EXEMPLES DE POINTS EXTRÉMAUX DANS LE CÔNE DES FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES NÉGATIVES

MAGNUS CARLEHED ET JAN WIEGERINCK

RÉSUMÉ. Les fonctions plurisousharmoniques négatives dans un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$ forment un cône convexe. Nous considérons les points extrémaux de ce cône, et donnons trois exemples. En particulier, nous traitons le cas de la fonction de Green pluricomplexe.

1. Introduction

Soit C un cône convexe. Un point $x \in C$ est dit extrémal si $x = x_1 + x_2$ où $x_1, x_2 \in C$ entraine $x_1 = \lambda_1 x, x_2 = \lambda_2 x$, où $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Si l'on munit C d'une topologie métrisable, le sous-ensemble E des points extrémaux sera un ensemble G_δ. De plus, on a le théorème suivant.

Théorème 1.1. *(Choquet) Soit C un cône convexe, compact et métrisable, alors pour chaque $q \in C$ il existe une mesure de probabilité μ_q, concentrée sur E, telle que*

$$f(q) = \int_C f(x) d\mu_q(x)$$

pour toute fonction affine f sur C.

En conséquence, il est intéressant de caractériser E.

Dans cet article nous considérons le cône des fonctions plurisousharmoniques négatives dans un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$, avec la topologie induite par celle de L^1_{loc}. Nous dirons qu'une fonction u plurisousharmonique négative est *extrémale* si elle est extrémale au sens convexe et *maximale* si $(dd^c u)^n = 0$. Pour un compact K dans Ω on définit *la fonction extrémale relative* comme l'enveloppe superieure de la famille $U = \{v \in PSH(\Omega) : v \leq 0, v|K \leq -1\}$. Remarquons qu'à priori cette fonction peut être non-extrémale au sens convexe, malgré le langage.

Le problème d'extrémalité a été étudié par Cegrell et Thorbiörnson [Ce-T]. Soient d'abord $n = 1$ et $\Omega = D$, le disque unité. Dans ce cas ils ont montré qu'une fonction sousharmonique négative φ est extrémale si et seulement si, soit

$$\varphi(z) = k \log |\frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}|, \quad k \geq 0, \quad z_0 \in D,$$

soit

$$\varphi(z) = kP(z, \xi_0), \quad k \leq 0, \quad \xi_0 \in \partial D,$$

où on note P le noyau de Poisson de D.

Passons au cas $n \geq 2$. Les mêmes auteurs ont généralisé leur résultat plus haut, par montrer que dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, la fonction de Green pluricomplexe $g(\cdot, w)$ est toujours extrémale pour chaque $w \in \Omega$. Si celles-ci étaient toutes les fonctions extrémales qui s'annulent au bord, alors le théorème de Choquet (avec f une évaluation au point z) donnerait que toute fonction plurisousharmonique u négative ayant 0 pour valeur au bord pourrait été représentée de la façon suivante :

$$u(z) = \int_{\Omega} g(z, w) d\mu_u(w),$$

où μ_u est une mesure positive. Ce type de potentiels a été étudié par le premier auteur [Ca], qui a montré que la masse de Monge-Ampère d'un potentiel borné dans la boule est toujours une mesure absolument continue. Ceci suggère que les fonctions de Green forment un très petit sous-ensemble de E.

Ici, nous montrons que si la fonction de Green á plusieurs pôles est décomposée, alors les deux parties sont également des fonctions de Green ayant les mêmes pôles, mais peut-être d'autres poids. En particulier, les fonctions suivantes sont extrémales : 1) la fonction de Green avec deux pôles de poids 1 dans la boule unité, 2) la fonction de Green avec deux pôles $(a, 0)$ et $(b, 0)$ de poids 1 dans le bidisque de $\mathbb{C}^2$. Nous profitons du fait que ces fonctions sont connues explicitement. Au vue de cela on pourrait spéculer, que des fonctions négatives et maximales dans un ensemble assez grand, sont extrémales. Il est un peu surprennant que dans le cas du bidisque les fonctions de Green avec des poids differents, ne soient pas extrémales. Nous montrons cela par un calcul explicite de ces fonctions.

Finalement, nous montrons que la fonction $\max\{\log|z|, -1\}$ dans la boule unité (la fonction extrémale relative d'une boule plus petite) est extrémale. Il est tentant de conjecturer que toute fonction extrémale relative d'un compact assez régulier appartient aussi à E.

2. La fonction de Green à plusieurs pôles

Commençons avec un lemme connu [Ce-T],[K].

Lemme 2.1. *Soient G une boule de $\mathbb{C}^n$, centrée à l'origine, et u une fonction plurisousharmonique négative dans G. On pose*

$$\Psi_u(z, r) := \frac{1}{\log r} \sup_{\xi \in rD} u(\xi z),$$

pour $z \in (1/r)G$ and $0 < r < 1$. Alors
1) pour tout z fixé, $\Psi_u(z, r)$ est une fonction croissante de r (sur son domaine de définition), donc la limite

$$\Psi_u(z) = \lim_{r \downarrow 0} \Psi_u(z, r)$$

existe,
2) pour z fixé, soit $u_z : \xi \mapsto u(\xi z)$ est identiquement $-\infty$, soit elle est sousharmonique et on a $\Psi_u(z) = \triangle u_z(\{0\})$, donc $\Psi_u(z)$ est linéaire en u,
3) il existe une constante $\alpha \geq 0$ (le nombre de Lelong de u à l'origine) et un ensemble pluripolaire $E \subset \mathbb{C}^n$, tels que $\Psi_u(z) \equiv \alpha$ si $z \notin E$ et $\Psi_u(z) > \alpha$ si $z \in E$,
4) pour chaque $z \in G$ et $|\xi| < 1$ on a $u(\xi z) \leq \alpha \log|\xi|$.

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $G = B$, la boule unité.
1) et 2) sont des résultats de théorie du potentiel classique, cf. par exemple [R], p 46 et 78.
3) Il résulte de 1) que

$$-\Psi_u(z) = \lim_{r\downarrow 0} -\Psi_u(z,r) = \sup_{R>r>0} -\Psi_u(z,r) = \sup_{R>r>0} \frac{1}{-\log r} \sup_{|\xi|=r} u(\xi z),$$

pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ et R assez petit. Par conséquent, $(-\Psi_u)^* \in PSH(\mathbb{C}^n)$ et comme elle est négative elle est constante $(= -\alpha)$. On pose $E = \{z \in \mathbb{C}^n : (-\Psi_u)^*(z) \neq -\Psi_u(z)\}$. Alors E et α ont les propriétés souhaitées.
4) Grâce à la monotonie on a

$$\frac{1}{\log r} \sup_{|\xi|=r} u(\xi z) = \Psi_u(z,r) \geq \Psi_u(z) \geq \alpha,$$

donc

$$\sup_{|\xi|=r} u(\xi z) \leq \alpha \log |\xi|,$$

ce qui achève la preuve. □

Soient Ω un domaine hyperconvexe borné dans $\mathbb{C}^n$, et $A = \{w_1, \ldots, w_k\}$ un sous-ensemble fini de Ω. Il est commode de poser $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ et d'introduire un ordre partiel sur $(\mathbb{R}^+)^k$ défini par $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \leq (\nu_1, \ldots, \nu_k) = \nu$ si $\mu_j \leq \nu_j, j = 1, \ldots, k$. Les pôles étant fixés, on note g_ν la fonction de Green de poids ν_j en w_j, $j = 1, \ldots, k$, et $\nu \in (\mathbb{R}^+)^k$. Cette fonction est définie par $g_\nu(z) = \sup\{v(z) : v \in U\}$, où

$$U = \{v \in PSH(\Omega) : v \leq 0, \forall j\, v(\zeta) - \nu_j \log |\zeta - w_j| = O(1), \zeta \to w_j\}.$$

La fonction de Green est introduite par Lelong [L], qui a montré le théorème suivant.

Théorème 2.2. *La fonction g_ν est l'unique solution du problème de Dirichlet suivant :*

$$\begin{cases} u \in C(\overline{\Omega} \setminus A) \cap PSH(\Omega) \\ (dd^c u)^n = 0 \text{ dans } \Omega \setminus A \\ u(z) - \nu_j \log |z - w_j| = O(1) \text{ si } z \to w_j \text{ pour tout } j \\ u(z) \to 0 \text{ si } z \to \partial\Omega. \end{cases}$$

La proposition suivante est une généralisation d'un théorème de [Ce-T].

Proposition 2.3. *Supposons que $g_\nu = \varphi_1 + \varphi_2$. Alors, il existe $\lambda \in (\mathbb{R}^+)^k$ tel que $\lambda \leq \nu$, $\varphi_1 = g_\lambda$ et $\varphi_2 = g_{\nu-\lambda}$.*

Démonstration. Notons λ_j le nombre de Lelong de φ_1 et μ_j celui de φ_2 en w_j. On commence par faire une étude locale en chaque pôle w_j. Sans perte de généralité on peut supposer que $j = 1$ et $w_1 = 0$. En utilisant les 2) et 3) du lemme 2.1 on obtient $\nu_1 \equiv \Psi_{g_\nu}(z) = \Psi_{\varphi_1}(z) + \Psi_{\varphi_2}(z) \geq \lambda_1 + \mu_1$, avec égalité presque partout. Il s'ensuit que $\nu_1 = \lambda_1 + \mu_1$ et que les ensembles exceptionnels de φ_1 et φ_2 sont en réalité vides. D'après le 4) du lemme 2.1, on a $\varphi_1(\xi z) \leq \lambda_1 \log |\xi|$ si $|\xi| < 1$. Donc $a(z) = \varphi_1(z) - \lambda_1 \log |z|$ est supérieurement bornée au voisinage de 0, et de la même manière nous trouvons que $b(z) = \varphi_2(z) - \mu_1 \log |z|$ y est supérieurement bornée. Mais leur somme est égale à $g_\nu(z) - \nu_1 \log|z|$ qui est inférieurement bornée au voisinage de 0, alors a et b le sont aussi. Nous avons montré que φ_1 et φ_2 ont le comportement souhaité en chaque pôle, et que $\nu = \lambda + \mu$.

On a de plus,

$$0 = (dd^c g)^n = (dd^c \varphi_1)^n + (dd^c \varphi_2)^n + \dots$$

en dehors de A, où les termes exclus sont non-negatifs, ce qui montre que $(dd^c \varphi_i)^2 = 0$, $i = 1, 2$. Le théorème 2.2 donne maintenant $\varphi_1 = g_\lambda$, et $\varphi_2 = g_\mu = g_{\nu-\lambda}$. □

Corollaire 2.4. *Pour démontrer que g_ν est extrémale, il suffit de démontrer que $g_\nu = g_\lambda + g_\mu$ entraîne que le vecteur λ est proportionel à ν. En particulier, dans le cas d'un seul pôle, g_ν est toujours extrémale.*

Démonstration. Soit donnée une décomposition $g_\nu = \varphi_1 + \varphi_2$. D'après la proposition, on a en réalité $g_\nu = g_\lambda + g_\mu$. Par hypothèse on sait que $\lambda = c\nu$ où $0 \le c \le 1$. Comme $g_{c\nu} = c g_\nu$, g_ν est extrémale. □

Supposons que les pôles $A = \{w_1 \dots, w_k\}$ et les poids $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$ sont fixés. Soit P le sous-ensemble de $(\mathbb{R}^+)^k$ défini par

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in P \Leftrightarrow g_\nu = g_\mu + g_{\nu-\mu}.$$

Alors, $\{c\nu : 0 \le c \le 1\} \subset P$ avec égalité si et seulement si g_ν est extrémal.

Proposition 2.5. *L'ensemble P est convexe.*

Démonstration. Supposons que $\mu, \lambda \in P$. Alors,

$$g_\nu = a g_\nu + (1-a) g_\nu = a[g_\mu + g_{\nu-\mu}] + (1-a)[g_\lambda + g_{\nu-\lambda}] = [a g_\mu + (1-a) g_\lambda] + \dots..$$

Maintenant il suffit de montrer que $a g_\mu + (1-a) g_\lambda = g_{a\mu+(1-a)\lambda}$. On a en dehors de A :

$$\begin{aligned} 0 &= (dd^c g_\nu)^n = (dd^c[g_\mu + g_{\nu-\mu}])^k \wedge (dd^c[g_\lambda + g_{\nu-\lambda}])^{n-k} \\ &= (dd^c g_\mu)^k \wedge (dd^c g_\lambda)^{n-k} + \dots, \end{aligned} \tag{1}$$

où les termes exclus sont non-negatifs. Il s'ensuit que

$$(dd^c[a g_\mu + (1-a) g_\lambda])^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k} (dd^c g_\mu)^k \wedge (dd^c g_\lambda)^{n-k} = 0$$

en dehors de A. Comme $a g_\mu + (1-a) g_\lambda$ a le comportement correct en chaque pôle, le théorème 2.2 termine la preuve. □

Définissons la fonction de Lempert sur Ω par

$$\delta_\nu(z) = \inf\{\sum_{j=1}^{k} \nu_j \log|\zeta_j|\},$$

où la borne inférieure est prise sur la famille des disques analytiques $f : D \to \Omega$ tels que $f(0) = z$ et $f(\zeta_j) = w_j$, $j = 1, \dots, k$. On vérifie que $g \le \delta$, avec égalité si et seulement si δ est plurisousharmonique. Coman [Co] a conjecturé que ceci est vrai si Ω est convexe, et il a montré cette conjecture dans la boule unité $B \subset \mathbb{C}^2$, en choisissant deux pôles de poids égaux. De plus il a calculé la fonction de Green correspondante.

Rappellons une partie importante de ce calcul. Après un automorphisme approprié, on peut supposer que les pôles se situent symétriquement en $w_1 = (-\beta, 0)$ et $w_2 = (\beta, 0)$, où $\beta \in (0,1)$. Soient $z = (0, \gamma)$, et S l'ensemble des paires $(s,t) \in (0,1) \times D$ telles qu'il existe un disque analytique $f : D \to B$ avec $f(0) = z$, $f(s) = w_1$, et $f(t) = w_2$. Alors,

$$S = \{(s,t) \in (0,1) \times D : s \neq t, s^2 > c, |t|^2 > c, E(s,t) \geq 0\},$$

où c et d sont des constantes (qui dépendent de β et γ) et

$$E(s,t) = (s^2 - c)(|t|^2 - c)|1 - st|^2 - (1 - s^2)(1 - |t|^2)|st + d|^2.$$

Grâce à la symétrie, la fonction de Lempert est réalisée par un disque correspondent à un point de S avec t réel.

En utilisant le calcul de Coman, nous montrerons que la fonction de Green correspondante est extrémale.

Théorème 2.6. *Soient $\Omega = B$, la boule unité dans $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, et w_1 et w_2 deux pôles donnés, avec $\nu_1 = \nu_2 = 1$. Alors, $g_{(1,1)}$ est extrémale.*

Démonstration. Commençons avec le cas $n = 2$. Sans perte de généralité on peut supposer que les pôles se situent symétriquement. Nous sommes alors dans le cas décrit ci-dessus. Supposons que $g_{(1,1)} = g_{(p,q)} + g_{(1-p,1-q)}$. Nous avons alors

(2)
$$\begin{aligned} g_{(1,1)} =& g_{(p,q)} + g_{(1-p,1-q)} \leq \delta_{(p,q)} + \delta_{(1-p,1-q)} \\ &= \inf\{p \log|\zeta_1| + q \log|\zeta_2|\} + \inf\{(1-p)\log|\zeta_1| + (1-q)\log|\zeta_2|\} \\ &\leq \inf\{\log|\zeta_1| + \log|\zeta_2|\} = \delta_{(1,1)} = g_{(1,1)}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité est le théorème de Coman et toutes les bornes inférieures sont prises sur la même famille de disques analytiques. En particulier, le disque extrémal de $\delta_{(1,1)}$ est extrémal pour $\delta_{(p,q)}$ et $\delta_{(1-p,1-q)}$ aussi. Donc, les fonctions $S \to \mathbb{R}$:

$$(s,t) \mapsto s|t|, (s,t) \mapsto s^p|t|^q, (s,t) \mapsto s^{1-p}|t|^{1-q}$$

sont minimales au même point $a \in \partial S$. Coman a montré que $E(a) = 0$ tandis que $\partial S \in C^1$ au voisinage de a. Alors les gradients de ces trois fonctions sont proportionnels, et $p = q$. La preuve est finie dans le cas $n = 2$.

Passons au cas général. On suppose que les pôles se situent symétriquement dans le disque $\{z \in B_n : z_2 = \ldots = z_n = 0\}$, et on note $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_1, z')$. Alors, la fonction de Green $g^n_{(1,1)}(z)$ n'est que la fonction de Green de la boule de dimension 2, $g^2_{(1,1)}$, évaluée au point $(z_1, ||z'||)$, [Co], corollaire 4.6.3. On note δ^n et δ^2 les fonctions de Lempert correspondantes. Soit $0 \leq z_2 < 1$ et U une rotation unitaire dans $\mathbb{C}^{n-1}$ envoyant $(z_2, 0, \ldots, 0)$ sur z'. Si $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est un disque analytique appartenant à la famille qui définit $\delta^2_{(p,q)}(z_1, z_2)$, on peut fabriquer un disque $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$ qui appartient à la famille qui définit $\delta^n_{(p,q)}(z_1, z')$ en posant $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1$ et $\tilde{\varphi}_2 = U \circ \varphi_2$. Évidemment, on peut aussi faire l'inverse. Ceci montre que $\delta^n_{(p,q)}(z_1, z') = \delta^2_{(p,q)}(z_1, ||z'||)$. Maintenant on peut faire un calcul analogue au précédent (2) :

$$\begin{aligned}\delta^n_{(1,1)}(z_1,z') =&\delta^2_{(1,1)}(z_1,||z'||) = g^2_{(1,1)}(z_1,||z'||) = g^n_{(1,1)}(z_1,z') \\ =&g^n_{(p,q)}(z_1,z') + g^n_{(1-p,1-q)}(z_1,z') \\ \leq&\delta^n_{(p,q)}(z_1,z') + \delta^n_{(1-p,1-q)}(z_1,z') \leq \delta^n_{(1,1)}(z_1,z')\end{aligned} \tag{3}$$

On trouve une contradiction comme plus haut. □

Soient maintenant $D \times D$ le bidisque de $\mathbb{C}^2$, et $a_i \in D$, $i = 1 \dots, k$. On note $T_i(z_1) = \log|\frac{z_1-a_i}{1-\bar{a}_i z_1}|$ la fonction de Green du disque unité. Alors la fonction de Green de pôles $w_i = (a_i, 0)$ et poids $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ est connue [Ca] :

$$g_{\mathbf{1}}(z) = \max\{\sum_{i=1}^{k} T_i(z_1), \log|z_2|\}. \tag{4}$$

Généralisons cette formule. On garde la position des pôles, mais on autorise des poids différents. Sans perte de généralité on peut supposer que $1 = \nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_k$.

Théorème 2.7. *Dans la situation décrite, si au moins deux poids sont différents, la fonction de Green est la suivante :*

$$g_\nu = g_{(1,\nu_2,\dots,\nu_k)} = \nu_k h_k(z) + \sum_{j=1}^{k-1}(\nu_j - \nu_{j+1})h_j(z), \tag{5}$$

où $h_j = \max\{T_1(z_1)+\dots+T_j(z_1), \log|z_2|\}$ *est la fonction de Green de* $D\times D$ *avec le poids* 1 *en* $w_1, \dots, w_j$.

Par conséquent, elle n'est pas extrémale. En revanche, si tous les poids sont égaux (la formule (4)) elle est extrémale.

Démonstration. Soit $b(z)$ la somme de (5). Commençons par montrer que $g = b$. Il suffit de vérifier les quatre conditions du théorème 2.2. Les première et quatrième conditions sont triviales. On vérifie la troisième condition. Au voisinage de w_l, la fonction h_j peut s'écrire $h_j(z) = \log||z - w_l|| + O(1)$ si $j \geq l$, et elle y est bornée si $j < l$. Il s'ensuit que

$$b(z) = \left(\nu_k + \sum_{j=l}^{k-1}(\nu_j - \nu_{j+1})\right)\log||z-w_l|| + O(1) = \nu_l \log||z - w_l|| + O(1)$$

au voisinage de w_l. Il nous reste à vérifier que b est maximale en dehors des pôles. On constate que, pour tout point excepté les pôles, il existe un voisinage U où toutes les h_j, sauf peut-être une, sont pluriharmoniques. Donc, dans U, la masse de Monge-Ampère de b est donnée par la fonction exceptionnelle et comme toutes les h_j sont maximales on conclut que $g = b$.

La formule (5) implique évidemment la non-extrémalité de g_ν dans le cas où les poids sont différents. Finalement, supposons que $g_{\mathbf{1}} = g_\nu + g_{\mathbf{1}-\nu}$, où les ν_j sont dans un ordre décroissant. On peut écrire en utilisant (5)

$$g_\nu = \nu_k h_k + \sum_{j=1}^{k-1}(\nu_j - \nu_{j+1})h_j(z).$$

De même façon on a

$$g_{\mathbf{1}-\nu} = (1-\nu_1)h_k + \sum_{j=1}^{k-1}(\nu_j - \nu_{j+1})h'_j(z),$$

où h'_j est la fonction de Green associée à l'ensemble des pôles, complementair de celui de h_j. Cela entraine que la fonction $h_j + h'_j$ a des pôles de poids $\mathbf{1}$ à tout w_j, $1 \leq j \leq k$. On trouve par substitution

$$(\nu_1 - \nu_k)h_k = \sum(\nu_j - \nu_{j+1})(h_j + h'_j).$$

Comme pour $j < k$ on a $h_j + h'_j \leq h_k$ avec inégalité strict quelque part dans $D \times D$, on conclut que tous les ν_k sont pareilles, et le théorème est démontré. □

Remarque. Nous donnons une autre forme de la fonction de Green à poids différents :

$$g_\nu = \max\{u_1(z), \dots, u_k(z), \log|z_2|\}$$

où

$$u_1(z) = \sum_{i=1}^{k} \nu_i T_i(z_1),$$

$$u_j(z) = \nu_j \log|z_2| + \sum_{i=1}^{j-1}(\nu_i - \nu_j)T_i(z_1), \quad 2 \leq j \leq k.$$

Nous escissons la preuve. Soit $a(z)$ le max. On a

$$U_1 := \{z : a(z) = u_1(z)\} = \{z : \log|z_2| \leq \sum_{i=1}^{k} T_i(z_1)\},$$

$$U_j := \{z : a(z) = u_j(z)\} = \{z : \sum_{i=1}^{j} T_i(z_1) \leq \log|z_2| \leq \sum_{i=1}^{j-1} T_i(z_1)\},$$

pour $j = 2, \dots, k$, et

$$V := \{z : a(z) = \log|z_2|\} = \{z : \log|z_2| \geq T_1(z_1)\}.$$

Remarquons que ces ensembles sont invariants aux changements des poids, tant que *l'ordre* des poids est inchangé.

Dans U_1, on a $h_j(z) = T_1(z_1) + \ldots + T_j(z_1)$ et dans V on a $h_j(z) = \log|z_2|$ pour tout j. Dans U_l, $l = 2, \dots, k$, on a $h_j(z) = T_1(z_1) + \ldots + T_j(z_1)$ si $1 \leq j \leq l-1$ et $h_j(z) = \log|z_2|$ si $j \geq l$. En utilisant cela et en considérant chaque ensemble séparément, on peut vérifier que $a = b$.

Remarque. Le théorème reste vrai pour le polydisque dans $\mathbb{C}^n$, si tous les pôles se situent dans le disque $\{z_2 = \ldots = z_n = 0\}$. Dans ce cas, il faut remplacer $\log|z_2|$ avec $v(z) = \max\{\log|z_2|, \dots, \log|z_n|\}$.

3. La fonction $\max\{\log|z|, -1\}$ dans la boule unité

Soit $u(z) = \max\{\log|z|, -1\}$ la fonction relative extrémale du compact $B_1 = \{z : |z| \leq 1/e\}$ dans la boule unité B de $\mathbb{C}^2$. On note $B_2 = B \setminus B_1$. On considère la question de l'extrémalité de u.

Théorème 3.1. *La fonction u est extrémale.*

Démonstration. Supposons que $u = \varphi_1 + \varphi_2$, où φ_i est une fonction plurisousharmonique négative dans la boule B, $i = 1, 2$. Remarquons que les fonctions φ_i sont superieurement continues et leur somme est continue : elles sont alors continues.

Dans B_1, la fonction u est pluriharmonique. Dans B_2, elle est harmonique sur chaque droite passant par l'origine. Plus précisement, pour chaque $q \in \mathbb{C}$ fixé, $z_1 \mapsto u(z_1, qz_1)$ est harmonique dans l'anneau $1/(e\sqrt{1+|q|^2}) < |z_1| < 1/\sqrt{1+|q|^2}$. (De plus, $z_2 \mapsto u(0, z_2)$ est harmonique dans l'anneau $1/e < |z_2| < 1$, ce qui correspond à $q = \infty$.) Par conséquent, φ_1 et φ_2 ont également toutes les propriétés mentionnées.

On va démontrer le théorème sous une condition supplementaire, que φ_1 (et donc φ_2) ne dépend que de z_1 et $|z_2|$, qui sera enlevée après. D'abords φ_1 ne dépend que de z_1 dans B_1. Pour voir cela, on fixe z_1. Alors φ_1 est une fonction harmonique de z_2 dans un disque centré à 0, et ne depend que de $|z_2|$, donc elle est constante. Il s'ensuit que la fonction suivante est bien définie : $v(z_1) = \varphi_1|_{B_1}(z_1, z_2)$ pour $|z_1| < 1/e$. On pose aussi $V(z) = \varphi_1(z)$ dans B_2. La fonction v est harmonique et continue jusqu'au bord. La fonction V est confondue avec v sur $|z| = 1/e$, elle est continue jusqu'au bord, elle s'annule sur ∂B. De plus elle est harmonique sur chaque droite complexe passant par l'origine. Ceci montre que pour chaque v donnée, V est unique si elle existe; s'il y avait deux telles fonctions, on considérerait leur difference sur les droites.

La fonction v admet la représentation

$$v(z_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (er)^{|n|} e^{in\theta}$$

dans le disque $|z_1| \leq 1/e$. Ici, $z_1 = re^{i\theta}$, et

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(e^{-1+it}) e^{-int} dt.$$

On cherche ensuite une fonction $H_t(w)$, $0 \leq t < 1$, qui soit harmonique dans l'anneau $t < |w| < et$, avec les valeurs au bord $H_t(w) = 0$ sur le cercle $|w| = et$ et $H_t(w) = v(w)$ sur $|w| = t$. On vérifie sans peine que

$$H_t(w) = -c_0 \log|\frac{w}{et}| + \sum_1^{\infty} (c_n (ew)^n + c_{-n}(e\bar{w})^n) \frac{(et/|w|)^{2n} - 1}{e^{2n} - 1}$$

est la solution unique de ce problème.

Considérons maintenant, pour z_2/z_1 fixé, la fonction $w \mapsto V(w,(z_2/z_1)w)$. Si l'on pose $t = |z_1|/(e|z|)$, elle se confond avec H_t. Par conséquent,

$$\begin{aligned} V(w,(z_2/z_1)w) = &- c_0 \log|\frac{w|z|}{z_1}| \\ &+ \sum_1^\infty (c_n(ew)^n + c_{-n}(e\bar{w})^n) \frac{(|z_1|/(|z||w|))^{2n}-1}{e^{2n}-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

En particulier, en posant $w = z_1$ on trouve

$$V(z_1,z_2) = -c_0 \log|z| + \sum_1^\infty (c_n(ez_1)^n + c_{-n}(e\bar{z}_1)^n) \frac{(1/|z|)^{2n}-1}{e^{2n}-1}.$$

Pour abréger, remplaçons $c_n e^{|n|}/(e^{2|n|}-1)$ par b_n, $n \neq 0$, et $-c_0$ par a; la formule se ramène à

$$V(z_1,z_2) = a\log|z| + \sum_1^\infty (b_n z_1^n + b_{-n}\bar{z}_1^n)\left((1/|z|)^{2n}-1\right).$$

Comme V a des valeurs réelles, on obtient $b_{-n} = \bar{b}_n$, de sorte que $V(z) = a\log|z| + \operatorname{Re} f(z_1/|z|^2) - \operatorname{Re} f(z_1)$ où f est une fonction holomorphe dans le disque de rayon e (car $1/e < |z| < 1$, on a $0 \leq |z_1|/|z|^2 < e$). Posons $g(z) = f(1/z)$: g est holomorphe au dehors du disque de rayon $1/e$, et $V(z) = a\log|z| + \operatorname{Re} g(\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2/z_1) - \operatorname{Re} g(1/z_1)$.

On calcule ensuite le signe du déterminant $(dd^c h)^2$ de la matrice Hessienne de $h(z) := V(z) - a\log|z| = \operatorname{Re} g(\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2/z_1) - \operatorname{Re} g(1/z_1)$. Le dernier terme est pluriharmonique. Il suffit alors de considérer $g(\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2/z_1)$. Il est commode de faire le changement de coordonnées suivant: $w_1 = z_2/z_1, w_2 = z_1$. Comme il est holomorphe, le signe du déterminant ne changera pas, et

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} g(\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2/z_1) =& 2\operatorname{Re} g(\bar{w}_2(1+w_1\bar{w}_1)) \\ =& g(\bar{w}_2(1+w_1\bar{w}_1)) + g(w_2(1+w_1\bar{w}_1)) =: \tilde{h}(w). \end{aligned} \tag{7}$$

La dernière expression étant harmonique en w_2, il est superflu de calculer $\partial^2\tilde{h}/\partial w_1\partial\bar{w}_1$, et le déterminant vaut

$$-\left|\frac{\partial^2\tilde{h}}{\partial w_1\partial\bar{w}_2}\right|^2 = -\left|\bar{w}_1(D_1 + D_2\bar{w}_2(1+w_1\bar{w}_1))\right|^2,$$

où D_j note la dérivée j-ième de g évaluée au point $\bar{w}_2(1+w_1\bar{w}_1)$. On conclut que, ou bien le déterminant de la matrice Hessienne de h est négatif quelque part, ou bien $D_1 + D_2\bar{w}_2(1+w_1\bar{w}_1)$ s'annule partout.

Si le déterminant est négatif en un point, nous allons déduire une contradiction. En effet, dans B_2,

$$(dd^c\varphi_1)^2 = (dd^c V(z))^2 = (dd^c h(z))^2 + 2a\, dd^c \log|z| \wedge dd^c h(z),$$

et

$$(dd^c\varphi_2)^2 = (dd^c(\log|z| - V(z)))^2 = (dd^c h(z))^2 - 2(1-a) dd^c \log|z| \wedge dd^c h(z).$$

Il résulte que, au point où $(dd^c h)^2$ est négatif, soit $(dd^c\varphi_1)^2 < 0$, soit $(dd^c\varphi_2)^2 < 0$, ce qui est contradictoire.

Si, d'autre part, $D_1 + D_2\bar{w}_2(1+w_1\bar{w}_1)$ s'annule partout, on voit en remplaçant $\bar{w}_2(1+w_1\bar{w}_1)$ par z que $g'(z) + zg''(z) = 0$ partout. Mais cela est impossible lorsque g est holomorphe au voisinage de l'infini, sauf si g est constante. Alors $f \equiv 0$, $V(z) = a \log |z|$ et par continuité $\varphi_1(z) = au(z)$. Ceci achève la démonstration sous la condition supplementaire.

Passons au cas général. On définit

$$\Phi_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_i(z_1, z_2 e^{i\theta}) d\theta, \quad i = 1, 2. \tag{8}$$

Alors $g = \Phi_1 + \Phi_2$, et Φ_i ne dépend que de z_1 et $|z_2|$, $i = 1, 2$, donc le cas spécial montre qu'il existe une constante $a \geq 0$ telle que $\Phi_1(z) = au(z)$ pour tout $z \in B$. Or sur la droite complexe $z_2 = 0$, on a $\Phi_1(z) = \varphi_1(z)$, ce qui implique que $\varphi_1(z) = au(z)$ sur cette droite.

Finalement, si d est une droite complexe quelconque passant par l'origine, il existe une transformation unitaire R_d, telle que $R_d^{-1}(d) = \{z_2 = 0\}$. Comme u est invariante par cette transformation, on peut évidemment remplacer φ_i par $\varphi_i \circ R_d$ dans l'argument précédent. Ceci montre que $\varphi_1(z) = a_d u(z)$ sur d, où $a_d \geq 0$. L'origine étant un point commun à toutes les droites, on obtient le résultat escompté. $\square$

Remarque. Le théorème reste vrai pour $n \geq 3$, avec presque la même démonstration. Il faut d'abord supposer que les composantes ne dépendent que de z_1 et $||z'||$, où $z' = (z_2, \ldots, z_n)$. On conclut que ils sont proportionnels à u. Ensuite, on remplace la formule (8) par

$$\Phi_i = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{[0,2\pi]^{n-1}} \varphi_i(z_1, z_2 e^{i\theta_2}, \ldots, z_n e^{i\theta_n}) d\theta_1 \cdots d\theta_n, \quad i = 1, 2,$$

etc.

Remerciements. Ce travail a commencé lors de notre visite au Laboratoire E. Picard, Université Paul Sabatier, Toulouse. Nous remercions ses membres pour leur hospitalité et des discussions intéressantes. De plus, nous remercions Urban Cegrell, qui nous a inspiré pour travailler sur ce genre de problèmes. Magnus Carlehed a reçu l'aide de l'Institut Suédois, la Fondation de Wenner-Gren et la Fondation en mémoire de Lars Hierta.

Bibliographie

[Ca] Carlehed, M.: The pluricomplex Green function and related topics in pluripotential theory, thèse, Université d'Umeå, 1998

[Ce-T] Cegrell, U., Thorbiörnson, J.: Extremal plurisubharmonic functions, Ann. Polon. Math. 63.1 (1996), 63-69.

[Co] Coman, D.: Pluricomplex Green functions and the complex Monge-Ampère operator, thèse, Université de Michigan, 1997 à paraître: Pacific Journ. Math.

[K] Kiselman, C.: Densité des fonctions plurisousharmoniques, Bull. Soc. math. France, 107 (1979), 295-304.

[L] Lelong, P.: Fonction de Green pluricomplexe et lemme de Schwarz dans les espaces de Banach, Journ. de Math. Pures et Appl. 68 (1989), 319-347

[R] Ransford, T.: Potential theory in the complex plane, Cambridge University Press, 1995

E-mail address: `magca@itn.liu.se,janwieg@wins.uva.nl`

Magnus Carlehed, Linköping University, ITN, Campus Norrköping, 601 74 Norrköping, Sweden,

Jan Wiegerinck, Faculty of Mathematics, University of Amsterdam, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV, Amsterdam, The Netherlands