/t\}$  conform afbeeldt op het bovenhalfvlak  $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ .
- (ii) Construeer een conforme afbeelding van  $S_t$  op  $B(0, 1)$ .
- (iii) Construeer een conforme afbeelding van  $S_t$  op  $B(0, 1) \cap H$ .

**Opgave 3.13.** Bepaal een conforme afbeelding  $f$  van de schijf  $B(0, 1)$  op het bovenhalfvlak  $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$  zo, dat  $f(0) = 4i$ . Bepaal ook een conforme afbeelding  $g$  van  $B(0, 1)$  op de sector  $\{w : \arg w \in (\pi/4, 3\pi/4)\}$  zo, dat  $g(0) = 2i$ .

**Opgave 3.14.** Zij  $G = B(0, 1) \cap B(1, 1)$ . De rand van  $G$  bestaat uit twee cirkelbogen. Deze treffen elkaar in  $P_1 = e^{i\pi/3}$  en  $P_2 = e^{-i\pi/3}$  en maken in deze punten een hoek ter grootte  $2\pi/3$ . U hoeft dit niet te bewijzen.

Bepaal een gebroken lineaire transformatie  $f$  zodat  $f(P_1) = 0$  en  $f(P_2) = \infty$ . Laat zien dat  $f(G)$  een sector is en bepaal de openingshoek  $\alpha$ . Hangt  $\alpha$  van de keuze van  $f$  af?

**Opgave 3.15.** Bepaal een gebroken lineaire transformatie die het eerste kwadrant  $\{z : z = x + iy, x, y > 0\}$  afbeeldt op een gebied  $G$ , begrensd door twee cirkelbogen die elkaar in de punten  $z = 1$  en  $z = -1$  snijden. Onder welke hoek snijden de cirkelbogen elkaar? Hangt deze hoek af van de keuze van de gebroken lineaire transformatie?

## 4 Meerwaardige functies

### 4.1 De complexe $e$ -macht

We kijken nog eens in detail naar de  $e$ -macht uit de voorbeelden aan het eind van hoofdstuk 3. Bekijk de vergelijking  $e^w = z$  waarbij  $z$  een vast complex getal  $\neq 0$  is. De oplossingen van deze vergelijking vind je als volgt: schrijf  $\arg z = \alpha$ . Dan volgt met de regels  $|e^w| = e^{\operatorname{Re} w}$  en  $\arg e^w = \operatorname{Im} w$  dat:

$$\begin{aligned} e^w = z &\iff |e^w| = |z| \text{ en } \arg e^w = \arg z \\ &\iff e^{\operatorname{Re} w} = |z| \text{ en } \operatorname{Im} w = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \operatorname{Re} w = \ln |z| \text{ en } \operatorname{Im} w = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff w = \ln |z| + (\alpha + 2k\pi)i, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Er zijn dus oneindig veel oplossingen van de vergelijking  $e^w = z$  maar als je er één kent dan weet je ze allemaal.

Voor sommige stroken  $A = \{w \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Im} w \leq b\}$ , namelijk die met  $0 < b - a \leq 2\pi$ , is de afbeelding  $w \mapsto e^w$  een injectieve afbeelding van  $A$  op de sector  $B = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \arg z \leq b\}$ .

Voor ons zijn meestal *open* stroken en *open* sectoren van belang. De open stroken  $A = \{w \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Im} w < b\}$  met  $0 < b - a \leq 2\pi$  vormen een gebied en de afbeelding  $w \mapsto e^w$  is nu een injectie van  $A$  op de open sector  $B = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \arg z < b\}$ , natuurlijk ook een gebied, met inverse afbeelding  $g$  van  $B$  naar  $A$  gegeven door  $g(z) = \ln |z| + i\phi_z$ , met  $\phi_z$  diè waarde van het argument van  $z$  gelegen tussen  $a$  en  $b$ . Merk op dat deze functies  $g$  continu zijn op de sector  $B$ . Dat berust op het feit dat zowel  $\ln |z|$  als de gebruikte keuze van het argument van  $z$  continu zijn op  $B$ .

**Stelling 4.1.1.** *Bij  $A = \{w \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Im} w < b\}$  en  $B = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \arg z < b\}$  met  $0 < b - a \leq 2\pi$ , en de exponentiële afbeelding van  $A$  naar  $B$ , wordt de inverse afbeelding  $g : A \rightarrow B$  gegeven door  $g(z) = \ln |z| + i\phi_z$ , waarbij  $\phi_z$  diè waarde van het argument van  $z$  is die gelegen is tussen  $a$  en  $b$ . De afbeelding  $g$  is holomorf op  $B$  met afgeleide  $\frac{1}{z}$ .*

*Bewijs.* Dit volgt onmiddellijk uit 3.3.3 maar je kan het ook eenvoudig direct bewijzen. Laat  $z_0 \in B$  en  $w_0 = g(z_0)$ , dan is

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{e^{g(z)} - e^{g(z_0)}} = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{e^{g(z_0)}} = \frac{1}{z_0}$$

Gebruikt is dat  $g$  continu is in  $z_0$ , dus dat  $w \rightarrow w_0$  als  $z \rightarrow z_0$ . □

## 4 Meerwaardige functies

**Voorbeeld 4.1.2.** Een belangrijk voorbeeld is strook  $A = \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} w < \pi\}$ , sector  $B = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  en  $g(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ . We noemen  $g$  wel de *hoofdwaarde* van de logaritme, aangegeven met  $\operatorname{hw} \log z$ . De afgeleide van  $\operatorname{hw} \log z$  op  $B$  is gelijk aan  $\frac{1}{z}$ .

Je zou ook dezelfde sector als boven kunnen nemen, maar nu met een nieuwe strook  $A = \{w \in \mathbb{C} \mid \pi < \operatorname{Im} w < 3\pi\}$ , behorend bij  $g(z) = \ln|z| + i\phi_z$ , waarbij  $\phi_z$  diè waarde van het argument van  $z$  is, gelegen tussen  $\pi$  en  $3\pi$ . Anders gezegd,  $\phi_z = \operatorname{Arg} z + 2\pi$  dus  $g(z) = \operatorname{hw} \log z + 2\pi i$ . De afgeleide van  $g(z)$  op  $B$  is weer  $\frac{1}{z}$ .

Ook zou je op dezelfde sector het argument kunnen laten variëren tussen  $-9\pi$  en  $-7\pi$ . Nu is  $g(z) = \operatorname{hw} \log z - 8\pi i$ . Ook hier is de afgeleide van de functie  $g(z)$  weer gelijk aan  $\frac{1}{z}$ .

**Voorbeeld 4.1.3.** Merk op dat wanneer je de strook  $A = \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi\}$  zou nemen en dus  $B = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  als sector, je weer  $\operatorname{hw} \log z$  als inverse van de exponentiële functie krijgt, maar  $\operatorname{hw} \log z$  is niet continu in punten van de negatieve reële as, laat staan complex-differentieerbaar in zulke punten.

**Voorbeeld 4.1.4.** We noemen nog een voorbeeld, van belang voor de praktijk bij het maken van opgaven, is de sector  $B = \{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2}\pi < \arg z < \frac{3}{2}\pi\}$  met  $A = \{w \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2}\pi < \operatorname{Im} w < \frac{3}{2}\pi\}$  als strook, en inverse afbeelding  $g(z) = \ln|z| + i\phi_z$  van  $B$  naar  $A$ , waarbij  $\phi_z$  diè waarde van het argument van  $z$  is die gelegen is tussen  $-\frac{1}{2}\pi$  en  $\frac{3}{2}\pi$ . De afgeleide van  $g(z)$  is weer  $\frac{1}{z}$ .

**Voorbeeld 4.1.5.** Een minder flauw voorbeeld. Laat  $A = \{z = x + iy : x < y < x + \pi\}$ . Dit is een diagonaal lopende strook in het complexe vlak. Je gaat makkelijk na dat de exponentiële functie injectief is op  $A$ . Het beeldgebied onder  $e^z$  noemen we  $B$ .  $B$  is een oneindig spiraliserende uitdijende verzameling (maak maar een tekening). Op  $B$  is een inverse van  $e^z$  gedefinieerd, die we met  $g$  aangeven.  $g'(w) = \frac{1}{w}$  en het imaginaire deel van  $g(w)$  is weer een waarde van het argument van  $w$ . Er geldt natuurlijk  $\operatorname{Im} g(w) \in (\operatorname{Re} g(w), \operatorname{Re} g(w) + \pi)$  ofwel we gebruiken precies die ene waarde van het argument die voldoet aan  $\arg w \in (\log|w|, \log|w| + \pi)$ .

## 4.2 Meerwaardige functies

Een *meerwaardige functie* op een gebied  $G$  is een afbeelding van de vorm:

$$h : G \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C}) \setminus \{\emptyset\}, \\ z \longmapsto h(z),$$

waarin  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$  de verzameling van alle deelverzamelingen van  $\mathbb{C}$  is.

**Voorbeeld 4.2.1.** We geven voorbeelden op gebieden  $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

$$z \mapsto \arg z = \{ \operatorname{Arg} z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \};$$

$$\begin{aligned}
z \mapsto \log z &= \ln |z| + i \arg z \\
&= \{ \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} \} \\
&= \text{de oplossingsverzameling van } e^w = z.
\end{aligned}$$

En voor  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
z \mapsto z^a &= e^{a \log z} \\
&= \left\{ e^{a(\ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))}, k \in \mathbb{Z} \right\} \\
&= \left\{ |z|^a e^{ia(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)}, k \in \mathbb{Z} \right\}.
\end{aligned}$$

In het bijzonder krijgen we voor  $a = \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned}
z \mapsto z^{1/2} &= \sqrt{z} \\
&= e^{\frac{1}{2} \log z} \\
&= \left\{ \pm \sqrt{|z|} e^{\frac{1}{2}i \operatorname{Arg} z} \right\} \\
&= \text{de oplossingsverzameling van } w^2 = z.
\end{aligned}$$

En als  $f$  holomorf is op  $G$  zonder nulpunten dan hebben we ook:

$$\begin{aligned}
z \mapsto \log f(z) &= \text{de oplossingsverzameling van } e^w = f(z); \\
z \mapsto \sqrt{f(z)} &= \text{de oplossingsverzameling van } w^2 = f(z).
\end{aligned}$$

Een *tak* van de meerwaardige functie  $h$  op  $G$  is een functie  $g$  op  $G$  met  $g(z) \in h(z)$  voor alle  $z \in G$ .

Zo krijg je een tak van  $\arg z$  op zeker gebied  $G$  door voor elke  $z \in G$  een keuze  $\phi_z$  te maken uit de (oneindige) verzameling  $\arg z$ . Het kan dus gebeuren dat de waarden van  $\phi_z$  wild variëren ook al liggen de waarden van  $z$  dicht bij elkaar.

Iets soortgelijks geldt voor takken van  $\log z$ . Merk op dat elk zo'n tak *hetzelfde* reële deel heeft (namelijk  $\ln |z|$  in het punt  $z$ ).

Als je de voorbeelden  $g$  op een van de open sectoren  $B$  uit sectie 1 van dit hoofdstuk bekijkt dan zijn dit functies die voldoen aan  $e^{g(z)} = z$  voor alle  $z \in B$ . De functies  $g$  aldaar waren ook holomorf op  $B$ . We hebben dus te maken met *holomorfe* takken van  $\log z$  op  $B$ . Hetzelfde geldt voor alle functies  $g$  die voorkomen in de stelling in sectie 1 voorafgaand aan deze voorbeelden. De stelling toont in feite aan dat een *continue* tak van  $\log z$  op zo'n  $B$  automatisch een *holomorfe* tak van  $\log z$  is.

### 4.3 Holomorfe takken

We bewijzen eerst dat er relatief weinig continue takken van  $\log z$  zijn op een gebied  $G$  (dat 0 niet bevat). Maar we herhalen eerst nog even de definitie van een continue c.q. holomorfe tak van  $\log z$  op  $G$ : dat is een functie  $g$  op  $G$  die voldoet aan:

#### 4 Meerwaardige functies

- $g$  voldoet aan  $e^{g(z)} = z$  voor alle  $z \in G$ ;
- $g$  is continu c.q. holomorf op  $G$ .

**Stelling 4.3.1** (De continue takken van  $\log z$  op een gebied). *Als  $g$  één continue tak van  $\log z$  is op  $G$  dan zijn  $g_k = g + 2k\pi i$  met  $k \in \mathbb{Z}$  de andere continue takken van  $\log z$  op  $G$ .*

*Bewijs.* De bedoeling is dat je  $g_k$  uit  $g$  krijgt door bij elke  $z$  uit  $G$  hetzelfde veelvoud van  $2\pi i$  op te tellen! Dus  $g_k$  ontstaat uit  $g$  door daar een geschikte constante bij op te tellen.

Het zal duidelijk zijn dat  $g_k$  een continue tak van  $\log z$  is op  $G$  voor elke  $k \in \mathbb{Z}$  want  $g_k$  is continu omdat  $g$  continu is en  $e^{g_k(z)} = e^{g(z)+2k\pi i} = e^{g(z)} \cdot e^{2k\pi i} = e^{g(z)} = z$  voor alle  $z \in G$ .

Omgekeerd, laat  $p$  een tweede continue tak van  $\log z$  zijn op  $G$ , naast de tak  $g$ . Bekijk dan de functie  $p - g$ . Dan is  $e^{p(z)-g(z)} = \frac{e^{p(z)}}{e^{g(z)}} = \frac{z}{z} = 1$  en dus is  $p(z) - g(z) = 2k(z)\pi i$  waarbij  $k(z)$  in beginsel van  $z$  afhangt. De functie  $q = \frac{p-g}{2\pi i}$  is een continue(!) functie van het gebied(!)  $G$  naar  $\mathbb{Z}$  en dus constant. Dus  $q = \frac{p-g}{2\pi i} = k$ , met  $k$  een vast geheel getal. Dus  $p = g_k$ .  $\square$

Merk op dat de takken  $g_k$  ook holomorf zijn.

Als  $f$  holomorf is op  $G$  en daar geen nulpunten heeft, dan is een holomorfe tak van  $\log f$  op  $G$  een functie  $g$  op  $G$  met:

- $g$  voldoet aan  $e^{g(z)} = f(z)$  voor alle  $z \in G$ ;
- $g$  is holomorf op  $G$ .

Op dezelfde manier als boven krijg je:

**Stelling 4.3.2** (De holomorfe takken van  $\log f(z)$  op een gebied). *Als  $g$  een holomorfe tak van  $\log f(z)$  is op  $G$  dan zijn  $g_k = g + 2k\pi i$  met  $k \in \mathbb{Z}$  de andere holomorfe takken van  $\log f(z)$  op  $G$ .*

Als  $f$  holomorf is op  $G$  en daar geen nulpunten heeft, dan is een holomorfe tak van  $\sqrt{f(z)}$  op  $G$  een functie  $g$  op  $G$  die voldoet aan:

- $g$  voldoet aan  $g(z)^2 = f(z)$  voor alle  $z \in G$
- $g$  is holomorf op  $G$

Een bijzonder geval krijg je voor  $f(z) = z$ , dan gaat het om holomorfe takken van  $\sqrt{z}$ . Je vindt nu:

**Stelling 4.3.3** (De holomorfe takken van  $\sqrt{f(z)}$  op een gebied). *Als  $g$  een holomorfe tak van  $\sqrt{f(z)}$  is op  $G$  dan is er nog precies één andere holomorfe tak van  $\sqrt{f(z)}$  op  $G$ , namelijk  $-g$ .*

*Bewijs.* Kijk naar  $q = \frac{p}{g}$  als  $p$  zo'n tweede tak is naast  $g$ . Kwadrateer en er volgt dat het kwadraat gelijk aan 1 is, dus  $q(z) = \frac{p(z)}{g(z)} = \pm 1$  voor alle  $z \in G$ . Pas weer de karakterisering van continue geheelwaardige functies op het gebied  $G$  toe op  $q : G \rightarrow \mathbb{Z}$ . Deze functie is constant, en wel identiek 1 of identiek  $-1$ .  $\square$

Stelling 4.1.1 beschrijft holomorfe takken van  $\log z$  en spreekt uit dat de afgeleide gelijk is aan  $\frac{1}{z}$ . Dat geldt algemener:

**Stelling 4.3.4.** *Als  $g$  een holomorfe tak van  $\log f(z)$  is op  $G$  dan is  $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$  op  $G$ .*

*Bewijs.* Differentiëren van  $e^{g(z)} = f(z)$  geeft  $g'(z)f(z) = f'(z)$ .  $\square$

## 4.4 Constructie van holomorfe takken

We hebben al gezien dat op  $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  de functie  $\text{hw } \log z$  een holomorfe tak van  $\log z$  is. Dus op  $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  is  $e^{\frac{1}{2} \text{hw } \log z}$  een holomorfe tak van  $\sqrt{z}$ . Kwadrateer maar! We noemen deze functie wel  $\text{hw } \sqrt{z}$ .

Evenzo spreken we over  $\text{hw } z^a = e^{a \text{hw } \log z}$  op  $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ .

We zoeken nu een holomorfe tak van  $\sqrt{1+z^2}$  op  $G = B(0, 1)$ . Bedenk dat geldt  $z \in B(0, 1) \implies \text{Re}(1+z^2) > 0$  en dus in het bijzonder dat  $1+z^2$  in  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  ligt. En dus is  $\text{hw } \sqrt{1+z^2}$ , dat is de samenstelling van de hoofdwaarde van de wortel met  $z \rightarrow 1+z^2$  gedefinieerd en holomorf. Kwadrateren laat zien dat dit ook een tak van  $\sqrt{1+z^2}$  op  $G = B(0, 1)$ .

We hebben gezien dat de GLT  $z \mapsto (z+1)/(z-1)$  het gebied  $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  binnen  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  afbeeldt. Dus  $\text{hw } \log \frac{z+1}{z-1}$  is een holomorfe tak van  $\log \frac{z+1}{z-1}$  op  $G$ .

Evenzo is  $\text{hw } \sqrt{(z+1)/(z-1)}$  een holomorfe tak van  $\sqrt{(z+1)/(z-1)}$  op het gebied  $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

Stel je voor dat we holomorfe tak van  $\sqrt{z^2-1}$  zoeken op  $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . We laten ons nu leiden door de suggestieve schrijfwijze

$$\sqrt{z^2-1} = (z-1)\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}.$$

We bedoelen hiermee: neem eens een holomorfe tak van  $\sqrt{(z+1)/(z-1)}$  en vermenigvuldig deze met de factor  $z-1$ . Gekwadrateerd levert dat  $z^2-1$  op. En dus is  $g_1(z) = (z-1) \cdot \text{hw } \sqrt{(z+1)/(z-1)}$  een holomorfe tak van  $\sqrt{z^2-1}$  op  $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

Op  $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$  is  $g_2(z) = z \cdot \text{hw } \sqrt{1-1/z^2}$  een holomorfe tak van  $\sqrt{z^2-1}$ . Ga maar na: de functie  $\text{hw } \sqrt{1-1/z^2}$  is gedefinieerd voor  $|z| > 1$ , want dan ligt  $1 - \frac{1}{z^2}$  in het rechterhalfvlak, dus in het definitiegebied van  $w \mapsto \text{hw } \sqrt{w}$ . De functie  $g_2$  is holomorf en gekwadrateerd levert  $g_2(z)$  de uitdrukking  $z^2-1$  op, we hebben dus op  $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$  een holomorfe tak van  $\sqrt{z^2-1}$  gevonden.

## 4 Meerwaardige functies

Op  $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$  hebben we dus twee holomorfe takken van  $\sqrt{z^2 - 1}$  namelijk  $g_1$  en  $g_2$ . Ze zijn dus gelijk of elkaars tegengestelde. In het punt 2 zijn ze beide gelijk aan  $\sqrt{3}$ . Dus geldt  $g_1 = g_2$  op  $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ .

*Opmerking.* Het is niet zo dat een holomorfe tak van  $\log f(z)$  altijd ontstaat door de uitdrukking  $f(z)$  te laten volgen door een holomorfe tak van de logaritme. Stel dat we een holomorfe tak van  $\log z^4$  op  $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$  zoeken. Het gebied  $G$  wordt door  $z^4$  afgebeeld op  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , en op dit gebied bestaat geen holomorfe tak van de logaritme (zoals we later zullen zien). Maar er bestaat wel degelijk een holomorfe tak van  $\log z^4$  op  $G$ , te weten  $4 \operatorname{hw} \log z$ . Wat zijn de andere holomorfe takken van  $\log z^4$  op  $G$ ?

**Voorbeeld 4.4.1.** Nog een voorbeeld:  $\sqrt{z^2}$  de holomorfe takken zijn  $z$  en  $-z$ , maar als je de hoofdwaaarde van de wortel neemt en met  $z^2$  samenstelt, krijg je iets heel anders. (Wat?)

## Opgaven

**Opgave 4.1.** Bereken de hoofdwaaarde van  $i^i$ .

**Opgave 4.2.** Differentieer  $\operatorname{hw} z^a$ .

**Opgave 4.3.** Geef een holomorfe tak  $f(z)$  van  $\log(1+z^6)$  op  $G = \{|z| < 1\}$ . Hoeveel keuze heb je?

**Opgave 4.4.** Geef een holomorfe tak  $f(z)$  van  $\sqrt[3]{1+z^6}$  op  $G = \{|z| < 1\}$ . Hoeveel keuze heb je?

**Opgave 4.5.** Geef een holomorfe tak  $f(z)$  van  $\sqrt[3]{1+z^6}$  op  $G = \{|z| > 1\}$ . Hoeveel keuze heb je?

**Opgave 4.6.** Geef een holomorfe tak  $f(z)$  van  $\sqrt{z^2+1}$  op  $G = \mathbb{C} \setminus [-i, i]$ .

**Opgave 4.7.** Geef een holomorfe tak  $f(z)$  van  $\sqrt{z^4-1}$  op  $G = \mathbb{C} \setminus ([-1, 1] \cup [-i, i])$ .

**Opgave 4.8.** Geef een holomorfe tak  $f(z)$  van  $\sqrt{1-z}$  op  $G = \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ .

**Opgave 4.9.** Geef een holomorfe tak  $f(z)$  van  $\sqrt{1-\frac{1}{z}}$  op  $G = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ .

**Opgave 4.10.** Geef een holomorfe tak  $f(z)$  van  $\sqrt{z^2-z}$  op  $G = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ .

**Opgave 4.11.** Zij  $g$  een continue tak van  $\log z$  op een gebied  $G$  met  $0 \notin G$ . Bewijs dat  $g$  zelfs holomorf is op  $G$ .

Aanwijzing: laat zien dat op een schijf  $B(a, r)$  binnen  $G$  men kan schrijven:  $g(z) = g(a) + \operatorname{hw} \log(z/a)$ .

**Opgave 4.12.** Geef een holomorfe tak van  $\sqrt{z^4}$  op  $G = \{\operatorname{Re} z > 0\}$ .



**Opgave 4.13.** Geef een voorbeeld van een holomorfe bijectie in de situatie

$$f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \{\operatorname{Re} w > 0\}.$$

**Opgave 4.14.** Idem  $f : \{-\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z\} \longrightarrow \{\operatorname{Re} w > 0\}$ .

**Opgave 4.15.** Idem  $f : \{0 < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{3}\} \longrightarrow \{\operatorname{Re} w > 0, \operatorname{Im} w > 0\}$ .

**Opgave 4.16.** Idem  $f : \{|z - 1| < 2, |z + 1| < 2\} \longrightarrow \{\operatorname{Im} w > 0\}$ .

Aanwijzing: begin met een GLT die  $-\sqrt{3}i$  in  $0$ ,  $\sqrt{3}i$  in  $\infty$  en  $1$  in  $1$  overvoert en kijk wat het beeld van het punt  $-1$  is.

## Tentamenopgaven

**Opgave 4.17.** Laat zien dat er precies een holomorfe tak  $f$  van  $\sqrt[4]{z^4 - 1}$  bestaat die gedefinieerd is op  $\{z : |z| > 1\}$  en positief is op  $\{z : x = 0, y > 1\}$ .

**Opgave 4.18.** Laat zien dat er precies een holomorfe tak  $f$  bestaat van  $\sqrt{\frac{z^2-1}{z^2+1}}$  die gedefinieerd is op  $\mathbb{C}$  buiten  $[-1, 1] \cup [-i, i]$ , zodanig dat  $f(2) > 0$ .

**Opgave 4.19.** Laat zien dat er precies een holomorfe tak  $f$  bestaat van  $\sqrt[5]{z^5 + 1}$  die gedefinieerd is op  $\{z : |z| > 1\}$ , zodanig dat  $f(2) > 0$ .

**Opgave 4.20.** Laat zien dat er precies een holomorfe tak  $f$  bestaat van  $\sqrt[4]{z^4 - z^3}$  die gedefinieerd is buiten  $[0, 1]$ , zodanig dat  $f(2) > 0$ .

**Opgave 4.21.** Laat zien dat er een holomorfe tak  $f$  bestaat van  $\log \frac{z+1}{z-1}$  die gedefinieerd is buiten  $[-1, 1]$ , zodanig dat  $f(2) > 0$ .

**Opgave 4.22.** Bepaal een holomorfe tak  $f(z)$  van  $\log(1 - z^{-2})$  op  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  zodanig dat  $f(i) = \log 2$ . Laat zien dat deze tak uniek is.

**Opgave 4.23.** Beeldt het gebied  $G = \{z : |z| > 1, 0 < \arg(z) < \pi/4\}$  conform injectief af op het eerste kwadrant  $\{z : z = x + iy, x, y > 0\}$ . (Geef eerst een conforme afbeelding die  $G$  afbeeldt op  $\Omega = \{z : |z| > 1, \operatorname{Re} z > 0\}$  en gebruik een gebroken lineaire transformatie om  $\Omega$  op het eerste kwadrant af te beelden.)

**Opgave 4.24.** In deze opgave is het niet nodig om samenstellingen van expliciete afbeeldingen uit te schrijven.

- (i) Bepaal een conforme afbeelding van  $G = \mathbb{C}^* \setminus [-1, 1]$  op  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  en vervolgens een conforme afbeelding van  $G$  op het boven-halfvlak  $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ .
- (ii) Bepaal een conforme afbeelding van  $\mathbb{C}^* \setminus \{e^{it} : 0 \leq t \leq \pi\}$  op de eenheidsschijf  $B(0, 1)$ .

#### 4 Meerwaardige functies

**Opgave 4.25.** Zij  $B$  de open eenheidschijf  $\{z : |z| < 1\}$ . Welke van de volgende verzamelingen kunnen optreden als beeld van  $B$  onder een injectieve analytische functie? (Geef een afbeelding aan of beargumenteer waarom zo'n afbeelding niet bestaat.)

1. Het bovenhalfvlak  $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ .
2. Een sector  $S = \{z : 0 < \arg z < T\}$ , waar  $(T \leq 2\pi)$ .
3. De gesloten schijf  $\{z : |z| \leq 3\}$ .

## 5 Integratie

### 5.1 Integratie over stuksgewijs gladde krommen

Als  $p$  en  $q$  continue (reëelwaardige of complexwaardige) functies op een georiënteerde gladde kromme  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  zijn, dan definiëren we de *lijnintegraal*

$$\int_{\gamma} p(x, y) dx + q(x, y) dy$$

door een bij de oriëntatie van  $\gamma$  passende parametrizing  $t \mapsto (x(t), y(t))$ , met  $t \in [a, b]$ , te kiezen en vervolgens te definiëren:

$$\int_{\gamma} p(x, y) dx + q(x, y) dy = \int_a^b \left( p(x(t), y(t))x'(t) + q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt.$$

Voor een georiënteerde gladde kromme  $\gamma$  in  $\mathbb{C}$ , geparametriseerd door  $t \mapsto z(t)$  met  $t \in [a, b]$ , en  $f : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$  continu, definiëren we:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt.$$

Stel je voor dat ook  $t \mapsto w(t)$  met  $t \in [c, d]$  een bij de oriëntering van de kromme passende parametrizing van  $\gamma$  is. Dan geldt dat er een monotoon stijgende continue bijectie  $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$  bestaat met  $z(t) = w(\phi(t))$  en dus voor  $t_0 \in [a, b]$ :

$$\frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} = \frac{w(\phi(t)) - w(\phi(t_0))}{\phi(t) - \phi(t_0)} \cdot \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0}$$

en dus

$$\frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} = \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \cdot \frac{w(\phi(t)) - w(\phi(t_0))}{\phi(t) - \phi(t_0)}.$$

Neem nu de limiet voor  $t$  naar  $t_0$  en je vindt dat  $\phi$  differentieerbaar is in  $t_0$  (met afgeleide  $\neq 0$ ) en dat  $z'(t_0) = w'(\phi(t_0)) \cdot \phi'(t_0)$ . Uit deze relatie voor de afgeleides volgt dat  $\phi$  zelfs continu differentieerbaar is op  $[a, b]$ . En dus

$$\int_a^b f(z(t))z'(t) dt = \int_a^b f(w(\phi(t)))w'(\phi(t))\phi'(t) dt \stackrel{s=\phi(t)}{=} \int_c^d f(w(s))w'(s) ds.$$

Dat betekent dat de uitdrukking in de definitie van  $\int_{\gamma} f(z) dz$  niet van de gekozen parametrizing afhangt. Net zo min hangt de integraal  $\int_{\gamma} p(x, y) dx + q(x, y) dy$  af van de parametrizing van de kromme.

## 5 Integratie

Bij een georiënteerde stuksgewijs gladde kromme vind je de integraal door de integraal over de gladde stukken apart uit te rekenen en de resultaten op te tellen.

Omdat het uitrekenen van integralen over krommen teruggebracht kan worden tot het uitrekenen van integralen van gewone functies over een interval, herhalen we enkele rekenregels voor zulke integralen. Hierbij zullen de te integreren functies altijd continu verondersteld worden.

### Rekenregels

1.  $\int_a^b g(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} g(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} g(t) dt$ ,
2. als  $G' = g$  dan is  $\int_a^b g(t) dt = G(b) - G(a)$ ,
3.  $\int_a^b (g_1(t) + g_2(t)) dt = \int_a^b g_1(t) dt + \int_a^b g_2(t) dt$ ,
4. als  $\alpha \in \mathbb{C}$  dan is  $\int_a^b \alpha \cdot g(t) dt = \alpha \int_a^b g(t) dt$ ,
5.  $|\int_a^b g(t) dt| \leq \int_a^b |g(t)| dt$ .

We bewijzen alleen de laatste regel. Laat  $\phi$  het argument van  $\int_a^b g(t) dt$  zijn en  $\alpha = e^{-i\phi}$ , dus  $|\alpha| = 1$  en verder  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ ,  $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ , dan geldt (met gebruikmaking van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz):

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(t) dt \right| &= \alpha \int_a^b g(t) dt = \int_a^b \alpha \cdot g(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(\alpha \cdot g(t)) dt \\ &= \int_a^b (\alpha_1 \cdot g_1(t) - \alpha_2 \cdot g_2(t)) dt \\ &\leq \int_a^b \sqrt{g_1(t)^2 + g_2(t)^2} dt = \int_a^b |g(t)| dt. \end{aligned}$$

**Voorbeeld 5.1.1** (Het belangrijke voorbeeld). Laat  $C(a, r)^+$  de positief doorlopen cirkel met middelpunt  $a$  en straal  $r$  zijn en  $n \in \mathbb{Z}$ . Dan geldt

$$\int_{C(a, r)^+} (z - a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{als } n = -1; \\ 0 & \text{als } n \neq -1. \end{cases}$$

Parametrizeer de kromme door  $z(t) = a + re^{it}$  met  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Dan geldt voor  $n \neq -1$ :

$$\begin{aligned} \int_{C(a, r)^+} (z - a)^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot ire^{it} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\ &= \frac{r^{n+1}}{n+1} \left( e^{i(n+1) \cdot 2\pi} - e^{i(n+1) \cdot 0} \right) = 0. \end{aligned}$$

## 5.1 Integratie over stuksgewijs gladde krommen

En als  $n = -1$ , dan krijg je  $\int_{C(a,r)^+} (z-a)^{-1} dz = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$ .

Merk op dat de integraal niet afhangt van de straal van de cirkel!

Een purist zal nog opmerken dat we te maken hebben met een *stuksgewijs* gladde kromme en niet met een gladde kromme en dat we eigenlijk de cirkel hadden moeten opsplitsen in twee stukken, bijvoorbeeld de bovenste helft en de onderste helft van de cirkel, daarna deze hadden moeten parametrizeren ( $z(t) = a + re^{it}$  met  $0 \leq t \leq \pi$  en met  $\pi \leq t \leq 2\pi$ ), en dan de twee integralen over de dealkrommen hadden moeten uitrekenen. Dat komt dan toch weer op hetzelfde neer als onze berekening.

**Stelling 5.1.2.** *Laat  $\gamma$  een kromme in  $\mathbb{C}$  zijn,  $f$  en  $g$  continue functies op  $\gamma$  en  $c$  een complexe constante. Dan geldt:*

- als  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$  en  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$  dan is  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u(x, y)dx - v(x, y)dy) + i \int_{\gamma} (v(x, y)dx + u(x, y)dy)$ , (waarbij de kromme in het rechterlid weer als deelverzameling van  $\mathbb{R}^2$  gezien wordt).
- $\int_{\gamma} (f(z) + g(z)) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz$
- $\int_{\gamma} c \cdot f(z) dz = c \int_{\gamma} f(z) dz$
- $\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$

1. Als  $|g(z)| \leq M$  voor alle  $z \in \gamma$  en  $L = l(\gamma)$ , dan geldt de *ML-ongelijkheid*

$$\left| \int_{\gamma} g(z) dz \right| \leq ML.$$

2. Als de rij continue functies  $g_1, g_2, \dots$  uniform op  $\gamma$  convergeert naar  $g$ , dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} g_n(z) dz = \int_{\gamma} g(z) dz.$$

3. Zij  $F$  holomorf op een gebied  $G$ , met continue afgeleide  $f$  en  $\gamma \subset G$ . Dan

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\text{eindpunt } \gamma) - F(\text{beginpunt } \gamma).$$

*Bewijs.* We bewijzen de laatste drie beweringen. In deze bewijzen wordt regelmatig gebruikt gemaakt, zonder dat steeds te vermelden, van rekenregels voor integralen over een interval. We beginnen met de *ML-ongelijkheid*.

## 5 Integratie

1. Laat  $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$  met parametrizingen  $z_i : [a_i, b_i] \rightarrow \gamma_i$ . Dan:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} g(z) dz \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} g(z) dz \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{\gamma_i} g(z) dz \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \int_{a_i}^{b_i} g(z_i(t)) z_i'(t) dt \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |g(z_i(t))| \cdot |z_i'(t)| dt \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} M |z_i'(t)| dt = M \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |z_i'(t)| dt \\ &= M \sum_{i=1}^n l(\gamma_i) = Ml(\gamma) = ML. \end{aligned}$$

2. Nu de uitspraak over de uniform convergente rij  $g_1, g_2, \dots$ . Merk eerst op dat continuïteit behouden blijft bij uniforme convergentie, dus  $g$  is continu op  $\gamma$  en dus integreerbaar.

Laat  $\epsilon > 0$  en laat  $N$  zo groot zijn dat geldt:  $n > N \implies |g_n(z) - g(z)| < \epsilon$  voor alle  $z \in \gamma$ . Dus geldt voor alle  $n > N$  dat

$$\left| \int_{\gamma} g_n(z) dz - \int_{\gamma} g(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} (g_n(z) - g(z)) dz \right| \leq \epsilon \cdot l(\gamma).$$

Klaar!

3. Tot slot het bewijs van de laatste bewering. Laat  $t \mapsto z(t)$  met  $t \in [a, b]$  een parametrizing van  $\gamma$  zijn. Dan geldt:

$$\frac{F(z(t)) - F(z(t_0))}{t - t_0} = \frac{F(z(t)) - F(z(t_0))}{z(t) - z(t_0)} \cdot \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}.$$

Neem nu de limiet voor  $t$  naar  $t_0$  en je vindt dat  $F'(z(t_0))z'(t_0) = f(z(t_0))z'(t_0)$  de afgeleide in  $t_0$  is van de functie  $t \mapsto F(z(t))$  op het interval  $[a, b]$ . Dus

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b \frac{dF(z(t))}{dt} dt = F(z(b)) - F(z(a)). \quad \square$$

**Voorbeeld 5.1.3.** Als  $c$  een constante is, dan is  $\int_{\gamma} c dz = c \cdot (\text{eindpunt } \gamma - \text{beginpunt } \gamma)$ , immers  $F(z) = cz$  is een primitieve van  $f(z) = c$ .

## 5.2 Hoofdstelling van de complexe integraalrekening

We bewijzen nu een fundamenteel resultaat dat aangeeft wanneer een functie een primitieve heeft.

**Stelling 5.2.1** (Hoofdstelling van de complexe integraalrekening). *Zij  $G$  een gebied en  $f$  een continue functie op  $G$ . Dan zijn de volgende beweringen equivalent:*

1.  $f$  heeft een primitieve  $F$  op  $G$ ;
2. telkens als  $\gamma_1$  en  $\gamma_2$  krommen in  $G$  zijn met beginpunt  $\gamma_1 = \text{beginpunt}\gamma_2$  en eindpunt  $\gamma_1 = \text{eindpunt}\gamma_2$ , dan is  $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$ ;
3.  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$  voor elke gesloten kromme  $\gamma$  in  $G$ ;
4.  $\int_T f(z)dz = 0$  voor elke gesloten traplijn  $T$  in  $G$ ;
5.  $\int_T f(z)dz = 0$  voor elke enkelvoudig gesloten traplijn  $T$  in  $G$ .

*Bewijs.* 1  $\implies$  2 volgt uit de laatste bewering van de stelling boven.

Om 2  $\implies$  3 aan te tonen knippen we de gesloten kromme  $\gamma$  in twee stukken  $\gamma_1$  en  $\gamma_2$ . Dan zijn  $\gamma_1$  en  $-\gamma_2$  twee krommen die hetzelfde beginpunt hebben en die ook hetzelfde eindpunt hebben. Dus  $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-\gamma_2} f(z)dz$ , dus  $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$ .

3  $\implies$  4  $\implies$  5 is triviaal.

We bewijzen nu 5  $\implies$  4. Neem dus aan dat  $\int_T f(z)dz = 0$  voor elke enkelvoudig gesloten traplijn  $T$  in  $G$  (dus als er geen dubbelpunten in  $T$  zijn, anders gezegd  $T$  is een contour). Merk nog op dat bij onze traplijnen er geen snijpunten liggen in het inwendige van een lijnstuk. We tonen nu aan met inductie naar het aantal lijnstukken  $n$  van de traplijn dat ook voor elke (georiënteerde) gesloten traplijn  $T$  in  $G$  de betreffende integraal gelijk aan 0 is. Een lijnstuk kan meerdere keren doorlopen worden en telt dan ook meerdere keren mee bij het aantal lijnstukken van de traplijn.

Als  $n < 4$ , dan bestaat de gesloten traplijn  $T$  uit twee keer hetzelfde lijnstuk, in verschillende richtingen doorlopen, en dus geldt dat  $\int_T f(z)dz = 0$ . De situatie  $n = 3$  doet zich niet voor.

Stel nu dat we een gesloten traplijn  $T$  hebben bestaande uit  $n \geq 4$  lijnstukken. Start ergens op  $T$  en volg het pad in de uitverkoren richting tot je een punt tegenkomt waar je al eens eerder geweest bent. Noem het tussenliggende stuk  $T_1$ . Als  $T_1 = T$ , dan is  $T$  enkelvoudig gesloten dus volgens uitspraak 5 geldt dan dat  $\int_T f(z)dz = 0$ . Als  $T_1 \neq T$ , schrijf dan  $T = T_1 \cup T_2$ . Merk op dat het aantal lijnstukken van zowel  $T_1$  als  $T_2$  kleiner is dan  $n$ . Dan is volgens de inductieveronderstelling  $\int_T f(z)dz = \int_{T_1} f(z)dz + \int_{T_2} f(z)dz = 0 + 0 = 0$ .

Resteert 4  $\implies$  1. Kies een punt  $a \in G$  en definieer voor  $z \in G$  de functie  $F(z) = \int_T f(\zeta)d\zeta$ , waarbij  $T$  een traplijn in  $G$  is die begint in  $a$  en eindigt in  $z$ . Dat er zo'n traplijn bestaat is een van de karakteristieke eigenschappen van een gebied. Volgens het gegeven is dit een goede definitie: de uitkomst van de integraal hangt namelijk niet af van de gekozen traplijn want als je twee van dergelijke traplijnen  $T_1$  en  $T_2$  zou bekijken, dan zou  $T_1 \cup (-T_2)$  een gesloten traplijn zijn waarover de integraal gelijk aan 0 is. Dus  $\int_{T_1} f(z)dz + \int_{-T_2} f(z)dz = 0$ , waaruit direct volgt dat  $\int_{T_1} f(z)dz = \int_{T_2} f(z)dz$ .

Neem een punt  $z$  in  $G$  in gedachten. Laat nu  $\epsilon > 0$ . Kies  $\delta > 0$  zo, dat geldt  $B(z, \delta) \subset G$  en bovendien:  $|w - z| < \delta \implies |f(w) - f(z)| < \epsilon$  (dat kan want  $f$  is continu in het punt  $z$ ).

## 5 Integratie

Laat nu  $0 < |h| < \delta$ , en neem een traplijn  $T_h$  binnen  $B(z, \delta)$  van  $z$  naar  $z + h$ , bestaande uit twee lijnstukken, een horizontaal stuk en een verticaal stuk. Dan is  $F(z + h) - F(z) = \int_{T_h} f(\zeta) d\zeta$ , immers je kunt van  $a$  naar  $z + h$  lopen door eerst over een traplijn  $T$  naar  $z$  te lopen om daarna over  $T_h$  naar  $z + h$  te gaan.

Bedenk verder dat  $\int_{T_h} f(z) d\zeta = f(z) \cdot h$  (waarom al weer?).

Uit de  $ML$ -ongelijkheid volgt dan:

$$\left| \frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{T_h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \leq \frac{\epsilon \cdot 2|h|}{|h|} = 2\epsilon$$

En dus is  $F'(z) = f(z)$ . □

### 5.3 De stelling van Cauchy, zwakke vorm

Met de stelling van Green is de stelling van Cauchy eenvoudig te bewijzen voor holomorfe functies die van klasse  $C^1$  zijn. Vervolgens bewijzen we de stelling van Cauchy zonder de  $C^1$  aanname. Daarna behandelen we de definitie van geïsoleerde singulariteit en de definitie en enkele rekenregels voor het residu en eindigen met de residuenstelling. We beginnen met een herhaling van de stelling van Green.

**Definitie 5.3.1.** Een gebied in  $\mathbb{C}$  of  $\mathbb{R}^2$  noemen we een *net gebied* als de rand van het gebied bestaat uit eindig veel disjuncte, stuksgewijs gladde krommen.

**Stelling 5.3.2** (Stelling van Green). *Laat  $D$  een net gebied in  $\mathbb{R}^2$  zijn met rand  $C$ . Laat verder  $P = P(x, y)$  en  $Q = Q(x, y)$  twee reële functies van klasse  $C^1$  zijn, gedefinieerd op een omgeving van de afsluiting  $\bar{D} = D \cup C$  van  $D$ .*

*Dan geldt, als  $C$  zo georiënteerd is dat  $D$  links van  $C$  ligt, de gelijkheid:*

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_{\bar{D}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Voor commentaar en een bewijs van deze stelling, zie een Advanced Calculus boek.

Uit de stelling van Green leiden we snel een zwakke versie van de stelling van Cauchy af.

**Stelling 5.3.3** (Stelling van Cauchy (zwakke versie)). *Laat  $f = u + iv$  holomorf en van klasse  $C^1$  zijn op een omgeving van de afsluiting van een net gebied  $D$  in  $\mathbb{C}$ , met rand  $C$ , dan is*

$$\int_C f(z) dz = 0.$$



*Bewijs.* Volgens Green en Cauchy-Riemann geldt (als  $C$  positief georiënteerd is):

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy) \\ &= \iint_{\overline{D}} (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_{\overline{D}} (u_x - v_y) dx dy \\ &= \iint_{\overline{D}} 0 dx dy + i \iint_{\overline{D}} 0 dx dy = 0.\end{aligned}$$

En als  $C$  negatief georiënteerd is komt er een minteken bij en is het resultaat dus ook gelijk aan 0.  $\square$

**Definitie 5.3.4** (Geïsoleerde singulariteit). Als  $f$  holomorf is op een verzameling van de vorm  $B(a, r) \setminus \{a\}$  voor zekere  $r > 0$ , dan zeg je dat  $f$  een *geïsoleerde singulariteit* in  $a$  heeft of ook dat  $a$  een *geïsoleerd singulier punt* van  $f$  is.

Als  $V$  een omgeving van  $a$  is, noemen we  $V \setminus \{a\}$  een *gepuncteerde omgeving* van  $a$ .

**Definitie 5.3.5** (Residu). Zij  $f$  holomorf op een gepuncteerde omgeving  $V$  van  $a$  die  $B(a, r) \setminus \{a\}$  bevat. Dan heet

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \epsilon)^+} f(z) dz,$$

met  $0 < \epsilon < r$ , het *residu* van  $f$  in de geïsoleerde singulariteit  $a$ . Notatie hiervoor: of  $\text{Res}_{z=a} f(z)$ .

*Opmerking.* In principe zou  $\text{Res}(f, a)$  van  $\epsilon$  kunnen afhangen. Stelling 5.3.3 laat zien dat als  $f$  holomorf en  $C^1$  is op  $B(a, r) \setminus \{a\}$  dit niet het geval is. Voor  $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < r$  geldt

$$\int_{C(a, \epsilon_2)^+} f(z) dz - \int_{C(a, \epsilon_1)^+} f(z) dz = \int_{\partial A(a, \epsilon_1, \epsilon_2)} f(z) dz = 0.$$

We vervolgen met enkele methodes die gebruikt worden bij het uitrekenen van residuen.

**Stelling 5.3.6.** *Zij  $f$  holomorf en van klasse  $C^1$  op een gepuncteerde omgeving van  $a$ . Als  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = A \in \mathbb{C}$ , dan is  $\text{Res}_{z=a} f(z) = A$ .*

*Bewijs.* Laat  $\epsilon > 0$ . Kies  $\rho > 0$  zo klein dat  $f$  gedefinieerd is op  $\{0 < |z - a| \leq \rho\}$  en zo, dat  $|(z - a)f(z) - A| < \epsilon$  op deze verzameling. Dan geldt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)^+} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)^+} \frac{(z - a)f(z) - A}{z - a} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)^+} \frac{A}{z - a} dz.$$

De *ML*-ongelijkheid geeft dat de absolute waarde van de eerste kleiner dan of gelijk  $1/(2\pi)[\epsilon/\rho]2\pi\rho = \epsilon$ . De tweede integraal rechts hebben we al eerder bepaald in Voorbeeld 5.1.1 (het Belangrijke Voorbeeld) en heeft  $A$  als uitkomst. Omdat  $\epsilon$  willekeurig gekozen is volgt dat  $\text{Res}_{z=a} f(z) = A$ .  $\square$

**Gevolg 5.3.7.** Zij  $f$  holomorfe en van klasse  $C^1$  op een omgeving  $V$  van  $a$  dan is

$$\operatorname{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{z-a} = f(a).$$

of ook

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)^+} \frac{f(z)}{z-a} dz,$$

voor alle  $\rho$  met  $\overline{B(a,\rho)} \subset V$ .

**Gevolg 5.3.8.** Als  $f$  en  $g$  holomorfe en van klasse  $C^1$  zijn in een omgeving van  $a$ , en als  $g(a) = 0$  en  $g'(a) \neq 0$ , dan is  $\operatorname{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g'(a)}$ .

*Bewijs.* Dit volgt uit

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{(g(z) - g(a))/(z-a)} = \frac{f(a)}{g'(a)}. \quad \square$$

Vraag: waarom is  $a$  een geïsoleerd singulier punt van  $f/g$ ? Anders gezegd: waarom heeft  $g$  in de buurt van  $a$  alleen  $a$  als nulpunt?

## 5.4 De Cauchy getransformeerde en analyticiteit

**Definitie 5.4.1.** Laat  $\gamma$  een stuksgewijs gladde kromme zijn in  $\mathbb{C}$  en laat  $g : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$  continu zijn. Definieer de *Cauchygetransformeerde*  $\hat{g}$  van  $g$  op  $G = \mathbb{C} \setminus \gamma$  door

$$\hat{g}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

**Stelling 5.4.2** (Analyticiteit van de Cauchygetransformeerde). *Met  $g$ ,  $\gamma$  en  $G$  als in de definitie geldt:  $\hat{g}$  analytisch op  $G$ .*

*Bewijs.* Laat  $a \in G$  en laat  $B(a, R)$  de grootste mogelijke schijf zijn met middelpunt  $a$  die nog geheel binnen  $G$  ligt. Laat  $z \in B(a, R)$ , dan geldt:

$$\hat{g}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} d\zeta,$$

waaruit volgt

$$\hat{g}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(\zeta)}{\zeta - a} \left( \frac{z - a}{\zeta - a} \right)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right) \cdot (z - a)^n.$$

De verwisseling van som en integraal is geoorloofd omdat de functiereeks (in de variabele  $\zeta$ ) voor vaste  $z$  in  $B(a, R)$  uniform convergent is op  $\gamma$ . Immers, als  $|g(\zeta)| \leq M$  op  $\gamma$ , dan:

$$\left| \frac{g(\zeta)}{\zeta - a} \left( \frac{z - a}{\zeta - a} \right)^n \right| \leq \frac{M}{R} \left( \frac{|z - a|}{R} \right)^n \quad \text{voor alle } \zeta \in \gamma,$$

en

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{R} \left( \frac{|z-a|}{R} \right)^n$$

is convergent (convergente meetkundige reeks). Pas nu het criterium van Weierstraß toe. Dus  $\hat{g}$  is op  $B(a, R)$  de somfunctie van een convergente machtreeks om het punt  $a$ . Het punt  $a$  is willekeurig gekozen in  $G$ , dus  $\hat{g}$  is analytisch op  $G$ .  $\square$

**Gevolg 5.4.3.**

- De coëfficiënten in de machtreeksontwikkeling  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  van  $\hat{g}$  om het punt  $a \notin \gamma$  zijn gelijk aan:

$$c_n = \frac{\hat{g}^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta.$$

- De convergentiestraal van de machtreeksontwikkeling van  $\hat{g}$  om het punt  $a$  is  $\geq$  de afstand van  $a$  tot  $\gamma$ .

**Stelling 5.4.4.** Laat  $f$  holomorf zijn en van klasse  $C^1$  op een gebied  $G$ , dan is  $f$  analytisch op  $G$ .

*Bewijs.* Zij  $a \in G$  en  $r > 0$  zo, dat  $B(a, r) \subset G$ . Zij  $0 < \rho < r$ , dan geldt wegens Gevolg 5.3.7 voor elke  $z \in B(a, \rho)$  dat

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z).$$

De Cauchygetransformeerde  $\hat{f}$  is hier genomen met betrekking tot de kromme  $C(a, \rho)^+$  en is zoals we net zagen op  $B(a, \rho)$  de somfunctie van een convergente machtreeks om het punt  $a$ . De tweede gelijkheid volgt uit de (voorlopige versie van de) residu-instelling. Omdat  $f$  op  $B(a, \rho)$  dus samenvalt met  $\hat{f}$ , is  $f$  op  $B(a, \rho)$  de somfunctie van een convergente machtreeks om  $a$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

met

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta.$$

Omdat  $a$  willekeurig gekozen is in  $G$ , is  $f$  analytisch op  $G$ .  $\square$

De functie  $f$  is dus voor elke  $\rho$  met  $0 < \rho < r$  op  $B(a, \rho)$  in een (steeds gelijke) machtreeks  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  om het punt  $a$  te ontwikkelen, en dus is die reeks ook op  $B(a, r)$  convergent is met som  $f(z)$ . We combineren dit met eerder opgedane kennis over machtreksen en vinden dan achtereenvolgens:

**Stelling 5.4.5** (Machtreeksontwikkelingen). *Als  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  convergent is op  $B(a, r)$ , dan is de somfunctie  $z \mapsto f(z)$  holomorfe op  $B(a, r)$ . Daarbij geldt  $c_n = (f^{(n)}(a))/(n!)$ . Omgekeerd, laat  $f$  holomorfe zijn (en voorlopig van klasse  $C^1$ ) op een schijf  $B(a, r)$ , dan geldt op deze schijf dat  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ . De coëfficiënten  $c_n$  voldoen aan*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta,$$

waarbij  $0 < \rho < r$ .

Zoals verwacht! We hebben namelijk al na Stelling 1.9.5 gezien dat er maar één mogelijke reeksontwikkeling om  $a$  kan zijn, namelijk de Taylorreeks van  $f$  om het punt  $a$ .

De eerste bewering wordt vaak toegepast op de convergentieschijf van de reeks (dus  $r$  zo groot mogelijk). De tweede bewering wordt vaak gebruikt als  $f$  holomorfe is (en voorlopig van klasse  $C^1$ ) op een gebied  $G$ . Dan bekijken we  $f$  op de grootste open schijf om het punt  $a$  die nog geheel binnen  $G$  ligt.

**Residuenformule** Als  $f$  analytisch is in een omgeving van het punt  $a$  in  $\mathbb{C}$ , dan

$$\operatorname{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

**Stelling 5.4.6** (Algemene Integraalformule van Cauchy). *Laat  $f$  analytisch zijn op een omgeving van de afsluiting van een net gebied  $D$  in  $\mathbb{C}$ , met rand  $C$ , dan is*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

**Voorbeeld 5.4.7.**

1. We zien dat

$$\operatorname{hw} (1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \dots, \quad \text{met } R = 1.$$

Hierin is  $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$  voor  $n = 0, 1, 2, \dots$

2. Ook

$$\operatorname{hw} \log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots, \quad \text{met } R = 1.$$

Je leidt dit af door de Taylorreeks van de betreffende functie om het punt 0 uit te rekenen op de schijf om 0 met straal 1. Merk op dat beide functies holomorfe zijn op het gebied  $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ .

## 5.5 De stelling van Cauchy

**Stelling 5.5.1** (Cauchy voor een rechthoek). *Laat  $f$  holomorf zijn op een gebied  $U$  en laat  $\gamma$  de rand van een gesloten rechthoek  $R$  zijn, zodanig dat  $R \subset U$ . Dan is  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ .*

*Bewijs.* We nemen aan dat  $\gamma$  positief georiënteerd is. Stel  $\int_{\gamma} f(z)dz = I$ . Verdeel de gesloten rechthoek  $R$  in vier even grote deelrechthoeken. Er is tenminste één van die rechthoeken, met rand  $\gamma_1$ , ook weer positief georiënteerd zo, dat  $|\int_{\gamma_1} f(z)dz| \geq |I|/4$ . Noem de bijbehorende gesloten rechthoek  $R_1$ . Herhaal dit proces en je vindt achtereenvolgens een rij gesloten rechthoeken  $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \cdots$  met randen  $\gamma_k$  zo dat geldt dat  $|\int_{\gamma_k} f(z)dz| \geq |I|/4^k$ . Merk op dat de diameter van  $R_k$  gelijk is aan  $D/2^k$  waarbij  $D$  de diameter van  $R$  is. Verder is de lengte van  $\gamma_k$  gelijk aan  $L/2^k$  waarbij  $L$  de lengte van  $\gamma$  is. Een compactheidsargument laat zien dat er een punt  $p$  is (precies één zelfs) in  $\cap_{k=1}^{\infty} R_k$ .

Laat  $\epsilon > 0$ . Omdat  $f$  differentieerbaar is in het punt  $p$  geldt dat er een  $\delta > 0$  is zo, dat  $f(z) = f(p) + f'(p)(z-p) + r(z)(z-p)$  met  $|r(z)| < \epsilon$  als  $|z-p| < \delta$ . Kies  $k$  zo groot dat  $D/2^k < \delta$ , dit betekent dat  $R_k \subset B(p, \delta)$ . Omdat  $f(p) + f'(p)(z-p)$  een primitieve heeft, en dus integraal gelijk aan 0 over de (gesloten!) kromme  $\gamma_k$  is  $|\int_{\gamma_k} f(z)dz| = |\int_{\gamma_k} r(z)(z-p)dz| \leq L/2^k \cdot D/2^k \cdot \epsilon$  en dus:  $L/2^k \cdot D/2^k \cdot \epsilon \geq |\int_{\gamma_k} f(z)dz| \geq |I|/4^k$  dus  $|I| \leq LD\epsilon$ . En dus volgt dat  $I = 0$ .  $\square$

Merk op dat het in dit bewijs niet nodig is te veronderstellen dat  $f$  van klasse  $C^1$  is op  $U$ .

**Stelling 5.5.2.** *Als  $f$  holomorf is op  $G$  dan is  $f$  analytisch, en in het bijzonder holomorf én van klasse  $C^1$ , op  $G$ .*

*Bewijs.* Laat  $a \in G$  en  $U = B(a, r)$  een open schijf zijn die geheel binnen  $G$  ligt. We zullen aantonen dat  $f$  op  $U$  een primitieve heeft.

We bewijzen eerst dat voor elke (georiënteerde) enkelvoudig gesloten traplijn  $T$  in  $U$  de integraal  $\int_T f(z)dz$  gelijk aan 0 is. Dit gaat met volledige inductie naar het aantal knooppunten  $n$  van de traplijn. Het idee van de inductiestap is simpel: verdeel zo'n traplijn in twee traplijnen door op een geschikte plaats een segment toe te voegen, waardoor twee enkelvoudig gesloten traplijnen met ieder minder knooppunten ontstaan die elkaar in het segment treffen. Het segment wordt dan in beide richtingen doorlopen en draagt niet bij aan de integraal. Wat zou mis kunnen gaan? Een van de nieuwe traplijnen heeft toch niet minder knooppunten dan de oorspronkelijke traplijn of het segment wordt twee keer in dezelfde richting doorlopen.

Als  $n = 4$  dan is  $T$  een gesloten traplijn met vier knooppunten, een rechthoek dus. We hebben zojuist aangetoond dat daarvoor  $\int_T f(z)dz = 0$  geldt en het is duidelijk dat het binnengebied links ligt wanneer we tegen de klok in over de rechthoek lopen. Stel nu dat we een enkelvoudig gesloten traplijn  $T$  hebben met  $n > 4$  knooppunten. Als er knopen zijn tussen twee aaneengesloten horizontale of twee aaneengesloten

verticale kanten, kunnen we die kanten tot een kant samenvoegen, het aantal knooppunten is met één verminderd en volgens de inductieveronderstelling zijn we klaar.

We mogen nu aannemen dat in ieder knooppunt één horizontale en één verticale kant treffen. Neem een horizontale kant  $L$  van  $T$  die een minimale  $y$ -waarde heeft. Door te verschuiven en met een constante te vermenigvuldigen mogen we aannemen dat  $L = [0, 1]$  en dat we, bij het doorlopen van de traplijn,  $L$  van 0 naar 1 doorlopen. In de eindpunten van  $L$  staan twee verticale kanten van  $T$ :  $S_1$  op de imaginaire as tot hoogte  $y_1$  en  $S_2$  op de lijn  $x = 1$  tot hoogte  $y_2$ . Wanneer we  $T$  doorlopen mogen we in  $(0, y_1)$  beginnen en passeren we eerst  $S_1$ , dan  $L$  en dan  $S_2$ . Boven ieder punt van het lijnstuk  $L$  moet zich een punt van een horizontaal lijnstuk uit  $T$  bevinden. Neem het onderste van deze lijnstukken en noem dit  $L' = \{(x, y') : x'_0 < x < x'_1\}$ ,  $y' > 0$ . We onderscheiden nu een aantal gevallen, het kan handig zijn hierbij een paar tekeningetjes te maken.

- $x_0 \leq 0 \leq 1 \leq x_1$ . Dan is  $y' \geq \max\{y_1, y_2\}$ .
  1. Als  $y' = y_1 = y_2$ , dan is blijkbaar  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $T$  is een rechthoek en we zijn klaar.
  2. Anders is  $y' > \min\{y_1, y_2\}$ . Als  $y_1 \leq y_2$  brengen we een horizontaal lijnstuk  $\sigma$  aan van  $(0, y_1)$  naar  $(1, y_1) \in S_2$ . We vormen de weg  $T_1$  bestaande uit het lijnstuk  $\sigma$ , het deellijnstuk van  $S_2$  dat loopt van  $(1, y_1)$  tot  $(1, y_2)$  en  $T \setminus (S_1 \cup L \cup S_2)$ , en de weg  $T_2 = S_1 \cup L \cup \{(1, y) : 0 \leq y \leq y_1\} \cup \sigma^-$ . Er geldt

$$\int_T f(z) dz = \int_{T_1} - \int_{\sigma} + \int_{T_2} - \int_{\sigma^-} = \int_{T_1} f(z) dz + \int_{T_2} f(z) dz$$

De weg  $T_2$  heeft 4 knooppunten, dus  $\int_{T_2} f(z) dz = 0$ . De weg  $T_1$  heeft in vergelijking met  $T$  het knooppunt  $(1, y_1)$  extra, maar mist de punten  $(0, 0)$  en  $(0, 1)$  en bovendien is  $(0, y_1)$  geen knooppunt meer, omdat  $\sigma$  in het verlengde ligt van het lijnstuk dat vóór  $S_1$  ligt. Dus heeft  $T_1$  minder dan  $n$  knooppunten en  $\int_{T_1} f(z) dz = 0$ . Het geval dat  $y_2 \leq y_1$  gaat volstrekt analoog.

- $0 < x_0 < 1$ . We brengen een verticaal lijnstuk  $\sigma$  aan dat  $(x_0, 0)$  verbindt met  $(x_0, y')$ . We doorlopen  $T$  vanaf  $(0, 0)$ , tot aan het knooppunt  $(x_0, y')$  en komen in ieder geval de punten  $(1, 0)$  en  $(1, y_2)$  tegen. We vervangen dit stuk van  $T$  door  $[0, x_0] \cup \sigma$  en krijgen zo  $T_1$ . Dan heeft  $T_1$  een extra knooppunt  $(x_0, 0)$  maar bevat niet de knooppunten  $(x_0, y')$  en ook niet door  $(1, 0)$  en  $(1, y_2)$ .  $T_1$  heeft dus minder knooppunten dan  $T$ . We vormen  $T_2$  uit  $\sigma^-$  en het stuk van  $T$  dat we weglieten, nl. lopend van  $(x_0, 0)$  via  $(1, 0)$  en  $(0, y_2)$  naar  $(x_0, y')$ . Nu heeft  $T_2$  naast knooppunten van  $T$  één nieuw knooppunt in  $(x_0, 0)$ , maar de knooppunten  $(0, y_1)$  en  $(0, 0)$  behoren niet tot  $T_2$ . Dus ook  $T_2$  heeft minder knooppunten dan  $T$ . Er volgt dat  $\int_T f dz = \int_{T_1} f dz + \int_{T_2} f dz = 0$ .
- $0 < x_1 < 1$  gaat volstrekt analoog.

Uit de hoofdstelling van de complexe integraalrekening volgt dan dat  $f$  een primitieve  $F$  op  $U$  heeft. Deze primitieve  $F$  is holomorf en van klasse  $C^1$  op  $U$  (want  $F' = f$  op  $U$ ) en volgens Stelling 5.4.2 is  $F$  analytisch op  $U$ . Dan is ook  $F' = f$  analytisch op  $U$ . Omdat  $a$  willekeurig in  $G$  gekozen was, is  $f$  analytisch op  $G$ , en dus zeker holomorf en van klasse  $C^1$   $\square$

**Stelling 5.5.3** (Stelling van Cauchy (sterke versie)). *Laat  $f = u + iv$  holomorf zijn op een omgeving van de afsluiting van een net gebied  $D$  in  $\mathbb{C}$ , met rand  $C$ , dan is*

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

*Bewijs.* Stelling 5.5.2 geeft dat  $f$  van klasse  $C^1$  is en holomorf, dus aan de voorwaarden van Stelling 5.3.3 voldoet.  $\square$

**Stelling 5.5.4** (Residuenstelling). *Laat  $f$  holomorf en van klasse  $C^1$  zijn op een omgeving van de afsluiting van een net gebied  $D$  in  $\mathbb{C}$ , met uitzondering van eindig veel geïsoleerde singulariteiten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  in  $D$ . Als  $C$  de rand van  $D$  is, positief georiënteerd, dan*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z=a_j} f(z).$$

*Bewijs.* Pas Cauchy toe op  $D_\epsilon = D \setminus \left( \overline{B(a_1, \epsilon)} \cup \dots \cup \overline{B(a_n, \epsilon)} \right)$  (met  $\epsilon$  zo klein dat de  $B(a_i, \epsilon)$  alle disjunct zijn en bevat in  $D$ ). De rand van  $D_\epsilon$  bestaat uit  $C$ , positief georiënteerd samen met de cirkeltjes  $C(a_j, \epsilon)$ , negatief georiënteerd. Dan is

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)dz + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a_j, \epsilon)^-} f(z)dz = 0$$

en dus:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a_j, \epsilon)^+} f(z)dz$$

waaruit de uitspraak van de stelling direct volgt.  $\square$

**Samenvatting** De volgende vier uitspraken zijn equivalent voor een functie  $f = u + iv$  op een gebied  $G$ :

- $f$  is holomorf op  $G$ ;
- $f$  is holomorf en van klasse  $C^1$  op  $G$ ;
- $f$  is analytisch op  $G$ ;
- $(u, v)$  is van klasse  $C^1$  en voldoet aan Cauchy-Riemann op  $G$ .

Tenslotte nog enkele gevolgen van de behandelde theorie.

**Definitie 5.5.5.** Een gebied  $G$  is *enkelvoudig samenhangend* als voor iedere enkelvoudig gesloten traplijn in  $G$  ook het binnengebied van deze traplijn tot  $G$  behoort.

In het algemeen verdelen *Jordankrommen*—dat zijn enkelvoudig gesloten krommen gedefinieerd door *continue* parametrizingen—in het platte vlak dat vlak in twee gebieden, een begrensd gebied, het binnengebied, een onbegrensd gebied, het buitengebied (en natuurlijk de kromme zelf). Dit is de inhoud van de stelling van Jordan (geen bewijs).

**Stelling 5.5.6** (Holomorfie versus kringintegraal gelijk aan nul). *Zij  $G$  gebied en  $f$  continu op  $G$ .*

1. *Als  $G$  enkelvoudig samenhangend is, dan geldt: Als  $f$  holomorf is op  $G$  dan  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  voor elke gesloten kromme  $\gamma$  in  $G$ .*
2. *Er geldt:  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  voor elke enkelvoudig gesloten traplijn  $\gamma$  in  $G \implies f$  holomorf op  $G$  (stelling van Morera).*

*Bewijs.* 1. Uit de stelling van Cauchy en de enkelvoudige samenhang van  $G$  volgt dat  $\int_T f(z) dz = 0$  voor elke enkelvoudig gesloten traplijn in  $G$  omdat  $f$  dan holomorf is op een omgeving van de afsluiting van het binnengebied van  $T$ , een net gebied. Uit de hoofdstelling van de complexe integratietheorie volgt dan dat ook  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  voor elke gesloten kromme  $\gamma$  in  $G$ .

2. Uit het gegeven en de hoofdstelling van de complexe integratietheorie volgt dat  $f$  een primitieve  $F$  op  $G$  heeft. Dus  $F$  is holomorf op  $G$  maar dan  $f = F'$  óók.  $\square$

## Opgaven

**Opgave 5.1.** Bereken  $\int_{\gamma} \operatorname{hw} \sqrt{z} dz$  in de volgende gevallen.

1.  $\gamma = C(2, 1)^+$
2.  $\gamma = C(1, 1)^+$
3.  $\gamma = C(0, 1)^+$

**Opgave 5.2.** Bereken  $\int_{C(0,1)^+} \operatorname{hw} \log z dz$ .

**Opgave 5.3.** Bereken  $\int_{C(0,1)^+} f(z) dz$  als  $f(z)$  de holomorfe tak van  $\log z$  is op  $G = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  met  $f(-1) = \pi i$ .

**Opgave 5.4.** Bereken voor  $a \in \mathbb{R}$  de integraal  $\int_{C(0,1)^+} \operatorname{hw} z^a dz$ .

**Opgave 5.5.** Bereken  $\int_{C(0,1)^+} \bar{z} dz$  en  $\int_{C(0,1)^+} \bar{z}^2 dz$ .

**Opgave 5.6.** Zij  $f(z) = \frac{1}{z^3+8}$ . Bewijs dat  $\int_{C(0,R)^+} f(z) dz \rightarrow 0$  als  $R \rightarrow \infty$ . Gebruik dit resultaat om  $\int_{C(-2,4)^+} f(z) dz$  te berekenen.



**Opgave 5.7.** Gegeven een polynoom  $P$  van graad  $n$  met kopcoëfficiënt  $a$  en een polynoom  $Q$  van graad  $m$  met kopcoëfficiënt  $b$ . Kies  $R$  zó groot dat alle nulpunten van  $Q$  binnen  $C(0, R)$  liggen. Bewijs dat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)^+} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \begin{cases} 0 & \text{als } m \geq n + 2, \\ \frac{a}{b} & \text{als } m = n + 1. \end{cases}$$

Geef ook een methode aan voor de situatie  $m \leq n$ .

**Opgave 5.8.** Bereken voor  $\gamma = C(0, 2)^+$  de volgende integralen.

1.  $\int_{\gamma} \frac{z^3}{z^5-1} dz$ ,
2.  $\int_{\gamma} \frac{z^3}{(z^2-1)^2} dz$ ,
3.  $\int_{\gamma} \frac{z^3}{z^3+z^2-z-1} dz$ .

**Opgave 5.9.** Er bestaat geen holomorfe tak van  $\log z$  op  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Uit hoofdstuk III volgt dat zo'n tak  $g$  zou moeten voldoen aan  $g'(z) = \frac{1}{z}$  op  $G$ . Dus de functie  $\frac{1}{z}$  zou een primitieve hebben op  $G$ . Laat zien dat dat niet waar is.

**Opgave 5.10.** Zij  $\gamma$  een gesloten integratieweg in  $\mathbb{C}$  die niet door het punt 0 gaat. Wat zijn de mogelijke waarden van  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ ? En van  $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz$ ?

**Opgave 5.11.** Zij  $n \in \mathbb{N}$  en  $g$  holomorf op een omgeving van het punt  $a$ . Laat

$$f(z) = \frac{c-n}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c-1}{z-a} + g(z).$$

Toon aan dat  $\text{Res}_{z=a} f(z) = c-1$ .

**Opgave 5.12.** Bereken de volgende residuen op twee manieren.

1. het residu in het punt 0 van  $\frac{e^z}{z^2}$ ,
2. het residu in het punt 1 van  $\frac{e^z}{(z-1)^3}$ ,
3. het residu in het punt 0 van  $\frac{\sin z}{z^2}$ .

**Opgave 5.13.** Bereken het residu in het punt  $i$  van  $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ .

**Opgave 5.14.** Bereken  $\int_{C(0,1)^+} \frac{e^z}{z^3} dz$ .

**Opgave 5.15.** Bereken  $\int_{C(0,2)^+} \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} dz$ .

**Opgave 5.16.** Bereken  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2z}{(z-1)^4(z-3)} dz$  als

1.  $\gamma = C(0, 4)^+$ ,
2.  $\gamma = C(0, 2)^-$ .

**Opgave 5.17.** Bereken  $\int_{C(0,r)^+} \frac{e^z}{z-2} dz$  voor  $r = 3$  en voor  $r = 1$ .

**Opgave 5.18.** Laat zien dat voor  $t \in \mathbb{R}$  geldt dat  $\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,3)^+} \frac{e^{zt}}{z^2+1} dz = \sin t$ .

## Tentamenopgaven

Opgave 5.19. Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t + 4}{\cos t + 5/3} dt.$$

Opgave 5.20. Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos t} dt.$$

## 6 Contourintegratie

### 6.1 Voorbeelden

We zullen nu de voorgaande theorie toepassen om zekere reële integralen en de som van zekere reële reeksen uit te rekenen. We doen dat aan de hand van een aantal karakteristieke voorbeelden. Bij de behandeling van deze voorbeelden ontdekken we een aantal algemene uitspraken die we ook in andere gevallen kunnen gebruiken.

**Voorbeeld 6.1.1.** Bepaal  $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{b+a \cos t} dt$  als  $0 < a < b$ .

Stel  $z = e^{it}$ ,  $\frac{dz}{dt} = ie^{it}$ , dus  $dt = \frac{dz}{iz}$ . Verder correspondeert het interval  $[0, 2\pi]$  met de cirkel  $C(0, 1)^+$ , de positief doorlopen eenheidscirkel. En  $\cos t = \frac{z+1/z}{2}$  en  $\sin t = \frac{z-1/z}{2i}$ . We krijgen dan:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{b+a \cos t} dt = \int_{C(0,1)^+} \frac{1}{b+a \frac{z+1/z}{2}} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{2}{ia} \int_{C(0,1)^+} \frac{1}{z^2 + \frac{2b}{a}z + 1} dz$$

Ontbind nu  $z^2 + \frac{2b}{a}z + 1 = (z - z_1)(z - z_2)$ , waarin  $z_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}$  en  $z_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-a^2}}{a}$ . Merk op  $|z_2| > 1$  en dus  $|z_1| < 1$  (omdat  $z_1 z_2 = 1$ ). Dus  $I = \frac{2}{ia} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_1} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{4\pi}{a} \cdot \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}$ . Merk nog op dat uit symmetrieoverwegingen volgt dat  $\int_0^\pi \frac{1}{b+a \cos t} dt = \frac{\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}$ .

**Conclusie** Als we een integraal van een goniometrische functie over het interval  $[0, 2\pi]$  moeten uitrekenen dan kan de substitutie  $z = e^{it}$ , met  $dt = \frac{dz}{iz}$  van nut zijn. Deze voert de integraal over in een integraal over de positief doorlopen eenheidscirkel. Hierbij geldt  $\cos t = \frac{z+1/z}{2}$  en  $\sin t = \frac{z-1/z}{2i}$ .

**Voorbeeld 6.1.2.** Bepaal  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$ .

Bekijk voor  $R > 1$  de kromme  $\Gamma_R = [-R, R] \cup \gamma_R$ , positief georiënteerd. Hierin is  $\gamma_R$  de halve cirkel geparametriseerd door  $z = Re^{it}$ , waarbij  $0 \leq t \leq \pi$ . Laat nu  $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$  en bekijk  $\int_{\Gamma_R} f(z) dz$ .

Stap 1. Er geldt:  $\int_{-R}^R f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{1}{x^4+1} dx$ .

Zoals gebruikelijk hebben we hier gebruikt dat we meestal  $\int_a^b f(z) dz$  schrijven in plaats van  $\int_{[a,b]} f(z) dz$ .

## 6 Contourintegratie

Stap 2. Verder is volgens de *ML*-ongelijkheid

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \pi R \cdot \frac{1}{R^4 - 1} \rightarrow 0 \quad \text{als } R \rightarrow \infty.$$

Hierin gebruiken we dat voor  $z \in \gamma_R$  geldt

$$|z^4 + 1| \geq ||z^4| - |1|| = ||z|^4 - 1| = |R^4 - 1| = R^4 - 1 \quad (\text{omdat } R > 1).$$

Een alternatief is dit: schrijf  $f(z) = \frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{z^4} \cdot \frac{1}{1+1/z^4}$ , en omdat  $1 + 1/z^4 \rightarrow 1$  als  $|z| \rightarrow \infty$  volgt dat er een  $R_0$  is zo, dat  $|f(z)| \leq \frac{2}{|z|^4}$  als  $|z| \geq R_0$ . Dus voor  $R \geq R_0$  volgt dat

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \pi R \cdot \frac{2}{R^4} = \frac{2\pi}{R^3} \rightarrow 0 \quad \text{als } R \rightarrow \infty.$$

Stap 3. De singuliere punten van  $f$  binnen de kromme  $\Gamma_R$  zijn  $z_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}$  en  $z_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}}$ . Dus  $\text{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{4z_1^3}$  en  $\text{Res}_{z=z_2} f(z) = \frac{1}{4z_2^3}$ . Beide residuen opgeteld levert  $\frac{\sqrt{2}}{4i}$ .

Stap 4. De residuenstelling zegt dat

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}_{z=z_1} f(z) + \text{Res}_{z=z_2} f(z)).$$

Dus

$$\int_{-R}^R \frac{1}{x^4+1} dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \cdot \frac{\sqrt{2}}{4i}.$$

Laat nu  $R \rightarrow \infty$  en je vindt dat  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ . Uit symmetrieoverwegingen volgt dat  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ .

In dit en veel andere voorbeelden gebruiken we de driehoeksongelijkheden:

**Lemma 6.1.3.** *Als  $z$  en  $w$  complexe getallen zijn dan  $||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$ .*

Als in het voorbeeld bewijst men verder de volgende hulpstelling.

**Lemma 6.1.4.** *Laat  $P$  en  $Q$  polynomen zijn, zodat  $\text{graad}(Q) \geq 2 + \text{graad}(P)$ . Als  $\gamma_R$  de halve cirkel om de oorsprong is in het bovenhalfvlak met beginpunt  $R$  en eindpunt  $-R$ , dan geldt*

$$\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \rightarrow 0 \quad \text{als } R \rightarrow \infty.$$

**Voorbeeld 6.1.5.** We bepalen weer  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$ , maar nu op een iets slimmere manier, met iets minder rekenwerk en met een methode die te generaliseren is naar bijvoorbeeld de bepaling van  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^9+1} dx$ .

Bekijk voor  $R > 1$  de kromme  $\Gamma_R = [0, R] \cup \gamma_R \cup I_R$ , positief georiënteerd. Hierin is nu  $\gamma_R$  de kwartcirkel geparametriseerd door  $z = Re^{it}$  met  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  en  $I_R$  het lijnstuk van  $iR$  naar  $0$ . Laat nu  $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$  en bekijk  $\int_{\Gamma_R} f(z) dz$ .

Stap 1. Als boven geldt:  $\int_0^R f(z) dz = \int_0^R \frac{1}{x^4+1} dx$ .

Stap 2. Verder is, analoog aan de redenering in voorbeeld 2, volgens de *ML*-ongelijkheid

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz \rightarrow 0 \text{ als } R \rightarrow \infty.$$

Stap 3. Parametriseer  $I_R^-$  met  $z(x) = ix$  met  $0 \leq x \leq R$ . Dan geldt

$$\int_{I_R} \frac{1}{z^4+1} dz = - \int_{I_R^-} \frac{1}{z^4+1} dz = -i \int_0^R \frac{1}{x^4+1} dx.$$

Stap 4. Er is nu maar één singulier punt, namelijk het punt  $z_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}$ , en  $\text{Res}_{z=z_1} f(z) = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$ .

Stap 5. De residuenstelling zegt dat

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \text{ Res}_{z=z_1} f(z).$$

Dus

$$\int_0^R \frac{1}{x^4+1} dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{I_R} f(z) dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1+i}{4\sqrt{2}}\right).$$

Laat nu  $R \rightarrow \infty$  en je vindt dat  $(1-i) \int_0^\infty \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi(1-i)}{2\sqrt{2}}$ , en dus (links en rechts delen door de factor  $1-i$ ) leidt tot  $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ .

**Voorbeeld 6.1.6.** Bepaal  $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2+1} dx$ .

We bestuderen weer voor  $R > 1$  de contour  $\Gamma_R = [-R, R] \cup \gamma_R$ , waarin  $\gamma_R$  nu de halve cirkel om de oorsprong is in het bovenhalfvlak met beginpunt  $R$  en eindpunt  $-R$ . Laat  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$  en bekijk  $\int_{\Gamma_R} f(z) dz$ .

Stap 1.  $\int_{-R}^R f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx$ .

Stap 2. Voor  $z = x + iy \in \gamma_R$  geldt dat  $e^{iz} = e^{-y}e^{ix}$ , dus  $|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$ . Dus  $|f(z)| \leq \frac{1}{R^2-1}$  en bijgevolg  $\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \rightarrow 0$  als  $R \rightarrow \infty$ .

Stap 3. Er is één singulier punt binnen  $\Gamma_R$  en wel het punt  $i$ . En  $\text{Res}_{z=i} f(z) = \frac{e^{i \cdot i}}{2i} = \frac{1}{2ic}$ .

## 6 Contourintegratie

Stap 4. De residuenstelling spreekt uit dat  $\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z)$ , dus

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2ie}.$$

Laat  $R \rightarrow \infty$  dan volgt  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{e}$ . Neem nu links en rechts het reële deel en je vindt:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{e}$ . Uit symmetrieoverwegingen volgt nog dat  $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2e}$ .

Een soortgelijk bewijs als dat van het vorige lemma, met gebruikmaking van  $|e^{iaz}| \leq 1$  als  $\operatorname{Im} z \geq 0$  (als  $a > 0$ ) levert het volgende resultaat. Laat  $P$  en  $Q$  polynomen zijn, zodat  $\operatorname{graad}(Q) \geq 2 + \operatorname{graad}(P)$ . Als  $\gamma_R$  de halve cirkel om de oorsprong is in het bovenhalfvlak met beginpunt  $R$  en eindpunt  $-R$ , en  $a > 0$ , dan geldt

$$\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz \rightarrow 0 \text{ als } R \rightarrow \infty.$$

Het is mogelijk deze schatting te verfijnen met als resultaat:

**Lemma 6.1.7** (van Jordan). *Laat  $P$  en  $Q$  polynomen zijn, zodanig dat  $\operatorname{graad}(Q) > \operatorname{graad}(P)$ . Laat  $\gamma_R$  de halve cirkel om de oorsprong zijn in het bovenhalfvlak met beginpunt  $R$  en eindpunt  $-R$ , en  $a > 0$ . Dan geldt*

$$\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz \rightarrow 0 \text{ als } R \rightarrow \infty.$$

Het bewijs gaat als volgt. Zij  $m$  gelijk aan  $\operatorname{graad}(Q) - \operatorname{graad}(P)$ . Laat  $R_0$  en  $c$  zó zijn dat voor  $|z| \geq R_0$  geldt dat

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{c}{|z|^m}.$$

Dan geldt voor  $R \geq R_0$  dat

$$\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz = \int_0^\pi \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} e^{iaRe^{it}} iRe^{it} dt$$

en dus

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{c}{R^m} e^{-aR \sin t} R dt.$$

Omdat voor  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  geldt dat  $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$  volgt dat

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz \right| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c}{R^{m-1}} e^{-aR \sin t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2c}{R^{m-1}} e^{-\frac{2aRt}{\pi}} dt$$

en dus (vanwege  $m \geq 1$ ):

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz \right| \leq \frac{2c}{R^{m-1}} \cdot \frac{\pi}{2aR} = \frac{\pi c}{aR^m} \rightarrow 0 \text{ als } R \rightarrow \infty.$$

**Voorbeeld 6.1.8.** Bepaal de integraal  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ .

Bekijk voor  $0 < \epsilon < R$  de kromme  $\Gamma(\epsilon, R) = [\epsilon, R] \cup \gamma_R \cup [-R, -\epsilon] \cup -\gamma_\epsilon$ . Hierin is  $\gamma_R$  weer de halve cirkel rond 0 in het bovenhalfvlak van  $R$  naar  $-R$ . Een soortgelijke definitie voor  $\gamma_\epsilon$ , dus  $-\gamma_\epsilon$  is de halve cirkel rond 0 in het bovenhalfvlak met beginpunt  $-\epsilon$  en eindpunt  $\epsilon$ . Laat  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$  en bekijk nu  $\int_{\Gamma(\epsilon, R)} f(z) dz$ .

Stap 1. Er geldt:  $\int_\epsilon^R f(z) dz = \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx$ .

Stap 2. Er geldt verder:  $\int_{-R}^{-\epsilon} f(z) dz = \int_\epsilon^R f(-x) dx = -\int_\epsilon^R \frac{e^{-ix}}{x} dx$ . In de eerste overgang hebben we de substitutie  $z = -x$  gebruikt. Ga de details na!

Stap 3. Uit het laatst geformuleerde lemma volgt dat  $\int_{\gamma_R} f(z) dz \rightarrow 0$  als  $R \rightarrow \infty$ .

Stap 4. We schrijven nu

$$\int_{-\gamma_\epsilon} f(z) dz = \int_{-\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz + \int_{-\gamma_\epsilon} \frac{1}{z} dz.$$

Nu geldt dat  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iz} - 1}{z} = i$  (het is de limiet van een differentiequotient), dus in het bijzonder is er een  $\delta > 0$  zo dat  $\left| \frac{e^{iz} - 1}{z} \right| \leq 2$  als  $0 < |z| < \delta$ . De *ML*-schatting laat zien dat  $\left| \int_{-\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz \right| \leq 2\pi\epsilon$  als  $0 < \epsilon < \delta$ . In het bijzonder geldt dat  $\int_{-\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz \rightarrow 0$  als  $\epsilon \downarrow 0$ .

Verder is  $\int_{-\gamma_\epsilon} \frac{1}{z} dz = -\int_{\gamma_\epsilon} \frac{1}{z} dz$ , en deze kan uitgerekend worden met de parametrisering  $z = \epsilon e^{it}$  met  $0 \leq t \leq \pi$ . De uitkomst is  $\int_{-\gamma_\epsilon} \frac{1}{z} dz = -i\pi$ .

Stap 5. Uit de stelling van Cauchy volgt  $\int_{\Gamma(\epsilon, R)} f(z) dz = 0$  en in combinatie met de vier deelintegralen boven leidt dat tot:

$$2i \int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{-\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz - i\pi = 0.$$

Laat nu  $R \rightarrow \infty$  en  $\epsilon \downarrow 0$ , en je vindt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Een resultaat boven dat we nog wel eens gaan gebruiken is het volgende.

**Lemma 6.1.9.** Als  $f : [-R, -\epsilon] \rightarrow \mathbb{C}$  continu is dan geldt:

$$\int_{-R}^{-\epsilon} f(z) dz = \int_{\epsilon}^R f(-x) dx.$$

**Voorbeeld 6.1.10.** Bereken  $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx$ .

Definieer een holomorfe tak  $f(z)$  van  $\log z$  op  $\mathbb{C} \setminus i(-\infty, 0]$  door

$$f(z) = \ln |z| + i\phi_z$$

met  $\arg z = \phi_z$  en  $-\frac{\pi}{2} < \phi_z < \frac{3\pi}{2}$ .

Bekijk nu voor  $0 < \epsilon < R$  weer de eerder tegengekomen kromme

$$\Gamma(\epsilon, R) = [\epsilon, R] \cup \gamma_R \cup [-R, -\epsilon] \cup -\gamma_{\epsilon}.$$

Hierin is  $\gamma_R$  weer de halve cirkel rond 0 in het bovenhalfvlak van  $R$  naar  $-R$ . Een soortgelijke definitie voor  $\gamma_{\epsilon}$ , dus  $-\gamma_{\epsilon}$  is de halve cirkel rond 0 in het bovenhalfvlak met beginpunt  $-\epsilon$  en eindpunt  $\epsilon$ . We nemen  $0 < \epsilon < 1$  en  $R > 1$  en bekijken

$$\int_{\Gamma(\epsilon, R)} \frac{f(z)}{z^2+1} dz.$$

Stap 1. Voor  $x \in [\epsilon, R]$  geldt  $f(x) = \ln x$ , dus  $\int_{\epsilon}^R \frac{f(x)}{x^2+1} dx = \int_{\epsilon}^R \frac{\ln x}{x^2+1} dx$ .

Stap 2. Er geldt volgens voorgaand lemma dat  $\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{f(z)}{z^2+1} dz = \int_{\epsilon}^R \frac{f(-x)}{x^2+1} dx$ . Nu geldt voor  $x \in [\epsilon, R]$  dat  $f(-x) = \ln |-x| + i\pi = \ln x + i\pi$ . Dus

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{f(z)}{z^2+1} dz = \int_{\epsilon}^R \frac{\ln x}{x^2+1} dx + i\pi \int_{\epsilon}^R \frac{1}{x^2+1} dx.$$

Stap 3. Voor  $z \in \gamma_R$  geldt:  $|f(z)| = |\ln |z| + i\phi_z| \leq |\ln |z|| + |\phi_z| \leq \ln R + \pi$ , want  $R > 1$ . En ook  $|z^2+1| \geq ||z^2|-1| = |R^2-1| = R^2-1$ , weer omdat  $R > 1$ . Dus:

$$\left| \frac{f(z)}{z^2+1} \right| \leq \frac{\ln R + \pi}{R^2-1}.$$

Zodat volgt:

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^2+1} dz \right| \leq \pi R \cdot \frac{\ln R + \pi}{R^2-1} \rightarrow 0 \quad \text{als } R \rightarrow \infty.$$

Stap 4. Voor  $z \in -\gamma_{\epsilon}$  vinden we op soortgelijke manier,  $|f(z)| = |\ln |z| + i\phi_z| \leq |\ln |z|| + |\phi_z| \leq -\ln \epsilon + \pi$  en  $|z^2+1| \geq ||z^2|-1| = |\epsilon^2-1| = 1-\epsilon^2$ , want  $0 < \epsilon < 1$ . Dus:

$$\left| \frac{f(z)}{z^2+1} \right| \leq \frac{-\ln \epsilon + \pi}{1-\epsilon^2}.$$



Zodat volgt:

$$\left| \int_{-\gamma_\epsilon} \frac{f(z)}{z^2+1} dz \right| \leq \pi\epsilon \cdot \frac{-\ln \epsilon + \pi}{1-\epsilon^2} \rightarrow 0 \quad \text{als } \epsilon \downarrow 0.$$

Gebruikt wordt hier dat  $\epsilon \ln \epsilon \rightarrow 0$  als  $\epsilon \downarrow 0$ .

Stap 5. Binnen  $\Gamma(\epsilon, R)$  is  $i$  het enige singuliere punt en dus is

$$\text{Res}_{z=i} \frac{f(z)}{z^2+1} = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{f(z)}{(z-i)(z+i)} = \frac{f(i)}{2i} = \frac{\frac{\pi}{2}i}{2i} = \frac{\pi}{4}.$$

Stap 6. De residuenstelling toegepast op onze integraal over  $\Gamma(\epsilon, R)$  geeft:

$$\int_{\Gamma(\epsilon, R)} \frac{f(z)}{z^2+1} dz = 2\pi i \text{ Res}_{z=i} \frac{f(z)}{z^2+1}.$$

Uit dit alles volgt dat

$$\int_\epsilon^R \frac{\ln x}{x^2+1} dx + \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^2+1} + \int_\epsilon^R \frac{\ln x}{x^2+1} dx + i\pi \int_\epsilon^R \frac{1}{x^2+1} dx + \int_{-\gamma_\epsilon} \frac{f(z)}{z^2+1} dz = \frac{\pi^2 i}{2}.$$

Laat nu  $R \rightarrow \infty$  en  $\epsilon \downarrow 0$ , en neem daarna het reële deel, dan volgt:

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1} dx = 0.$$

Nevenresultaat, door imaginaire deel te nemen:  $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2}$ .

**Voorbeeld 6.1.11.** Bereken  $\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{x^2+1} dx$ .

We nemen weer  $\Gamma(\epsilon, R)$  als in het voorbeeld boven, met  $0 < \epsilon < 1$  en  $R > 1$ . Laat nu  $g(z)$  gedefinieerd zijn op  $\mathbb{C} \setminus i(-\infty, 0]$  door

$$g(z) = e^{\frac{1}{3}f(z)} = e^{\frac{1}{3}(\ln|z| + i\phi_z)} = |z|^{1/3} e^{\frac{1}{3}i\phi_z},$$

met  $\arg z = \phi_z$  en  $-\frac{\pi}{2} < \phi_z < \frac{3\pi}{2}$ . We bekijken

$$\int_{\Gamma(\epsilon, R)} \frac{g(z)}{z^2+1} dz.$$

Stap 1. Voor  $x \in [\epsilon, R]$  geldt  $g(x) = x^{1/3}$ , dus  $\int_\epsilon^R \frac{g(x)}{x^2+1} dx = \int_\epsilon^R \frac{x^{1/3}}{x^2+1} dx$ .

Stap 2. Er geldt volgens het bovenstaande lemma dat  $\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{g(z)}{z^2+1} dz = \int_\epsilon^R \frac{g(-x)}{x^2+1} dx$ .

Nu geldt voor  $x \in [\epsilon, R]$  dat  $g(-x) = |-x|^{1/3} e^{\frac{1}{3}i\pi} = x^{1/3} e^{\frac{1}{3}i\pi}$ . Dus

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{g(z)}{z^2+1} dz = e^{\frac{1}{3}i\pi} \int_\epsilon^R \frac{x^{1/3}}{x^2+1} dx.$$

## 6 Contourintegratie

Stap 3. Voor  $z \in \gamma_R$  geldt:  $|g(z)| = ||z|^{1/3} e^{\frac{1}{3}i\phi_z}| = R^{1/3}$ , dus:

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{g(z)}{z^2 + 1} dz \right| \leq \pi R \cdot \frac{R^{1/3}}{R^2 - 1} \rightarrow 0 \quad \text{als } R \rightarrow \infty.$$

Stap 4. Analoog:

$$\left| \int_{-\gamma_\epsilon} \frac{g(z)}{z^2 + 1} dz \right| \leq \pi \epsilon \cdot \frac{\epsilon^{1/3}}{1 - \epsilon^2} \rightarrow 0 \quad \text{als } \epsilon \downarrow 0$$

Stap 5. Binnen  $\Gamma(\epsilon, R)$  is  $i$  het enige singuliere punt en dus is

$$\text{Res}_{z=i} \frac{g(z)}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{g(z)}{(z - i)(z + i)} = \frac{g(i)}{2i} = \frac{e^{\frac{1}{6}i\pi}}{2i}.$$

Stap 6. De residuenstelling toegepast op onze integraal over  $\Gamma(\epsilon, R)$  geeft:

$$\int_{\Gamma(\epsilon, R)} \frac{g(z)}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \text{ Res}_{z=i} \frac{g(z)}{z^2 + 1}.$$

Combinatie van dit alles laat zien dat

$$(1 + e^{\frac{1}{3}i\pi}) \int_\epsilon^R \frac{x^{1/3}}{x^2 + 1} dx + \int_{\gamma_R} \frac{g(z)}{z^2 + 1} + \int_{-\gamma_\epsilon} \frac{g(z)}{z^2 + 1} dz = \pi \cdot e^{\frac{1}{6}i\pi}$$

Laat nu  $R \rightarrow \infty$ , vervolgens  $\epsilon \downarrow 0$ , dan volgt:

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{x^2 + 1} dx = \pi \cdot \frac{e^{\frac{1}{6}i\pi}}{1 + e^{\frac{1}{3}i\pi}} = \frac{\pi}{e^{-\frac{1}{6}i\pi} + e^{\frac{1}{6}i\pi}} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

**Voorbeeld 6.1.12.** We gaan  $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2 + 1}$  berekenen door voor  $n = 1, 2, 3, \dots$  de functie  $\frac{\pi \cot \pi z}{z^2 + 1}$  te integreren over de positief georiënteerde omtrek  $V_n$  van het vierkant met als hoekpunten  $(n + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ .

We formuleren eerst een lemma dat gebruikt kan worden in een dergelijke situatie.

**Lemma 6.1.13.** *De geïsoleerde singulariteiten van de functie  $\pi \cot \pi z$  bevinden zich in de gehele getallen  $k$ , en als de functie  $f$  analytisch is in een omgeving van het punt  $k \in \mathbb{Z}$  dan*

$$\text{Res}_{z=k} \pi \cot(\pi z) f(z) = f(k).$$

Zij  $V_n$  de omtrek van het vierkant met als hoekpunten  $(n + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ , dan geldt:

$$|\pi \cot \pi z| \leq 2\pi, \quad z \in V_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

*Bewijs.* Het residu reken je eenvoudig na (opgave), de begrensdeheid van  $|\pi \cot \pi z|$  heb je in Opgave 1.15 bewezen.  $\square$

Stap 1. Omdat  $z \in V_n$  geldt  $|z| \geq n + \frac{1}{2}$ . We gebruiken het tweede deel van het bovenstaande lemma om  $\pi \cot \pi z$  te schatten, en passen de ML ongelijkheid toe:

$$\left| \int_{V_n} \frac{\pi \cot \pi z}{z^2 + 1} dz \right| \leq 8\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2\pi}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - 1} \rightarrow 0 \quad \text{als } n \rightarrow \infty.$$

Stap 2. Volgens het andere deel van het lemma geldt:  $\text{Res}_{z=k} \frac{\pi \cot \pi z}{z^2 + 1} = \frac{1}{k^2 + 1}$ , voor  $k \in \mathbb{Z}$ . Verder geldt  $\text{Res}_{z=i} \frac{\pi \cot \pi z}{z^2 + 1} = \frac{\pi \cot \pi i}{2i} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}}$ . Geheel analoog:  $\text{Res}_{z=-i} \frac{\pi \cot \pi z}{z^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}}$ .

Stap 3. De residuenstelling zegt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{V_n} \frac{\pi \cot \pi z}{z^2 + 1} dz = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{k^2 + 1} + \pi \frac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}}.$$

We nemen vervolgens  $n \rightarrow \infty$ . Dan volgt

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} + \pi \frac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}} = 0$$

en dus

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}.$$

**Voorbeeld 6.1.14.** We berekenen tenslotte  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + 1}$ . Dat kan analoog aan de opzet boven, maar nu draait het om  $\int_{V_n} \frac{\pi}{(z^2 + 1) \sin \pi z} dz$  met  $V_n$  als boven. Eerst weer een lemma, waarvan we het bewijs aan de lezer overlaten.

**Lemma 6.1.15.** *De geïsoleerde singulariteiten van de functie  $\frac{\pi}{\sin \pi z}$  bevinden zich in de gehele getallen  $k$ , en als de functie  $f$  analytisch is in een omgeving van het punt  $k \in \mathbb{Z}$  dan*

$$\text{Res}_{z=k} \frac{\pi}{\sin \pi z} f(z) = (-1)^k f(k).$$

Zij  $V_n$  de omtrek van het vierkant met als hoekpunten  $(n + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ , dan geldt:

$$\left| \frac{\pi}{\sin \pi z} \right| \leq 2\pi, \quad z \in V_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Analoog aan boven ziet men in dat  $\int_{V_n} \frac{\pi}{(z^2 + 1) \sin \pi z} dz \rightarrow 0$  als  $n \rightarrow \infty$ . Verder is  $\text{Res}_{z=k} \frac{\pi}{(z^2 + 1) \sin \pi z} = \frac{(-1)^k}{k^2 + 1}$  voor  $k \in \mathbb{Z}$ . En  $\text{Res}_{z=i} \frac{\pi}{(z^2 + 1) \sin \pi z} = \frac{\pi}{e^{-\pi} - e^{\pi}} = \text{Res}_{z=-i} \frac{\pi}{(z^2 + 1) \sin \pi z}$ . Men vindt uiteindelijk:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + 1} = \frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}.$$

## 6.2 Lijst van de lemma's

**Lemma 6.2.1.** Als  $z$  en  $w$  complexe getallen zijn dan geldt  $||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$ .

**Lemma 6.2.2.** Laat  $P$  en  $Q$  polynomen zijn, zodat  $\text{graad}(Q) \geq 2 + \text{graad}(P)$ . Als  $\gamma_R$  de halve cirkel om de oorsprong is in het bovenhalfvlak met beginpunt  $R$  en eindpunt  $-R$ , dan geldt

$$\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \rightarrow 0 \quad \text{als } R \rightarrow \infty.$$

**Lemma 6.2.3.** Laat  $P$  en  $Q$  polynomen zijn, zodat  $\text{graad}(Q) \geq 1 + \text{graad}(P)$ . Als  $\gamma_R$  de halve cirkel om de oorsprong is in het bovenhalfvlak met beginpunt  $R$  en eindpunt  $-R$ , en  $a > 0$ , dan geldt

$$\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz \rightarrow 0 \quad \text{als } R \rightarrow \infty.$$

**Lemma 6.2.4.** Als  $f : [-R, -\epsilon] \rightarrow \mathbb{C}$  continu is dan geldt:

$$\int_{-R}^{-\epsilon} f(z) dz = \int_{\epsilon}^R f(-x) dx.$$

**Lemma 6.2.5.** De geïsoleerde singulariteiten van de functie  $\pi \cot \pi z$  bevinden zich in de gehele getallen  $k$ . Als de functie  $f$  analytisch is in een omgeving van het punt  $k \in \mathbb{Z}$  dan

$$\text{Res}_{z=k} \pi \cot \pi z f(z) = f(k).$$

Zij nu  $V_n$  de omtrek van het vierkant met als hoekpunten  $(n + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ , dan geldt:

$$|\pi \cot \pi z| \leq 2\pi, z \in V_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Lemma 6.2.6.** De geïsoleerde singulariteiten van de functie  $\frac{\pi}{\sin \pi z}$  bevinden zich in de gehele getallen  $k$ , en als de functie  $f$  analytisch is in een omgeving van het punt  $k \in \mathbb{Z}$  dan

$$\text{Res}_{z=k} \frac{\pi}{\sin \pi z} f(z) = (-1)^k f(k).$$

Zij  $V_n$  de omtrek van het vierkant met als hoekpunten  $(n + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ , dan geldt:

$$\left| \frac{\pi}{\sin \pi z} \right| \leq 2\pi, z \in V_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

## Opgaven

**Opgave 6.1.** Laat zien dat  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+3\sin t} = \frac{\pi}{2}$ .

**Opgave 6.2.** Laat zien dat  $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t \, dt = \binom{2n}{n} \cdot \frac{2\pi}{4^n}$ .

**Opgave 6.3.** Bereken  $\int_0^\infty \frac{1}{x^9+1} \, dx$ .

**Opgave 6.4.** Bereken de "Fourierintegraal"  $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{itx}}{x^2+a^2} \, dx$  voor  $t \in \mathbb{R}$  en  $a > 0$ .

**Opgave 6.5.** Wat is de waarde van  $\int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2+a^2} \, dx$  als  $t \in \mathbb{R}$  en  $a > 0$ ?

**Opgave 6.6.** Bereken  $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x} \, dx$  als  $0 < a < 1$ .

Aanwijzing: integreer een geschikte functie over de rand van de rechthoek met hoekpunten  $R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i$  en  $-R$ .

**Opgave 6.7.** Toon aan dat  $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-b^2}$  ( $b > 0$ ).

Aanwijzing: integreer  $e^{-z^2}$  over de rand van de rechthoek met hoekpunten  $a, a + ib, -a + ib, -a$ . Gegeven is nog dat  $\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

**Opgave 6.8.** Bereken  $\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2+1} \, dx$ .

**Opgave 6.9.** Bereken  $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+9)^2} \, dx$ .

**Opgave 6.10.** Bereken  $\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+1} \, dx$  als  $-1 < a < 1$ .

**Opgave 6.11.** Gegeven is dat  $\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . Laat zien dat  $\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} \, dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} \, dy$  en bereken de laatste integraal.

**Opgave 6.12.** Vervolg. Bereken de Fresnelintegralen  $\int_0^\infty \cos(t^2) \, dt$  en  $\int_0^\infty \sin(t^2) \, dt$ .

**Opgave 6.13.** Omkeerformule Laplacetransformatie.

Als  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  voldoende netjes is (dat houdt in deze eenvoudige situatie in ieder geval continuïteit in), als verder  $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$  voor alle  $t \geq 0$  en zekere  $M$  en  $\alpha$ , dan bestaat de Laplacegetransformeerde  $F$ , gedefinieerd door  $F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) \, dt$ , van de functie  $f$  voor  $\operatorname{Re} z > \alpha$  en is holomorf op dat halfvlak  $\operatorname{Re} z > \alpha$ .

Verder geldt voor  $c \in \mathbb{R}$  met  $c > \alpha$ :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iR}^{c+iR} F(z)e^{tz} \, dz = \begin{cases} f(t) & \text{als } t > 0, \\ \frac{f(0)}{2} & \text{als } t = 0, \\ 0 & \text{als } t < 0. \end{cases}$$

Dit is de omkeerformule voor de laplacetransformatie, die hier niet bewezen wordt. Bepaal hiermee  $f(t)$  als  $F(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+2)}$ . Controleer het antwoord.

**Opgave 6.14.** Vervolg. Bepaal ook  $f(t)$  met  $F(z) = \frac{1}{z^2+1}$ . Controleer het antwoord.

**Opgave 6.15.** Bereken  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+a)(k+b)}$ , waarbij  $a \neq b$ , beide niet in  $\mathbb{Z}$ .

**Opgave 6.16.** Bereken  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+a)^2}$ , waarbij  $a$  niet in  $\mathbb{Z}$ .

**Opgave 6.17.** Bereken  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$  door  $\frac{1}{z^2+1} \cdot \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}$  over geschikte vierkanten te integreren.

**Opgave 6.18.** Bereken  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}$  door  $\frac{1}{z^3} \frac{1}{\cos \pi z}$  over geschikte vierkanten te integreren.

## Tentamenopgaven

**Opgave 6.19.** Bereken

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx.$$

**Opgave 6.20.** Bereken

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+1} dx.$$

**Opgave 6.21.** Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)^2} dx.$$

**Opgave 6.22.** Bereken met behulp van de residuenstelling

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos((2n+1)t)}{\cos t} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**Opgave 6.23.** Bereken

$$\int_W \frac{e^{1/z}}{(z-3)^3} dz,$$

in de volgende gevallen.

1.  $W = C(0, 6)^+$ .
2.  $W = C(0, 1)^+$ .

# 7 Toepassingen van Cauchy, Reeksen van holomorfe functies

## 7.1 Cauchyschattingen en gevolgen

In de vorige hoofdstukken hebben we de stellingen van Cauchy 5.3.3, 5.5.4, 5.4.6 vooral toegepast om concrete integralen mee uit te rekenen. In dit hoofdstuk gaan we deze op algemene holomorfe functies toepassen. Zij  $f$  een functie op een compacte verzameling  $K$ . We schrijven  $\|f\|_K$  voor het supremum van  $|f|$  op  $K$ .

**Stelling 7.1.1** (Cauchyschattingen). *Zij  $f$  holomorf op  $B(a, r)$ , met machtreeksontwikkeling*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Dan geldt

$$\left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| = |c_n| \leq \frac{\|f\|_{C(a, \rho)}}{\rho^n}$$

voor alle  $0 < \rho < r$ .

*Bewijs.* We vinden met 5.4.6 en 5.4.5 en met gebruik van de ML ongelijkheid dat

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C^{+}(a, \rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\rho \cdot \frac{\|f\|_{C(a, \rho)}}{\rho^{n+1}} = \frac{\|f\|_{C(a, \rho)}}{\rho^n}. \quad \square \end{aligned}$$

**Gevolg 7.1.2.** *Er geldt dat  $n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .*

*Bewijs.* Pas de schatting toe met  $f(z) = e^z$  op  $\mathbb{C} = B(0, \infty)$  (dus alle afgeleiden zijn ook gelijk aan  $e^z$ ), dan volgt voor willekeurige positieve  $\rho$ :  $\frac{e^0}{n!} \leq \frac{\|f\|_{C(0, \rho)}}{\rho^n} = \frac{e^\rho}{\rho^n}$ , dus  $n! \geq \rho^n e^{-\rho}$ . Omdat het rechterlid (voor vaste  $n$ ) maximaal is als  $\rho = n$ , volgt het gestelde.

Een ander bewijs verloopt als volgt. Omdat

$$\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n \geq \int_1^n \ln x \, dx \geq n \ln n - n,$$

is  $\ln n! \geq \ln n^n - n$  en dus  $n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$ . □

**Definitie 7.1.3.** Een *gehele* functie is een functie die holomorfe is op  $\mathbb{C}$ .

**Stelling 7.1.4** (Liouville). *Een begrensde gehele functie is constant.*

*Bewijs.* Laat  $f$  geheel zijn met  $|f(z)| \leq M$  voor zekere  $M$ . Op  $\mathbb{C} = B(0, \infty)$  is  $f$  als machtreeks te schrijven,  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ . De Cauchyschattingen geven (voor willekeurige  $\rho$ ):

$$|c_n| \leq \frac{\|f\|_{C(0,\rho)}}{\rho^n} \leq \frac{M}{\rho^n}.$$

Laat nu  $\rho \rightarrow \infty$  en er volgt dat  $c_n = 0$  als  $n = 1, 2, \dots$ . Dus de machtreeks van  $f$  om het punt 0 bestaat alleen uit de constante term  $c_0$ . Met andere woorden  $f$  is constant.  $\square$

**Stelling 7.1.5** (Uitgebreide versie van de stelling van Liouville). *Laat  $f$  geheel zijn met  $|f(z)| \leq M|z|^m$  voor zekere  $M$ , voor zekere  $m > 0$  en voor voldoende grote  $|z|$ . Dan is  $f$  een polynoom van graad  $\leq m$ .*

*Bewijs.* Stel de ongelijkheid geldt voor  $|z| \geq R$ . Als in het bewijs van Liouville krijgen we voor  $\rho \geq R$  dat  $|c_n| \leq \frac{\|f\|_{C(0,\rho)}}{\rho^n} \leq \frac{M\rho^m}{\rho^n} = \frac{M}{\rho^{n-m}}$ . En dus volgt door  $\rho \rightarrow \infty$  te nemen dat  $c_n = 0$  voor  $n > m$ . En dus reduceert de machtreeks van  $f$  om het punt 0 tot een veelterm van graad  $\leq m$ .  $\square$

**Gevolg 7.1.6** (Hoofdstelling van de algebra). *Elke veelterm van positieve graad heeft een nulpunt. Als gevolg hiervan kan elke veelterm van positieve graad ontbonden worden in lineaire factoren.*

*Bewijs.* Stel dat  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  met  $n > 0$ ,  $a_n \neq 0$  geen nulpunten heeft dan is  $f = \frac{1}{p}$  een gehele functie en er geldt dat

$$f(z) = \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{a_n + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}}.$$

Dus volgt dat  $f(z) \rightarrow 0$  als  $|z| \rightarrow \infty$ . In het bijzonder wordt  $f$  continu op de Riemannsfeer door  $f(\infty) = 0$  te stellen. Uit stelling 1.2.1 volgt dat  $f$  begrensd is op de Riemannsfeer, en dus op  $\mathbb{C}$ . Volgens Liouville is  $f$  constant. Dus is  $p$  constant, in tegenspraak met het feit dat de graad van  $p$  positief is.  $\square$

## 7.2 De stelling van Weierstraß

**Stelling 7.2.1** (Weierstraß). *Laat  $f_1, f_2, f_3, \dots$  een rij holomorfe functies zijn op een gebied  $G$ , die op compacte deelverzamelingen van  $G$  uniform convergeert naar een functie  $f$ , Dan is  $f$  ook holomorfe op  $G$ . Bovendien convergeert voor ieder  $j$  de rij van de  $j$ -de afgeleide van  $f_k$  naar de  $j$ -de afgeleide van  $f$ , en wel uniform op compacte deelverzamelingen.*



*Bewijs.* Neem  $a \in G$ , en een gesloten schijf  $\overline{B(a, r)} \subset G$ . Merk op dat onafhankelijk van  $\zeta \in C(a, r)$  geldt

$$\left| \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| \leq \frac{\|f_n - f\|_{C(a, r)}}{r - |z - a|}. \quad (7.1)$$

Omdat  $f_1, f_2, f_3, \dots$  op compacte deelverzamelingen van  $G$  uniform naar  $f$  convergeert, volgt voor iedere  $z \in B(a, r)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

uniform in  $\zeta$ . En dus vinden we voor vaste  $z \in B(a, r)$

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)^+} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Blijkbaar is  $f$  op  $B(a, r)$  gelijk aan een Cauchygetransformeerde. Uit dit alles volgt dat  $f$  holomorf is op  $G$ .

Voor de laatste bewering merken we op dat voor iedere  $z \in B(a, r)$

$$\frac{f^{(j)}(z)}{j!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{j+1}} d\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)^+} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{j+1}} d\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n^{(j)}(z)}{j!}.$$

De eerste en derde gelijkheid volgen uit de stelling van Cauchy, en de tweede gelijkheid geldt omdat de convergentie uniform is in  $\zeta$ . De convergentie is zelfs tegelijk uniform op compacte deelverzamelingen van  $G$ . Want neem een compact deel  $K$  van  $G$ . Voor  $a \in K$  kies  $B(a, r_a)$  zo dat  $\overline{B(a, r_a)} \subset G$ . De bollen  $B(a, r_a/2)$  overdekken  $K$ , dus er is een deelopdekking bestaande uit eindig veel bollen  $B(a_j, r_{a_j}/2)$ . Het is nu voldoende te bewijzen dat de convergentie uniform is op  $K \cap B(a_j, r_{a_j}/2)$ . Schrijf even  $b = a_j, \rho = r_{a_j}$ . Als in (7.1) zien we dat

$$\left| \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{j+1}} - \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{j+1}} \right| \leq \frac{\|f_n - f\|_{C(b, \rho)}}{(\rho - |z - b|)^{j+1}} \leq \frac{\|f_n - f\|_{C(b, \rho)}}{(\rho/2)^{j+1}}.$$

Deze schatting is onafhankelijk van  $z \in B(b, \rho/2)$  en  $\zeta \in C(b, \rho)$ . De convergentie is dus uniform  $B(a_j, r_{a_j}/2)$ , dus ook op  $K$ .  $\square$

**Gevolg 7.2.2** (Reeksvariant van de stelling van Weierstraß). *Laat  $f_1, f_2, f_3, \dots$  een rij holomorfe functies zijn op een gebied  $G$ , zodat de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  uniform convergeert op compacte deelverzamelingen van  $G$ . Dan is de somfunctie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  ook holomorf op  $G$ . Ook convergeert de reeks van afgeleiden op compacte deelverzamelingen uniform naar de afgeleide van de somfunctie.*

**De Zetafunctie van Riemann** Deze is gegeven door  $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ . Hierin is  $n^z = e^{z \ln n}$ , ook voor complexe waarden van  $z$ , en is dus een holomorfe functie op  $\mathbb{C}$ . Als  $K$  een compacte deelverzameling is van het halfvlak  $H = \{ \operatorname{Re} z > 1 \}$  dan is er een  $a > 1$  zo, dat  $\operatorname{Re} z \geq a$  voor alle  $z \in K$ . En dus geldt voor  $z = x + iy \in K$  dat

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \left| \frac{1}{e^{z \ln n}} \right| = \frac{1}{e^{x \ln n}} = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}.$$

Omdat  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$  convergent is, volgt uit het *criterium* van Weierstraß dat  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$  uniform convergent is op compacte deelverzamelingen van  $H$ . Uit de reeksvariant van de stelling van Weierstraß volgt dan dan de Zetafunctie holomorf is op  $H$ .

Uit het feit dat elk natuurlijk getal  $n > 1$  op precies één manier te schrijven is als product van machten van priemgetallen volgt (ga na!) voor  $\operatorname{Re} z > 1$  de formule

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \text{ priem}} \left( 1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \dots \right) = \prod_{p \text{ priem}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}}.$$

Deze formule geeft een verband met de priemgetallen en zo is de Zetafunctie van belang in de getaltheorie.

Men kan bewijzen dat de Zetafunctie de restrictie is van een holomorfe functie op  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ . Deze functie heeft zogeheten *triviale* nulpunten, de even negatieve gehele getallen, en ook oneindig veel *niet-triviale* nulpunten, waarvan we weten dat zij in de strook  $0 < \operatorname{Re} z < 1$  liggen. De *Riemannhypothese* is het vermoeden dat uitsprekt dat deze nulpunten allemaal op lijn  $\{ \operatorname{Re} z = \frac{1}{2} \}$  liggen.

Sommen van holomorfe functies zijn onder bepaalde voorwaarden dus weer holomorf. Net zo gaat het met integralen die holomorf afhangen van een parameter.

**Stelling 7.2.3** (Holomorfie van integralen). *Laat  $G$  een gebied in  $\mathbb{C}$  zijn en  $I$  een begrensde gesloten interval in  $\mathbb{R}$  zijn. Gegeven is een continue functie  $f$  op  $G \times I$  zo dat voor elke  $t \in I$  de functie  $f_t$  op  $G$  gegeven door  $f_t(z) = f(z, t)$  holomorf is. Dan is  $g$  op  $G$ , gedefinieerd door  $g(z) = \int_I f(z, t) dt$ , ook holomorf op  $G$ .*

*Bewijs.* We geven het bewijs voor  $G = B(0, 1)$  en  $I = [0, 1]$ . Geef daarna zelf aan welke veranderingen nodig zijn om het algemene geval te bewijzen. Welnu, laat  $0 < \rho < 1$ , dan volgt uit  $g(z) = \int_0^1 f(z, t) dt = \int_0^1 f_t(z) dt$  voor  $|z| < \rho$ , dat

$$g(z) = \int_0^1 \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0, \rho)^+} \frac{f_t(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0, \rho)^+} \left( \int_0^1 f(\zeta, t) dt \right) \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

Verwisseling van de twee integralen is toegestaan omdat de optredende integrand  $h(\zeta, t) = \frac{f_t(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta, t)}{\zeta - z}$  continu is op  $C(0, \rho) \times [0, 1]$ . Omdat  $f$  uniform continu is op  $C(0, \rho) \times [0, 1]$  (waarom?) volgt dat  $\zeta \mapsto \int_0^1 f(\zeta, t) dt$  continu is op  $C(0, \rho)$  (waarom?), dus de functie  $g$  is een Cauchygetransformeerde met betrekking tot de kromme  $C(0, \rho)^+$ , en is dus holomorf op  $B(0, \rho)$  en bijgevolg op  $B(0, 1)$  (omdat  $\rho$  willekeurig tussen 0 en 1 gekozen is).  $\square$

### 7.3 Laurentreeksen

Bekijk eens een uitdrukking van de vorm  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ . Hiermee bedoelen we  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$  ofwel

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}. \quad (7.2)$$

De eerste reeks is een gewone machtreeks om het punt  $a$  met convergentiestraal  $R$  en somfunctie  $f_1$ , holomorfe op  $B(a, R)$ . De tweede reeks zal volgens Weierstraß holomorfe zijn op gebieden waar hij uniform op compacte verzamelingen convergeert. Hij houdt verband met de machtreeks  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n$  om het punt  $0$  met convergentiestraal  $r$  en holomorfe somfunctie  $h$ . De som van de tweede reeks is dus convergent voor  $|z-a| > \frac{1}{r}$  en de somfunctie, die holomorfe is, is  $f_2(z) = h(\frac{1}{z-a})$ . We concluderen: de tweezijdige reeks  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$  is convergent op zijn *convergentiering*  $A(a, \frac{1}{r}, R)$  met holomorfe somfunctie  $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ . Zulke tweezijdige reeksen noemen we *Laurentreeksen*. Merk op: de convergentiering kan leeg zijn, namelijk precies als  $1/r \geq R$ .

Als  $\frac{1}{r} < \rho < R$  dan convergeert de Laurentreeks (7.2) uniform op  $C(a, \rho)$ . De coëfficiënten van de Laurentreeks  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$  (gemaakt uit twee machtreeksen) reken je dan zo uit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)^+} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\zeta-a)^{n-k-1} \right\} d\zeta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)^+} (\zeta-a)^{n-k-1} d\zeta = c_k. \end{aligned}$$

Met andere woorden: de coëfficiënten  $c_k$  in de reeksontwikkeling hangen nauw samen met de somfunctie  $f$  van de reeks, het verband is

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta,$$

waarbij  $C(a, \rho)$  een cirkel om  $a$  is in de convergentiering van de reeks.

Het omgekeerde is ook waar:

**Stelling 7.3.1.** *Stel dat  $f$  holomorfe is op een ring  $A = A(a, \rho_1, \rho_2)$ . Dan bestaat er precies één Laurentreeks op  $A$  met  $f$  als somfunctie op  $A$ .*

*Bewijs.* Bedenk dat er ten hoogste één Laurentreeks voor  $f$  kan zijn, namelijk de reeks  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$  met

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta,$$

## 7 Toepassingen van Cauchy, Reeksen van holomorfe functies

waarbij  $C(a, \rho)$  een cirkel om  $a$  is gelegen in  $A$ . Het enige dat we nog moeten doen is laten zien dat deze ‘het ook daadwerkelijk doet’.

Welnu, laat  $z \in A$  en kies  $\sigma_1$  en  $\sigma_2$  met  $\rho_1 < \sigma_1 < |z - a| < \sigma_2 < \rho_2$ . Dan geldt vanwege de residuenstelling:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \sigma_2)^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \sigma_1)^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

De eerste term kan (zoals we al eerder gedaan hebben) met

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

herschreven worden tot

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \sigma_2)^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right) (z - a)^n.$$

Voor het tweede deel maken we gebruik van

$$\frac{1}{\zeta - z} = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^m}{(z - a)^{m+1}}$$

en we vinden (weer gebruik makend van een uniforme convergentieargument) dat de tweede term gelijk is aan

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \sigma_1)^+} f(\zeta) (\zeta - a)^m d\zeta \right) \frac{1}{(z - a)^{m+1}}.$$

Wat met  $m = -(n + 1)$  te schrijven is als

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \sigma_1)^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right) (z - a)^n.$$

De integralen over de cirkels met straal  $\sigma_1$  en  $\sigma_2$  mogen vervangen worden door dezelfde integralen over  $C(a, \rho)$  met  $\rho_1 < \rho < \rho_2$  omdat de integrand in de tussengebieden holomorf is. We vinden dat de kandidaatreeks ‘het doet’.  $\square$

We resumeren.

**Laurentreeksontwikkelingen** Als  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$  convergent is op  $A(a, \rho_1, \rho_2)$ , dan is de somfunctie  $z \mapsto f(z)$  holomorf op  $A(a, \rho_1, \rho_2)$ . Daarbij geldt dat

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

met  $\rho_1 < \rho < \rho_2$ .

Omgekeerd, laat  $f$  holomorf zijn op een ring  $A(a, \rho_1, \rho_2)$ , dan geldt op deze ring dat  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$  met

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

en  $\rho_1 < \rho < \rho_2$ .

Het deel  $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$  noemt men wel het *hoofddeel* van (de Laurentreeks van)  $f$  in  $a$ .

De eerste bewering wordt vaak toegepast op de convergentiering van de reeks (dus  $\rho_1$  zo *klein mogelijk* en  $\rho_2$  zo *groot mogelijk*). De tweede bewering wordt vaak gebruikt als  $f$  holomorf is op een gebied  $G$ . Dan bekijken we  $f$  op een *maximale* open ring om het punt  $a$  die nog geheel binnen  $G$  ligt.

**Gebruik van Laurentreeksen bij geïsoleerde singulariteiten** Veronderstel dat  $a$  een geïsoleerd singulier punt van  $f$  is. Dus  $f$  is holomorf op een gepuncteerde omgeving  $B(a, r) \setminus \{a\}$  van het punt  $a$ , dus op de ring  $A = A(a, 0, r)$ . Op  $A$  kan  $f$  dan in een Laurentreeks  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$  ontwikkeld worden met

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad \text{met } 0 < \rho < r.$$

Merk op, door  $n = -1$  te nemen, dat  $\text{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1}$ . Weet je de Laurentreeks van  $f$  op  $A(a, 0, r)$ , dan weet je ook het residu in het punt  $a$ . Bijvoorbeeld  $e^{1/z^2} = 1 + 1/z^2 + \dots$ , dus  $\text{Res}_{z=0} e^{1/z^2} = 0$ . Merk ook op dat de Laurentontwikkeling van  $f$  op  $A(a, r, R)$  met  $r > 0$  *niets* zegt over het residu in  $a$  van  $f$ .

## 7.4 Nulpunten van holomorfe functies

**Definitie 7.4.1.** Laat  $f$  holomorf zijn op een gebied  $G$  en  $a \in G$ . We noemen  $a$  een nulpunt *van orde*  $k \in \mathbb{N}$  of ook een nulpunt *van multiplicitéit*  $k$ , als  $f^{(n)}(a) = 0$  voor  $0 \leq n < k$  en  $f^{(k)}(a) \neq 0$ . Als  $f^{(n)}(a) = 0$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$  spreken we van een nulpunt van orde  $\infty$ .

Denk hierbij aan iets dat je al kent: namelijk de multiplicitéit van een nulpunt van een *polynoom*. Als  $f(z) = z^3 - 2z^4 + z^5$ , dan is  $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ . Dus 0 is een nulpunt van orde 3. Merk op dat ook geldt  $f(z) = z^3(1 - 2z + z^2)$  met andere woorden:  $f$  heeft een drievoudige factor  $z$  (en geen 4-voudige, want de laatste factor is 1 in 0). Verder is er maar één polynoom met een nulpunt van orde  $\infty$ , namelijk  $P(z) \equiv 0$ . We tonen aan dat deze verschijnselen ook voor nulpunten van holomorfe functies gelden. Met  $C^\infty$  functies moet je al oppassen. De functie op  $\mathbb{R}$  gedefinieerd door  $f(x) = e^{-1/x^2}$ ,  $f(0) = 0$  is  $C^\infty$ , niet identiek 0 en heeft in 0 een nulpunt van oneindige orde!

We beginnen met de volgende stelling.

**Stelling 7.4.2** (Nulpunt van oneindige orde). *Zij  $f$  holomorf op een gebied  $G$ . Stel  $a \in G$  zo, dat  $f^{(n)}(a) = 0$  voor alle  $n \geq 0$ . Dan is  $f$  identiek nul op  $G$ .*

*Bewijs.* Laat  $A = \{z \in G \mid f^{(n)}(z) = 0 \text{ voor alle } n \geq 0\}$  en laat  $B = G \setminus A$ . Neem  $c \in A$ . Er is een  $r_c > 0$  zodat de machtreeksontwikkeling  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n$  van  $f$  om het punt  $c$  convergeert naar  $f$  op  $B(c, r_c)$ , want  $f$  is analytisch. Deze reeks is de nulreeks, immers  $c_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = 0$ . Dus  $f$  is identiek nul op  $B(c, r_c)$  en dus is  $B(c, r_c) \subset A$ . De verzameling  $A$  is dus open.

Als  $c \in B$ , dan is er een  $n_0 \geq 0$  met  $f^{(n_0)}(c) \neq 0$ . Maar uit de continuïteit van  $f^{(n_0)}$  volgt dan dat er een  $r_c > 0$  is zodat  $f^{(n_0)}(z) \neq 0$  voor alle  $z \in B(c, r_c)$ . Dus  $B(c, r_c) \subset B$  en bijgevolg is ook  $B$  open.

Uit de samenhang van  $G$  volgt dat  $A$  of  $B$  leeg is. Maar  $a \in A$  volgens het gegeven, dus moet  $B$  leeg zijn en  $A = G$ . In het bijzonder is  $f$  identiek nul op  $G$ .  $\square$

**Stelling 7.4.3** (Karakterisering nulpunten). *Zij  $G$  een gebied en  $a \in G$ . Zij  $f$  holomorf op  $G$  en  $k \in \mathbb{N}$ . Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

1. *Het punt  $a$  is een nulpunt van orde  $k \geq 1$  van  $f$ .*
2. *Er is een functie  $g$  die holomorf is op  $G$  zo, dat  $f(z) = (z-a)^k g(z)$  op  $G$  en  $g(a) \neq 0$ .*

*Bewijs.* 1  $\implies$  2 Buiten het punt  $a$  definiëren we

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^k}.$$

Het is dan ook duidelijk dat  $g$  in zulke punten complex-differentieerbaar is. Nu over naar het punt  $a$ . Daar is  $f$  analytisch  $f(a) = 0$  en de eerste  $k-1$  afgeleiden zijn ook 0. Schrijf  $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Op een omgeving  $B(a, r) \subset G$  heeft  $f$  dus de machtreeksontwikkeling

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-a)^n = (z-a)^k \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+k}(z-a)^m = (z-a)^k \tilde{g}(z).$$

Hier is  $\tilde{g} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+k}(z-a)^m$  gedefinieerd op  $B(a, r)$ , omdat de laatste machtreeks daar convergeert, vergelijk het bewijs van Stelling 1.9.5. Op  $B(a, r) \setminus \{a\}$  zal  $g = \tilde{g}$ . We definiëren dus  $g(a) = \tilde{g}(a) = c_k$ . Daarmee wordt  $g$  holomorf op  $B(a, r)$ ,  $g(a) \neq 0$ , en  $f(z) = (z-a)^k g(z)$ . Klaar!

2  $\implies$  1 Gegeven is nu dat  $f(z) = (z-a)^k g(z)$  op  $G$  met  $g$  holomorf op  $G$  en  $g(a) \neq 0$ . Dan is  $f(a) = 0$ . De productregel geeft

$$f'(z) = k(z-a)^{k-1}g(z) + (z-a)^k g'(z) = (z-a)^{k-1}g_1(z)$$

met  $g_1$  holomorf op  $G$  en  $g_1(a) \neq 0$ . Als  $k = 1$  dan zijn we klaar. Als  $k > 1$  dan kunnen we het argument herhalen. We vinden  $f^{(n)}(z) = (z-a)^{k-n}g_n(z)$ , met  $g_n(a) \neq 0$  voor  $k = n, \dots, k$ . Er volgt achtereenvolgens  $f(a) = 0, f'(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0$  en  $f^{(k)}(a) \neq 0$ .  $\square$

## 7.5 Singulariteiten en Laurentreeksen

We zullen de Laurentreeks van  $f$  op  $A$  gebruiken om een classificatie van geïsoleerde singulariteiten te maken. Zij  $f$  holomorf op een gepuncteerde omgeving  $A = B(a, r) \setminus \{a\} = A(a, 0, r)$  van het punt  $a$ . We herinneren ons dat we  $a$  dan een geïsoleerde singulariteit noemen.

Alle andere mogelijke singulariteiten zijn per definitie *niet geïsoleerd*. Denk hierbij aan 0 bij  $\sqrt{z}$  of  $\log z$ . Hier is 0 een *vertakkingspunt*. Of 0 bij de functie  $\frac{1}{\sin(1/z)}$ ; hier is 0 een ophopingspunt van polen, en dus niet geïsoleerd.

Aparte vermelding verdient het geval  $a = \infty$ . Veronderstel dat  $f$  holomorf is op een gepuncteerde omgeving  $A = \{|z| > M\}$  van  $\infty$ . Dan zeggen we dat  $f$  een geïsoleerde singulariteit in  $\infty$  heeft; de functie  $g(z) = f(1/z)$  heeft dan een geïsoleerde singulariteit in 0.

Nu verder met geïsoleerde singulariteiten! Er zijn drie mogelijkheden voor de Laurentreeks van  $f$  om  $a$ :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

**Definitie 7.5.1.** Het *hoofddeel* van  $f$  in  $a$  is  $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ . Dit bepaalt het gedrag van de singulariteit in  $a$ .

1. Voor  $n < 0$  is  $c_n = 0$ . De functie  $f$  valt dan samen met een holomorfe functie  $g$  die op  $B(a, r)$  is gedefinieerd. We spreken van een *ophefbare singulariteit*. Het hoofddeel in  $a$  is leeg.
2. Er is een  $k < 0$  zodat  $c_k \neq 0$  en  $c_n = 0$  voor  $n < k$ . In Sectie 7.5.2 zullen we zien dat dit equivalent is met: de functie  $f(z)(z-a)^n$  heeft een ophefbare singulariteit voor  $n = k$ , maar niet voor  $n = k-1$ . Is dit het geval dan spreken we van een *pool* van orde  $k$ . Het hoofddeel in  $a$  bestaat dan uit eindig veel termen.
3. Geen van bovenstaande. Dan zijn er oneindig veel  $n < 0$  met  $c_n \neq 0$ , het hoofddeel in  $a$  bestaat uit oneindig veel termen. We spreken van een *essentiële singulariteit*.

We zeggen  $f$  heeft een pool in  $a$  wanneer we de orde niet willen of kunnen specificeren. In het vervolg gaan we dieper op de verschillende geïsoleerde singulariteiten in.

Als  $f$  een singulariteit in  $\infty$  heeft classificeren we die als de singulariteit van  $f(1/z)$  in 0.

### 7.5.1 Ophefbare singulariteiten

Laat weer  $f$  holomorf zijn op  $A(a, 0, r)$ . De singulariteit  $a$  van  $f$  is *ophefbaar* als er een holomorfe functie  $g$  op  $B(a, r)$  bestaat zo dat  $f(z) = g(z)$  voor alle

$z \in B(a, r) \setminus \{a\}$ . Anders gezegd, door  $f$  in het punt  $a$  de juiste waarde toe te kennen (namelijk  $g(a)$ ), wordt  $f$  holomorf op  $B(a, r)$ . De waarde van  $f$  in  $a$  is a priori niet gedefinieerd! Het vervangen van  $f$  door  $g$  (en dan meestal gewoon  $f$  schrijven), is het *opheffen van de singulariteit*.

Bekijk nu de Taylorreeks  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  van  $g$  op de ring  $B(a, r)$ . Er geldt dan ook  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  op de ring  $A(a, 0, r)$  en dat betekent dat de (unieke!) Laurentreeks van  $f$  op  $A(a, 0, r)$  geen negatieve machten van  $z-a$  bevat.

Omgekeerd, veronderstel dat  $f$  op  $A(a, 0, r)$  de Laurentontwikkeling

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

heeft. Deze reeks convergeert op  $B(a, r)$  en stelt daar een holomorfe functie  $g$  voor. en  $f(z) = g(z)$  voor alle  $z \in B(a, r) \setminus \{a\}$ . We hebben in detail laten zien dat de twee manieren waarop een ophefbare singulariteit in 7.5.1 wordt gedefinieerd equivalent zijn. Meer algemeen hebben we de volgende stelling.

**Stelling 7.5.2** (Karakterisering ophefbare singulariteiten). *Voor een holomorfe functie  $f$  op  $B(a, r) \setminus \{a\} = A(a, 0, r)$  zijn de volgende uitspraken equivalent:*

1. De Laurentreeks van  $f$  op  $A(a, 0, r)$  bevat geen negatieve machten van  $z-a$ .
2. De functie  $f$  heeft een ophefbare singulariteit in  $a$ .
3. De limiet van  $f(z)$  als  $z$  tot  $a$  nadert bestaat in  $\mathbb{C}$ . Deze limiet is de waarde die  $f$  in  $a$  krijgt wanneer we de singulariteit opheffen.
4. De functie  $f$  is begrensd op  $B(a, \rho) \setminus \{a\}$  voor zekere  $0 < \rho \leq r$ .
5. Er geldt  $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0$ .

*Bewijs.* 1  $\iff$  2 hebben we al gedaan en 2  $\implies$  3  $\implies$  4  $\implies$  5 zijn triviaal.

We gaan nu 5  $\implies$  1 bewijzen. Zij  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$  de Laurentreeks van  $f$  op  $A$ . Omdat  $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0$  volgt dat er voor elke  $\epsilon > 0$  een getal  $\rho$  met  $0 < \rho < \min\{r, 1\}$  is zo, dat  $|(z-a)f(z)| < \epsilon$  als  $0 < |z-a| \leq \rho$ . Dus voor  $n \leq -1$  geldt

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)^+} \frac{(\zeta-a)f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+2}} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\rho \cdot \epsilon \cdot \frac{1}{\rho^{n+2}} = \epsilon \cdot \frac{1}{\rho^{n+1}} \leq \epsilon, \end{aligned} \tag{7.3}$$

wat aantoont dat  $c_n = 0$  als  $n < 0$ . □

*Opmerking.* De implicatie 5  $\implies$  1 staat bekend als de *Riemann-Ophefbare-SingulariteitenStelling*. Het is handig om ophefbare singulariteiten te hebben, ook nu je weet dat het eigenlijk nauwelijks singulariteiten zijn. Bekijk eens  $f(z) = \cos \sqrt{z}$ .



In 0 lijkt iets aan de hand te zijn, misschien een singulariteit. Je begint met de singulariteit in 0 te benoemen, ziet dan dat de Laurentreeks om 0 zinvol is, en geen termen met negatieve exponent bevat, en concludeert dat 0 een ophefbare singulariteit is, en dat  $f$  als holomorfe, (zelfs geheel) kan worden opgevat.

In  $\infty$  hebben de functies  $z \mapsto 3$  en  $z \mapsto 1/(z-2)$  een ophefbare singulariteit.

### 7.5.2 Polen

We laten eerst even zien dat de twee mogelijke definities van pool van orde  $k$  in Definitie 7.5.1 equivalent zijn. Zij  $f$  holomorfe op  $B(a, r) \setminus \{a\}$ . Veronderstel dat  $g(z) = (z-a)^k f(z)$  een ophefbare singulariteit in  $a$  heeft, maar  $(z-a)^{k-1} f(z)$  dat niet heeft. We heffen de singulariteit in  $a$  op. Als nu  $g(a) = 0$  zou zijn, dan is er met Stelling 7.4.3 een holomorfe functie  $g_1$  op  $B(a, r)$  zo, dat  $g(z) = (z-a)g_1(z)$  op  $B(a, r)$ . En dus is  $(z-a)^{k-1} f(z) = g_1(z)$  op  $B(a, r) \setminus \{a\}$  en dus zou  $(z-a)^{k-1} f(z)$  een ophefbare singulariteit in  $a$  hebben, in strijd met het gegeven dat  $a$  een pool van orde  $k$  is van de functie  $f$ . Dus  $g(a) \neq 0$ . Laat  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$  de Taylorreeks van  $g$  op  $B(a, r)$  zijn. Merk op dat  $c_0 = g(a) \neq 0$ . Dan is de Laurentreeks van  $f$  op  $A(a, 0, r)$  gelijk aan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n-k},$$

dus de meest negatieve exponent in de Laurentreeks van  $f$  is  $-k$ .

Omgekeerd, als de Laurentreeks van  $f$  op  $A$  gegeven wordt door

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n-k},$$

met  $c_0 \neq 0$ , dan convergeert

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

naar een holomorfe functie  $g$  op  $B(a, r)$  en  $g(a) \neq 0$ . En er geldt dat  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$  op de ring  $A$ . Dan heeft  $(z-a)^k f(z)$  een ophefbare singulariteit in  $a$ . Verder is  $\lim_{z \rightarrow a} |(z-a)^{k-1} f(z)| = \lim_{z \rightarrow a} \left| \frac{g(z)}{z-a} \right| = \infty$  (omdat  $g(a) \neq 0$ ), dus de limiet van  $(z-a)^{k-1} f(z)$  als  $z$  tot  $a$  nadert bestaat zeker niet in  $\mathbb{C}$ . Dus  $a$  is geen ophefbare singulariteit van  $(z-a)^{k-1} f(z)$ .

We hebben de volgende stelling bijna bewezen.

**Stelling 7.5.3** (Karakterisering polen van orde  $k$ ). *Laat  $f$  gedefinieerd en holomorfe zijn op  $B(a, r) \setminus \{a\} = A(a, 0, r)$ . Laat verder  $k \in \mathbb{N}$ . Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

1. *De functie  $f$  heeft een pool van orde  $k$  in  $a$ .*
2. *Er is een holomorfe functie  $g$  op  $B(a, r)$  met  $g(a) \neq 0$  en  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$  op  $B(a, r) \setminus \{a\}$ .*

## 7 Toepassingen van Cauchy, Reeksen van holomorfe functies

3. De term met de meest negatieve macht van  $z - a$  in de Laurentreeks van  $f$  op  $A(a, 0, r)$  is die van  $(z - a)^{-k}$ .
4. Er geldt  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z)$  bestaat in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

*Bewijs.* 1  $\iff$  2  $\iff$  3 hebben we hierboven al aangetoond.

We bewijzen nu 2  $\iff$  4. (2  $\implies$  4) Als er een holomorfe functie  $g$  op  $B(a, r)$  is met  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$  op  $B(a, r) \setminus \{a\}$  en  $g(a) \neq 0$ , dan is  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z) = \lim_{z \rightarrow a} g(z) = g(a)$ . Dus  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z)$  bestaat in  $\mathbb{C}$  en is ongelijk aan 0.

(2  $\impliedby$  4) Als  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z)$  bestaat in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , dan heeft (zie de karakterisering van ophefbare singulariteiten)  $(z - a)^k f(z)$  een ophefbare singulariteit in  $a$ , dus er bestaat een functie  $g$  die holomorf is op  $B(a, r)$  met  $(z - a)^k f(z) = g(z)$  op  $A$ . En  $g(a) \neq 0$ , omdat  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z) \neq 0$ .  $\square$

*Opmerking.* Een functie met een nulpunt van orde  $k > 0$  heeft in  $a$  precies  $k$  factoren  $z - a$ . Een functie met een pool van orde  $k > 0$  heeft als het ware  $-k$  factoren  $z - a$ .

**Gevolg 7.5.4.** *Stel dat  $f, g$  en  $h$  holomorf op  $B(a, r)$  zijn. Verder is  $f$  alleen 0 in  $a$ , orde nulpunt gelijk aan  $k$ . Idem voor  $g$  met orde  $l$ . De functie  $h$  is ongelijk aan 0 op  $B(a, r)$ . Merk op dat  $\frac{f}{g}$  en  $\frac{h}{g}$  gedefinieerd zijn op  $B(a, r) \setminus \{a\}$ .*

*Ga na dat geldt:*

- De functie  $f \cdot g$  heeft een nulpunt van orde  $k + l$  in  $a$ .
- Als  $k \geq l$  dan heeft  $\frac{f}{g}$  een ophefbare singulariteit in  $a$ .
- Als  $k < l$  dan heeft  $\frac{f}{g}$  een pool van orde  $l - k$  in  $a$ .
- De functie  $\frac{h}{g}$  heeft een pool van orde  $l$  in  $a$ .

**Voorbeeld 7.5.5.**

1. De functie  $f(z) = \sin z$  heeft een enkelvoudig (orde 1) nulpunt in 0.
2. De functie  $g(z) = e^z - 1 - z$  heeft een dubbel nulpunt in 0 (ga na).
3. De functie  $q(z) = \frac{(\sin z)^{13}}{(e^z - 1 - z)^8}$  heeft een pool van orde 3 in 0.
4. De functie  $z^2$  heeft een pool van orde 2 in  $\infty$ .

**Stelling 7.5.6** (Karakterisering polen). *Laat  $f$  holomorf zijn op  $B(a, r) \setminus \{a\} = A(a, 0, r)$ . Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

1. De functie  $f$  heeft een pool in  $a$ .
2. Er geldt dat  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$  in  $\mathbb{C}^*$ , of equivalent  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$ .

*Bewijs.*  $1 \implies 2$  Als  $f$  een pool van orde  $k$  heeft, schrijf dan  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$ , met  $g$  holomorfe en  $g(a) \neq 0$ . Dan volgt  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$  direct.

$1 \longleftarrow 2$  Als  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$ , dan is de functie  $q = \frac{1}{f}$  gedefinieerd op  $B(a, \rho) \setminus \{a\}$  voor zekere  $\rho > 0$ , en  $\lim_{z \rightarrow a} q(z) = 0$ , dus uit de karakterisering van ophefbare singulariteiten, Stelling 7.5.2, volgt dat  $q$  een ophefbare singulariteit heeft in het punt  $a$ , die wordt opgeheven door  $q(a) = 0$  te definiëren. Dus  $f = \frac{1}{q}$  waarbij  $q(a) = 0$ . Dus  $f$  heeft in  $a$  een pool (van gelijke orde als de orde van het nulpunt  $a$  van  $q$ ).  $\square$

### 7.5.3 Essentiële singulariteiten

**Stelling 7.5.7** (Karakterisering essentiële singulariteiten). *Laat  $f$  gedefinieerd en holomorfe zijn op  $B(a, r) \setminus \{a\}$ . Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

1. *De functie  $f$  heeft een essentiële singulariteit in het punt  $a$ .*
2. *De Laurentreeks van  $f$  op  $A(a, 0, r)$  heeft oneindig veel termen met een negatieve macht van  $z - a$ .*
3. *De limiet van  $f(z)$  als  $z$  tot  $a$  nadert bestaat niet in  $\mathbb{C}^*$ .*

*Bewijs.* Dit volgt onmiddellijk uit de karakterisering van polen en ophefbare singulariteiten.  $\square$

En nu nog een echte stelling waaruit blijkt hoe gecompliceerd het gedrag van een functie bij een essentiële singulariteit is.

**Stelling 7.5.8** (Stelling van Weierstraß-Casorati). *Laat  $f$  gedefinieerd en holomorfe zijn op  $B(a, r) \setminus \{a\} = A(a, 0, r)$ . Als  $f$  een essentiële singulariteit in  $a$  heeft dan geldt:*

1.  $\forall w \in \mathbb{C} \forall 0 < \delta \leq r \forall \epsilon > 0 \exists z$  met  $0 < |z - a| < \delta : |f(z) - w| < \epsilon$ ;
2.  $\forall M > 0 \forall 0 < \delta \leq r \exists z$  met  $0 < |z - a| < \delta : |f(z)| > M$ .

*Merk op dat deze twee eigenschappen ook als volgt geformuleerd kunnen worden:*

1.  $\forall w \in \mathbb{C} \exists z_1, z_2, z_3, \dots \in A(a, 0, r)$  met  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a : \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$ ;
2.  $\exists z_1, z_2, z_3, \dots \in A(a, 0, r)$  met  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a : \lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = \infty$ .

*Bewijs.* Stel dat de eerste bewering niet waar zou zijn, dan geldt:

$$\exists w \in \mathbb{C} \exists 0 < \delta \leq r \exists \epsilon > 0 \forall z \text{ met } 0 < |z - a| < \delta : |f(z) - w| \geq \epsilon.$$

In gewoon Nederlands zegt dit:  $f(B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap B(w, \epsilon) = \emptyset$ .

Bekijk nu  $h(z) = \frac{1}{f(z) - w}$  op  $A(a, 0, \delta)$ . De functie  $h$  is begrensd (met bovengrens  $1/\epsilon$ ). Uit de karakterisering voor ophefbare singulariteiten volgt dat  $h$  een ophefbare

singulariteit in  $a$  heeft. We heffen de singulariteit op, zodat we mogen veronderstellen dat  $h$  holomorf is op  $B(a, \delta)$ . Schrijf nu

$$f(z) = \frac{1 + wh(z)}{h(z)} \text{ op } A(a, 0, \delta).$$

Als  $h(a) \neq 0$ , dan heeft  $f$  een ophefbare singulariteit in  $a$ . Als  $h(a) = 0$ , dan heeft  $f$  een pool in  $a$  van dezelfde orde als de orde van het nulpunt  $a$  van de functie  $h$ . Beide conclusies zijn in strijd met het gegeven dat  $f$  een essentiële singulariteit in  $a$  heeft.

Stel dat de tweede bewering niet waar zou zijn, dan geldt:

$$\exists M > 0 \exists 0 < \delta \leq r \forall z \text{ met } 0 < |z - a| < \delta : |f(z)| \leq M.$$

Dan zou  $f$  begrensd zijn nabij  $a$  en dus een ophefbare singulariteit in  $a$  hebben. Dat kan niet omdat  $f$  een essentiële singulariteit in  $a$  heeft.

De tweede bewering volgt ook meteen uit de eerste, er zouden geen waarden aangenomen worden in de schijf  $B(3M, M)$ .  $\square$

*Opmerking.* Anders geformuleerd zegt de Stelling van Weierstraß-Casorati dat het beeld van  $f$  op een willekeurig kleine, gepuncteerde omgeving van een essentiële singulariteit dicht ligt in  $\mathbb{C}$ . We zullen in Stelling 8.6.2 zien dat het beeld ook open is, en het is een aardige opgave te bewijzen dat het beeld zelfs geen interval kan missen. Maar veel meer is waar. De Stelling van Picard zegt dat het beeld van  $f$  ten hoogste één punt zal missen! Dat je niet beter kunt doen laat  $e^{1/z}$  al zien.

**Voorbeelden 7.5.9.** Bij het classificeren van singulariteiten in opgaven moet je kunnen onderscheiden of de singulariteit geïsoleerd is of niet, en van geïsoleerde singulariteiten moet je het type kunnen bepalen.

- De functie  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  heeft een ophefbare singulariteit in 0. Dat zie je bijvoorbeeld door  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z}$  uit te rekenen. De uitkomst is eindig, en wel gelijk aan 1 (de afgeleide van  $\sin z$  in het punt 0). Je kunt het ook als volgt zien. De Laurentreeks op de ring  $A(0, 0, \infty)$  is  $1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$ , er is dus een leeg hoofddeel.
- De functie  $f(z) = \frac{\sin z}{1 - \cos z}$  heeft een pool van orde 1 in het punt 0. De teller heeft een nulpunt van orde 1, de noemer van orde 2.
- De functie  $f(z) = \frac{1}{z^3}$  heeft een pool van orde 3 in 0. De Laurentreeks op  $A(0, 0, \infty)$  staat er al, die is  $\frac{1}{z^3}$ . Je kunt ook gebruiken dat  $|\frac{1}{z^3}|$  naar  $\infty$  gaat voor  $z \rightarrow 0$ . Dus hebben we te maken met een pool.
- De functie  $f(z) = e^{1/z}$  heeft een essentiële singulariteit in 0. Dat zie je bijvoorbeeld aan de Laurentreeks op  $A(0, 0, \infty)$ , die is  $1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \dots$  met oneindig veel termen met een negatieve macht van  $z$ . Of zo:  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$  als je met  $z$  langs de negatieve reële as naar 0 nadert. En  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$  als je met  $z$  langs de positieve reële as tot 0 nadert. De limiet van  $f(z)$  voor  $z$  nadert naar 0 bestaat dus niet in  $\mathbb{C}^*$ .

- De functie  $f(z) = e^z$  heeft een essentiële singulariteit in  $\infty$ , gezien het vorige voorbeeld.

De stelling van Liouville en onze kennis van singulariteiten kan gebruikt worden om functies te bepalen die “bijna” geheel zijn. Dat komt in een tentamen nog wel eens voor.

**Voorbeeld 7.5.10.** Bepaal alle functies  $f$  die holomorf zijn op  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , met de volgende eigenschappen:  $f$  heeft een pool van orde 1 in 0 met residu 1, een pool van orde 1 in 1 met residu 2 en  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ .

Oplossing: Misschien zie je zo dat  $1/z + 2/(z - 1)$  aan de voorwaarde voldoet. Maar dat is niet voldoende, omdat gevraagd wordt *alle*  $f$  te bepalen; misschien zijn er nog wel meer functies die voldoen. Ook als je niet weet wat er uitkomt werken de volgende methoden.

1. Laat  $f$  een functie zijn met de gegeven eigenschappen. Beschouw de functie

$$g(z) = f(z) - \frac{1}{z} - \frac{2}{z - 1}.$$

Uit het gegeven over de polen en Stelling 7.5.2 (1) volgt dat  $g$  ophefbare singulariteiten heeft in 0 en 1. Verder is  $g$  net als  $f$  holomorf buiten 0 en 1, dus  $g$  is geheel. Ook is  $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$ . Dus  $g$  is begrensd, met Liouville zelfs constant, en deze constante is 0 vanwege de limiet. De conclusie is dat de enige oplossing is  $f = 1/z + 2/(z - 1)$ .

2. Laat weer  $f$  een functie zijn met de gegeven eigenschappen. Beschouw de functie

$$g(z) = z(z - 1)f(z).$$

De functie  $g$  heeft ophefbare singulariteiten in 0 en 1, wegens Stelling 7.5.3 (2). Door de singulariteiten op te heffen, wordt  $g$  een gehele functie. Uit  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ , volgt dat  $g$  voldoet aan stelling 7.1.5 met  $m = 2$ . Dus  $g$  is een polynoom van graad hoogstens 2. Nogmaals de limiet gebruiken laat zien dat  $g$  graad 0 of 1 heeft dus van de volgende vorm is

$$g(z) = az + b = z(z - 1)f(z),$$

met  $a, b \in \mathbb{C}$ . We zien dat  $f(z) = \frac{az+b}{z(z-1)}$ . Omdat  $\lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = 1$  zal  $\frac{b}{-1} = 1$  en omdat  $\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)f(z) = 2$  zal  $\frac{a+b}{1} = 2$ . We vinden  $b = -1$ ,  $a = 3$ , en de enige oplossing is

$$f(z) = \frac{3z - 1}{z(z - 1)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z - 1}.$$

Hier ging 1. veel sneller dan 2. Maar het hangt een beetje van het vraagstuk af, hoe je het best de singulariteiten kunt opheffen.

**Voorbeeld 7.5.11.** We besluiten dit hoofdstuk met het uitrekenen van een ingewikkeld residu, namelijk dat van  $\frac{\pi \cot \pi z}{z^2}$  in het punt 0.

Merk op dat het hier gaat om een pool van orde 3, bedenk immers dat  $\cot \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ . Welnu, uit de machtreeks van  $\sin \pi z$  om het punt 0 kun je een factor  $\pi z$  halen en wat overblijft is de reeks  $1 - \frac{\pi^2}{3!} z^2 + \dots$ . Deze reeks is convergent in een omgeving van het punt 0 (overall convergent zelfs), dus de somfunctie  $g(z) = 1 - \frac{\pi^2}{3!} z^2 + \dots$  is holomorfe in een omgeving van 0 en  $g(0) = 1 \neq 0$ . En dus volgt dat  $\frac{\cos \pi z}{g(z)}$  holomorfe is in een omgeving van 0. En dus:

$$\underbrace{\frac{\cos \pi z}{g(z)}}_{c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots} \cdot \underbrace{g(z)}_{1 - \frac{\pi^2}{3!} z^2 + \dots} = \underbrace{\cos \pi z}_{1 - \frac{\pi^2}{2!} z^2 + \dots}.$$

Vergelijk nu links en rechts de overeenkomstige coëfficiënten van de machten van  $z$  en je krijgt:

$$\begin{aligned} c_0 \cdot 1 &= 1, \\ c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot 1 &= 0, \\ c_0 \cdot \left(-\frac{\pi^2}{6}\right) + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 &= -\frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Je vindt achtereenvolgens  $c_0 = 1, c_1 = 0, c_2 = -\frac{\pi^2}{3}$ . Hieruit volgt dat  $\frac{\cos \pi z}{g(z)} = 1 - \frac{\pi^2}{3} z^2 + \dots$  in de buurt van de oorsprong. Dus in een gepuncteerde omgeving van 0 geldt:

$$\frac{\pi \cot \pi z}{z^2} = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{\cos \pi z}{g(z)} = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3} \frac{1}{z} + \dots$$

Dit is de Laurentreeks van  $\frac{\pi \cot \pi z}{z^2}$  op een gepuncteerde omgeving van 0. Het residu van  $\frac{\pi \cot \pi z}{z^2}$  in 0 is de coëfficiënt van  $\frac{1}{z}$ , dus gelijk aan  $-\frac{\pi^2}{3}$ .

## Opgaven

**Opgave 7.1.** Zij  $f$  gedefinieerd, complexwaardig, continu en begrensd op  $[0, \infty)$ .

Toon aan dat  $g_n(z) = \int_0^n e^{-zt} f(t) dt$  voor elke  $n \in \mathbb{N}$  holomorfe is op  $\mathbb{C}$ .

Toon vervolgens aan dat  $g(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$  holomorfe is op het halfvlak  $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ .

**Opgave 7.2.** Bepaal alle gehele functies  $f$  met  $\frac{f(z)}{z^3} \rightarrow 0$  als  $|z| \rightarrow \infty$ .

**Opgave 7.3.** Bepaal alle gehele functies  $f$  met  $f(1) = 0$  en  $\frac{f(z)}{z^2} \rightarrow 0$  als  $|z| \rightarrow \infty$ .

**Opgave 7.4.** Van een holomorfe functie  $f$  op  $G = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  is gegeven dat  $f$  polen van orde 1 heeft in 0 en in 1. Het residu in 0 is 1 en het residu in 1 is 2. Gegeven is verder dat  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)/z = 3$  en  $f(3) = 10$ . Bepaal  $f$  en laat zien dat dit de enige holomorfe functie op  $G$  is die aan alle voorwaarden voldoet.

**Opgave 7.5.** Bepaal alle gehele functies  $f$  zo, dat  $|f(z)| \leq |z^2 - 1|$  voor alle  $z \in \mathbb{C}$ . Dezelfde vraag als  $f$  geheel en  $|f(z)| \leq |\sin z|$  voor alle  $z \in \mathbb{C}$ .

**Opgave 7.6.** Bepaal alle gehele functies  $f$  met  $\operatorname{Re} f(z) > 0$  voor alle  $z \in \mathbb{C}$  zo, dat  $f(0) = 1$ .

**Opgave 7.7.** (Vervolg) Bepaal alle gehele functies  $f$  met  $f(z) \notin (-\infty, 0]$  voor alle  $z \in \mathbb{C}$  zo, dat  $f(0) = 1$ .

**Opgave 7.8.** Geef de Laurentontwikkeling van  $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$  op de ring  $A(0, 1, 2)$ .

**Opgave 7.9.** Idem van  $\frac{1}{1-z^2}$  op  $A(1, 0, 2)$ .

**Opgave 7.10.** Bepaal de convergentiering en de somfunctie van de volgende reeksen.

1.  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 3^{-n} z^n$ ,
2.  $\dots + \frac{1}{3!} z^{-3} + \frac{1}{2!} z^{-2} + \frac{1}{1!} z^{-1} - 1 + z - 2z^2 + 3z^3 + \dots$ .

**Opgave 7.11.** Geef de Laurentontwikkeling van  $\frac{3}{(z^2+1)(z^2+4)}$  op de volgende ringen:  $A(0, 0, 1)$ ,  $A(0, 1, 2)$  en  $A(0, 2, \infty)$ .

**Opgave 7.12.** Bepaal de Laurentontwikkeling van  $\frac{3z-12}{(z-2)(z-8)}$  om het punt 4 die convergent is in de buurt van het punt 7.

**Opgave 7.13.** Verband met Fourierreeksen. Zij  $f$  holomorf op de ring  $A(0, r, R)$  met  $r < 1 < R$ , met Laurentontwikkeling  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$  op deze ring. Toon aan dat  $f(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$  (met  $t \in \mathbb{R}$ ) waarbij

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt$$

**Opgave 7.14.** Bepaal de geïsoleerde singulariteiten van de volgende functies. Geef ook de aard van de singulariteit. Beschouw ook het punt  $\infty$ .

1.  $\frac{1}{z^2+1}$ ,
2.  $\frac{\sin \pi z}{z-2}$ ,
3.  $\frac{1}{\sin z}$ ,
4.  $\frac{z}{e^z-1}$ ,
5.  $\frac{\sinh z}{z^3}$ ,
6.  $\tan z$ ,
7.  $e^{-1/z^2}$ .

**Opgave 7.15.** Bepaal de aard van de singulariteit in 0 en de Laurentontwikkeling om 0 voor de volgende functies

$$\cos \sqrt{z}, \quad \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

In de laatste functie wordt voor de wortel dezelfde tak genomen. Rechtvaardig de keuze van de tak die je maakt.

**Opgave 7.16.** Bereken het hoofddeel van  $\tan z$  om het punt  $\frac{\pi}{2}$ .

**Opgave 7.17.** Geef steeds de Laurentontwikkeling op een gepunteerde omgeving van het aangegeven singuliere punt. Bepaal ook het residu in dat punt.

1.  $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ , punt 1.
2.  $\frac{z-\sin z}{z^3}$ , punt 0.
3.  $z \sin \frac{1}{z}$ , punt 0.
4.  $\frac{1}{z^2(z-3)^2}$ , punt 3.

**Opgave 7.18.** De functie  $f$  is holomorfe op  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  en heeft een pool van orde 1 in  $z = 1$ . Verder is gegeven dat  $|f(z)| < 3|z|$  als  $|z| > 3$  en dat  $f(0) = f'(0) = 0$  en  $f''(0) = -2$ . Bepaal  $f$ .

**Opgave 7.19.** Integreer de volgende functies over  $C(0, 1)^+$ .

1.  $\frac{\cos z}{(3z-1)^3}$ ,
2.  $\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$ ,
3.  $z^4 \sin \frac{1}{z}$ .

**Opgave 7.20.** Bereken  $\text{Res}_{z=0} \frac{1}{(e^z-1)^2}$ .

**Opgave 7.21.** Bereken  $\text{Res}_{z=0} \frac{1}{(\sin z) \text{hw} \log(1+z)}$ .

**Opgave 7.22.** Bereken  $\int_{C(3i, 4)^+} \frac{z}{(e^z-1)^2} dz$ .

**Opgave 7.23.** Bereken  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ .

**Opgave 7.24.** Bereken  $\text{Res}_{z=0} \frac{\pi \cot \pi z}{z^4}$ . Bepaal met behulp hiervan  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ .



## Tentamenopgaven

**Opgave 7.25.** Laat zien dat er precies een analytische tak  $f$  van  $\sqrt[4]{z^4 - 1}$  bestaat die gedefinieerd is op  $\{z : |z| > 1\}$  en positief is op  $\{z : x = 0, y > 1\}$ . Bepaal de Laurent-reeks van  $f$  op zijn definitiegebied en bepaal

$$\int_{C(0,2)} z^2 f(z) dz.$$

De functie  $f$  kan analytisch worden voortgezet tot  $\mathbb{C} \setminus K$  waar  $K = [-1, 1] \cup [-i, i]$ . U hoeft dit niet te bewijzen. Zij nu  $W$  het (positief georiënteerde) vierkant met hoekpunten  $\frac{11}{10}e^{ik\pi/2}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . Bepaal

$$\int_W z^6 f(z) dz.$$

**Opgave 7.26.** Bepaal en classificeer de singulariteiten op  $\mathbb{C}$  van

$$\frac{z}{e^{\pi z} - 1} \log(z^2 + 4), \quad \frac{1}{\cos \sqrt{z}}, \quad e^{1/\sin z}.$$

**Opgave 7.27.** Beschouw de volgende Laurentreeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(2n)!}.$$

Bepaal van deze reeks het convergentiegebied, de somfunctie en zijn singulariteiten, alsmede hun aard.

**Opgave 7.28.** Laat zien dat er precies een analytische tak  $f$  van  $\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$  bestaat die gedefinieerd is op  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  en negatief is op  $\{y = 0, x > 1\}$ . Bepaal de eerste drie termen van de Laurent-reeks van  $f$  op  $\{|z| > 1\}$ . Bereken vervolgens

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-3} dz,$$

1. als  $\Gamma = C(0, 4)$ ;
2. als  $\Gamma = C(0, 2)$ .

**Opgave 7.29.** Bepaal de aard van de eindige singulariteiten van

$$\frac{z^{4n+2} + 1}{(z^2 + 1)z^{2n+1}}, \quad (n \in \mathbb{N}), \quad e^{1/z} \frac{\cos(\sqrt{1-z^2}) - 1}{\sin(2\pi z)}.$$

**Opgave 7.30.** Veronderstel dat  $f$  holomorfe is op  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Laat verder gegeven zijn dat  $|f'(z)| < |z^2| + |z^{-2}|$  en dat  $f(i^n) = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$ , terwijl het residu van  $f$  in 0 gelijk is aan  $1/4$ . Bereken  $f$  en bewijs dat je oplossing uniek is.

**Opgave 7.31.** Laat zien dat er een holomorfe tak  $f$  bestaat van  $\sqrt{\frac{z^2-1}{z^2+1}}$  die gedefinieerd is op  $\mathbb{C}$  buiten  $[-1, 1] \cup [-i, i]$ , zodanig dat  $f(2) > 0$ . Men ontwikkelt  $f$  in een Laurentreeks op  $|z| > 1$ ,  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$ . Bepaal  $c_0, c_1, \dots, c_4$ . Bereken tot slot

$$\int_{C(0,2)^+} z^3 f(z) dz.$$

**Opgave 7.32.** Veronderstel dat  $f$  holomorf is op  $\mathbb{C}$  en dat overal  $|f'(z)| \leq |z^2 + 1|$ . Verder is gegeven dat  $f(0) = f'(0) = 1$ . Bepaal  $f$ .

**Opgave 7.33.** Beschouw de Laurentreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-4n}}{4n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!}.$$

Bepaal van deze reeks het convergentiegebied en de somfunctie. Bepaal en classificeer de singulariteiten van de somfunctie op de rand van het convergentiegebied.

**Opgave 7.34.**

1. Geef een injectieve conforme afbeelding aan van  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  op  $B(0, 1)$ .
2. Laat zien dat een gehele functie met waarden in  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  constant is.
3. Veronderstel dat  $f$  holomorf is op  $B(0, 1) \setminus \{0\}$  en in 0 een essentiële singulariteit heeft. Bewijs dat het complement van het beeld van  $f$  geen interval kan bevatten.

**Opgave 7.35.** Bepaal alle functies  $f$  die analytisch zijn op  $\mathbb{C}$ , op eventueel een aantal geïsoleerde singulariteiten na, en op  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  voldoen aan een ongelijkheid

$$|f(z)| \leq C(|z|^{3/2} + |z-1|^{-3/2}),$$

voor zekere  $C > 0$ . Als verder is gegeven dat  $f(0) = f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 1$ , bepaal dan  $f$ .

**Opgave 7.36.** Bepaal alle holomorfe  $f$  op  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  met de volgende eigenschappen. In 0 heeft  $f$  een pool van orde 1 met residu 1 en in 1 een pool van orde 1 met residu 2. Verder is gegeven dat  $f(2) = 5/2$  en  $f(3) = 4/3$ , terwijl  $f$  in oneindig een pool van orde 2 heeft.

## 8 Meer Functietheorie

In dit laatste hoofdstuk ontwikkelen we de functietheorie nog wat verder.

### 8.1 Existentie van holomorfe takken

**Stelling 8.1.1** (Existentie holomorfe tak van  $\log f$ ). *Zij  $G$  een enkelvoudig samenhangend gebied, zij verder  $f$  holomorf op  $G$ , zonder nulpunten. Dan bestaat er een holomorfe tak van  $\log f$  op  $G$ .*

*Bewijs.* Kies een vast punt  $a$  in  $G$  en definieer voor  $z \in G$ :

$$g(z) = \int_a^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \alpha,$$

waarbij  $\alpha$  een vaste waarde van  $\log f(a)$ . We integreren over een traplijn  $\gamma$  in  $G$  met beginpunt  $a$  en eindpunt  $z$ . Welke traplijn hier gekozen wordt, doet er niet toe; Er komt steeds dezelfde waarde uit wegens stelling 5.5.6 en daarom is  $g(z)$  goed gedefinieerd en holomorf. Immers, Stelling 5.2.1 zegt dat  $g' = f'/f$ .

Differentieer nu eens de functie  $e^g/f$ . Ga na dat de afgeleide identiek nul is. Dus is deze functie constant  $C$  op  $G$ , ofwel  $e^{g(z)} = Cf(z)$  voor alle  $z \in G$ . Vul nu het punt  $a$  in en je krijgt links  $e^{g(a)} = e^\alpha = f(a)$  en rechts  $Cf(a)$ , ofwel  $C = 1$ . De conclusie is dat  $g$  is holomorf op  $G$  en  $e^{g(z)} = f(z)$  voor alle  $z \in G$ , met andere woorden, een tak van  $\log f$ .  $\square$

### 8.2 Harmonisch geconjugeerde

In Hoofdstuk 3.2 zagen we dat voor een holomorfe functie  $f = u + iv : G \rightarrow \mathbb{C}$ , het reële deel  $u$ , en het imaginaire deel  $v$  harmonisch zijn. We noemen  $v$  een *harmonisch geconjugeerde* functie van  $u$ . Natuurlijk is dan de functie  $v + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  ook een harmonisch geconjugeerde, en dit beschrijft alle mogelijkheden, zoals je eenvoudig nagaat, vgl Opgave 3.6. De volgende stelling zegt iets over het bestaan van harmonisch geconjugeerden.

**Stelling 8.2.1.** *Laat  $G$  een enkelvoudig samenhangend gebied zijn, en  $u$  een harmonische functie op  $G$ . Dan bestaat de harmonische geconjugeerde  $v$  van  $u$  op  $G$ .*

*Bewijs.* De functie  $u$  voldoet aan de Laplace vergelijking, in complex vorm geschreven als

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z} = 0, \quad \text{op } G.$$

Hieruit volgt dat de functie  $g = \frac{\partial u}{\partial z}$  op  $G$  aan de complexe Cauchy - Riemann vergelijking voldoet, dus holomorf is op  $G$ . Het ligt nu voor de hand, gezien de definitie van  $g$ , om een holomorfe primitieve van  $g$  op  $G$  te bestuderen.

We kiezen  $a \in G$  en definiëren een holomorfe functie op  $G$  door

$$F(z) = \int_a^z g(\zeta) d\zeta.$$

Hier wordt geïntegreerd over een traplijn in  $G$  van  $a$  tot  $z$ . Omdat  $g$  holomorf is en  $G$  enkelvoudig samenhangend, is de waarde van de integraal onafhankelijk van de gekozen traplijn. Er geldt  $\frac{\partial F}{\partial z} = F'(z) = g(z) = \frac{\partial u}{\partial z}$ . We vinden nu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (F + \bar{F}) &= \frac{\partial u}{\partial z} && \text{want } \frac{\partial \bar{F}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (F + \bar{F}) &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} && \text{want } u \text{ is reëelwaardig.} \end{aligned}$$

Hieruit concluderen we dat  $F + \bar{F} - u$  een reële constante  $C$  is, ofwel  $u = \operatorname{Re} 2F - C$  en dan is  $v = \operatorname{Im} 2F$ .  $\square$

### 8.3 Nulpunten van holomorfe functies en uniciteit

We beginnen met een gevolg van stelling 7.4.2.

**Gevolg 8.3.1.** *Als  $f$  en  $g$  twee holomorfe functies zijn op een gebied  $G$  en er is een getal  $a \in G$  waarvoor  $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$  voor alle  $n \geq 0$ , dan zijn  $f$  en  $g$  gelijk op heel  $G$ .*

*Bewijs.* Kijk naar de functie  $f - g$  en pas stelling 7.4.2 toe.  $\square$

**Stelling 8.3.2** (Geïsoleerde nulpunten). *Zij  $f$  holomorf op een gebied  $G$  en niet gelijk aan de nulfunctie. Dan liggen de nulpunten van  $f$  geïsoleerd in  $G$ .*

*Een nulpunt  $a$  van  $f$  noemen we een geïsoleerd nulpunt als  $f(a) = 0$  en er een  $r > 0$  is met  $0 < |z - a| < r \implies f(z) \neq 0$ .*

*Bewijs.* Als  $a$  een nulpunt van  $f$  is dan heeft dit nulpunt een eindige orde  $k$  en is er dus een holomorfe functie  $g$  op  $G$  zodat  $f(z) = (z - a)^k g(z)$  op  $G$  en met  $g(a) \neq 0$ . Uit de continuïteit van  $g$  volgt dat er een schijfje  $B(a, r)$  is zodat  $g$  hierop geen nulpunten heeft. Het punt  $a$  is dus het enige nulpunt van  $f$  op  $B(a, r)$ .  $\square$

**Gevolg 8.3.3** (Eenduidigheidsstelling). *Zij  $f$  en  $g$  twee holomorfe functies op een gebied  $G$ . Zij verder  $a_1, a_2, a_3, \dots$  een rij in  $G$  met limiet  $a \in G$  zo dat  $a_n \neq a$  voor  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Stel  $f(a_n) = g(a_n)$  voor  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Dan zijn  $f$  en  $g$  gelijk op  $G$ .*

*Bewijs.* De functie  $h = f - g$  is holomorf op  $G$ , heeft de waarde 0 in alle punten  $a_1, a_2, a_3, \dots$  en dus in  $a$  (want de holomorfe functie  $h$  is continu). Dus  $a$  is geen geïsoleerd nulpunt van  $h$  en dus moet  $h$  volgens de stelling boven de nulfunctie zijn. Dus  $f$  en  $g$  zijn gelijk op heel  $G$ .  $\square$

**Voorbeeld 8.3.4.** Neem  $G = \mathbb{C}$ ,  $a = 0$ ,  $a_n = 1/n$ ,  $f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$ ,  $g(z) = 1$ . Omdat we al weten dat  $f \equiv g$  op  $\mathbb{R}$ , volgt uit de eenduidigheidsstelling onmiddellijk dat  $f \equiv g$  op  $\mathbb{C}$ .

Je kunt de identiteit  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$  natuurlijk ook eenvoudig aantonen door de definities van  $\cos z$  en  $\sin z$  te gebruiken.

**Voorbeeld 8.3.5.**  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $a = 0$ ,  $a_n = 1/n$ ,  $f(z) = \sin(2\pi/z)$ ,  $g$  is de nulfunctie. Verklaar!

## 8.4 Singuliere randpunten

Laat  $f$  holomorfe zijn op een gebied  $G$  en laat  $b$  een randpunt van  $G$  zijn. Dan heet  $b$  een *regulier randpunt* voor  $f$  als er een  $\rho > 0$  is en een holomorfe functie  $g$  op  $B(b, \rho)$  zodanig dat  $f \equiv g$  op een van de samenhangscomponenten van  $G \cap B(b, \rho)$ . Je noemt deze functie  $g$  wel een (*directe*) *analytische voortzetting* van  $f$  tot  $B(b, \rho)$ .

Een randpunt  $b$  heet *singulier randpunt* voor  $f$  als  $b$  niet regulier is.

**Voorbeeld 8.4.1.** Bekijk  $f(z) = \operatorname{hw} \log z$  op  $G = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ . Het punt  $-1$  is een regulier randpunt voor  $f$ . Neem voor  $g$  op  $B(-1, 1)$  de beperking tot deze schijf van de holomorfe tak van  $\log z$  op het linkerhalfvlak gegeven door  $\log |z| + i\phi_z$ , waarbij  $\arg z = \phi_z$  en  $\frac{1}{2}\pi < \phi_z < \frac{3}{2}\pi$ .

Bekijk nu het randpunt  $0$ . Stel dat  $0$  een regulier randpunt is, dan zou er een  $\rho > 0$  zijn en een holomorfe functie  $g$  op  $B(0, \rho)$  zodat  $\operatorname{hw} \log z = g(z)$  voor alle  $z \in G \cap B(0, \delta)$ . Maar dat kan niet want voor  $0 < \delta < \rho$  is  $g$  begrensd op  $G \cap B(0, \rho)$  en  $\operatorname{hw} \log$  is daarop onbegrensd.

De randpunten van  $G$  ongelijk aan  $0$  kunnen op soortgelijke manier als het punt  $-1$  aangepakt worden. Conclusie: alle randpunten van  $G$  behalve het punt  $0$  zijn regulier.

**Stelling 8.4.2** (Stelling van de convergentiestraal). *Zij  $f$  holomorfe op  $B(a, r)$  en laat  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  de machtreeksontwikkeling van  $f$  om het punt  $a$  zijn. Laat  $R (\geq r)$  de convergentiestraal van de reeks zijn. Dan geldt: Elk punt van de rand van  $B(a, r)$  is regulier voor  $f \iff R > r$ .*

*Met andere woorden  $R$  is de afstand van  $a$  tot het dichtst bij  $a$  gelegen singuliere (rand)punt van  $f$ .*

*Bewijs.*  $\Leftarrow$  Laat  $R > r$ . Laat  $F$  de somfunctie van de machtreeks zijn op  $B(a, R)$ . Als nu  $b$  een randpunt van  $B(a, r)$  is, dan is de beperking tot het schijfje  $B(b, R-r)$  van de functie  $F$  een analytische voortzetting van  $f$  tot  $B(b, R-r)$ . Dus  $b$  is een regulier randpunt voor  $f$ .

$\Rightarrow$  Stel dat elk randpunt van  $B(a, R)$  regulier is voor  $f$ . Overdek  $C(a, r)$  met een eindig aantal ( $= n$ ) schijven  $B(b_i, \rho_i)$  zodat op elk van die schijven er een analytische voortzetting  $g_i$  van  $f$  tot  $B(b_i, \rho_i)$  is. Ga na dat er zo'n eindige overdekking is door de compactheid van  $C(a, r)$  te gebruiken.

We definiëren nu op  $B(a, r) \cup_{i=1}^n B(b_i, \rho_i)$  de functie  $F$  door  $F(z)$  gelijk aan  $f(z)$  te

nemen als  $z \in B(a, r)$  en gelijk aan  $g_i(z)$  als  $z \in B(b_i, \rho_i)$ . We gaan aantonen dat dit een goede definitie is.

Als  $z \in B(a, r) \cap B(b_i, \rho_i)$ , dan is  $F(z)$  op twee manieren gedefinieerd: als  $f(z)$  en als  $g_i(z)$ . Maar  $f \equiv g_i$  op de doorsnede van deze twee schijven, dus die twee manieren leveren hetzelfde op.

Als  $z \in B(b_i, \rho_i) \cap B(b_j, \rho_j)$  (met  $i \neq j$ ), dan is  $F(z)$  weer op twee manieren gedefinieerd: als  $g_i(z)$  en als  $g_j(z)$ . Bekijk nu  $g_i$  en  $g_j$  op  $B(b_i, \rho_i) \cap B(b_j, \rho_j)$ . Op de niet-lege deelverzameling  $B(b_i, \rho_i) \cap B(b_j, \rho_j) \cap B(a, r)$  hiervan zijn de twee functies gelijk want daar zijn ze gelijk aan  $f$ . Uit (bijvoorbeeld) de eenduidigheidsstelling volgt dan dat  $g_i \equiv g_j$  op  $B(b_i, \rho_i) \cap B(b_j, \rho_j)$ . Dus de twee manieren leveren ook hier hetzelfde op.

Ga na dat dit alles tot gevolg heeft dat  $F(z)$  altijd ondubbelzinnig gedefinieerd is, ook als  $z$  in meer dan twee schijven zit. Omdat  $C(a, r)$  in het inwendige van  $B(a, r) \cup_{i=1}^n B(b_i, \rho_i)$  ligt, is er een schijf  $B(a, s)$  met  $s > r$  en  $B(a, s) \subset B(a, r) \cup_{i=1}^n B(b_i, \rho_i)$ . Ga na! Onze functie  $F$  is holomorf op  $B(a, s)$  en heeft hierop een machtreeksontwikkeling met convergentiestraal  $\geq s$ , vergelijk het bewijs van Stelling 5.4.4. Maar de machtreeksontwikkeling van  $F$  om  $a$  is gelijk aan die van  $f$  om  $a$ . Dus  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  heeft convergentiestraal  $\geq s > r$ .  $\square$

## 8.5 Het argumentprincipe

We beginnen met de volgende definitie:

**Definitie 8.5.1.** Een functie  $f$  heet *meromorf* op een gebied  $G$  als  $f$  holomorf is in alle punten van  $G$  met uitzondering van geïsoleerde singuliere punten die allemaal polen van  $f$  zijn.

Het kan gebeuren dat  $f$  oneindig veel polen heeft, denk maar aan de functie  $1/\sin z$  op  $G = \mathbb{C}$ .

**Stelling 8.5.2** (Argumentprincipe). *Laat  $f$  meromorf zijn op een omgeving van de afsluiting van een net gebied  $D$  in  $\mathbb{C}$ . Veronderstel dat  $f$  geen nulpunten of polen op  $C$  heeft, de positief georiënteerde rand van  $D$ . Zij  $N$  het aantal nulpunten van  $f$  in  $D$ , met multipliciteiten geteld. Evenzo is  $P$  het aantal polen van  $f$  in  $D$ . Dan geldt:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

*Bewijs.* We beginnen met op te merken dat het aantal nulpunten en polen van  $f$  in  $D$  eindig is. Immers,  $f$  heeft geen nulpunt van oneindige orde, en als er oneindig veel nulpunten of polen in  $D$  zijn, ligt er in  $\bar{D}$  een verdichtingspunt  $a$  van de polen of de nulpunten. In dat verdichtingspunt is  $f$  meromorf, dus voor zekere  $k \in \mathbb{Z}$  zal  $(z-a)^k f(z)$  holomorf zijn op een omgeving van  $a$ . Dat betekent dat de nulpunten van  $f$  zich daar niet kunnen verdichten wegens Stelling 8.3.2, en de polen al helemaal niet!

De geïsoleerde singuliere punten van  $f'/f$  in  $D$  moeten we zoeken onder de nulpunten en de polen van  $f$ . Laat nu  $a$  een nulpunt van  $f$  zijn van orde  $k$ , dan is er een holomorfe functie  $g$  in de buurt van  $a$  met  $g(a) \neq 0$  zodat nabij  $a$  geldt dat  $f(z) = (z - a)^k g(z)$ . Dan volgt dat

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

dus  $a$  is een enkelvoudige pool en het residu van  $f'/f$  in  $a$  is gelijk aan  $k$ , immers de functie  $g'/g$  is holomorf in de buurt van  $a$ .

Als  $a$  een pool van orde  $k$  is van  $f$ , dan schrijf je  $f(z) = (z - a)^{-k} g(z)$  in een gepuncteerde omgeving van  $a$  (met  $g$  als boven). Nu is het residu van  $f'/f$  in  $a$  (weer een enkelvoudige pool) gelijk aan  $-k$ .

De residuenstelling toegepast om gebied  $D$  met rand  $C$  en de functie  $f'/f$  levert precies de uitspraak van de stelling op.  $\square$

Waarom heet deze stelling het argumentprincipe? We geven een schets van het idee daarachter. Neem een schijfje  $U$ , met middelpunt op  $C$ , zo, dat  $f$  holomorf is op  $U$  zonder nulpunten. Laat  $C^*$  een stukje van  $C$  zijn in  $U$  met dezelfde oriëntatie als die van  $C$  en noem het beginpunt  $z_0$  en eindpunt  $z_1$ . Omdat  $U$  enkelvoudig samenhangend is, bestaat er een holomorfe tak  $g$  van  $\log f$  op  $U$ . Dan geldt dat  $g(z) = \ln |f(z)| + i \operatorname{Im} g(z)$  waarbij  $\operatorname{Im} g(z)$  dus een continue tak van  $\arg f(z)$  is op  $U$ . Verder geldt  $g' = f'/f$  en dus is  $g$  een primitieve van  $f'/f$  en dus

$$\int_{C^*} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = g(z_1) - g(z_0),$$

zo dat

$$\int_{C^*} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \operatorname{hw} \log |f(z_1)| - \operatorname{hw} \log |f(z_0)| + i \operatorname{Im}(g(z_1) - g(z_0)).$$

Het imaginaire deel stelt de toename voor van het argument van  $f(z)$  als  $z$  over  $C^*$  loopt van  $z_0$  tot  $z_1$ . Ga na dat een andere holomorfe tak van  $\log f$  op  $U$  hetzelfde resultaat oplevert.

Door bovenstaande te gebruiken en  $C$  op geschikte manier te verdelen in een eindig aantal achter elkaar doorlopen boogjes en al de corresponderende integralen op te tellen krijg je dat  $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  gelijk aan  $\frac{1}{2\pi}$  maal de toename is van (een continu gekozen waarde van) het argument van  $f(z)$  als  $z$  over  $C$  loopt.

**Gevolg 8.5.3** (Stelling van Rouché). *Zij  $D$  een net gebied met rand  $C$ . Veronderstel dat  $f$  en  $g$  holomorf zijn op een omgeving van de afsluiting van  $D$ . Veronderstel verder dat  $|f| > |g|$  op  $C$  (dus  $|f(z)| > |g(z)|$  voor alle  $z \in C$ ). Dan is het aantal nulpunten van  $f + g$  op  $D$  gelijk aan het aantal nulpunten van  $f$  op  $D$ . Hier worden de nulpunten met multipliciteit geteld.*

*Bewijs.* Ga na dat geldt:

$$\frac{(f+g)'}{f+g} - \frac{f'}{f} = \frac{\left(1 + \frac{g}{f}\right)'}{1 + \frac{g}{f}}.$$

Dus is volgens het argumentprincipe

$$N(f+g) - N(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\left(1 + \frac{g}{f}\right)'}{1 + \frac{g}{f}} dz = 0.$$

We geven een redenering die onafhankelijk is van de uitleg van de term ‘argumentprincipe’.

Immers voor elke  $c \in C$  is er een  $\rho_c > 0$  zo dat op  $B(c, \rho_c)$  geldt dat  $|f| > |g|$ . De vereniging van al deze open schijfjes vormt een gebied  $G$  dat  $C$  bevat, dat door de functie  $1 + \frac{g}{f}$  in het open rechterhalfvlak wordt afgebeeld, dus waarop de functie  $\text{hw} \log\left(1 + \frac{g}{f}\right)$  gedefinieerd is. Dit is dus een primitieve van

$$\frac{\left(1 + \frac{g}{f}\right)'}{1 + \frac{g}{f}}$$

op  $G$ . Dus is de integraal boven volgens de hoofdstelling van de integraalrekening gelijk aan 0.  $\square$

**Voorbeeld 8.5.4.** We bepalen het aantal nulpunten van  $p(z) = z^7 + 5z^5 + 8z + 1$  op  $B(0, 2)$ . Daartoe stellen we  $f(z) = 5z^5$  en  $g(z) = z^7 + 8z + 1$ .

Op  $C(0, 2)$  geldt  $|f(z)| = 5|z|^5 = 5 \cdot 2^5 = 160$ .

En op  $C(0, 2)$  is  $|g(z)| \leq |z^7| + |8z| + |1| = 2^7 + 16 + 1 = 145$ , en dus geldt  $|f| > |g|$  op  $C(0, 2)$ . Bijgevolg is het aantal nulpunten van  $p = f + g$  op  $B(0, 2)$  gelijk aan dat van  $f$  op deze schijf, en dat is 5, want 0 is het enige nulpunt van  $f$ , en dat is van multipliciteit 5.

**Gevolg 8.5.5** (Nog eens de hoofdstelling van de algebra). *We geven een alternatief bewijs van de hoofdstelling van de algebra door gebruik te maken van de stelling van Rouché.*

*Bewijs.* Welnu, laat  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  met  $n > 0$  en  $a_n \neq 0$ . Laat  $f(z) = a_n z^n$  en  $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ . Er geldt dat

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{a_n z^n} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{z^n}.$$

Uit deze schrijfwijze ziet men dat er een  $R > 0$  is zo, dat voor alle  $|z| \geq R$  geldt dat het rechterlid, dus ook het linkerlid boven, in absolute waarde kleiner is dan 1. Dus  $|f| > |g|$  op  $C(0, R)$ . Het aantal nulpunten van  $p = f + g$  op  $B(0, R)$  is gelijk aan dat van  $f$  op deze schijf, en dat aantal is gelijk aan  $n$  want 0 is het enige nulpunt van  $f$ , en dat is van orde  $n$ . We hebben dus aangetoond dat  $p$  een nulpunt heeft. We hebben meer aangetoond, namelijk dat  $p$  zelfs  $n$  nulpunten heeft binnen  $C(0, R)$  en dan hebben we meteen *alle* nulpunten gevonden want meer nulpunten kan een  $n$ -de graadsveelterm niet hebben.  $\square$



## 8.6 Open afbeeldingsstelling

**Definitie 8.6.1.** Een afbeelding  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  heet *open* als  $f(O)$  open is in  $\mathbb{C}$  voor elke open  $O \subset G$ .

**Stelling 8.6.2** (Open afbeeldingsstelling). *Zij  $f$  holomorf op een gebied  $G$ , dan geldt:  $f$  niet-constant op  $G \implies f$  open.*

*Bewijs.* Laat  $f$  niet-constant zijn en laat  $U$  een open deelverzameling van  $G$  zijn, we tonen aan dat  $f(U)$  een open deelverzameling van  $\mathbb{C}$  is.

Laat  $a \in U$ . Bekijk  $h = f - f(a)$ . Dan is  $h(a) = 0$ . Omdat  $f$  niet-constant is, is  $h$  niet de nulfunctie op  $G$ , dus is  $a$  een geïsoleerd nulpunt van  $h$ . Er is dus een  $\rho_a > 0$  zo, dat  $\overline{B(a, \rho_a)} \subset U$  en  $h(z) \neq 0$  voor alle  $z \in C(a, \rho_a)$ . Laat  $\epsilon_a > 0$  met  $|h(z)| > \epsilon_a$  voor alle  $z \in C(a, \rho_a)$  (waarom bestaat zo'n  $\epsilon_a$ ?). Laat nu  $w \in \mathbb{C}$  met  $|w| < \epsilon_a$ . Neem voor  $g$  de constante functie met waarde  $-w$ . Dan is  $|h| > |g|$  op  $C(a, \rho_a)$ . Uit Rouché volgt nu dat het aantal nulpunten van  $h - w$  binnen de cirkel  $C(a, \rho_a)$  gelijk is aan dat van  $h$ . Omdat  $h(a) = 0$  is dat er minstens één. Dus neemt  $h$  de waarde  $w$  aan op  $U$ , ofwel  $B(0, \epsilon_a) \subset h(U)$ . De functie  $f$  ontstaat uit  $h$  door er  $f(a)$  bij op te tellen. Dus geldt  $B(f(a), \epsilon_a) \subset f(U)$ . En dus

$$\cup_{a \in U} B(f(a), \epsilon_a) = f(U),$$

hetgeen impliceert dat  $f(U)$  open is.  $\square$

**Gevolg 8.6.3.** *Als  $f$  holomorf is op een gebied  $G$  en niet-constant is, dan is  $f(G)$  ook een gebied.*

**Definitie 8.6.4.** Als  $f$  holomorf is op een gebied  $G$ , dan zeggen we dat  $|f|$  een *locaal maximum* aanneemt in  $a \in G$  als er een  $\delta > 0$  is met  $|z - a| < \delta \implies |f(z)| \leq |f(a)|$ .

**Stelling 8.6.5** (Maximumprincipe). *Zij  $f$  holomorf op een gebied  $G$ , dan geldt:  $|f|$  neemt in een punt  $a \in G$  een lokaal maximum aan  $\implies f$  constant op  $G$ .*

*Bewijs.* Zij  $f$  holomorf op  $G$ . Stel  $|z - a| < \delta \implies |f(z)| \leq |f(a)|$ , dan is  $f(B(a, \delta))$  geen open verzameling omdat er geen open schijfje bestaat om  $f(a) \in f(B(a, \delta))$  dat geheel binnen  $f(B(a, \delta))$  ligt. Dus  $f$  is geen open afbeelding en moet dus constant zijn op  $G$ .  $\square$

**Stelling 8.6.6** (Maximummodulusstelling). *Laat  $f$  gedefinieerd en continu zijn op de afsluiting van een begrensde gebied  $G$ . Zij verder  $f$  holomorf op  $G$ .*

*De continue reëelwaardige functie  $|f|$  neemt een grootste waarde (globaal maximum) aan op de compacte verzameling  $\overline{G}$ . Deze grootste waarde wordt in ieder geval op de rand van  $G$  aangenomen.*

*Bewijs.* Als  $f$  niet constant is op  $G$ , dan wordt deze grootste waarde volgens het maximumprincipe niet op  $G$  aangenomen, dus (alleen) op de rand van  $G$ .

Is  $f$  wel constant op  $G$ , dan is vanwege continuïteit van  $f$ ,  $f$  ook constant op  $\overline{G}$ , dus de grootste waarde van  $|f|$  wordt in elk punt van  $\overline{G}$  aangenomen, in het bijzonder op de rand van  $G$ .  $\square$

**Stelling 8.6.7** (Minimummodulusstelling). *Laat  $f$  gedefinieerd en continu zijn op de afsluiting van een begrensde gebied  $G$ . Zij verder  $f$  holomorf op  $G$ .*

*De continue reëelwaardige functie  $|f|$  neemt een kleinste waarde (globaal minimum) aan op de compacte verzameling  $\bar{G}$ .*

*Als  $f$  geen nulpunt op  $G$  aanneemt, dan wordt deze kleinste waarde in ieder geval op de rand van  $G$  aangenomen.*

*Bewijs.* Als  $f$  een nulpunt op de rand van  $G$  heeft zijn we klaar. Zo niet, pas dan de maximummodulusstelling toe op  $1/f$ .  $\square$

**Stelling 8.6.8** (Lemma van Schwarz). *Zij  $f$  holomorf op  $B(0,1)$ . Veronderstel dat  $f(0) = 0$  en  $|f(z)| \leq 1$  voor alle  $z \in B(0,1)$ . Dan is  $|f(z)| \leq |z|$  voor alle  $z \in B(0,1)$ .*

*Als er bovendien een  $a$  is met  $0 < |a| < 1$  en  $|f(a)| = |a|$  dan geldt  $f(z) = cz$  voor een constante  $c$  met  $|c| = 1$ .*

*Bewijs.* Beschouw voor  $0 < r < 1$  de functie  $g_r(z) = f(rz)/z$ . De functie  $g$  is gedefinieerd en holomorf op  $A(0,0,1/r)$ . Omdat  $f(0) = 0$  is  $0$  een ophefbare singulariteit. Dus  $g_r$  is holomorf, en  $|g_r| \leq 1$  op  $C(0,1)$  en dus ook op  $\bar{B}(0,1)$ . Er volgt dat  $|f(rz)| \leq |z|$  voor  $|z| \leq 1$ . Met andere woorden,  $|f(w)| < |w|/r$  als  $|w| \leq r$ . Kies nu  $w$  vast in  $B(0,1)$  en laat  $r \uparrow 1$ . Dan volgt  $|f(w)| \leq |w|$ .

De functie  $h(z) = f(z)/z$  is holomorf en in absolute waarde begrensd door 1. Als nu  $|f(a)| = |a|$  neemt  $|h|$  een inwendig maximum 1 aan, en  $h$  is dus constant. Met andere woorden, er is een  $c$ ,  $|c| = 1$  met  $f(z) = cz$ .  $\square$

**Gevolg 8.6.9.** *Alle biholomorfe afbeeldingen van de eenheidschijf  $B(0,1)$  op zichzelf zijn van de vorm*

$$z \mapsto c \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad |c| = 1, \quad a \in B(0,1). \quad (8.1)$$

We geven de verzameling biholomorfe afbeeldingen van een open verzameling  $G$  op zichzelf aan met  $\text{Aut}(G)$ . Dit is een groep met als operatie de samenstelling van afbeeldingen, de *automorfismengroep* van  $G$ .

*Bewijs.* Voor  $|z| = 1$  geldt

$$|1 - \bar{a}z| = \left| |z|^2 - \bar{a}z \right| = |z| |\bar{z} - \bar{a}| = |z - a|,$$

dus GLT's van de vorm (8.1) beelden de eenheidscirkel naar zichzelf af. Omdat  $a \mapsto 0$ , is (8.1) een biholomorfe afbeelding van  $B(0,1)$  op zichzelf. Zij nu  $f \in \text{Aut}(B(0,1))$  en veronderstel dat  $f(0) = a$ . Laat  $g$  de GLT uit (8.1) zijn, met  $c = 1$ . Dan is  $F = g \circ f \in \text{Aut}(B(0,1))$  en  $F(0) = 0$ . Schwarz' lemma geeft  $|F(z)| \leq |z|$ . Passen we Schwarz' lemma toe op  $F^{-1}$  in het punt  $F(z)$  dan vinden we  $|z| = |F^{-1}(F(z))| \leq |F(z)|$ . Dit geldt voor alle  $z \in B(0,1)$ . We concluderen dat

$|F(z)| = |z|$  en nog een keer Schwarz' lemma geeft dat  $g \circ f(z) = F(z) = cz$ , voor zekere  $c$ ,  $|c| = 1$ . Samenstellen met  $g^{-1}$  geeft

$$f(z) = \frac{cz + a}{1 + \bar{a}cz} = c \frac{z + a\bar{c}}{1 + \bar{a}cz}.$$

Dit is van de vorm (8.1). □

## 8.7 Inverse-functiestelling

**Stelling 8.7.1** (Inverse-functiestelling). *Zij  $U$  een gebied,  $a \in U$ , en  $f$  holomorf en injectief op  $U$ .*

*Dan is er een gebied  $V$  met  $b = f(a) \in V$ , en een gebied  $W \subset U$  met  $a \in W$  en een holomorfe functie  $g$  op  $V$  zo, dat  $f : W \rightarrow V$  en  $g : V \rightarrow W$  elkaars inverse zijn. In het bijzonder is  $f'$  ongelijk 0.*

*Bewijs.* Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen  $f(a) = 0$  (ga na).

1. Laat  $\rho > 0$ , zo, dat  $\overline{B(a, \rho)} \subset U$ . Omdat  $f$  injectief is op  $U$  is  $f(z) \neq 0$  voor alle  $z \in C(a, \rho)$ . Als in het bewijs van de open afbeeldingsstelling vinden we  $\epsilon > 0$  zo, dat  $|f(z)| > \epsilon$  voor alle  $z \in C(a, \rho)$ . Met Rouché volgt dat voor  $|w| < \epsilon$  het aantal nulpunten (geteld met multipliciteiten) van  $f - w$  binnen de cirkel  $C(a, \rho)$  gelijk is aan het aantal nulpunten van  $f$  binnen deze cirkel, dus gelijk aan de multipliciteit  $m \geq 1$  van het enige nulpunt  $a$  van  $f$ . Er bestaat dus minstens één punt  $z \in B(a, \rho)$  zo, dat  $f(z) - w = 0$ .

Anderzijds bestaat er vanwege de injectiviteit van  $f$  hoogstens één zo'n punt  $z$  in  $B(a, \rho)$ . Dus er precies één zo'n punt, noem dit  $z = g(w)$  voor  $w \in B(0, \epsilon)$ .

Als  $m$  groter dan 1 zou zijn dan is de multipliciteit van het unieke nulpunt  $z = g(w) \in B(a, \rho)$  van  $f - w$  ook gelijk aan  $m$  en dus is  $f'(z) = 0$  in zo'n punt  $z$ .

Neem nu een rijtje  $z_1, z_2, z_3, \dots$  in  $B(a, \rho)$ , allemaal verschillend van  $a$  zo, dat  $f(z_n) = w_n$  met  $|w_n| < \epsilon$ , dus  $z_n = g(w_n)$ . Dus volgt dat  $f'(z_n) = 0$  voor alle  $n$  en dus is  $a$  geen geïsoleerd nulpunt van  $f'$ . Dus  $f'$  is identiek nul op  $U$ , dus  $f$  is constant op  $U$ , in tegenspraak met de injectiviteit van  $f$ . Dus  $m = 1$ .

Volgens de residuenstelling geldt voor  $w \in B(0, \epsilon)$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)^+} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta = \frac{g(w) f'(g(w))}{f'(g(w))} = g(w).$$

De integrand is continu voor  $(w, \zeta) \in B(0, \epsilon) \times C(a, \rho)$  en is voor vaste  $\zeta$  holomorf op  $B(0, \epsilon)$ . De integraal kunnen we verder omschrijven tot een integraal over het interval  $[0, 2\pi]$ , die ook weer continu is als functie van twee variabelen en holomorf als functie van  $w$ . Uit de stelling over holomorfie van integralen volgt dat de integraal dus  $g$  holomorf is op  $B(0, \epsilon)$ .

Nu geldt als gevolg van de open afbeeldingsstelling dat het beeld van het gebied  $V = B(0, \epsilon)$  onder  $g$  weer een gebied  $W \subset B(a, \rho) \subset U$  is met  $a \in W$ .

Verder zijn  $f : W \rightarrow V$  en  $g : V \rightarrow W$  elkaars inverse. □

*Opmerking.* De injectiviteit impliceert blijkbaar  $f'(a) \neq 0$ . Zo gauw dat bewezen is hadden we ook de eerdere versie van de inverse-functiestelling 3.3.3 kunnen toepassen. Maar je vindt hier ook een direct bewijs voor de inverse-functiestelling!

Als geldt dat  $f'(a) \neq 0$  (dus  $m = 1$ ) in plaats van de injectiviteit van  $f$ , dan is (er weer van uitgaand dat  $f(a) = 0$ )  $\frac{f(z)}{z-a} = \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \sim f'(a) \neq 0$  voor  $z$  in een gepunteerde omgeving van  $a$ . En dus is er een  $\rho > 0$  zo, dat  $f(z) \neq 0$  voor alle  $z \in C(a, \rho)$ . Er volgt dat voor elke  $\epsilon > 0$  het aantal nulpunten van  $f - w$  binnen  $C(a, \rho)$  precies één is (van multiplicititeit  $m = 1$ ). Etcetera.

Bovenstaande stelling doet een *lokale* uitspraak. Er volgt de volgende *globale* uitspraak uit. Als  $f : G \rightarrow H$  holomorf en bijectief is, met inverse functie  $g : H \rightarrow G$ , dan hebben we al gezien dat  $H$  een gebied is. Verder volgt uit de inverse-functiestelling (eerste versie) boven dat elk punt van  $H$  een omgeving heeft waarop  $g$  holomorf is. En dus is  $g : H \rightarrow G$  holomorf. We resumeren dit alles hieronder.

**Stelling 8.7.2** (Stelling van de globale inverse functie). *Als  $f : G \rightarrow H$  holomorf en bijectief is, dan is  $H$  een gebied en de inverse functie  $g : H \rightarrow G$  is holomorf.*

We noemen  $G$  en  $H$  *holomorf equivalent* (of ook wel *conform equivalent* omdat de afgeleide van  $f$  nergens 0 is). Er geldt dan:  $F$  holomorf op  $H \iff F \circ f$  holomorf op  $G$ . De bestudering van de holomorfe functies op  $G$  is dus hetzelfde als de bestudering van de holomorfe functies op  $H$ .

In dit verband noemen we nogmaals de *Riemannafbeeldingsstelling*. Deze zegt dat als  $G$  een enkelvoudig samenhangend gebied is en  $G \neq \mathbb{C}$ , dan is  $G$  holomorf equivalent met de eenheidsschijf  $B(0, 1)$ .

## 8.8 Substitutistelling

Een stelling die nogal eens voorkomt bij contourintegratie is de volgende uitspraak.

**Stelling 8.8.1** (Substitutistelling). *Laat  $G$  en  $H$  gebieden zijn en  $f : G \rightarrow H$  holomorf en bijectief. Zij  $\gamma$  een stuksgewijs gladde kromme in  $G$  en  $\gamma^* = f(\gamma)$ . Dan is  $\gamma^*$  ook een stuksgewijs gladde kromme in  $H$ , en als  $g$  continu is op  $\gamma^*$ , dan is*

$$\int_{\gamma^*} g(w) dw = \int_{\gamma} g(f(z))f'(z) dz.$$

*Bewijs.* Een parametrizing  $t \mapsto z(t)$  op een interval  $[a, b]$  van (een deel van)  $\gamma$  gaat over in de parametrizing  $t \mapsto w(t) = f(z(t))$  op het interval  $[a, b]$  van (een deel van)  $\gamma^*$ . Ga na dat aan alle eisen voor een parametrizing voldaan is. Gebruik dat de afgeleide van  $f$  nergens gelijk aan 0 is. Dit laat zien dat  $\gamma^*$  een stuksgewijs gladde kromme is en na invulling van de parametrizingen in de integralen volgt de gelijkheid ervan.  $\square$

**Voorbeeld 8.8.2.** Bereken  $\int_{C(0,2)^+} \operatorname{hw} \log(1 + \frac{1}{w}) dw$ .

Merk op dat de integrand gedefinieerd en holomorfe is op  $\mathbb{C} \setminus [-1, 0]$ , en dus continu is op de integratiekromme. Je kunt hem niet rechtstreeks uitrekenen met de residuenstelling (waarom niet?).

Stel nu  $w = f(z) = \frac{1}{z}$ , dan is

$$\int_{C(0,2)^+} \operatorname{hw} \log\left(1 + \frac{1}{w}\right) dw = \int_{C(0, \frac{1}{2})^-} \operatorname{hw} \log(1+z) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) dz.$$

Dus is

$$\int_{C(0,2)^+} \operatorname{hw} \log\left(1 + \frac{1}{w}\right) dw = \int_{C(0, \frac{1}{2})^+} \frac{\operatorname{hw} \log(1+z)}{z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\operatorname{hw} \log(1+z)}{z^2}.$$

En dus is

$$\int_{C(0,2)^+} \operatorname{hw} \log\left(1 + \frac{1}{w}\right) dw = 2\pi i \frac{1}{1!} = 2\pi i.$$

Het kan ook als volgt. Er geldt gebruik makend van  $\operatorname{hw} \log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$  voor  $|z| < 1$  dat

$$\int_{C(0,2)^+} \operatorname{hw} \log\left(1 + \frac{1}{w}\right) dw = \int_{C(0,2)^+} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{1}{w^n} \right) dw,$$

dus

$$\int_{C(0,2)^+} \operatorname{hw} \log\left(1 + \frac{1}{w}\right) dw = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_{C(0,2)^+} \frac{1}{w^n} dw = \int_{C(0,2)^+} \frac{1}{w} dw = 2\pi i.$$

Het eerste gelijkteken in de laatste regel is geoorloofd op grond van uniforme convergentie van de reeks op  $C(0, 2)$ , het tweede omdat de andere integralen allemaal gelijk aan 0 zijn.

## Opgaven

**Opgave 8.1.** Zij  $f$  holomorfe op een gebied  $G$ , en veronderstel dat  $B(a, R) \subset G$ . Bewijs de *middelwaarde-eigenschap*:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta, \quad (0 < r < R).$$

Bewijs ook de middelwaarde-eigenschap voor harmonische functies  $u$  op  $G$ :

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta, \quad (0 < r < R).$$

**Opgave 8.2.** Hoeveel nulpunten heeft  $p(z) = z^5 + 10z - 3$  in  $B(0, 2)$ ? En op  $A(0, 1, 2)$ ?

**Opgave 8.3.** Zij  $|a| > e$ . Bewijs dat  $h(z) = az^n - e^z$  precies  $n$  nulpunten heeft op  $B(0, 1)$ .

**Opgave 8.4.** Zij  $f$  holomorfe op  $B(0, 5)$  met nulpunten in 1 (multipliciteit  $a$ ), in 2 (multipliciteit  $b$ ), in 3 (multipliciteit  $c$ ) en verder geen nulpunten. Bereken

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,4)^+} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz$$

**Opgave 8.5.** Bepaal de grootste waarde van  $|f|$  op  $\overline{B(0, 1)}$  als  $f(z) = z^4 - z^2 + 1$ .

**Opgave 8.6.** Idem als  $f(z) = \frac{z-2}{z+2}$ .

**Opgave 8.7.** Zij  $f$  holomorfe en niet-constant op een gebied  $G$ . Laat zien dat  $\operatorname{Re} f$  geen lokaal maximum aanneemt op  $G$ .

**Opgave 8.8.** Zij  $f$  holomorfe en *even* op  $B(0, 2)$ . Bepaal  $\int_{C(0,1)^+} f(z) dz$ .

**Opgave 8.9.** Bepaal het residu van  $\frac{z^7}{(\sin z)^{13}}$  in het punt 0.

**Opgave 8.10.** Ga nog eens na dat er een holomorfe tak  $f(w)$  van  $\log \frac{w+1}{w-1}$  is op het gebied  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  die een reële waarde heeft in het punt 2. Bereken

$$\int_{C(0,2)^+} \frac{wf(w)}{w-3} dw$$

**Opgave 8.11.** Ga nog eens na dat er een holomorfe tak  $f(w)$  van  $\sqrt{w^2 + 1}$  is op het gebied  $\{|w| > 1\}$  die een positieve reële waarde heeft in het punt 2. Denk hierbij aan “ $\sqrt{w^2 + 1} = w \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{w^2}}$ ”. Bereken

$$\int_{C(0,2)^+} f(w) dw$$

**Opgave 8.12.** De functie  $f$  is holomorfe en begrensd op  $\mathbb{C} \setminus K$ , waarbij de verzameling  $K = \{0\} \cup \{1/1, 1/2, 1/3, \dots\}$ . Verder is  $f(2) = 1$ . Bepaal al dergelijke functies  $f$ .

**Opgave 8.13.** Bepaal alle functies  $f$  die voldoen aan:

1.  $f$  is holomorfe op  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  en heeft een pool van orde 3 in 0
2.  $|f(z)| = 1$  voor alle  $z \in \mathbb{C}$  met  $|z| = 1$
3.  $f(\frac{1}{2}) = 8i$

**Opgave 8.14.** (*Breuksplitsing*) Gegeven een rationale functie  $f = \frac{p}{q}$ , dus een quotiënt van twee veeltermen. Laat  $a_1, \dots, a_n$  de nulpunten van  $q$  zijn en noteer het hoofddeel van  $f$  bij  $a_m$  met  $h_m$ . Laat zien dat  $f = h_1 + \dots + h_n + g$ , waarbij  $g$  een veelterm is.

**Opgave 8.15.** Men ontwikkelt de functie  $\frac{z}{\sin z}$  in een machtreeks om  $i$ . Wat is de convergentiestraal van deze machtreeks?

## Tentamenopgaven

**Opgave 8.16.** Zij  $|a| < 1$ . Laat zien dat  $\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$  een gebroken lineaire transformatie is die de eenheidsschijf  $D = B(0, 1)$  op zichzelf afbeeldt. Construeer een holomorfe functie  $f$  op  $D$ , continu op  $\bar{D}$  met de eigenschap dat  $f(1/2) = f(-1/2) = 0$  en  $|f(z)| = 1$  als  $|z| = 1$ . Veronderstel nu dat  $F$  holomorfe is op  $D$ , continu op  $\bar{D}$  en  $F(-1/2) = F(1/2) = 0$ , terwijl  $|F| \leq 1$ . Bewijs de volgende variant op het Schwarz-Lemma:

$$|F(z)| \leq \left| \frac{4z^2 - 1}{4 - z^2} \right| \quad \text{op } D.$$

**Opgave 8.17.** Classificeer de singulariteiten van

$$\frac{\log(z^2 + 1)}{\sin z} \quad \text{en} \quad e^{\frac{1}{\sin 1/z}}.$$

Hier wordt met  $\log(z^2 + 1)$  de tak bedoeld die reëel is op  $\mathbb{R}$  en holomorfe op

$$\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x = 0, |y| \geq 1\}.$$

Als men de eerste functie in een machtreeks om de oorsprong ontwikkelt, wat is dan de convergentiestraal?

**Opgave 8.18.** Zij  $K$  een compacte verzameling in  $\mathbb{C}$  met de eigenschap dat  $G = \mathbb{C} \setminus K$  een gebied is en dat er voor iedere  $\epsilon > 0$  schijven  $B(a_j, r_j)$  bestaan met

$$K \subset \cup_j B(a_j, r_j) \quad \text{en} \quad \sum_j r_j < \epsilon.$$

Zij  $U$  een open omgeving van  $K$ . Bewijs dat iedere holomorfe functie op  $G$  die begrensd is op  $U \setminus K$  analytisch kan worden voortgezet tot heel  $\mathbb{C}$ . (Gebruik de stelling van Cauchy. Men mag eventueel wel aannemen dat de  $B(a_j, r_j)$  voor alle  $\epsilon$  disjunct kunnen worden gekozen.)

**Opgave 8.19.** Bepaal het aantal nulpunten op de annulus  $A(0, 1, 2)$  van

$$z^{15} + 11z^{12} + 30z^7 + 10.$$

**Opgave 8.20.** Bepaal het aantal nulpunten op de annulus  $A(0, 1, 2)$  van

$$z^{14} + 7z^{12} + 13z^6 + 4.$$

**Opgave 8.21.** Van een gehele functie  $f$  is gegeven dat in  $\mathbb{C}^*$   $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ . Bewijs dat  $f$  alle waarden in  $\mathbb{C}$  aanneemt.

**Opgave 8.22.** Zij  $|a| < 1$ . Beschouw de gebroken lineaire transformatie

$$T : z \mapsto \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

- (i) Laat zien dat  $T$  een conforme afbeelding van  $B(0, 1)$  op  $B(0, 1)$  definieert.
- (ii) Laat nu voor zekere  $\epsilon > 0$  de functie  $f$  holomorfe zijn op  $B(0, 1 + \epsilon)$  en zodanig dat  $f(a) = 0$  en  $|f(z)| \leq 1$  als  $|z| \leq 1$ . Bewijs dat voor  $|z| \leq 1$

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|.$$

**Opgave 8.23.** Laat  $(f_n)$  een rij holomorfe functies zijn, gedefinieerd op een omgeving  $U$  van de gesloten eenheidsschijf  $\overline{B(0, 1)}$ . Veronderstel dat  $(f_n)$  uniform op  $\overline{B(0, 1)}$  convergeert naar een functie  $f$ , die holomorfe is op  $U$ .

- (i) Veronderstel dat  $f$  precies  $k$  nulpunten (multipliciteiten geteld) heeft, die alle in  $B(0, 1)$  liggen. Bewijs met behulp van de stelling van Rouché, dat er een  $n_0$  bestaat zodanig dat voor  $n \geq n_0$  de functie  $f_n$  eveneens  $k$  nulpunten in  $B(0, 1)$  heeft (multipliciteiten geteld).
- (ii) Veronderstel nu dat alle functies  $f_n$  injectief zijn. Bewijs dat  $f$  injectief is op  $B(0, 1)$  of constant. Kunnen beide gevallen optreden?

**Opgave 8.24.**

- (i) Bewijs dat een gehele functie (holomorfe functie met definitiegebied  $\mathbb{C}$ ) die geen waarden aanneemt in een schijf  $B(a, r)$ , ( $r > 0$ ), constant is.
- (ii) Bewijs dat een gehele functie die geen waarden aanneemt in het interval  $[-1, 1]$  constant is.
- (iii) Bewijs dat een harmonische functie die op  $\mathbb{C}$  gedefinieerd is, te schrijven is als het reële deel van een gehele functie.
- (iv) Bewijs dat een begrensde harmonische functie die op  $\mathbb{C}$  gedefinieerd is, constant is.



# Proeftentamen

Normering: de zeven opgaven tellen elk even zwaar.

1. De volgende twee onderdelen staan los van elkaar.
  - a) Bepaal het residu van  $\frac{1}{z(1-\cos z)}$  in het punt 0.
  - b) In welke punt(en) is  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , gegeven door  $f(z) = |z|^2 + z$  complex-differentieerbaar?
  
2.
  - a) Bewijs dat de functie  $h(z) = z - 2 + e^{-z}$  precies één nulpunt  $z_0$  heeft in  $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < 2\}$ .
  - b) Zij  $\Gamma$  de positief doorlopen cirkel met middelpunt 2 en straal 2. Druk  $\int_{\Gamma} \frac{1}{h(z)} dz$  uit in  $z_0$ .
  
3. Bewijs de open afbeeldingstelling: als  $f$  holomorf en niet-constant is op een gebied  $G$ , dan is  $f$  open.
  
4. Gegeven is een holomorfe functie op  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ . Toon aan dat  $\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos t dt = \pi f'(0)$ .
  
5. Bereken  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x^2 + 1)^2} dx$  met complexe integratie. Geef een duidelijke definitie van de door jou gebruikte integrand en behandel nauwkeurig de benodigde schattingen!

6. Gegeven zijn de functies  $f$  en  $g$  die analytisch zijn op het gebied

$$G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}.$$

Gegeven is dat

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 3 \quad \text{en} \quad f\left(-\frac{1}{n}\right) = 4,$$

voor  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$  en

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = 3n \quad \text{en} \quad g\left(-\frac{1}{n}\right) = 4n,$$

voor  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ .

- (i) Toon aan dat  $f$  een essentiële singulariteit heeft in het punt 0.
  - (ii) Wat is de aard van het geïsoleerde singuliere punt 0 van de functie  $g$ ?
  - (iii) Bestaat er een rij  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  in  $G$  met  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$  en waarvoor bovendien  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 2007$ ?
7. Laat  $f(w)$  de holomorfe tak van  $\sqrt{w^4 - 1}$  zijn op  $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| > 1\}$  die positief reëel is in het punt 2. Bereken  $\int_{C(0,2)^+} w^9 f(w) dw$ .