Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Tentamen **Functietheorie**, 9 januari 1998, 9.30-12.30 uur.

1. Gegeven is de Laurentreeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{-n}}{(2n+1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}.$$

Bepaal van deze reeks de annulus van convergentie, de singuliere punten op de rand van het convergentiegebied en de somfunctie.

2. Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2\cos t - 5/2)^2} dt.$$

3a. Toon aan dat op $\{z : \ |z| > 1\}$ een analytische tak $f(z)$ van $\sqrt[3]{z^6+1}$ bestaat met $f(2) > 0$.

b. Bereken $f(2e^{\frac{i\pi}{3}})$.

c. Bereken $\int_{C(0,2)} f(z)e^{1/z}dz$.

4. Bereken het aantal nulpunten van $z^6 + z^4 - 6z^3 + iz - 1$ op de annulus $\{1 < |z| < 3\}$.

5. Bepaal alle functies f die analytisch zijn op $\mathbb{C}$, op eventueel een aantal geïsoleerde singulariteiten na, en op $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ voldoen aan een ongelijkheid

$$|f(z)| \leq C(|z|^{3/2} + |z-1|^{-3/2}),$$

voor zekere $C > 0$. Als verder is gegeven dat $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$, bepaal dan f.

6. Laat een functie f analytisch zijn op $\{|z| > 4\}$ en daar aan de functionaalvergelijking $f(2z) = 4f(z)$ voldoen. Laat zien dat zo'n f analytisch voortzetbaar is tot $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ en bepaal de aard van de singulariteit van f in 0.
Bereken f als verder gegeven is dat $f(10) = 10$. Is deze f uniek?