Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Tentamen **Functietheorie**, 14 maart 1997, 13.30-16.30 uur.

1. Bepaal een conforme afbeelding die de sector $S = \{z : \; -1 < \arg z < 1\}$ afbeeldt op het rechterhalfvlak. Bepaal vervolgens een conforme afbeelding die S afbeeldt op de eenheidsschijf, en wel zo dat het punt 1 op 0 wordt afgebeeld.

2. Bepaal de aard van de eindige singulariteiten van

$$\frac{z^{4n+2}+1}{(z^2+1)z^{2n+1}}, \; (n \in \mathbb{N}), \qquad \frac{e^{1/z}\cos(\sqrt{1-z^2})-1}{\sin(2\pi z)}.$$

3. Bereken met behulp van de residuenstelling

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos((2n+1)t)}{\cos t} dt, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

4. Veronderstel dat f holomorf is op $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Laat verder gegeven zijn dat $|f'(z)| < |z^2|+|z^{-2}|$ en dat $f(i^n) = 0$, $n = 0,1,2,3$, terwijl het residu van f in 0 gelijk is aan $1/4$. Bereken f en bewijs dat je oplossing uniek is.

5. Bereken
$$\int_W \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz,$$
a) als $W = C(0,3)^+ - C(0,1)^+$, b) als $W = C(0,3)^+$, c) als $W = C(0,1)^+$.

6. Laat f een analytische functie op een omgeving van de gesloten eenheidsschijf zijn. Veronderstel dat $|f(z)| < 1$ voor $|z| \leq 1$. Bewijs dat f precies één vast punt heeft in $D = \{z : \; |z| < 1\}$, dat wil zeggen, dat er precies één $z_0 \in D$ is met $f(z_0) = z_0$. Wat kun je zeggen als gegeven is dat $|f(z)| \leq 1$ voor $|z| \leq 1$?