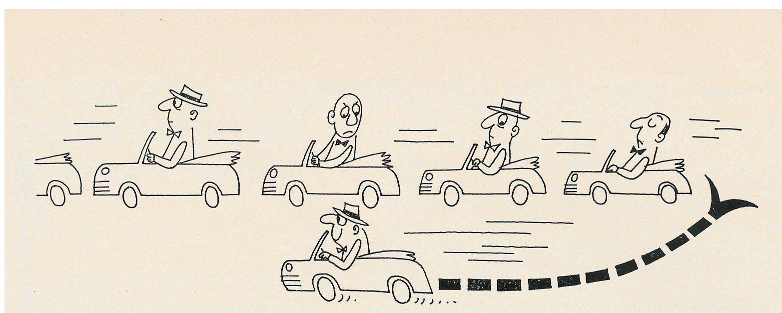
BESLISKUNDE A

Najaar 2016
Deel 1

L.C.M. KALLENBERG en F.M. SPIEKSMA

UNIVERSITEIT LEIDEN



Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

DISCRETE MARKOV KETENS

1.1 Inleiding en voorbeelden

Een *stochastisch proces* $\{X_t,\ t \in T\}$ is een collectie stochastische variabelen, d.w.z. dat X_t voor iedere $t \in T$ een stochastische variabele is. De verz. T wordt de *indexverzameling* van het proces genoemd. De index t is vaak de tijd en X_t noemen we dan de *toestand* van het proces op tijdstip t, bijvoorbeeld het aantal klanten dat in de supermarkt is op tijdstip t. De *toestandsruimte* S van het proces is de verzameling realisaties van $X_t,\ t \in T$. Als T aftelbaar is, dan noemen we het proces een *discreet* proces; is T een interval, bijv. $[0, \infty)$, dan heet het proces *continu*. In dit hoofdstuk zullen we ons beperken tot discrete stochastische processen.

Voorbeeld 1.1 *Bernoulli wandeling*
Zij $Y_i,\ i = 1, 2, \dots$ een collectie onderling onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische variabelen zijn. Definieer

$$X_t = X_{t-1} + Y_t,\ t \in \mathbb{N} \text{ en } X_0 \text{ willekeurig,}$$

dan is $\{X_t,\ t = 0, 1, \dots\}$ een *stochastische wandeling*.
Een speciaal geval hiervan is de *Bernoulli wandeling*, waarbij $S = \mathbb{Z}$ en de stappen slechts de waarden $+1$ of -1 kunnen aannemen. Voor zo'n wandeling noteren we

$$p = \mathbb{P}\{Y_i = +1\} \text{ en } q = 1 - p = \mathbb{P}\{Y_i = -1\}.$$

Deze wandeling wordt ook wel een *ééndimensionale stochastische wandeling* genoemd.
Als $p = \frac{1}{2}$, dan spreken we van een *symmetrische wandeling*.

Voorbeeld 1.2 *Gokmodel*
Op tijdstip 0 begint de gokker met n euro. Hij speelt iedere keer hetzelfde spel; met kans p wint hij 1 euro en met kans $1 - p$ verliest hij 1 euro. Neem $X_0 = n$ en laat Y_i de verandering van het kapitaal op de i-de dag zijn, dan is X_t, het kapitaal na t dagen, een ééndimensionale stochastische wandeling. Meestal heeft een gokmodel *absorberende* toestanden 0 en N, d.w.z. als de toestand

0 of N is dan stoppen we:

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t & \text{als } X_t = 0, N; \\ X_t + Y_{t+1} & \text{als } X_t = 1, 2, \ldots N-1. \end{cases}$$

In het algemeen is de kansverdeling op tijdstip t, zelfs van een eenvoudig proces als de stochastische wandeling, niet eenvoudig te bepalen. Voor grote waarden van t kunnen we wel het e.e.a. zeggen.

Voorbeeld 1.1 *Bernoulli wandeling (vervolg)*
Omdat $\mathbb{E}(Y_i) = 2p-1$ is, volgens de sterke wet van de grote aantallen (zie Stelling 2.2), het kapitaal van de gokker voor grote waarden van t na t dagen bij benadering gelijk aan $n + (2p-1)t$.

Beschouw een rij $\{X_t,\ t = 0, 1, \ldots\}$ stochastische variabelen met $X_t \in S$ met S een eindige of aftelbare toestandsruimte. $\{X_t,\ t = 0, 1, \ldots\}$ heet een *Markov keten*[1] als voor iedere $i_0, i_1, \ldots, i_{t-1}, i, j \in S$ en alle $t = 0, 1, \ldots$ geldt dat

$$\mathbb{P}\{X_{t+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{t-1} = i_{t-1}, X_t = i\} = \mathbb{P}\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\}. \tag{1.1.1}$$

In woorden, een stochastisch proces is een Markov keten als, gegeven het heden, de toekomst niet afhangt van het verleden.

De Markov keten heet *stationair* of *homogeen* als de kansen $\mathbb{P}\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\}$ ook niet van t afhangen. Voor een stationaire Markov keten noteren we

$$p_{ij} = \mathbb{P}\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\}$$

en we noemen de getallen p_{ij} de *overgangskansen*. Merk op dat

$$p_{ij} \geq 0 \text{ voor alle } i \text{ en } j, \text{ en } \textstyle\sum_{j \in S} p_{ij} = 1 \text{ voor alle } i.$$

Een stationaire Markov keten wordt volledig beschreven door de *overgangsmatrix* $P = (p_{ij})$; we spreken dan ook in dit geval over de Markov keten P.
We zullen ons beperken tot discrete stationaire Markov ketens: als we in het vervolg spreken over een Markov keten, dan bedoelen we een discrete stationaire Markov keten.

Voorbeeld 1.1 *Bernoulli wandeling (vervolg)*
De stochastische wandeling, en dus ook het gokmodel, is een Markov keten, immers:
zij $p_k = \mathbb{P}\{Y_1 = k\}$, dan worden de overgangskansen gegeven door $p_{ij} = p_{j-i}$ (ga dit zelf na).

Voorbeeld 1.3 *Voorraadmodel*
Beschouw een winkel waarin een bepaald artikel wordt verkocht. Veronderstel dat de wekelijkse vraag naar dit artikel onderling onafhankelijke identiek verdeelde stochastische variabelen zijn met kansverdeling

$$D_k = \mathbb{P}\{Y_t = k\},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

[1] De Rus Andrey Markov (1856 – 1922) introduceerde dit begrip in 1906. Zie ook http://en.wikipedia.org/wiki/Andrey_Markov.

met Y_t de vraag in week t.
We veronderstellen dat de winkelier de volgende (s, S)-*strategie* hanteert: als aan het begin van de week de voorraad minstens s is, dan wordt er niets besteld; is de voorraad $i < s$ is, dan wordt $S - i$ bijbesteld, zodat het voorraadniveau na aanvulling S is. We nemen aan dat aanvulling van de voorraad geen tijd vereist, en verder nemen we aan dat als er vraag is, terwijl de voorraad 0 is, deze klant niet geholpen kan worden (geen nalevering).
Laat X_t de voorraad zijn aan het begin van de t-de week, voordat wordt besteld, dan geldt:

$$X_{t+1} = \begin{cases} \max\{X_t - Y_{t+1}, 0\} & \text{als } X_t \geq s \\ \max\{S - Y_{t+1}, 0\} & \text{als } X_t < s. \end{cases}$$

Hieruit volgt dat $\{X_t\}$ een Markov keten is op $\mathbb{Z}_+$ met overgangskansen

$$p_{ij} = \begin{cases} \sum_{k \geq i} D_k & \text{als } i \geq s, j = 0 \\ D_{i-j} & \text{als } i \geq s, 1 \leq j \leq i \\ \sum_{k \geq S} D_k & \text{als } i < s, j = 0 \\ D_{S-j} & \text{als } i < s, 1 \leq j \leq i \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Voorbeeld 1.4 *Markov modellen in de genetica*[2]
Veronderstel dat we een vaste populatie van $2N$ genen hebben, samengesteld uit type-A en type-B genen. Een nieuwe generatie genen komt tot stand door $2N$ onderling onafhankelijke Bernoulli proefnemingen, waarbij iedere proefneming, als de huidige generatie i genen van type-A bevat, kans

$$p_i = \frac{i}{2N}$$

op 'succes' heeft (we spreken van een 'succes' als een gen van type-A ontstaat). Dus alleen het heden en niet het verleden is van belang voor de toekomst.
De samenstelling van de generaties vormt daarom een Markov keten op de toestandsruimte

$$S = \{0, 1, \ldots, 2N\},$$

waarbij toestand i het aantal genen van type-A voorstelt. De samenstelling X_{t+1} van de $(t+1)$-ste generatie, gegeven dat $X_t = i$, is dan een binomiaal verdeelde stochastische variabele met parameters $(2N, p_i)$. De overgangskansen p_{ij} van de Markov keten worden gegeven door

$$p_{ij} = \binom{2N}{j} p_i^j q_i^{2N-j}. \tag{1.1.2}$$

waarbij

$$q_i = 1 - p_i = \frac{2N - i}{2N}.$$

[2]Voor een biologische verantwoording van dit model zie R.A. Fisher, *The genetical theory of natural selection*, Oxford Press (1962)

Merk op dat de toestanden 0 en $2N$ absorberende toestanden zijn. Dit is een vrij simpel model. Behalve reproductie vertonen genen ook mutatiegedrag. Dit houdt in dat voordat de reproductie plaatsvindt de genen van type-A met een zekere kans, zeg α, muteren tot type-B, en omgekeerd de genen van type-B met een zekere kans, zeg β, muteren tot type-A. Het verwachte aantal genen van type-A vlak voor de reproductie is dus

$$i(1-\alpha)+(2N-i)\beta.$$

In dit geval krijgen we weer Bernoulli proefnemingen, maar met 'succeskans'

$$p_i = \frac{i(1-\alpha)+(2N-i)\beta}{2N}.$$

Dan voldoet q_i aan

$$q_i = 1-p_i = \frac{i\alpha+(2N-i)(1-\beta)}{2N}.$$

Voor de overgangen van de Markov keten kan weer formule (1.1.2) worden gebruikt. Merk op dat, als $\alpha\beta > 0$, dan zijn er geen absorberende toestanden.

Voorbeeld 1.5 *Wachtrijmodel 1*

Veronderstel dat patiënten bij de dokter komen en dan in de wachtkamer plaatsnemen. De dokter heeft voor iedere patiënt precies één kwartier nodig (ieder kwartier is een periode) en begint ieder kwartier de behandeling van een nieuwe patiënt (ook als er geen patiënten zijn en er komt een nieuwe patiënt binnen, dan moet deze wachten tot het volgende kwartier begint). We veronderstellen dat het aantal patiënten dat gedurende de t-de periode binnenkomt een stochastische variabele Y is met een discrete kansverdeling die onafhankelijk is van t (we schrijven daarom Y i.p.v. Y_t), waarbij

$$p_k = \text{de kans dat er in een periode } k \text{ patiënten binnenkomen, } k = 0, 1, \ldots .$$

We kunnen het proces van de aantallen patiënten per kwartier modelleren als een Markov keten. Als toestand X_t nemen we het aantal patiënten aan het begin van periode t, $t = 1, 2, \ldots$. Als dit aantal $i \geq 1$ is, dan is het aantal patiënten aan het begin van de volgende periode $i-1+Y$; als het aantal 0 is, dan is het aantal aan het begin van de volgende periode Y. We kunnen daarom schrijven:

$$X_{t+1} = (X_t - 1)^+ + Y, \text{ waarbij } x^+ = max(x, 0) \text{ voor iedere } x.$$

De overgangsmatrix P voldoet aan:

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld 1.6 *Wachtrijmodel 2 (M/G/1-wachtrij)*
In dit voorbeeld illusteren we de techniek van de *ingebedde Markov keten.* Hierbij wordt een continu proces omgezet in een discreet proces door geschikte discrete tijdstippen te kiezen.
Veronderstel dat klanten bij een loket arriveren met tussentijden die onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld zijn met parameter λ. Exponentiële verdelingen worden vaak gekozen als klanten onderling onafhankelijk van elkaar op willekeurige tijdstippen aankomen. Wiskundig heeft de exponentiële verdeling de prettige eigenschap van geheugenloosheid, d.w.z. dat de resterende tijdsduur dezelfde verdeling heeft als de oorspronkelijke, in formulevorm:

$$\mathbb{P}\{T > t + s \mid T > t\} = \mathbb{P}\{T > s\} = e^{-\lambda s} \text{ voor alle } s, t \geq 0.$$

Een klant die binnenkomt en geen andere klanten bij het loket aantreft wordt direct geholpen. Een klant die binnenkomt, terwijl ook andere klanten aanwezig zijn, sluit achteraan in de wachtrij aan. We veronderstellen dat de klanten aan het loket worden geholpen gedurende een stochastische tijdsduur T die onafhankelijk is van de klant en een dichtheid f heeft.
Zij X_t het aantal klanten dat op tijdstip t aanwezig is. Dan is $\{X_t,\ t \geq 0\}$ een continu stochastisch proces, dat in het algemeen geen Markov proces is, omdat voor het bepalen van de toekomst niet alleen het huidige aantal klanten van belang is, maar ook hoelang de bediende bezig is met de klant die nu wordt geholpen. We maken een ingebed discreet proces door als discreet tijdstip t_n het vertrektijdstip van de n-de klant te nemen ($n = 1, 2, \dots$) en voor de toestand X_n het aantal klanten te nemen dat aanwezig is direct na het vertrek van de n-de klant (neem $t_0 = 0$ en $X_0 = 0$).
Analoog aan Voorbeeld 1.4 krijgen we dan de relatie

$$X_n = (X_{n-1} - 1)^+ + A_n, \text{ met } A_n \text{ het aantal aankomsten tijdens de bediening van klant } n.$$

Omdat de verdeling van de resterende tijdsduur tot de eerste klant komt na t_{n-1} dezelfde is als de verdeling van de tijdsduur van een aankomende klant, is A_n stochastisch gezien hetzelfde als het aantal aankomsten gedurende tijdsduur T. Er kan worden bewezen[3] dat voor $T = y$ de stochastische variabele A_n een Poisson verdeling heeft met parameter λy, d.w.z. dat

$$\mathbb{P}\{A_n = k \mid T = y\} = e^{-\lambda y} \cdot \tfrac{(\lambda y)^k}{k!},\ k = 0, 1, \dots.$$

We zien uit deze relatie dat het proces een Markov keten is, want alleen het aantal klanten X_{n-1} op tijdstip t_{n-1} is van belang voor X_n, immers: A_n is een discrete kansverdeling die onafhankelijk is van n en waarvoor geldt:

$$p_k = \mathbb{P}\{A_n = k\} = \textstyle\int_0^\infty \mathbb{P}\{A_n = k \mid T = y\} f(y) dy = \int_0^\infty e^{-\lambda y} \cdot \tfrac{(\lambda y)^k}{k!} f(y) dy,\ k = 0, 1, \dots.$$

Voor de overgangskansen van de Markov keten krijgen we:

$$p_{ij} = \mathbb{P}\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\} = \mathbb{P}\{A_n = j - (i-1)^+\} = \begin{cases} p_{j-i+1} & \text{als } i \geq 1, j \geq i - 1 \\ p_j & \text{als } i = 0, j \geq 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

[3]Zie S.M. Ross, *Introduction to probability models* 7th edition, Academic Press (2000) paragraaf 5.3.

Voor de *simultane verdeling* van een Markov keten geldt:

$$\mathbb{P}\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_t = i_t\} = \mathbb{P}\{X_0 = i_0\} \cdot p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{t-1} i_t}, \ t \in \mathbb{N}.$$

De simultane verdeling is dus geheel vastgelegd door de overgangskansen en de *beginverdeling* (de getallen $\mathbb{P}\{X_0 = i\}, \ i \in S$). De zogenaamde *t-stapsovergangskansen* $\mathbb{P}\{X_t = j \mid X_0 = i\}$ noteren we met $p_{ij}^{(t)}$. N.B. $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$, de Kroneckerdelta.

Stelling 1.1 *(Chapman-Kolmogorov)*[4]
Voor iedere $s, t \in \mathbb{N}$ met $s \leq t$ geldt: $p_{ij}^{(t)} = \sum_k p_{ik}^{(s)} \cdot p_{kj}^{(t-s)}$ voor alle $i, j \in S$.

Bewijs Neem $s, t \in \mathbb{N}$ met $s \leq t$. Kies $i, j \in S$ willekeurig. We kunnen nu schrijven:

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(t)} &= \mathbb{P}\{X_t = j \mid X_0 = i\} = \textstyle\sum_k \mathbb{P}\{X_t = j, X_s = k \mid X_0 = i\} \\
&= \textstyle\sum_k \mathbb{P}\{X_t = j \mid X_s = k, X_0 = i\} \cdot \mathbb{P}\{X_s = k \mid X_0 = i\} \\
&= \textstyle\sum_k \mathbb{P}\{X_t = j \mid X_s = k\} \cdot \mathbb{P}\{X_s = k \mid X_0 = i\} \\
&= \textstyle\sum_k \mathbb{P}\{X_{t-s} = j \mid X_0 = k\} \cdot \mathbb{P}\{X_s = k \mid X_0 = i\} = \textstyle\sum_k p_{ik}^{(s)} \cdot p_{kj}^{(t-s)}.
\end{aligned}$$

□

Gevolg 1.2 Voor alle $t \in \mathbb{N}$ geldt: $P^{(t)} = P^t$, d.w.z. de matrix $P^{(t)}$ is de t-de macht van de overgangsmatrix P (ga dit zelf met inductie na).

Vraag 1.1 Beschouw een eindige Markov keten met $S = \{0, 1, 2\}$ en met overgangsmatrix
$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Bepaal de voorwaardelijke kansen $\mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 = 1 \mid X_0 = 0\}$ en $\mathbb{P}\{X_2 = 1, X_3 = 1 \mid X_0 = 0\}$.

Vraag 1.2 Beschouw op de tijdstippen $t = 0, 1, \ldots$ een voorraadsysteem, waarbij het voorraadniveau i wordt waargenomen en waarin het volgende gebeurt:
(1) als $i \leq 1$, dan worden $4 - i$ eenheden besteld en direct geleverd;
als $i \geq 2$, dan wordt er niets besteld.
(2) gedurende een periode is de vraag 0, 1 of 2, elk met kans $\frac{1}{3}$.
Zij $X_t, \ t = 0, 1, \ldots$ de voorraad aan het begin van periode $t + 1$ (vóór een eventuele levering). Toon aan dat $\{X_t, \ t = 0, 1, \ldots\}$ een Markov keten is en stel de overgangsmatrix op.

Vraag 1.3 Bewijs de geheugenloosheid van de exponentiële verdeling met parameter λ, d.w.z.

$$\mathbb{P}\{T > t + s \mid T > t\} = \mathbb{P}\{T > s\} = e^{-\lambda s} \text{ voor alle } s, t \geq 0.$$

[4]Zie ook http://en.wikipedia.org/wiki/Chapman-Kolmogorov_equation.

1.2 Klassificatie van de toestanden

1.2.1 Eigenschappen gebaseerd op de geassocieerde gerichte graaf

Een Markovketen kan worden voorgesteld door middel van een gerichte graaf. De knooppunten corresponderen met de toestanden en er is een pijl van i naar j als $p_{ij} > 0$. Dan geldt dat $p_{ij}^{(t)}$ gelijk is aan de som van de producten van de kansen over alle pijlenpaden van t pijlen van i naar j.

Er is dus een positieve kans om in t stappen toestand j te bereiken vanuit toestand i d.e.s.d.a. er een pijlenpad van t pijlen van i naar j. Dat betekent dat eigenschappen die te maken hebben met bereikbaarheid essentieel eigenschappen zijn van de geassocieerde graaf.

Een toestand j heet *bereikbaar* vanuit toestand i (notatie $i \to j$) als er een tijdstip $t \in \mathbb{N}_0$ is met $p_{ij}^{(t)} > 0$. Deze eigenschap is transitief, immers:
stel $p_{ij}^{(n)} > 0$ en $p_{jk}^{(m)} > 0$, dan geldt volgens de stelling van Chapman-Kolmogorov:

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_l p_{il}^{(n)} p_{lk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0.$$

De toestanden i en j *communiceren* (notatie $i \leftrightarrow j$) als j bereikbaar is vanuit i en i bereikbaar is vanuit j.

Lemma 1.3 *De eigenschap 'communiceren' is een equivalentierelatie.*

Bewijs
De eigenschappen reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit zijn eenvoudig verifieerbaar. $\square$

Gevolg 1.4 S is de vereniging van een aantal disjuncte equivalentieklassen, kortweg de *klassen* van de Markov keten genoemd.

Toestand j is bereikbaar vanuit toestand i komt dan overeen met het bestaan van een pijlenpad van i naar j in deze graaf. Uit de definitie van 'communiceren' volgt dat de equivalentieklassen overeenkomen met streng samenhangende componenten van de bij de Markov keten behorende gerichte graaf.
We zullen zien dat de toestanden binnen een klasse bepaalde eigenschappen gemeen hebben. Een toestand i die communiceert met iedere toestand die vanuit i bereikt kan worden heet *essentieel*; is dit niet het geval, dan heet de toestand *inessentieel*. Vanuit een essentiële toestand is dus geen enkele inessentiële toestand bereikbaar. De eigenschappen essentieel en inessentieel zijn dus eigenschappen van een gehele klasse.

Een deelverz. $C \subseteq S$ heet *gesloten* als $p_{ij} = 0$ voor alle $i \in C$ en $j \notin C$.

Lemma 1.5 *Een klasse is essentieel d.e.s.d. als de klasse gesloten is.*

Bewijs Als C een essentiële klasse is, $i \in C$ en $p_{ij} > 0$, dan is $i \to j$, zodat ook $j \to i$: j behoort ook tot de klasse C. Hieruit volgt de geslotenheid.
Omgekeerd, als C gesloten is en $i \in C$, dan volgt uit $i \to j$ dat $j \in C$, zodat $i \leftrightarrow j$, waarmee is aangetoond dat C essentieel is. □

Een andere klasse-eigenschap, die onder andere een rol speelt bij het bepalen van het limietgedrag van de t-stapsovergangskansen voor grote waarden van t, betreft de *periode*. De periode $d(i)$ van toestand i is gedefinieerd door:

$$d(i) = g.g.d.\{t \in \mathbb{N} \mid p_{ii}^{(t)} > 0\} \text{ (als } p_{ii}^{(t)} = 0 \text{ voor alle } t \in \mathbb{N} \text{ dan is } d(i) = \infty) \tag{1.2.1}$$

Stelling 1.6 *Als $i \leftrightarrow j$, dan geldt $d(i) = d(j)$.*

Bewijs Wegens de symmetrie tussen i en j is het voldoende om aan te tonen dat $d(j)$ een deler is van $d(i)$. Hiervoor is het voldoende om aan te tonen dat $d(j)$ een deler is van elke $t \in \mathbb{N}$ waarvoor $p_{ii}^{(t)} > 0$. Laat $t \in \mathbb{N}$ zdd. $p_{ii}^{(t)} > 0$ (zo'n t bestaat omdat $i \leftrightarrow j$), en laat $k \in \mathbb{N}$ en $l \in \mathbb{N}$ zdd. $p_{ij}^{(k)} > 0$ en $p_{ji}^{(l)} > 0$. Omdat ook $p_{ii}^{(2t)} > 0$ geldt

$$p_{jj}^{(k+t+l)} \geq p_{ji}^{(l)} p_{ii}^{(t)} p_{ij}^{(k)} > 0$$

en

$$p_{jj}^{(k+2t+l)} \geq p_{ji}^{(l)} p_{ii}^{(2t)} p_{ij}^{(k)} > 0.$$

Dus $d(j)$ is een deler van zowel $k+t+l$ als van $k+2t+l$, dus $d(j)$ is ook een deler van $(k+2t+l) - (k+t+l) = t$. □

De toestanden uit dezelfde klasse hebben dezelfde periode: we spreken daarom over de *periode van een klasse*. Als de Markov keten slechts één klasse heeft, d.w.z. dat alle toestanden met elkaar communiceren, dan heet de keten *irreducibel*. Als de keten irreducibel is, dan is de periode van alle toestanden hetzelfde en spreken we over de *periode van de Markov keten*. Als $d(i) = 1$, dan heet i een *aperiodieke* toestand en de bijbehorende klasse aperiodiek; als $d(i) = 1$ voor alle $i \in S$, dan heet de keten aperiodiek.

Stelling 1.7 *Zij F een essentiële klasse met periode d.*

1. *Voor iedere $i, j \in F$ is er een unieke $r(i,j) \in \mathbb{N}_0$ met $0 \leq r(i,j) \leq d-1$ zdd. $t \equiv r(i,j) \pmod d$ als $p_{ij}^{(t)} > 0$;*
2. *Er bestaat een partitie van F in $F_0, F_1, \ldots F_{d-1}$ zdd. als $p_{ij} > 0$ en $i \in F_k$, dan $j \in F_{k+1}$, waarbij $F_d \equiv F_0$.*

Bewijs

1. Neem een tweetal toestanden $i, j \in F$. Laat $k, l \in \mathbb{N}$ zdd. $p_{ij}^{(k)} > 0$ en $p_{ji}^{(l)} > 0$. Neem $r(i,j) \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ zdd. $r(i,j) \equiv k \ (mod\ d)$. Zij nu $t \in \mathbb{N}$ zdd. $p_{ij}^{(t)} > 0$. Dan is d een deler van $t + l$ en van $k + l$, dus ook van het verschil: $t \equiv k \equiv r(i,j) \ (mod\ d)$.

2. Kies een vaste toestand $l \in F$ en definieer voor $k = 0, 1, \ldots, d-1$: $F_k = \{j \in F \mid p_{lj}^{(t)} > 0$ impliceert dat $t \equiv k \ (mod\ d)\}$. Uit onderdeel 1 volgt dat deze definitie consistent is. Veronderstel dat $p_{ij} > 0$ met $i \in F_k$ en laat $t \in \mathbb{N}$ zdd. $p_{li}^{(t)} > 0$, dus $t \equiv k \ (mod\ d)$. Omdat $p_{lj}^{(t+1)} \geq p_{li}^{(t)} p_{ij} > 0$ en $t + 1 \equiv k + 1 \ (mod\ d)$, geldt dat $j \in F_{k+1}$. □

De verzamelingen $F_0, F_1, \ldots F_{d-1}$ heten de *cyclische deelverzamelingen* van F.

Voor de begrippen essentieel, inessentieel en periode ging het in wezen om de vraag of een bepaalde eventualiteit ooit, of in een bepaald aantal stappen, mogelijk is, d.w.z. een positieve kans heeft. Daarbij ging het alleen om het onderscheid tussen nul of positief zijn van bepaalde kansen. Hoe groot een positieve kans was deed niet ter zake. We zullen nu gaan kijken naar vragen of een bepaalde eventualiteit zeker is, d.w.z. kans 1 heeft.

1.2.2 Absorptiekansen

Laat $f_{ij}^{(t)}$ de kans zijn dat de Markov keten, als gestart wordt in toestand i, op tijdstip $t \geq 1$ voor het eerst in toestand j komt. Laat f_{ij} de kans zijn dat de keten, startend in toestand i, ooit in toestand j komt; deze kans heet de *absorptiekans*. Voor deze begrippen geldt:

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(t)} &= \mathbb{P}\{X_t = j, X_s \neq j \text{ voor } s = 1, 2, \ldots, t-1 \mid X_0 = i\}; \\ f_{ij} &= \mathbb{P}\{\cup_{t=1}^{\infty} \{X_t = j\} \mid X_0 = i\} = \textstyle\sum_{t=1}^{\infty} f_{ij}^{(t)}. \end{aligned}$$

f_{ii} is de kans dat als we in toestand i starten, we ooit nog terugkeren in toestand i.

Definitie *Toestand i heet* recurrent *als $f_{ii} = 1$ en* transiënt *als $f_{ii} < 1$.*

Deze definitie zegt dat als we in een recurrente toestand starten we er met kans 1 in terugkeren. Volgens de Markov eigenschap is het gedrag dan alsof de keten op dat moment opnieuw begint in die toestand. Het is dus zeker dat we oneindig vaak in deze toestand terugkomen.

Anderzijds geldt voor een transiënte toestand dat er een positieve kans, namelijk $1 - f_{ii}$, is dat we nooit meer in toestand i terugkeren. Als we er toch in terugkeren, dan is op grond van de Markov eigenschap de kans dat we er nooit meer terugkeren wederom $1 - f_{ii}$. Startend in i is dus de kans dat we precies n keer in toestand i zijn gelijk aan $f_{ii}^{n-1}(1 - f_{ii})$, $n \geq 1$. Het is dus net alsof er iedere keer dat de keten in toestand i is met een munt, die succeskans $1 - f_{ii}$ heeft, wordt gegooid, waarbij 'succes' betekent dat we nooit meer in i terugkeren. Het verwachte aantal keren dat we in i zijn is dus de verwachting van een geometrisch verdeelde stochastische variabele met

succeskans $1 - f_{ii}$ en deze verwachting is gelijk aan $\frac{1}{1-f_{ii}}$. Het verwachte aantal keren dat we er terugkomen is dus gelijk aan $\frac{1}{1-f_{ii}} - 1 = \frac{f_{ii}}{1-f_{ii}}$.
Uit het bovenstaande volgt ook dat een toestand recurrent is d.e.s.d. als het verwachte aantal keren dat we er terugkeren oneindig is.
Soms is het gemakkelijker om onderstaand criterium voor transiënt te gebruiken voor de verificatie of een toestand transiënt dan wel recurrent is.

Stelling 1.8 *Toestand i is transiënt d.e.s.d. als $\sum_{t=1}^{\infty} p_{ii}^{(t)} < \infty$.*

Bewijs Neem een toestand i en laat $I_t = \begin{cases} 1 & \text{als } X_t = i \\ 0 & \text{als } X_t \neq i \end{cases}$.
Dan is $\sum_{t=1}^{\infty} I_t$ het aantal keren dat toestand i wordt bezocht vanaf tijdstip $t = 1$. Nu geldt:

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{t=1}^{\infty} I_t \mid X_0 = i\right\} = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}\{I_t \mid X_0 = i\} = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}\{X_t = i \mid X_0 = i\} = \sum_{t=1}^{\infty} p_{ii}^{(t)}.$$

Noteer anderzijds het aantal keren dat i wordt bezocht met de stochastische variabele N_i.
Dan geldt (zie Vraag 1.5) dat N_i voldoet aan

$$\mathbb{E}\{N_i \mid X_0 = i\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{N_i \geq k \mid X_0 = i\} = \sum_{k=1}^{\infty} (f_{ii})^k.$$

Dus geldt

$$\sum_{t=1}^{\infty} p_{ii}^{(t)} = \mathbb{E}\{N_i \mid X_0 = i\} = \sum_{k=1}^{\infty} (f_{ii})^k.$$

Dit is oneindig als $f_{ii} = 1$ en anders $\frac{f_{ii}}{1-f_{ii}} < \infty$. □

Lemma 1.9 *Als toestand i recurrent is en $i \leftrightarrow j$, dan is ook toestand j recurrent.*

Bewijs Kies k en l zdd. $p_{ij}^{(k)} > 0$ en $p_{ji}^{(l)} > 0$. Dan geldt:
$\sum_{t=1}^{\infty} p_{jj}^{(t)} \geq \sum_{t=1}^{\infty} p_{jj}^{(k+t+l)} \geq \sum_{t=1}^{\infty} p_{ji}^{(l)} p_{ii}^{(t)} p_{ij}^{(k)} = p_{ji}^{(l)} p_{ij}^{(k)} \sum_{t=1}^{\infty} p_{ii}^{(t)} = \infty.$ □

Gevolg 1.10
De eigenschap recurrent is een eigenschap van een klasse: we kunnen daarom spreken over een recurrente klasse of een transiënte klasse.

Voorbeeld 1.1 *Bernoulli wandeling (vervolg)*
Beschouw Bernoulli wandeling. In deze Markov keten communiceren alle toestanden met elkaar: er is dus één essentiële klasse. Ieder pad van toestand 0 naar zichzelf heeft een even aantal stappen. Neem een pad van 0 naar 0 met $2n$ stappen. Dit pad ligt vast door te zeggen welke n stappen uit de $2n$ stappen naar rechts zijn. Er zijn $\binom{2n}{n}$ van dergelijke paden en ieder pad heeft een kans $p^n q^n$. Er geldt dus

$$p_{00}^{(2n+1)} = 0;\ p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n,\ n = 0, 1, \ldots.$$

Stirling's formule[5]

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi}$$

geeft de benadering

$$p_{00}^{(2n)} \approx \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} p^n q^n = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

Merk verder op dat $pq \leq \frac{1}{4}$ met gelijkheid d.e.s.d. als $p = \frac{1}{2}$.

Als $p = \frac{1}{2}$, dan geldt

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty :$$

de keten is recurrent.

Als $p \neq \frac{1}{2}$, dan is voor $a_n = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{n\pi}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 4pq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 4pq < 1,$$

zodat $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)} < \infty$, waarmee is aangetoond dat de keten transiënt is.

Voor transiënte toestanden j geldt zelfs dat $\sum_t p_{ij}^{(t)} < \infty$ voor all $i \in S$. Om dat te bewijzen hebben we het volgende decompositie lemma nodig.

Lemma 1.11 $p_{ij}^{(t)} = \sum_{s=1}^{t} f_{ij}^{(s)} p_{jj}^{(t-s)}$ *voor alle* $i, j \in S$ *en alle* $t \geq 1$.

Bewijs

Neem voor i en j twee willekeurige toestanden. Laat $X_0 = i$ en $\tau_j =$ het (stochastische) tijdstip waarop toestand j voor het eerst wordt bereikt. Dan geldt:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(t)} &= \sum_{s=1}^{t} \mathbb{P}\{\tau_j = s; X_t = j \mid X_0 = i\} \\ &= \sum_{s=1}^{t} \mathbb{P}\{\tau_j = s \mid X_0 = i\}\mathbb{P}\{X_t = j \mid X_s = j, X_{s-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j, X_0 = i\} \\ &= \sum_{s=1}^{t} \mathbb{P}\{\tau_j = s \mid X_0 = i\}\mathbb{P}\{X_t = j \mid X_s = j\} \\ &= \sum_{s=1}^{t} f_{ij}^{(s)} p_{jj}^{(t-s)}. \end{aligned}$$

□

Het bovenstaande resultaat kan ook met een wat intuïtiever bewijs worden gegeven: om in t stappen van i naar j te komen, moet dit ergens voor de eerste keer gebeuren, zeg in stap s, waarbij s de waarden $1, 2, \ldots, t$ kan hebben. Bij gegeven s moet dan in $t - s$ stappen van j naar j worden gegaan. Dit levert het resultaat

$$p_{ij}^{(t)} = \sum_{s=1}^{t} f_{ij}^{(s)} p_{jj}^{(t-s)}.$$

[5] zie bijv. http://mathworld.wolfram.com/StirlingsApproximation.html.

De laatste redenering is niet geheel formeel, omdat het tijdstip s, waarop we voor het eerst j bereiken, niet deterministisch maar stochastisch is. In de hierboven gegeven formele behandeling wordt ook duidelijk waar we de Markov eigenschap gebruiken. In het vervolg zullen we gemakshalve steeds de intuïtieve benadering gebruiken. In alle gevallen kan dit echter, zoals in bovenstaand bewijs, ook een strikt formeel bewijs worden omgezet.

Lemma 1.12 *Veronderstel dat toestand j transiënt is. Dan geldt voor iedere toestand $i \in S$ dat $\sum_t p_{ij}^{(t)} < \infty$ en dus geldt dat $\lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(t)} = 0$.*

Bewijs Volgens Stelling 1.8 is $\sum_{t=1}^{\infty} p_{jj}^{(t)} < \infty$, dus $\lim_{t\to\infty} p_{jj}^{(t)} = 0$. Neem nu een toestand $i \neq j$. Volgens Lemma 1.11 is $p_{ij}^{(t)} = \sum_{k=1}^{t} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(t-k)}$ voor $t \geq 1$. Nu geldt

$$\sum_{t\geq 1} p_{ij}^{(t)} = \sum_{t\geq 1}\sum_{k=1}^{t} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(t-k)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \sum_{t=k}^{\infty} p_{jj}^{(t-k)} = f_{ij}\sum_{t=0}^{\infty} p_{jj}^{(t)} < \infty.$$

□

Het is intuïtief duidelijk dat een recurrente klasse gesloten moet zijn. Om dit formeel aan te tonnen, gebruiken we de volgende stelling die laat zien dat de getallen $\{f_{ij}\}_i$ bepaald kunnen worden via een stelsel lineaire vergelijkingen.

Stelling 1.13 *Laat $j \in S$ gegeven zijn, en laat $S' = \{i \in S \mid f_{ij} > 0\}$. Dan geldt dat $\{f_{ij}\}_{i\in S'}$ de minimale, niet-negatieve oplossing zijn van het stelsel*

$$g_i = p_{ij} + \sum_{k\neq j} p_{ik} g_k, \quad i \in S'.$$

Het is de unieke oplossing in een eindige Markovketen.

Bewijs Merk op dat, als de Markovketen S' kan verlaten, dan keert hij met kans 0 terug. We mogen de Markovketen dus tot S' beperken. Zonder verlies der algemeenheid mogen we dan aannemen dat $S' = S$, waarbij nu de overgangsmatrix substochastisch kan zijn, d.w.z. $\sum_j p_{ij} \leq 1$. Dat maakt voor de analyse niet uit.
We bewijzen eerst dat $\{f_{ij}\}_i$ een oplossing zijn.

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \textstyle\sum_{t=1}^{\infty} f_{ij}^{(t)} = f_{ij}^{(1)} + \sum_{t=2}^{\infty} f_{ij}^{(t)} = p_{ij} + \sum_{t=2}^{\infty} \sum_{k\neq j} p_{ik} f_{kj}^{(t-1)} \\ &= p_{ij} + \textstyle\sum_{k\neq j} p_{ik} \sum_{t=2}^{\infty} f_{kj}^{(t-1)} = p_{ij} + \sum_{k\neq j} p_{ik} f_{kj}. \end{aligned}$$

Stel $\{g_i\}_i$ zijn een andere oplossing. Dan geldt

$$\begin{aligned} g_i &= p_{ij} + \sum_{k\neq j} p_{ik} g_k \\ &= f_{ij}^{(1)} + \sum_{k\neq j} p_{ik} g_k \\ &\geq f_{ij}^{(1)} + \sum_{k\neq j} p_{ik}(p_{kj} + \sum_{l\neq j} p_{kl} g_l) \\ &= f_{ij}^{(1)} + f_{ij}^{(2)} + \sum_{k,l\neq j} p_{ik} p_{kl} g_l \\ &= f_{ij}^{(1)} + f_{ij}^{(2)} + \sum_{l} {}_j p_{il}^{(2)} g_l, \end{aligned}$$

waarbij $\{_jp_{il}\}_{i,l\in S}$ de matrix $_jP$ is die uit P verkregen wordt door de kolom van j gelijk te maken aan 0, en $\{_jp_{il}^{(t)}\}_{i,l\in S}$ de t-de macht van deze gereduceerde matrix. Iteratie geeft voor elke $N \geq 1$ en $i \in S$ dat

$$g_i \geq \sum_{t=1}^{N} f_{ij}^{(t)} + \sum_l {_jp_{il}^{(N)}} g_l \geq \sum_{t=1}^{N} f_{ij}^{(t)}.$$

De limiet $N \to \infty$ nemen geeft het gewenste resultaat.
Stel nu dat de Markovketen eindig is, en laat $g_i \geq f_{ij}$ een andere oplossing zijn. Dan geldt dat

$$g_i - f_{ij} = \sum_{k\neq j} p_{ik}(g_k - f_{kj}) = \sum_k {_jp_{ik}}(g_k - f_{kj}).$$

Iteratie geeft dat

$$g_i - f_{ij} = \sum_k {_jp_{ik}^{(n)}}(g_k - f_{kj}), \quad n \geq 1.$$

Merk op dat $_jP$ de overgangsmatrix van een transiënte Markovketen is. Volgens Lemma 1.12 geldt dat $_jp_{ik}^{(n)} \to 0$, voor $n \to \infty$. Omdat de sommatie over k eindig is, geldt dus ook dat $\sum_k {_jp_{ik}^{(n)}}(g_k - f_{kj}) \to 0$, als $n \to \infty$. Dus is $g_i - f_{ij} = 0$ voor alle $i \in S$. □

Gevolg 1.14 *Als $i \leftrightarrow j$ en toestand i is recurrent, dan geldt $f_{ij} = 1$.*

Bewijs zelf! □

Voorbeeld 1.2 *Gokmodel (vervolg)*
We zullen de kansen $f_{i,N}, 0 \leq i \leq N$ (de winstkansen) expliciet berekenen. Pas Stelling 1.13 toe:

$$f_{0N} = 0; f_{NN} = 1; f_{i,N} = pf_{i+1,N} + (1-p)f_{i-1,N},\ i \neq 0, N.$$

Hieruit volgt (schrijf $f_{i,N} = pf_{i,N} + (1-p)f_{i,N}$)

$$p\{f_{i+1,N} - f_{i,N}\} = (1-p)\{f_{i,N} - f_{i-1,N}\},\ i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Zij $g(i) = f_{i+1,N} - f_{i,N},\ 0 \leq i \leq N-1$ en $q = 1-p$, dan geldt:

$$g(i) = \frac{q}{p} \cdot g(i-1) = \cdots = \left(\frac{q}{p}\right)^i \cdot g(0) = \left(\frac{q}{p}\right)^i f_{1,N}.$$

We krijgen nu voor $i = 1, 2, \ldots, N$:

$$\begin{aligned} f_{i,N} &= (f_{i,N} - f_{i-1,N}) + (f_{i-1,N} - f_{i-2,N}) + \cdots + (f_{1,N} - f_{0,N}) \\ &= \{(\tfrac{q}{p})^{i-1} + (\tfrac{q}{p})^{i-2} + \cdots + (\tfrac{q}{p})^0\} f_{1,N} \\ &= \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-\frac{q}{p}} \cdot f_{1,N} & \text{voor } p \neq q \\ i f_{1,N} & \text{voor } p = q = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Aangezien $f_{N,N} = 1$, kunnen we $f_{1,N}$ oplossen uit bovenstaande uitdrukking voor $i = N$ en daaruit volgen dan de andere $f_{i,N}$'s:

$$f_{1,N} = \begin{cases} \frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^N} & \text{voor } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{N} & \text{voor } p = \frac{1}{2} \end{cases} ;\ f_{i,N} = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})^N} & \text{voor } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{i}{N} & \text{voor } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Voorbeeld 1.1 *Bernoulli wandeling (vervolg)*
In geval $p \neq 1/2$ kunnen we met behulp van het lineaire stelsel de kans f_{00} berekenen dat we ooit nog terugkeren in toestand 0. Veronderstel dat $p > \frac{1}{2}$, dan geldt volgens Stelling 1.13:

$$f_{00} = pf_{10} + (1-p)f_{-1,0}.$$

Omdat (zie de eerste bespreking van dit voorbeeld) volgens de Sterke wet van de grote aantallen de toestand voor grote waarden van n na n stappen met kans 1 bij benadering gelijk is aan $(2p-1)n$, en dus naar $+\infty$ gaat, is $f_{-1,0} = 1$, zodat

$$f_{00} = pf_{10} + (1-p).$$

Verder geldt (gebruik weer Stelling 1.13):

$$f_{10} = (1-p) + pf_{20}.$$

Om vanuit toestand 2 in toestand 0 te komen moeten we eerst in toestand 1 komen en de kans dat dit ooit gebeurt is ook f_{10} (waarom?). Als we in toestand 1 zijn dan is de kans om ooit in toestand 0 te komen f_{10}. Er geldt dus

$$f_{10} = (1-p) + pf_{10}^2,$$

waaruit volgt dat $f_{10} = 1$ of $f_{10} = \frac{1-p}{p}$. Echter, $f_{10} = 1$ is onmogelijk omdat de keten transiënt is en we niet met kans 1 ooit in 0 terugkeren. Dit geeft:

$$f_{00} = (1-p) + p \cdot \frac{1-p}{p} = 2(1-p).$$

Analoog krijgen we voor $p < \frac{1}{2}$ dat $f_{00} = 2p$, zodat algemeen geldt

$$f_{00} = 2\min(p, 1-p).$$

Lemma 1.15 *Laat C een gegeven recurrente klasse zijn, dan is C gesloten.*

Bewijs Stel dat C niet gesloten is, d.w.z. $p_{ij} > 0$ voor zekere $i \in C$ en $j \notin C$. Veronderstel dat voor zekere k geldt dat $p_{ji}^{(k)} > 0$. Dan communiceren i en j wat een tegenspraak oplevert. Er geldt dus $p_{ji}^{(k)} = 0$ voor iedere k. Maar dan is volgens $f_{ji}^{(k)} = 0$ voor alle k en dus ook $f_{ji} = 0$. Hiermee is bewezen dat voor iedere $k \notin C$ met $p_{ik} > 0$ $f_{ki} = 0$, d.w.z. $p_{ik}f_{ki} = 0$ voor alle $k \notin C$. Verder geldt volgens Gevolg 1.14 $f_{ki} = 1$ voor alle $k \in C$. We kunnen nu schrijven (gebruik Stelling 1.13)

$$1 = f_{ii} = p_{ii} + \sum_{k \neq i} p_{ik}f_{ki} = \sum_{k \in C} p_{ik} \leq (1 - p_{ij}) < 1,$$

wat eveneens een tegenspraak oplevert. □

Gevolg 1.16 *Elke open klasse is transiënt. Omdat inessentiële klassen open zijn, zijn de inessentiële toestanden ook transiënt.*

Het volgende voorbeeld laat zien dat essentiële klassen zowel recurrent als transiënt kunnen zijn. Dit is alleen waar als de toestandsruimte niet eindig is. We zullen later zien dat voor een eindige toestandsruimte essentieel en recurrent (en dus ook inessentieel en transiënt) hetzelfde zijn.

Voorbeeld 1.7
Laat $S = \mathbb{N}_0$ en neem als overgangskansen $p_{i,0} = p_i$, en $p_{i,i+1} = 1 - p_i$ voor alle $i \in S$ met de p_i's nog nader te bepalen kansen uit $(0,1)$. Het is eenvoudig in te zien dat de keten aperiodiek is. Merk verder op dat alle toestanden met elkaar communiceren, zodat er één klasse is (de keten is irreducibel), die dus gesloten is, zodat alle toestanden essentieel zijn. Alle toestanden zijn wat betreft recurrentie of transiëntie van hetzelfde type. Het is dus voldoende om na te gaan tot welk type toestand 0 behoort. Als we in 0 starten dan kunnen we slechts dan nooit in toestand 0 terugkeren als we steeds overgangen van toestand t naar toestand $t+1$ maken, dus als $X_t = t$ voor $t = 0, 1, \ldots$. Er geldt dus

$$1 - f_{00} = \mathbb{P}\{X_t = t, t = 0, 1, \ldots \mid X_0 = 0\} = \prod_{t=0}^{\infty} (1 - p_t),$$

zodat

$$f_{00} < 1 \text{ (d.w.z. de klasse is transiënt) d.e.s.d. als } \prod_{t=0}^{\infty}(1 - p_t) > 0.$$

Het is bekend dat dit alleen het geval is indien $\sum_{t=0}^{\infty} p_t < \infty$.[6] Met de keuze

$$p_i = \frac{1}{2^{i+1}}, \; i = 0, 1, \ldots$$

krijgen we dus een transiënte keten, terwijl de keuze

$$p_i = \frac{1}{i+2}, \; i = 0, 1, \ldots$$

een recurrente keten oplevert.

1.2.3 Absorptietijd

Binnen de klassen van recurrente toestanden kunnen we nog een verder verfijning aanbrengen. Voor een recurrente toestand i definiëren we de *verwachte terugkeertijd* μ_{ii} door

$$\mu_{ii} = \sum_{t=1}^{\infty} t f_{ii}^{(t)},$$

d.w.z. het verwachte aantal transities voordat we voor de eerste keer weer terug zijn in toestand i.

Definitie *Een recurrente toestand i heet* positief recurrent *als $\mu_{ii} < \infty$ en* nul-recurrent *als $\mu_{ii} = \infty$.*

[6] Voor het bewijs wordt gebruik gemaakt van de ongelijkheid $e^{-x} \geq 1 - x$, die impliceert dat $1 - p_t \leq e^{-p_t}$ voor alle t. Hieruit volgt $\prod_{t=0}^{T}(1 - p_t) \leq e^{-\sum_{t=0}^{T} p_t}$. Verder wordt gebruikt dat voor alle T en m geldt dat $\prod_{t=T}^{T+m}(1 - p_t) \geq 1 - \sum_{t=T}^{T+m} p_t$.

We zullen later zien dat nul-recurrent alleen voor kan komen als de toestandsruimte aftelbaar (en niet eindig) is.

Opmerking
De eigenschappen positief recurrent en 0-recurrent zijn klasse-eigenschappen. Het bewijs wordt gegeven in paragraaf 1.4.

Voorbeeld 1.8
Dit is een voorbeeld met een transiënte, een nul-recurrente en een positief recurrente klasse. Neem 3 kopieën van de natuurlijke getallen $\mathbb{N}_0$. Noteer de knooppunten in de eerste verz. met i, in de tweede met j en in de derde met k.
In de eerste verz. zijn er vanuit toestand 0 positieve overgangskansen p_i naar toestand i, waarbij p_i zdd. $\sum_{i=1}^{\infty} ip_i < \infty$. Vanuit een toestand $i \neq 0$ gaan we met kans 1 naar toestand $i-1$. Alle toestanden in deze verz. communiceren onderling en de verz. is gesloten.
In de tweede verz. zijn er vanuit iedere toestand j overgangskansen $\frac{1}{2}$ naar toestand $j+1$ en van iedere $j \neq 0$ ook een overgangskans $\frac{1}{2}$ naar toestand 0. Verder is er vanuit 0 een kans $\frac{1}{4}$ om naar de 0 in de eerste verz. te gaan en ook een kans $\frac{1}{4}$ voor een overgang naar 0 in de derde verz. Alle toestanden in deze tweede verz. communiceren onderling, maar de verz. is niet gesloten.
In de derde verz. is er vanuit iedere toestand $k \neq 0$ een overgang met kans 1 naar toestand $k-1$ en vanuit toestand 0 is er een positieve overgangskans q_k naar toestand k, waarbij q_k zdd. $\sum_{k=1}^{\infty} kq_k = \infty$. Alle toestanden in deze verz. communiceren onderling en de verz. is gesloten.
Het is nu duidelijk dat de eerste verz. een positieve recurrente klasse is, de tweede een transiënte en de derde een nul-recurrente. De periode van iedere toestand is 1: de keten is dus aperiodiek.

Vraag 1.4 Bewijs dat als $i \to j$ en j transiënt is, dan is ook i transiënt.

Vraag 1.5 a. Toon aan dat voor een niet-negatieve geheeltallige stochastische variabele X geldt

$$\mathbb{E}\{X\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{X \geq k\}.$$

b. Toon aan dat voor een N_i uit het bewijs van Stelling 1.8 geldt dat

$$\mathbb{E}\{N_i \mid X_0 = i\} = \sum_{k=1}^{\infty} (f_{ii})^k.$$

Vraag 1.6 Toon m.b.v. de Sterke wet van de grote aantallen aan dat een Bernoulli wandeling transiënt is als $p \neq \frac{1}{2}$.

Vraag 1.7 a. Bepaal een discrete kansverdeling p op $\mathbb{N}$ zdd. $\sum_{i=1}^{\infty} ip_i < \infty$.
b. Bepaal een discrete kansverdeling q op $\mathbb{N}$ zdd. $\sum_{i=1}^{\infty} iq_i = \infty$.

1.3 Absorptiekansen en absorptietijd

Voor praktische doeleinden is het van belang om de absorptiekansen en absorptietijd te kunnen uitrekenen. Allereerst geldt dat de absorptiekansen in toestanden van een recurrente klasse gelijk zijn.
Laat R_k de k-de recurrente klasse zijn. Definieer $a_i^k = \mathbb{P}\{\exists n \geq 1 : X_n \in R_k \,|\, X_0 = i\}$, dit is de absorptiekans op de R_k, als gestart wordt in toestand i.

Stelling 1.17 *Indien j en l tot dezelfde recurrente klasse R^k behoren, dan geldt: $f_{ij} = f_{il} = a_i^k$ voor alle $i \in S$.*

Bewijs Schrijf $R = R^k$. Als $i \in R$ dan geldt $f_{ij} = 1 = f_{il}$. Als $i \notin R$, i recurrent, dan is $f_{ij} = 0 = f_{il}$ op grond van Lemma 1.15. We nemen dus aan dat i transiënt is. Dan geldt

$$\begin{aligned}
f_{ij} &= \sum_{t\geq 1} f_{ij}^{(t)} = \sum_{t\geq 1}\sum_{n=1}^{t-1}\sum_{r\in R, r\neq j} \mathbb{P}\{X_n = r, X_t = j, X_s \notin R, s < n, X_u \neq j, u < t \,|\, X_0 = i\} + \\
&\quad + \sum_{t\geq 1} \mathbb{P}\{X_t = j, X_s \notin R, s < t \,|\, X_0 = i\} \\
&= \sum_{t\geq 1}\sum_{n=1}^{t-1}\sum_{r\in R, r\neq j} f_{rj}^{(t-n)} \mathbb{P}\{X_n = r, X_s \notin R, s < n \,|\, X_0 = i\} + \\
&\quad + \sum_{t\geq 1} \mathbb{P}\{X_t = j, X_s \notin R, s < t \,|\, X_0 = i\} \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{r\in R, r\neq j} \mathbb{P}\{X_n = r, X_s \notin R, s < n \,|\, X_0 = i\} f_{rj} + \sum_{t\geq 1} \mathbb{P}\{X_t = j, X_s \notin R, s < t \,|\, X_0 = i\} \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{r\in R} \mathbb{P}\{X_n = r, X_s \notin R, s < n \,|\, X_0 = i\} = a_i^k.
\end{aligned}$$

□

Gevolg 1.18 Aangezien de absorptiekansen op toestanden uit dezelfde recurrente klasse gelijk zijn, spreken we over de absorptiekansen op een recurrente klasse.

Zij Q de submatrix van de overgangsmatrix behorende bij de transiënte toestanden T. Op grond van Lemma 1.12 geldt dat $\sum_t Q^t < \infty$.

Stelling 1.19 *Voor iedere $k = 1, 2, \ldots, m$ zijn de absorptiekansen a_i^k, $i \in T$, de minimale niet-negatieve oplossing van het lineaire stelsel $x = b^k + Qx$ met $b_i^k = \sum_{j\in R_k} p_{ij}$, $i \in T$. De oplossing is uniek in een eindige Markovketen.*

Bewijs zie Opgave 1.33.

□

Voorwaardelijke overgangskansen gegeven absorptie Stel dat de Markovketen een productieproces beschrijft, waarin producten uiteindelijk goedgekeurd dan wel afgekeurd kunnen worden. De afkeur- en goedkeurtoestanden zijn dan absorberende toestanden, en vormen ieder

een gesloten recurrente klasse. De overige toestanden vormen dan een transiënte klasse, zeg T. Hoe kun je de *voorwaardelijke* overgangskansen van de Markovketen gegeven absorptie in de goedkeurtoestand berekenen?
Laten we deze toestand G noemen, en A de gebeurtenis dat de keten uiteindelijk in G eindigt. De vraag reduceert tot het berekenen van de voorwaardelijke kans $\mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i, A)$ voor $i, j \in \mathsf{T}$. Laat $i, j \in \mathsf{T}$, dan geldt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i, A) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = j, X_0 = i, A)}{\mathbb{P}(X_0 = i, A)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A \mid X_0 = i, X_1 = j)}{\mathbb{P}(A \mid X_0 = i)} \frac{\mathbb{P}(X_0 = i, X_1 = j)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \\
&= \frac{f_{jG}}{f_{iG}} p_{ij}.
\end{aligned}$$

Gegeven absorptie in G, kun je grootheden waarin je geïnteresseerd bent dus uitrekenen door een Markovketen te beschouwen op T, met overgangskansen $(p_{ij} f_{jG}/f_{iG})_{i,j\in T}$. In deze nieuwe keten is de kans op absorptie in G natuurlijk 1. Je kunt hiermee bijv. bepalen, wat het verwachte aantal productiehandelingen is voor producten die uiteindelijk goedgekeurd worden.
Ga zelf na, hoe de n-staps overgangskansen van deze voorwaardelijke Markovketen gerelateerd zijn aan de n-staps overgangskansen van de oorspronkelijke, onvoorwaardelijke, Markovketen.

Absorptietijden Laat $Z = \sum_{t=0}^{\infty} Q^t$. Dan is z_{ij} het verwachte aantal keren is dat j wordt bezocht als gestart wordt in i, immers:

Zij $N_t = \begin{cases} 1 & \text{als toestand } j \text{ op tijdstip } t \text{ wordt bezocht indien gestart wordt in toestand } i. \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$

Dan is het verwachte aantal bezoeken aan j als gestart wordt in i gelijk aan

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{E}\{N_t\} = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}\{N_t = 1\} = \sum_{t=0}^{\infty} p_{ij}^{(t)}.$$

In een eindige Markovketen geldt dat $Z = \sum_{t\geq 0} Q^t = (I - Q)^{-1}$. Dit kun je verifiëren door links en rechts te vermenigvuldigen met $(I - Q)$.
De *absorptietijd* t_i, $i \in T$, is gedefinieerd door

$$t_i = \sum_{j\in T} z_{ij}.$$

Dit is dus de verwachte tijd voordat absorptie optreedt als we starten in transiënte toestand i. In een eindige Markovketen is $t_i < \infty$, maar in een aftelbare Markovketen hoeft dat niet per sé het geval te zijn.
Zowel voor de getallen $\{t_i\}_i$ als $\{z_{ij}\}_i$ kun je lineaire stelsels opstellen waarvan deze getallen een oplossing zijn (mits zijn eindig zijn). Voor de eindige toestandsruimte is uniciteit van de oplossing gemakkelijk aan te tonen. Voor de aftelbare toestandsruimte hoeft uniciteit niet noodzakelijk te gelden.

Voorbeeld 1.10 (vervolg)

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}; \quad I - Q = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \{I-Q\}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{3} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} t_1 = \frac{10}{3} \\ t_2 = \frac{7}{2}. \end{array}$$

Voorbeeld 1.2: Gokmodel (vervolg)
Bschouw het gokmodel voor $p = \frac{1}{2}$. Voor de absorptietijd t_i van een transiënte toestand $1 \le i \le N-1$ geldt:

$$t_i = 1 + \frac{1}{2} t_{i-1} + \frac{1}{2} t_{i+1};\ t_0 = t_N = 0.$$

Dit is een inhomogene differentievergelijking waarvan de oplossing luidt $t_i = i(N-i),\ 0 \le i \le N$.

Voorbeeld 1.9 *Stochastische wandeling op een cirkel*
We plaatsen $N \ge 2$ punten op een cirkel op gelijke afstanden van elkaar en noemen de punten $0, 1, 2, \cdots, N-1$. Zij $\{X_t\}$ een stochastische wandeling op deze cirkel met

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2},\ 0 \le i \le N-1, \text{ waarbij } i+1 = 0 \text{ als } i = N-1 \text{ en } i-1 = N-1 \text{ als } i = 0.$$

Veronderstel dat $X_0 = 0$ en zij T_N het eerste (stochastische) tijdstip waarop alle N punten zijn bezocht. We zullen aantonen dat

$$\mathbb{E}\{T_N\} = \frac{1}{2} N(N-1).$$

Laat T_k het eerste tijdstip waarop k punten zijn bezocht. Dan zijn T_1 en T_2 deterministisch, namelijk $T_1 = 0$ en $T_2 = 1$. We zullen eerst $r(k) = \mathbb{E}\{T_k - T_{k-1}\}$ berekenen.
Merk allereerst op dat op ieder tijdstip de bezochte toestanden een aaneengesloten verz. op de cirkel vormen en dat op de tijdstippen T_i een nieuw punt wordt bezocht. Toestand $X_{T_{k-1}}$ is dus een randpunt van de verz. en op tijdstip T_{k-1} is één van de buren van $X_{T_{k-1}}$ wel bezocht en de andere nog niet. Op het volgende tijdstip wordt dan òfwel een nieuw punt (het k-de) bezocht òfwel we gaan naar een punt dat één plaats van de rand naar binnen ligt, en beide mogelijkheden hebben kans $\frac{1}{2}$. Als we naar zo'n inwendig punt gaan dan duurt het weer enige tijd voordat we op een randpunt zijn. Deze tijd is de absorptietijd van het gokmodel (Voorbeeld 1.2) met $k-1$ toestanden en we hebben hiervoor afgeleid (neem $i = 1$ en $N = k-2$) dat deze tijd als verwachting $1 \cdot \{(k-2)-1\} = k-3$ heeft. In dat randpunt zitten we dan weer in dezelfde situatie als op tijdstip T_{k-1}. Hieruit volgt

$$r(k) = 1 + \frac{1}{2}\{(k-3) + r(k)\},$$

d.w.z. dat $r(k) = k-1$. Hiermee krijgen we tenslotte:

$$\mathbb{E}\{T_N\} = T_2 + \sum_{k=3}^{N} \mathbb{E}\{T_k - T_{k-1}\} = 1 + \sum_{k=3}^{N} r(k) = 1 + \sum_{k=3}^{N} (k-1) = \frac{1}{2} N(N-1).$$

Eerste doorkomsttijden We willen niet alleen de kans kunnen bepalen dat toestand j vanuit toestand i ooit bereikt wordt (de absorptiekans), maar ook het verwachte aantal stappen om vanuit toestand i toestand j voor het eerst te bereiken. De *eerste doorkomsttijd* van i naar j, genoteerd met μ_{ij}. Een voor de hand liggende definitie lijkt

$$\mu_{ij} = \sum_{t=1}^{\infty} t f_{ij}^{(t)}.$$

We moeten ons echter realiseren dat de getallen $f_{ij}^{(t)}, t = 1, 2, \ldots$ in het algemeen geen echte kansverdeling zijn: zo zijn de getallen $f_{ii}^{(t)}, t = 1, 2, \ldots$ alleen een echte kansverdeling als $f_{ii} = 1$, d.w.z. als toestand i recurrent is. Een correcte definitie is daarom

$$\mu_{ij} = \sum_{t=1}^{\infty} t f_{ij}^{(t)} + \infty \cdot (1 - f_{ij}).$$

Omdat deze laatste uitdrukking oneindig is voor $f_{ij} < 1$, is het alleen zinvol om het geval te beschouwen dat $f_{ij} = 1$.

Stelling 1.20 *Laat C een positief recurrente klasse zijn. Dan geldt voor een vaste $j \in R$: μ_{ij}, $i \in R$, zijn de minimale niet-negatieve oplossing van het stelsel*

$$x_i = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} x_k, \; i \in R. \tag{1.3.1}$$

Deze is uniek als de klasse R eindig is. Omgekeerd, als het stelsel (1.3.1) een niet-negatieve oplossing op een gesloten klasse C heeft, dan is C een positief recurrente klasse.

Bewijs Opgave 1.34.

□

Voorbeeld 1.10 Beschouw een Markov keten met zes toestanden en met overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De bijbehorende graaf bestaat uit de pijlen $(1, 4), (1, 5), (2, 3)$, $(2, 6), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (6, 2)$ en $(6, 3)$. Ga zelf na dat $\{1, 4, 5\}, \{2, 6\}$ en $\{3\}$ de equivalentieklassen zijn, waarvan de tweede transiënt is en de eerste en de derde recurrent.

We kunnen in $C = \{1, 4, 5\}$ als volgt de eerste doorkomsttijden naar 1 berekenen:

$$\mu_{11} = 1 + \frac{1}{2}\mu_{41} + \frac{1}{2}\mu_{51}; \;\; \mu_{41} = 1 + \frac{1}{2}\mu_{41} + \frac{1}{2}\mu_{51}; \;\; \mu_{51} = 1.$$

Dit geeft: $\mu_{11} = 3; \mu_{41} = 3; \mu_{51} = 1$.

1.4 Het limietgedrag van de overgangsmatrix

Als je het gedrag van $P^{(t)}$ bestudeert voor $t \to \infty$, dan valt het op dat deze matrix vaak convergeert naar een matrix met identieke rijen. Beschouw bijvoorbeeld $P = \begin{pmatrix} 0.3300 & 0.6700 \\ 0.7500 & 0.2500 \end{pmatrix}$.
Dan is $P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.6114 & 0.3886 \\ 0.3450 & 0.5650 \end{pmatrix}$, $P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.5428 & 0.4572 \\ 0.5117 & 0.4883 \end{pmatrix}$ en $P^{(8)} = \begin{pmatrix} 0.5271 & 0.4729 \\ 0.5294 & 0.4706 \end{pmatrix}$.
In het algemeen hoeft de matrix $P^{(t)}$ niet te convergeren als $t \to \infty$ (bijvoorbeeld is er geen convergentie als $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ga dit zelf na). Voor een Markov irreducibele aperiodieke keten zullen we bewijzen dat wel geldt dat $\lim_{t\to\infty} P^{(t)}$ bestaat en identieke rijen oplevert. Het bewijs maakt gebruik van vernieuwingstheorie.

In Lemma 1.12 is aangetoond dat de transiënte toestanden 'verdwijnen', d.w.z. dat

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(t)} = 0 \text{ voor } i, j \text{ transiënte toestanden.}$$

We hebben echter gezien dat in het algemeen $\lim_{t\to\infty} P^{(t)}$ niet bestaat in verband met periodiciteit. Vandaar dat we het gedrag omzichtiger zullen bestuderen, via de zogenaamde Césaro-limiet.

Zij $A_1, A_2, \ldots$ en A reële $N \times N$-matrices en laat

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} A_k, \; n \in \mathbb{N}.$$

Indien

$$A = \lim_{n\to\infty} B_n,$$

dan schrijven we

$$A = {}^c\lim_{n\to\infty} A_n$$

en A heet de *Césaro-limiet* van de rij $A_1, A_2, \ldots$.
Ga zelf na dat als de gewone limiet bestaat, de Cesaro-limiet ook bestaat en dat beide limieten aan elkaar gelijk zijn.

Stelling 1.21 *1. $p_{ij}^* = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)}$ bestaat voor iedere $i, j \in S$.
Er geldt dat $P^*P = PP^* = P^*$.*

2. Voor iedere $j \in S$ geldt: $p_{jj}^* = \begin{cases} \frac{1}{\mu_{jj}} & \text{als } j \text{ recurrent is;} \\ 0 & \text{als } j \text{ transiënt is.} \end{cases}$

3. Voor iedere $i, j \in S$ geldt: $p_{ij}^* = f_{ij} p_{jj}^*$.

Bewijs (1) Zij

$$B^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k, \; n \in \mathbb{N}.$$

Omdat $0 \le p_{ij}^{(k)} \le 1$ voor alle k, is ook $0 \le b_{ij}^{(n)} \le 1$ voor alle n. Dus voor iedere $i, j \in S$ heeft iedere oneindige deelrij van de rij $\{b_{ij}^{(n)}, n \in \mathbb{N}\}$, een ophopingspunt. Stel dat er een paar i, j zodanig de rij $\{b_{ij}^{(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ twee verschillende opeenhopingspunten, zeg J_{ij} en K_{ij} heeft.

Dan zijn er deelrijen $\{n_k\}_k$ en $\{m_l\}_l$ zodanig dat $b_{ij}^{(n_k)} \to J_{ij}$ en $b_{ij}^{(m_l)} \to K_{ij}$. Via een Cantor-diagonalisatie procedure kunnen we nu verdere deelrijen vinden, die we weer $\{n_k\}_k$ en $\{m_l\}_l$ noemen, en matrices J en K zodanig dat $B^{(n_k)} \to J$, $k \to \infty$ en $B^{(m_l)} \to K$, $l \to \infty$. Met behulp van Fatou's lemma volgt dat $\sum_j J_{ij} \le 1$ en $\sum_j K_{ij} \le 1$ voor $i \in S$. Omdat

$$B^{(n)} + \frac{1}{n}\{P^n - I\} = PB^{(n)} = B^{(n)}P$$

geldt

$$J = PJ = JP \text{ en } K = PK = KP.$$

Dit is niet triviaal. De gelijkheden $J = PJ$ en $K = PK$ volgen door toepassing van de gedomineerde convergentie stelling, waarbij we gebruiken dat J en K niet-negatieve matrices zijn, met rijsommen kleiner dan of gelijk aan 1.
We leiden af dat $J = JP$. Met behulp van Fatou's lemma volgt dat $J \ge JP$. Stel er is een paar i, j waarvoor geldt dat $J_{ij} \ge (JP)_{ij} + \epsilon$ voor een $\epsilon > 0$. Dus geldt dat

$$\sum_l J_{il} \ge \sum_{k,l} J_{ik}P_{kl} + \epsilon = \sum_k J_{ik} + \epsilon,$$

tegenspraak. Merk op dat je de sommatievolgorde mag verwisselen, omdat alle termen niet-negatief zijn! Limiet en som verwisselen mag hierbij door de gedomineerde convergentie stelling. Eveneens volgt hieruit: $J = P^kJ = JP^k$ en $K = P^kK = KP^k$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Dus: $J = B^{(n)}J = JB^{(n)}$ en $K = B^{(n)}K = KB^{(n)}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Met dezelfde argumenten als boven krijgen we dat

$$J = KJ = JK \text{ en } K = JK = KJ,$$

zodat $J = K$. Tegenspraak.

De limiet bestaat dus. Noem deze P^*. Uit het bovenstaande volgt dat ook geldt

$$P^*P = PP^* = P^*P^* = P^*.$$

(2) Neem allereerst een transiënte toestand j. Volgens Lemma 1.12 is

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \quad i \in S,$$

zodat ook de Cesaro-limiet bestaat en gelijk is aan

$$p_{ij}^* = \lim{}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)} = 0, \quad i \in S.$$

Beschouw vervolgens een recurrente toestand j, waarvoor dus $f_{jj} = 1$. De tijden tussen opeenvolgende bezoeken aan j zijn onderling onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische variabelen met verwachting μ_{jj}.
Zij $N(n)$ het totaal aantal bezoeken aan j op de tijdstippen $0, 1, \ldots, n-1$, als gestart wordt in j, met bijbehorende vernieuwingsfunctie $m(n) = \mathbb{E}\{\{N(n)\}$. Dan geldt volgens Stelling 2.7 (zowel als $\mu_{jj} < \infty$ als voor $\mu_{jj} = \infty$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n} = \frac{1}{\mu_{jj}}. \qquad (1.4.1)$$

Definieer de indicator variabele $Y_k = \begin{cases} 1 & \text{als } X_k = j, \text{ gegeven } X_0 = j; \\ 0 & \text{als } X_k \neq j, \text{ gegeven } X_0 = j. \end{cases}$

Omdat $N(n) = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_{n-1}$ kan (1.4.1) herschreven worden als

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\{Y_k\} = \frac{1}{\mu_{jj}}. \tag{1.4.2}$$

Aangezien $\mathbb{E}\{Y_k\} = \mathbb{P}\{X_k = j \mid X_0 = j\} = p_{jj}^{(k)}$, kunnen we schrijven:

$$p_{jj}^* = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_{jj}^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\{Y_k\} = \frac{1}{\mu_{jj}}.$$

(3) Kies een $i, j \in S$. Door te conditioneren naar de eerste keer dat we vanuit toestand i toestand j bezoeken is in te zien dat

$$p_{ij}^{(t)} = \sum_{k=0}^{t-1} f_{ij}^{(t-k)} p_{jj}^{(k)}, \ t \in \mathbb{N}.$$

Hieruit volgt

$$\frac{1}{m} \sum_{t=1}^{m} p_{ij}^{(t)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{m} \sum_{k=0}^{t-1} f_{ij}^{(t-k)} p_{jj}^{(k)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} p_{jj}^{(k)} \left\{ \sum_{l=1}^{m-k} f_{ij}^{(l)} \right\}.$$

Zij $\varepsilon_m = p_{jj}^* - \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} p_{jj}^{(t)}$, dan geldt: $\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$. Verder kunnen we schrijven

$$\left| f_{ij} p_{jj}^* - \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} p_{jj}^{(t)} \left\{ \sum_{l=1}^{m-t} f_{ij}^{(l)} \right\} \right| \leq f_{ij} \varepsilon_m + \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} p_{jj}^{(t)} \left\{ \sum_{l=m-t+1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} \right\}.$$

Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Omdat $0 \leq f_{ij} \leq 1$, is er een m_1 zdd. $\sum_{l=m_1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} \leq \varepsilon$. Er geldt dus

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{m} \textstyle\sum_{t=0}^{m-1} p_{jj}^{(t)} \{\sum_{l=m-t+1}^{\infty} f_{ij}^{(l)}\} &= \tfrac{1}{m} \textstyle\sum_{t=0}^{m-m_1+1} p_{jj}^{(t)} \{\sum_{l=m-t+1}^{\infty} f_{ij}^{(l)}\} \\ &\quad + \tfrac{1}{m} \textstyle\sum_{t=m-m_1+2}^{m-1} p_{jj}^{(t)} \{\sum_{l=m-t+1}^{\infty} f_{ij}^{(l)}\} \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{m} \textstyle\sum_{t=0}^{m-m_1+1} p_{jj}^{(t)} + \tfrac{1}{m}(m_1 - 2) \leq 2\varepsilon \text{ voor } m \text{ voldoende groot.} \end{aligned}$$

Dit geeft

$$f_{ij} p_{jj}^* = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} p_{jj}^{(t)} \left\{ \sum_{l=1}^{m-t} f_{ij}^{(l)} \right\} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{m} p_{ij}^{(t)} = p_{ij}^*.$$

□

Ten overvloede presenteren we voor Stelling 1.21 een alternatief bewijs.

Alternatief bewijs Stelling 1.21 We hadden gezien dat de uitspraken alleen nog bewezen hoeven te worden voor $i \in \mathsf{T}$ en $j \in \cup_k R_k$, en voor $i, j \in R_k$. Dat gaat via de volgende stappen:

i) $p_{jj}^* = \frac{1}{\mu_{jj}}$, $j \in R_k$.

ii) $p_{ij}^* = f_{ij} p_{jj}^*$, $i \in \mathsf{T} \cup \mathsf{R_k}$, $j \in R_k$, $i \neq j$;

iii) $p_{jj}^* = \frac{\mathbb{E}\{V_1^j \mid X_0 = i\}}{\mu_{ii}} < \infty$, als i positief recurrent is, Y_1 de terugkeertijd van een toestand naar zichzelf, $V_1^j = \sum_{t=0}^{Y_1 - 1} \mathbf{1}_{\{j\}}(X_t)$ en $i, j \in R_k$.

Als dit bewezen is, dan volgen uitspraken 2 en 3 van de stelling. Voorts gelden ook de volgende uitspraken.

a) Als i positief recurrent is, dan is $\mathbb{E}\left\{V_1^j \,|\, X_0 = i\right\} \leq \mathbb{E}\{Y_1 \,|\, X_0 = i\} < \infty$. Dus is $p^*_{jj} > 0$, en dus is $\mu_{jj} < \infty$, zodat j positief recurrent is. D.w.z. positief recurrentie is een klasse-eigenschap.

b) $PP^* = P^*$. Uit (i,ii) volgt $j \in R_k$

$$p^*_{ij} = \begin{cases} p^*_{jj}, & i \in R_k \\ a_i^k p^*_{jj}, & i \in \mathsf{T} \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

Dus geldt voor $i \in T$ dat

$$\begin{aligned} \sum_l p_{il} p^*_{lj} &= \sum_{l \in T} p_{il} p^*_{lj} + \sum_{l \in R_k} p_{il} p^*_{lj} \\ &= \sum_{l \in T} p_{il} a_l^k p^*_{jj} + \sum_{l \in R_k} p_{il} p^*_{jj} \\ &= (\sum_{l \in T} p_{il} a_l^k + \sum_{l \in R_k} p_{il}) p^*_{jj} = a_i^k p^*_{jj}. \end{aligned}$$

Voor $i \in R_k$ krijgen we $\sum_l p_{il} p^*_{lj} = \sum_{l \in R_k} p_{il} p^*_{jj} = p^*_{jj}$. Immers R_k is gesloten. Voor de overige paren i, j komt er links en rechts 0 te staan.

c) $\sum_{j \in R_k} p^*_{ij} = 1$, voor $i \in R_k$, als R_k een positief recurrent klasse is. Dat volgt uit (iii), omdat $\sum_{j \in R_k} V_1^j = Y_1$.

d) $P^* P = P^*$. Je kunt weer nagaan dat de enige niet-triviale gevallen zijn wanneer $i \in \mathsf{T} \cup \mathsf{R_k}$ en $j \in R_k$, met R_k een positief recurrente klasse. Laat $i \in R_k$. Dan geldt

$$\frac{\sum_{t=1}^n p_{ij}^{(t)}}{n} = \sum_{l \in R_k} \sum_{t=0}^{n-1} p_{il}^{(t)} p_{lj}.$$

Dus

$$\begin{aligned} p^*_{ij} &= \liminf_{n \to \infty} \sum_{l \in R_k} \sum_{t=0}^{n-1} p_{il}^{(t)} p_{lj} \\ &\geq \sum_{l \in R_k} \liminf_{n \to \infty} \sum_{t=0}^{n-1} p_{il}^{(t)} p_{lj} \\ &= \sum_{l \in R_k} p^*_{il} p_{lj}. \end{aligned}$$

Stel nu, dat er een $j \in R_k$ is en $\epsilon > 0$ met $p^*_{ij} \geq \epsilon + \sum_{l \in R_k} p^*_{il} p_{lj}$. Dan geldt

$$1 = \sum_{j \in R_k} p^*_{ij} \geq \epsilon + \sum_{l, j \in R_k} p^*_{il} p_{lj} = \epsilon + 1,$$

tegenspraak. Dus geldt gelijkheid. Het geval dat $i \in \mathsf{T}$ en $j \in R_k$ volgt hieruit direct.

De gevallen (i) en (iii) volgen uit vernieuwingsargumenten. We bewijzen slechts (ii). Laat $i \in \mathsf{T} \cup \mathsf{R_k}$ en $j \in R_k$ gegeven zijn, met $i \neq j$. Stel $X_0 = i$. Schrijf Y_0 voor de tijdsduur tot j voor het eerst bereikt wordt. Laat Y_n de tijdsduur zijn tussen twee opeenvolgende bezoeken aan j, $n = 1, \ldots$. Schrijf $\bar{N}_j(n)$ voor het aantal bezoeken aan j voor (en het laatst op) tijdstip n, en $N_j(n)$ voor het vernieuwingproces geassocieerd met $Y_1, Y_2, \ldots$. N.B. $Y_i \geq 1$!
Dan geldt

$$\sum_{n=1}^{n} p_{ij}^t = \mathbb{E}\left\{\bar{N}_j(n) \,|\, X_0 = i\right\} = \sum_{s \leq n} f_{ij}^{(s)}(1 + \mathbb{E}\left\{N_j(n-s) \,|\, X_0 = j\right)\}$$

Kies $\epsilon > 0$ en n_ϵ zodat $\sum_{s \leq n_\epsilon} f_{ij}^{(s)} \geq f_{ij} - \epsilon (> 0)$. Dan geldt voor $n > n_\epsilon$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\bar{N}_j(n) \,|\, X_0 = i\right\} &= \sum_{s \leq n} f_{ij}^{(s)}(1 + \mathbb{E}\left\{N_j(n-s) \,|\, X_0 = j\right\} \\ &\geq \sum_{s \leq n_\epsilon} f_{ij}^{(s)}\, \mathbb{E}\left\{N_j(n-s) \,|\, X_0 = j\right\}. \end{aligned}$$

Dus voor all $\epsilon > 0$ klein geldt

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{n=1}^{n} p_{ij}^{(t)}}{n} &= \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left\{\bar{N}_j(n) \,|\, X_0 = i\right\}}{n} \\ &\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{s \leq n_\epsilon} f_{ij}^{(s)}\, \mathbb{E}\left\{N_j(n-s) \,|\, X_0 = j\right\}}{n} \\ &\geq \sum_{s \leq n_\epsilon} \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left\{N_j(n-s) \,|\, X_0 = j\right\}}{n-s} \frac{n-s}{n} \geq (f_{ij} - \epsilon)\frac{1}{\mu_{jj}} = (f_{ij} - \epsilon) p_{jj}^*. \end{aligned}$$

Door de limiet $\epsilon \downarrow 0$ te nemen krijgen we $\frac{\sum_{n=1}^{n} p_{ij}^{(t)}}{n} \geq f_{ij} p_{jj}^*$. Voor een bovengrens krijgen we

$$\frac{\sum_{n=1}^{n} p_{ij}^{(t)}}{n} \leq \frac{f_{ij}(1 + \mathbb{E}\left\{N_j(n) \,|\, X_0 = j\right\}}{n},$$

zodat

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{n} p_{ij}^t}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{f_{ij}(1 + \mathbb{E}\left\{N_j(n) \,|\, X_0 = j\right\}}{n} = f_{ij} p_{jj}^*$$

□

N.B. $\sum_j p_{ij}^* = \sum_{k\,:\,R_k \text{pos.rec.}} a_i^k$, voor $i \in \mathsf{T}$. Dit kan mogelijk < 1 zijn!

Gevolg 1.22 *De eigenschappen positief recurrent en 0-recurrent zijn klasse-eigenschappen.*

Bewijs Veronderstel dat C een communicerende klasse is en dat j positief recurrent is. Neem een $i \in C$. Omdat i en j communiceren zijn er indices k en l zdd. $p_{ij}^{(k)} > 0$ en $p_{ji}^{(l)} > 0$. Voor iedere n geldt

$$p_{ii}^{(k+n+l)} \geq p_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(l)},$$

zodat ook

$$\tfrac{1}{m} \textstyle\sum_{n=0}^{m-1} p_{ii}^{(k+n+l)} \geq p_{ij}^{(k)} \cdot p_{ji}^{(l)} \cdot \tfrac{1}{m} \textstyle\sum_{n=0}^{m-1} p_{jj}^{(n)} \text{ voor alle } m.$$

Laat $m \to \infty$, dan geeft dit

$$p^*_{ii} \geq p^{(k)}_{ij} \cdot p^{(l)}_{ji} \cdot p^*_{jj}.$$

Omdat j positief recurrent is, is volgens Stelling 1.21 $p^*_{jj} > 0$, dus ook $p^*_{ii} > 0$, d.w.z. toestand i is ook positief recurrent. Hiermee hebben we aangetoond dat positief recurrent een klasse-eigenschap is. Tevens volgt hieruit dat ook 0-recurrent een klasse-eigenschap is. $\square$ Voor Stelling 1.21 presenteren

Gevolg 1.23 *In een eindige Markov keten is elke essentiële klasse positief recurrent.*

Bewijs Laat C een essentiële klasse zijn. Dan is C gesloten. Laat $i \in C$. Dan geldt dat $\sum_{j \in C} p^{(t)}_{ij} = 1$ voor $t \geq 0$. Er geldt dat

$$1 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j\in C} \sum_{t=0}^{N-1} p^{(t)}_{ij} = \sum_{j\in C} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} p^{(t)}_{ij} = \sum_{j \in C} P^*_{ij}.$$

Dus is $P^*_{ij} > 0$ voor minstens één toestand $j \in C$. Op grond van Stelling 1.21 (3) geldt dat $P^*_{jj} > 0$. Op grond van (2) van dezelfde stelling geldt dat $\mu_{jj} < \infty$, dus is j positief recurrent. Omdat positieve recurrentie een klasse-eigenschap is, geldt dat C positief recurrent is. $\square$

We kunnen nu ook nagaan, wanneer de $\lim_{t\to\infty} p^{(t)}_{ij}$ bestaat, en wat deze dan is. Zoals al gezien, is het noodzakelijk voor het bestaan van de limiet dat de keten aperiodiek is. Dit is ook voldoende.

Gevolg 1.24 *In een aperiodieke Markovketen geldt dat* $\lim_{t\to\infty} p^{(t)}_{ij} = P^*_{ij}$.

Bewijs Combineer Blackwell's stelling 2.8 met Stelling 1.21 (2) en het bewijs van deze laatste uitspraak. $\square$

De matrix P^* wordt de *stationaire matrix* genoemd. Een kansverdeling x op toestandsruimte S heet *stationair* indien

$$x = xP,$$

waarbij x als rijvector wordt beschouwd.
Uit $x = xP$ volgt dat $x = x(\sum_{t=0}^{N-1} P^{(t)}/N)$. Door de gedomineerde convergentiestelling toe te passen, volgt dat ook geldt dat $x = xP^*$, d.w.z. x is ook stationair t.o.v. P^*. Omdat $P^* = P^*P$ is iedere rij van P^* een stationaire kansverdeling van P. De volgende stelling laat zien dat iedere stationaire kansverdeling van P een convexe combinatie van de rijen van P^* is.

Stelling 1.25 *Zij x een stationaire kansverdeling van de overgangsmatrix P, met positief recurrente klassen $R_1, R_2, \ldots, R_m$, met $m \leq \infty$, en R_0 de vereniging van alle nul-recurrente klassen. Dan geldt:*

$$x_i = \begin{cases} 0 & \textit{als} \quad i \in T \cup R_0 \\ c_k p^*_{ii} & \textit{als} \quad i \in R_k, \ \textit{met } c_k \geq 0, 1 \leq k \leq m, \textit{en } \sum_{k=1}^{m} c_k = 1. \end{cases}$$

Bewijs Omdat x ook stationair is t.o.v. P^* en omdat de kolommen van P^* die behoren bij transiënte toestanden 0 zijn, geldt

$$x_i = \sum_{j \in S} x_j p^*_{ji} = 0, \; i \in T \cup R_0.$$

Neem vervolgens een $i \in R_k$, $k > 0$. Omdat $p^*_{ji} = 0$ voor $j \notin R_k \cup T$ en omdat $p^*_{ji} = p^*_{ii}$ voor $j \in R_k$, kunnen we schrijven

$$x_i = \sum_{j \in S} x_j p^*_{ji} = \sum_{j \in R_k} x_j p^*_{ji} + \sum_{j \in T} x_j p^*_{ji} = \sum_{j \in R_k} x_j p^*_{ii} = p^*_{ii} \cdot \sum_{j \in R_k} x_j.$$

Laat $c_k = \sum_{j \in R_k} x_j$, dan geldt

$$c_k \geq 0, \; 1 \leq k \leq m, \; \text{en} \; \sum_{k=1}^{m} c_k = \sum_{j \in S} x_j = 1. \qquad \square$$

Gevolg 1.26

Als x een stationaire kansverdeling is en $S_x = \{i \mid x_i > 0\}$, dan is S_x de vereniging van een aantal (positief) recurrente klassen en dus gesloten. Als de Markovketen irreducibel is, dan heeft het stelsel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \pi_j & = & \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}, \; j \in S \\ \sum_{j \in S} \pi_j & = & 1 \end{array} \right. \tag{1.4.3}$$

een unieke (en automatisch positieve) oplossing als de Markovketen positief recurrent is, anders is er geen oplossing.

Opmerkingen

Het getal p^*_{ij} heeft de volgende interpretaties:

1. $p^*_{ij} = \lim_{t \to \infty} p^{(t)}_{ij}$ (als j aperiodiek is): de kans om na lange tijd het systeem in toestand j aan te treffen als gestart wordt in i.

2. $p^*_{ij} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} p^{(s)}_{ij}$: de verwachting van de fractie van de tijd (in de long run) dat het systeem in toestand j is, als in toestand i wordt gestart. Dit laatste is als volgt in te zien.

   Zij Y_t de stochastische variabele met waarden uit $\{0, 1\}$ zdd. $Y_t = 1$ d.e.s.d. als $X_t = j$.

   Dan is $\frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} Y_s$ de fractie van de tijd dat het systeem in toestand j is. Nu geldt

$$\mathbb{E}\left\{ \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} Y_s | X_0 = i \right\} = \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \mathbb{E}\{Y_s | X_0 = i\} = \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \mathbb{P}\{X_s = j | X_0 = i\} = \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} p^{(s)}_{ij},$$

   waaruit volgt

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}\left\{ \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} Y_s \mid X_0 = i \right\} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} p^{(s)}_{ij} = p^*_{ij}.$$

Voorbeeld 1.11
Beschouw een Bernoulli-wandeling op $\mathbb{N}_0$ met

$$p_{0,1} = p_0,\ p_{0,0} = q_0 = 1 - p_0,\ p_{i,i+1} = p_i,\ p_{i,i-1} = q_i = 1 - p_i,\ i = 1, 2, \ldots,$$

met $0 < p_i < 1$ voor $i \geq 1$. Het is direct duidelijk dat deze keten irreducibel is. We willen nagaan wanneer deze keten positief recurrent is. We hebben gezien dat dit equivalent is met de uitspraak dat er een stationaire kansverdeling bestaat. Dit houdt in dat er een positieve oplossing moet zijn van het stelsel

$$\begin{cases} p_0 x_0 = q_1 x_1 \\ x_j = p_{j-1} x_{j-1} + q_{j+1} x_{j+1},\ j = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Door te schrijven $x_j = (p_j + q_j) x_j$, krijgen we

$$\begin{cases} p_0 x_0 = q_1 x_1 \\ q_{j+1} x_{j+1} - p_j x_j = q_j x_j - p_{j-1} x_{j-1},\ j = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Hieruit volgt dat: $q_{j+1} x_{j+1} - p_j x_j = q_j x_j - p_{j-1} x_{j-1} = \cdots = q_1 x_1 - p_0 x_0 = 0$, d.w.z.

$$x_{j+1} = \frac{p_j}{q_{j+1}} x_j = \cdots = \frac{p_j p_{j-1} \cdots p_0}{q_{j+1} q_j \cdots q_1} x_0,\ j = 0, 1, \ldots.$$

Een nodig en voldoende voorwaarde voor positief recurrent is dus dat

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j p_{j-1} \cdots p_0}{q_{j+1} q_j \cdots q_1} < \infty.$$

In het speciale geval dat $p_i = p$ en $q_i = q,\ i \geq 0$, wordt de voorwaarde $\sum_{j=0}^{\infty} (\frac{p}{q})^j < \infty$, d.w.z. $p < q$, ofwel $p < \frac{1}{2}$. In dat geval is $\sum_{j=0}^{\infty} (\frac{p}{q})^j = \frac{q}{q-p}$, zodat voor de stationaire kansverdeling geldt:

$$\pi_j = \frac{x_j}{\sum_{k=0}^{\infty} x_k} = (\frac{p}{q})^j \cdot \frac{q-p}{q},\ j \geq 0.$$

Voor de terugkeertijden geldt dan

$$\mu_{jj} = \frac{1}{\pi_j} = (\frac{q}{p})^j \cdot \frac{q}{q-p}.$$

Voorbeeld 1.12 *De Wet van Hardy en Weinberg uit de genetica*[7]
Beschouw een populatie individuen die elk een speciaal paar genen bezitten, waarbij ieder gen van type A of a kan zijn, zodat er genetische toestanden AA, aa en Aa zijn. Laten deze toestanden de frequenties p, q resp. r hebben ($p + q + r = 1$).
Uit de individuen worden willekeurig paren gevormd die een nakomeling voortbrengen. Hierbij 'kiest' iedere ouder willekeurig één van de twee genen van het speciale paar en deze worden gecombineerd en bepalen de genetische toestand van de nakomeling. Het willekeurig paren vormen

[7] Godfrey Hardy (1877 – 1947) was een Engelse wiskundige, Wilhelm Weinberg (1862 – 1937) een Duitse natuurkundige. Zij ontdekten in 1908, onafhankelijk van elkaar, dat onder bepaalde voorwaarden de frequenties van typen genen in evenwicht zijn.

en daarna een gen kiezen is equivalent met het random kiezen van een gen uit de populatie: met kans $p + \frac{r}{2}$ is dit een A-gen en met kans $q + \frac{r}{2}$ is dit een a-gen.
Zij X_t de genetische toestand van een willekeurig individu uit gerenatie t, dan volgt X_t een Markov keten met de volgende overgangsmatrix (dit eenvoudig na te gaan door te conditioneren naar de gekozen partner):

$$P = \begin{pmatrix} p+\frac{r}{2} & 0 & q+\frac{r}{2} \\ 0 & q+\frac{r}{2} & p+\frac{r}{2} \\ \frac{p}{2}+\frac{r}{4} & \frac{q}{2}+\frac{r}{4} & \frac{p}{2}+\frac{q}{2}+\frac{r}{2} \end{pmatrix}.$$

Dit is een irreducibele aperiodieke Markov keten. Voor de stationaire verdeling π geldt:

$$\pi_1 = (p+\frac{r}{2})\pi_1 + (\frac{p}{2}+\frac{r}{4})\pi_3 \tag{1.4.4}$$
$$\pi_2 = (q+\frac{r}{2})\pi_2 + (\frac{q}{2}+\frac{r}{4})\pi_3 \tag{1.4.5}$$
$$\pi_3 = (q+\frac{r}{2})\pi_1 + (p+\frac{r}{2})\pi_2 + (\frac{p}{2}+\frac{q}{2}+\frac{r}{4})\pi_3 \tag{1.4.6}$$
$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \tag{1.4.7}$$

Omdat het stelsel (1.4.3) afhankelijk is, kan één vergelijking worden weggelaten. We laten de derde vergelijking weg. Uit de eerste twee vergelijkingen volgt met $b = p + \frac{r}{2}$ en $c = q + \frac{r}{2} = 1 - b$:

$$\pi_1 = \frac{b}{1-b} \cdot \frac{1}{2}\pi_3 \text{ en } \pi_2 = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1}{2}\pi_3 = \frac{1-b}{b} \cdot \frac{1}{2}\pi_3.$$

Dit geeft met de laatste vergelijking $\pi_3 = 2b(1-b)$, zodat

$$\pi_1 = b^2 = (p+\frac{1}{2}r)^2;\ \pi_2 = (1-b)^2 = (q+\frac{1}{2}r)^2;\ \pi_3 = 2(p+\frac{1}{2}r)(q+\frac{1}{2}r).$$

Op de lange duur is de frequentie van het aantal A-genen dus $\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3 = p + \frac{1}{2}r$, hetzelfde als aan het begin van het voortplantingsproces. In feite is dit in iedere generatie t de frequentie van het aantal A-genen. Het aantal A-genen is dus stationair in de tijd (hetzelfde geldt voor de a-genen): dit is de *Wet van Hardy en Weinberg*.

Eindige Markovketens We hadden gezien dat in aperiodieke Markovketens de limiet $\lim_{t\to\infty} P^{(t)}$ bestaat. Het bewijs berust op Blackwell's Stelling 2.8. Voor eindige, mogelijk periodieke Markovketens geven we nog een expliciet bewijs.

Stelling 1.27
Zij F een recurrente klasse met periode d en laat $r(i,j)$ zoals in Stelling 1.7. Dan geldt:

1. *Er bestaat een t_0 zdd. $p_{ij}^{(td+r(i,j))} > 0$ voor alle $t \geq t_0$ en alle $i, j \in F$;*
2. *Voor alle $j \in F$ bestaat $\lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(td+r(i,j))}$, is onafhankelijk van i en positief.*

Bewijs
(1) Kies een tweetal toestanden $i, j \in F$. Beschouw een rij $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ met $p_{ii}^{(t_k)} > 0$ voor $k = 1, 2, \ldots$. Laat $d_l = g.g.d.\ \{t_k, 1 \leq k \leq l\}$, dus $d_l \downarrow d$. Er bestaan eindig veel waarden van l met $d_l < d_{l-1}$, zeg de waarden $l_1, l_2, \ldots, l_M$, met bijbehorende lengtes $t_1, t_2, \ldots, t_M$ van rondes waar i toe

behoort, en deze lengtes hebben als g.g.d. d. Hieruit volgt dat er gehele getallen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M$ bestaan zdd. $d = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k t_k$ met $p_{ii}^{(t_k)} > 0,\ 1 \leq k \leq M$. Zij $\lambda_k^+ = max\ (0, \lambda_k),\ \lambda_k^- = max\ (0, -\lambda_k),\ d^+ = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k^+ t_k$ en $d^- = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k^- t_k$. Dan geldt: $d = d^+ - d^-,\ p_{ii}^{(d^+)} > 0$ en $p_{ii}^{(d^-)} > 0$, dus $d|d^+$ en $d|d^-$. Voor iedere $t \in \mathbb{N}$ kunnen we schrijven: $td = qd^- + r$ met $q, r \in \mathbb{N}_0$ en $r \leq d^- - 1$. Omdat d een deler is van d^-, is d ook een deler van r: $r = md$. Laat nu $t \geq t_1 \in \mathbb{N}$ met $t_1 = \frac{d^-(d^- - 1)}{d^2}$. Nu geldt: $\frac{d^-(d^- - 1)}{d} \leq td = qd^- + r = qd^- + md$, zodat $q \geq \lfloor \frac{d^- - 1}{d} \rfloor \geq m$, de laatste ongelijkheid omdat $md = r \leq d^- - 1$ en m geheel is. Voor $t \geq t_1$ geldt dus: $td = qd^- + md = (q - m)d^- + md^+$ met $q \geq m$, dus $p_{ii}^{(td)} \geq 0$. Neem een t met $p_{ij}^{(t)} > 0$. Volgens Stelling 1.7 is $t \equiv r(i,j)\ (mod\ d):\ \ t = sd + r(i,j)$ met $s \in \mathbb{N}_0$. Laat $t_0 = t_1 + s$, dan geldt voor alle $t \geq t_0 : p_{ij}^{(td+r(i,j))} \geq p_{ii}^{((t-s)d)} p_{ij}^{(sd+r(i,j))} > 0$. Merk op dat t_0 in het algemeen van i en j afhangt. Omdat er eindig veel toestanden zijn, is er ook een t_0 die onafhankelijk is van i en j en waarvoor geldt: $p_{ij}^{(td+r(i,j))} > 0$.

(2) We zullen dit onderdeel in twee delen bewijzen, afhankelijk van de periode van F.
Geval a: F is aperiodiek: $d = 1$ en $r(i,j) = 0$ voor alle $i, j \in F$. Definieer voor $j \in F$ en $t \in \mathbb{N} : f_j(t) = \min_{i \in F}\ p_{ij}^{(t)}$ en $g_j(t) = \max_{i \in F}\ p_{ij}^{(t)}$. Nu geldt:

$$\begin{aligned} f_j(t+1) &= \min_{i \in F}\ p_{ij}^{(t+1)} = \min_{i \in F}\ \textstyle\sum_{k \in S}\ p_{ik} p_{kj}^{(t)} = \min_{i \in F}\ \textstyle\sum_{k \in F}\ p_{ik} p_{kj}^{(t)} \\ &\geq \min_{i \in F}\ \textstyle\sum_{k \in F}\ p_{ik} f_j(t) = f_j(t). \end{aligned}$$

Analoog bewijzen we dat $g_j(t+1) \leq g_j(t),\ j \in F$ en $t \in \mathbb{N}$. Beschouw weer het getal t_0 uit onderdeel 1 en laat $\delta = \min_{i,j}\ p_{ij}^{(t_0)}$. Dan is $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$. Kies een $t \in \mathbb{N}$. We kunnen dan schrijven, met i en l zdd. $f_j(t+t_0) = p_{ij}^{(t+t_0)}$ en $g_j(t) = p_{lj}^{(t)}$:

$$\begin{aligned} f_j(t+t_0) &= p_{ij}^{(t+t_0)} = \textstyle\sum_{k \in F}\ p_{ik}^{(t_0)} p_{kj}^{(t)} = \delta g_j(t) + [p_{il}^{(t_0)} - \delta] g_j(t) + \textstyle\sum_{k \in F, k \neq l}\ p_{ik}^{(t_0)} p_{kj}^{(t)} \\ &\geq \delta g_j(t) + [p_{il}^{(t_0)} - \delta] f_j(t) + [1 - p_{il}^{(t_0)}] f_j(t) = \delta g_j(t) + [1 - \delta] f_j(t). \end{aligned}$$

Analoog kan worden aangetoond dat $g_j(t+t_0) \leq \delta f_j(t) + [1-\delta] g_j(t)$. Iedere $t \in \mathbb{N}$ is te schrijven als: $t = q(t) t_0 + r(t)$ met $0 \leq r(t) \leq t_0 - 1$. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} 0 \leq g_j(t) - f_j(t) &\leq (1 - 2\delta)[g_j(t - t_0) - f_j(t - t_0)] \leq \cdots \leq \\ & (1 - 2\delta)^{q(t)} \cdot \max_{0 \leq r(t) \leq t_0 - 1} [g_j(r(t)) - f_j(r(t))],\ t \in \mathbb{N},\ j \in F \end{aligned}$$

Dit impliceert dat $\lim_{t \to \infty}\ [g_j(t) - f_j(t)] = 0,\ j \in F$, waaruit volgt dat $\lim_{t \to \infty}\ p_{ij}^{(t)}$ bestaat voor alle $i, j \in F$ en onafhankelijk van i is. Volgens onderdeel (i) is deze limiet ook positief.

Geval b: F is periodiek met periode $d \geq 2$. Laat $F_0, F_1, \ldots, F_{d-1}$ de cyclische deelverz. van F zijn. Beschouw de Markov keten die behoort bij de overgangsmatrix P^d. Omdat de éénstapsovergangen m.b.t. P^d corresponderen met de d-stapsovergangen m.b.t. P, is direct in te zien dat de cyclische deelverz. $F_0, F_1, \ldots, F_{d-1}$ m.b.t. P^d aperiodieke recurrente klassen zijn. Dus uit geval a volgt: $\lim_{t \to \infty}\ p_{ij}^{(td)}$ bestaat voor alle $i, j \in F_k, 0 \leq k \leq d-1$, en is onafhankelijk van i. Laat $\pi_j = \lim_{t \to \infty}\ p_{jj}^{(td)} > 0,\ j \in F$. Neem $i, j \in F$ en stel $i \in F_l$ en $j \in F_k$, dan geldt:

$$p_{ij}^{(td+r(i,j))} = \sum_{n=0}^{d-1} p_{ij}^{(td+n)} = \sum_{n=0}^{d-1} \sum_{s \in F_k} p_{is}^{(n)} p_{sj}^{(td)} = \sum_{s \in F_k} p_{sj}^{(td)} \sum_{n=0}^{d-1} p_{is}^{(n)}.$$

Dit geeft:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(td+r(i,j))} &= \lim_{t\to\infty} \sum_{s\in F_k} p_{sj}^{(td)} \sum_{n=0}^{d-1} p_{is}^{(n)} = \pi_j \cdot \sum_{s\in F_k} \sum_{n=0}^{d-1} p_{is}^{(n)} \\ &= \pi_j \cdot \sum_{s\in F_k} p_{is}^{(k-l)} = \pi_j.\end{aligned}$$

□

Gevolg 1.28 *Een eindige Markovketen is irreducibel en aperiodiek d.e.s.d. als er een $t_0 \in \mathbb{N}$ is zdd. $p_{ij}^{(t)} > 0$ voor iedere $i, j \in S$ en voor alle $t \geq t_0$.*

Bewijs

Laat de keten irreducibel en aperiodiek zijn: $d = 1$ en $r(i,j) = 0$ voor alle i en j.
Uit Stelling 1.27 volgt het gestelde.
Omgekeerd, kies $i \in S$ en $t \geq t_0$. Dan geldt: $p_{ii}^{(t)} > 0$ en $p_{ii}^{(t+1)} > 0$, zodat $d = 1$.
De irreducibiliteit is triviaal. □

1.5 Algoritmes voor eindige Markovketens

Als de toestandsruimte erg groot is, is het niet gemakkelijk om de structuureigenschappen van de Markovketen te bepalen. In deze paragraaf bespreken we een aantal algoritmes, waarmee we dat efficiënt kunnen doen.

Stelling 1.29 *Beschouw in de bij de Markov keten behorende gerichte graaf een streng samenhangende component C, die behoort bij een recurrente klasse F met periode d.*
Laat B een opspannende gerichte boom zijn met een willekeurig gekozen wortel v_1 en laat $k(i)$ het aantal pijlen in B zijn om van v_1 naar v_i te komen voor $i \in F$.
Dan geldt

$$d = g.g.d.\ \{k(i) + 1 - k(j) \mid (v_i, v_j) \notin B\}.$$

Bewijs Laat D een gesloten pijlenreeks in C zijn, bestaande uit k pijlen. Nu geldt:

$$\sum_{(v_i,v_j)\in D} \{k(i) + 1 - k(j)\} = k + \sum_{(v_i,v_j)\in D} \{k(i) - k(j)\} = k.$$

Anderzijds geldt omdat $k(j) = k(i) + 1$ als $(v_i, v_j) \in B$:

$$\sum_{(v_i,v_j)\in D\setminus B} \{k(i)+1-k(j)\} = \sum_{(v_i,v_j)\in D} \{k(i)+1-k(j)\} - \sum_{(v_i,v_j)\in D\cap B} \{k(i)+1-k(j)\} = k - 0 = k.$$

Laat

$$g := g.g.d.\ \{k(i) + 1 - k(j) \mid (v_i, v_j) \notin B\},$$

dan is te bewijzen dat $g = d$. Uit het bovenstaande volgt dat g een deler is van k en dus geldt (omdat k de lengte van een willekeurige ronde is) dat g een deler is van d.

Neem een willekeurige pijl $(v_i, v_j) \notin B$ en laat k_j de lengte van een pad in de graaf zijn van v_j naar v_1 (dit bestaat i.v.m. de strenge samenhang). Dan geldt:
d is een deler van $k(i) + 1 + k_j$ (ronde: $v_1 \to v_i$ (in boom) $\to v_j \to v_1$).
d is een deler van $k(j) + k_j$ (ronde: $v_1 \to v_j$ (in boom) $\to v_1$).
d is dus een deler van het verschil: d is deler van $k(i) + 1 - k(j)$, waaruit volgt dat d ook een deler is van g. $\square$

Algoritme 1.1 *Bepaling periode en cyclische deelverzamelingen van een recurrente klasse*

1. Bepaal de streng samenhangende componenten van de bij de Markov keten behorende gerichte graaf.

2. Doe voor iedere gesloten streng samenhangende component C het volgende:

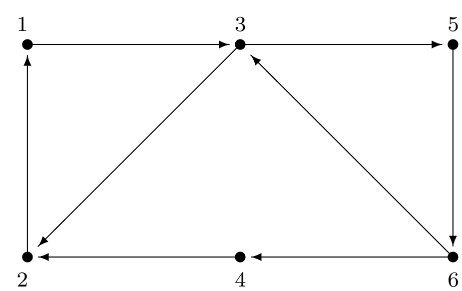
   (a) Kies een knooppunt v_1 en bepaal een opspannende gerichte boom B met wortel v_1.

   (b) Bereken voor iedere $v_i \in C$ het aantal pijlen $k(i)$ om in B van v_1 naar v_i te komen.

   (c) $d = ggd\ \{k(i) + 1 - k(j) \mid (v_i, v_j) \notin B\}$.

   (d) $F_i = \{v_j \mid k(j) \equiv i\ (mod\ d)\}, i = 0, 1, \ldots, d - 1$.

Voorbeeld 1.13
Beschouw nevenstaande streng samenhangende graaf.
Neem als wortel v_1 en als opspannende boom:
$B = \{(1,3), (3,2), (3,5), (5,6), (6,4)\}$.
De boomafstanden zijn:
$k(1) = 0, k(2) = 2, k(3) = 1, k(4) = 4, k(5) = 2, k(6) = 3$.
$d = g.g.d.\ \{3,3,3\} = 3$.
$F_0 = \{1,6\}; F_1 = \{3,4\}$; en $F_2 = \{2,5\}$.



Door geschikte hernummering van de toestanden kan iedere Markov keten geschreven worden in de volgende *standaardvorm* (eerste de recurrente klassen en dan de transiënte toestanden):

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & P_m & 0 \\ A_1 & A_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_m & Q \end{pmatrix} \tag{1.5.1}$$

Vraag 1.8 Beschouw onderstaande overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de recurrente klassen en schrijf de matrix in standaardvorm.

b. Bepaal vanuit toestand 2 voor alle j de absorptiekansen f_{2j}.

c. Bepaal op de klasse C waar toestand 1 toe behoort de eerste doorkomsttijden μ_{i1}, $i \in C$.

Uit Lemma 1.5 volgt dat de recurrente klassen van de transiënte klassen kunnen worden onderscheiden doordat een recurrente klasse wel en een transiënte klasse niet gesloten is. Dit leidt tot het volgende algoritme om de klassenindeling van de toestanden te maken.

Algoritme 1.2 *Bepaling recurrente klassen en transiënte toestanden*

1. (a) Bepaal in de bijbehorende graaf de knooppuntenverz. van streng samenhangende componenten, zeg $C_1, C_2, \dots, C_k$.[8]

   (b) Laat $m = 0$ en $T = \emptyset$.

2. Voor $i = 1, 2, \dots, k$ doe:

   als C_i gesloten is: $m := m + 1$ en $R_m = C_i$;

   anders: $T := T \cup C_i$.

Algoritme 1.3 *Bepaling van de stationaire matrix P^**

1. Bepaal met Algoritme 1.2 de recurrente klassen $R_1, R_2, \dots, R_m$ en de transiënte toestanden T en schrijf P in de standaardvorm (1.5.1).

2. Bepaal voor $k = 1, 2, \dots, m$:

   a. de unieke oplossing x_j^k, $j \in R_k$, van het stelsel $\begin{cases} \sum_{l \in R_k} (\delta_{lj} - p_{lj}) x_l = 0, \; j \in R_k \\ \sum_{l \in R_k} x_l = 1 \end{cases}$

   b. de unieke oplossing a_i^k, $i \in T$, van het stelsel $\sum_{j \in T} (\delta_{ij} - p_{ij}) x_j = \sum_{l \in R_k} p_{il}$, $i \in T$.

[8] Er bestaan efficiënte algoritmen met complexiteit $\mathcal{O}(n^2)$, waarbij n het aantal knooppunten is, om de streng samenhangende componenten van een gerichte graaf te bepalen. Zie bijvoorbeeld Algoritme 1.6 in Besliskunde 3.

3. $p^*_{ij} = \begin{cases} x^k_j & i \in R_k,\ j \in R_k,\ k = 1, 2, \ldots, m \\ a^k_i x^k_j & i \in T,\ j \in R_k,\ k = 1, 2, \ldots, m \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$

Voorbeeld 1.14

Beschouw onderstaande Markov keten, reeds geschreven in de standaard gedaante (1.5.1).

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Berekening x^1 : $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 = x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \quad x^1 = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7}).$

Berekening a^1 : $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad a^1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}).$

Berekening x^2 : $\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_1 = 1 \end{cases} \rightarrow \quad x^2 = (1).$

Berekening a^2 : $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \quad a^2 = (\frac{2}{3}, \frac{5}{6}).$

$$P^* = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{21} & \frac{1}{7} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{21} & \frac{1}{14} & \frac{5}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld 1.15 *Geboorte-sterfte proces*

Beschouw een Markov keten met $S = \{0, 1, \cdots, N\}$. We spreken van een geboorte-sterfte proces als er vanuit i alleen positieve overgangskansen zijn naar i zelf en zijn directe buren: van i naar

$i+1$ heet een *geboorte* en van i naar $i-1$ een sterfte. De overgangsmatrix heeft de vorm:

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{N-1} & p_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_N & r_N \end{pmatrix},$$

waarbij we aannemen dat $0 < p_i < 1$ en $0 < q_i < 1$ voor ale i. De Markov keten is dan irreducibel en we zullen de stationaire verdeling gaan bepalen. Deze wordt gevonden als unieke oplossing van het stelsel (er moet nog de normalisatie bij, maar dat stellen we even uit):

$$\begin{array}{lcl} \pi_0 & = & r_0\pi_0 + q_1\pi_1 \\ \pi_1 & = & p_0\pi_0 + r_1\pi_1 + q_2\pi_2 \\ \pi_2 & = & p_1\pi_1 + r_2\pi_2 + q_3\pi_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pi_i & = & p_{i-1}\pi_{i-1} + r_i\pi_i + q_{i+1}\pi_{i+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pi_{N-1} & = & p_{N-2}\pi_{N-2} + r_{N-1}\pi_{N-1} + q_N\pi_N \\ \pi_N & = & p_{N-1}\pi_{N-1} + r_N\pi_N \end{array}$$

Dit stelsel kunnen we oplossen door alle variabelen uit te drukken in π_0.

Uit de eerste vergelijking volgt: $q_1\pi_1 = (1-r_0)\pi_0 = p_0\pi_0 \;\rightarrow\; \pi_1 = \frac{p_0}{q_1}\pi_0$.

Uit de tweede vergelijking volgt: $q_2\pi_2 = (1-r_1)\pi_1 - p_0\pi_0 = (1-r_1)\pi_1 - q_1\pi_1 = p_1\pi_1$, d.w.z.
$\pi_2 = \frac{p_1}{q_2}\pi_1 \quad\rightarrow\quad \pi_2 = \frac{p_0p_1}{q_1q_2}\pi_0$.

Met inductie is op deze manier te bewijzen dat $q_{i+1}\pi_{i+1} = p_i\pi_i$.

Deze vergelijking heet de *balansvergelijking* en houdt in dat tussen twee opeenvolgende toestanden de 'stroom' naar rechts gelijk is aan de 'stroom' naar links. Hieruit volgt dat

$$\pi_{i+1} = \frac{p_0p_1\cdots p_i}{q_1q_2\cdots q_{i+1}}\pi_0,\; 0 \le i \le N-1.$$

Laat $C_i = \frac{p_0p_1\cdots p_{i-1}}{q_1q_2\cdots q_i},\; 1 \le i \le N$ en neem $C_0 = 1$.

Dan is $\pi_i = C_i\pi_0,\; 0 \le i \le N$, zodat $1 = \sum_{i=0}^N \pi_i = \sum_{i=0}^N C_i\pi_0$.

Hieruit volgt:

$$\pi_0 = \left\{\sum_{i=0}^N C_i\right\}^{-1} \text{ en } \pi_i = \left\{\sum_{i=0}^N C_i\right\}^{-1} C_i,\; 0 \le i \le N.$$

Vraag 1.9

Beschouw de Markov keten uit Vraag 1.8.

Bepaal voor deze keten $(I-Q)^{-1}$ en de absorptietijden van de transiënte toestanden.

Vraag 1.10

Beschouw een irreducibele Markov keten met stationaire kansverdeling π.

Veronderstel dat $\mathbb{P}\{X_0 = i\} = \pi_i$, $i \in S$.

Toon aan dat $\mathbb{P}\{X_t = i\} = \pi_i$, $i \in S$ voor $t = 1, 2, \dots$.

Vraag 1.11

Vijf ballen zijn verdeeld over twee bakken, bak A en bak B.

a. Aan het begin van iedere periode wordt random een bak gekozen. Als de gekozen bak niet leeg is, dan wordt een bal uit de gekozen bak naar de andere bak verplaatst.

Wat is in de long run de fractie van de tijd dat bak A leeg is?

b. Aan het begin van iedere periode wordt random een bal gekozen en deze bal wordt naar de andere bak verplaatst. Wat is in de long run de fractie van de tijd dat bak A leeg is?

Vraag 1.12

Beschouw een Markov keten op de toestandsruimte $\{1, 2\}$ en met als overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \text{ met } 0 < \alpha, \beta < 1.$$

a. Ga na dat de stationaire verdeling $(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta})$ is.

b. Toon aan dat de kansverdeling van de eerste doorkomst in toestand 1 wordt gegeven door

$$f_{11}^{(1)} = 1-\alpha \text{ en } f_{11}^{(t)} = \alpha\beta(1-\beta)^{t-2} \text{ voor } t = 2, 3, \dots.$$

c. Bereken met de in onderdeel b verkregen getallen $\sum_{t=1}^{\infty} t f_{11}^{(t)} = \mu_{11}$ en ga na dat $p_{11}^* = \frac{1}{\mu_{11}}$.

1.6 Opgaven

Opgave 1.1 Beschouw onderling onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische variabelen Y_i, $i = 1, 2, \dots$, ieder met een discrete kansverdeling op $\{0, 1, 2, 3\}$ met kansen resp. $0.1, 0.3, 0.2$ en 0.4. Definieer $X_t = max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_t\}$ (d.w.z. de hoogst tot nu toe bereikte waarde van de Y_i's) en $X_0 = 0$. Toon aan dat $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ een Markov keten is en bepaal de overgangsmatrix.

Opgave 1.2 Beschouw het volgende model (*diffusiemodel van Ehrenfest*).[9]

Twee vaten, A en B, bevatten samen N moleculen. Vlak voor tijdstip t ($t = 1, 2, \dots$) wordt aselect één van deze moleculen gekozen en van het vat waarin het zich bevindt overgebracht naar het andere vat. Neem $S = \{0, 1, \dots, N\}$, waarbij $i \in S$ correspondeert met i moleculen in vat A.

[9] P. Ehrenfest and T. Ehrenfest: *Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche H-Theorems*, Physikalische Zeitschrift 8 (1907) 311–314.

Zij X_t het aantal moleculen in vat A op tijdstip $t, t = 1, 2, \dots$.
Laat zien dat X_t $(t = 1, 2, \dots)$ een irreducibele Markov keten is en bepaal de overgangsmatrix.

Opgave 1.3 N witte en N zwarte ballen zijn zo over twee vazen verdeeld dat elke vaas N ballen bevat. We zeggen dat het systeem in toestand i is als de eerste vaas i witte ballen bevat $(0 \leq i \leq N)$.
Op elk tijdstip $t,\ t = 1, 2, \dots$ trekken we een willekeurige bal uit elke vaas en verwisselen we deze.
Zij X_t het aantal witte ballen in de eerste vaas op tijdstip $t,\ t = 1, 2, \dots$.
Laat zien dat X_t $(t = 1, 2, \dots)$ een Markov keten is en bepaal de overgangsmatrix.

Opgave 1.4 Bij het vertrekpunt van een skilift komt op elk van de tijdstippen $t = 0, 1, \dots$ een éénpersoonsstoeltje langs. Voor $t = 1, 2, \dots$, zij Y_t het aantal personen dat met de lift mee wil en in tijdvak $(t-1, t]$ bij de lift aankomt. We veronderstellen dat $Y_1, Y_2, \dots$ onderling onafhankelijke identiek verdeelde stochastische variabelen zijn met $p_k = \mathbb{P}\{Y_t = k\},\ k \geq 0,\ t \geq 1$.
Neem voor X_t het aantal personen dat op tijdstip t bij de lift aanwezig is, met inbegrip van de eventuele klant die op dat moment in het langskomende stoeltje gaat zitten.
Toon aan dat $\{X_t,\ t = 0, 1, \dots\}$ een Markov keten is en bepaal de overgangskansen.

Opgave 1.5 Zij $Y_1, Y_2, \dots$ onderling onafhankelijke identiek verdeelde stochastische variabelen op $\{+1, -1\}$ met $\mathbb{P}_{Y_1=+1} = p$, waarbij $0 < p < 1$. Laat $X_n = Y_n Y_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$.
a. Bepaal de kansverdeling van $X_n,\ n \in \mathbb{N}$.
b. Als $p = \frac{1}{2}$, dan is $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ een Markov keten. Toon dit aan.
c. Als $p \neq \frac{1}{2}$, dan is $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ geen Markov keten. Toon dit aan door te laten zien dat $\mathbb{P}\{X_3 = 1 \mid X_1 = 1, X_2 = 1\} \neq \mathbb{P}\{X_3 = 1 \mid X_1 = -1, X_2 = 1\}$.

Opgave 1.6 Veronderstel dat klanten bij een loket arriveren met tussentijden die onderling onafhankelijk zijn en een continue verdeling met dichtheid $f(x)$ hebben. We veronderstellen dat de klanten aan het loket worden geholpen gedurende een stochastische tijdsduur die onafhankelijk is van de klant en een exponentiële verdeling met parameter μ heeft.
Maak een ingebedde Markov keten door als discreet tijdstip t_n het aankomsttijdstip van de n-de klant te nemen $(n = 1, 2, \dots)$ en voor de toestand X_n het aantal klanten te nemen dat aanwezig is vlak voor de aankomst van de n-de klant (neem $t_0 = 0$ en $X_0 = 0$).
Leid het volgende af:

a. $X_{n+1} = X_n + 1 - B_n$ met B_n het aantal klanten dat bediend wordt in het interval $[t_n, t_{n+1})$.

b. $p_k = \mathbb{P}\{B_n = k\} = \int_0^\infty e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^k}{k!} f(x) dx,\ k = 0, 1, \dots$.
Aanwijzing: Conditioneer naar $T = x$ met T de tussentijd van de aankomsten,
d.w.z. gebruik dat $\mathbb{P}\{B_n = k\} = \int_0^\infty \mathbb{P}\{B_n = k \mid T = x\} f(x) dx$.

c. De overgangskansen van de Markov keten voldoen aan:

$$p_{ij} = \begin{cases} p_{i+1-j} & \text{als } i \geq 0,\ 1 \leq j \leq i+1; \\ 1 - \sum_{j=0}^{i} p_j & \text{als } i \geq 0,\ j = 0; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Opgave 1.7 Toon aan dat voor een Bernoulli wandeling op $\mathbb{Z}_+$ met 0 een absorberende toestand geldt:

$$f_{i0} = \begin{cases} 1 & \text{als } p \le \frac{1}{2} \\ (\frac{q}{p})^i & \text{als } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Aanwijzing: Introduceer $u_i(n) = \mathbb{P}\{X_t$ bereikt toestand 0 vóór toestand $n \mid X_0 = i\}$, stel een recurrente betrekking voor $u_i(n)$ op en los deze op. Gebruik tenslotte de relatie tussen f_{i0} en $u_i(n)$.

Opgave 1.8 Bewijs dat als $i \leftrightarrow j$ en j positief recurrent is, dan is $\mu_{ij} < \infty$.

Opgave 1.9 Een zuivere munt wordt opgegooid totdat twee keer achter elkaar "kop" of twee keer achter elkaar "munt" verschijnt (dan wordt gestopt).

a. Wat is het verwachte aantal worpen?

b. Als de eerste worp "kop" oplevert, wat is dan de kans dat wordt gestopt met twee keer achter elkaar "munt"?

Opgave 1.10 Een zuivere munt wordt opgegooid. Als "kop" wordt gegooid dan noteren we dat met K en als munt wordt gegooid met M. We gaan door met gooien totdat òf de combinatie MMK verschijnt òf de combinatie MKK.

Wat is de kans dat we eindigen met de combinatie MMK?

Opgave 1.11 Beschouw de volgende overgangsmatrix met toestanden $\{1, 2, \ldots, 9\}$ (op plaats met * staat voor een positief getal):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & * & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de transiënte toestanden en de recurrente klassen, en geef voor iedere recurrente klasse de periode.

Opgave 1.12 Beschouw de volgende overgangsmatrix met toestanden $\{1, 2, \ldots, 9\}$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal voor iedere toestand de kans om in toestand 8 te absorberen.

Opgave 1.13 Beschouw een Markov keten met $S = \{0, 1, 2, 3\}$, die start in toestand 1, en de volgende overgangsmatrix heeft:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de verwachte tijd die het proces in toestand 1 verblijft voordat absorptie optreedt.

b. Bepaal de verwachte tijd die het proces in toestand 2 verblijft voordat absorptie optreedt.

Opgave 1.14 Beschouw een Markov keten met $S = \{0, 1, 2\}$, die start in toestand 0, en de volgende overgangsmatrix heeft:

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wat is de kans dat, als de keten toestand 2 bereikt, dit gebeurt via een overgang uit toestand 1?

Opgave 1.15 Zij j een transiënte toestand.
Bewijs dat $\mathbb{P}\{X_t = j \text{ voor oneindig veel waarden van } t \mid X_0 = i\} = 0$ voor alle $i \in S$.
Aanwijzing:
Neem een $i \in S$ en laat $N(j)$ het aantal bezoeken aan toestand j zijn als gestart wordt in i en gebruik dat $N(j) = \sum_{t=1}^{\infty} Y_t$ met $Y_t = \begin{cases} 1 & \text{als } X_t = j, \text{ gegeven } X_0 = i \\ 0 & \text{als } X_t \neq j, \text{ gegeven } X_0 = i \end{cases}$

Opgave 1.16 Beschouw de Markov keten op $\mathbb{N}_0$ met de volgende overgangskansen:

$$p_{00} = 1;\ p_{ij} = \begin{cases} p & \text{als } j = i \\ q = 1 - p & \text{als } j = i - 1 \end{cases} \quad \text{voor } i \geq 1 \text{ en met } p \in (0, 1).$$

Bepaal $f_{i0}^{(t)}$ voor alle i en t en ga na dat $f_{i0} = \sum_{t=1}^{\infty} f_{i0}^{(t)} = 1$ voor alle i.

Opgave 1.17 Beschouw de Markov keten op $S = \{0, 1, \dots, N\}$ met de volgende overgangskansen:

$$p_{00} = p_{NN} = 1;\ p_{ij} = \begin{cases} p & \text{als } j = 0 \\ q & \text{als } j = i \\ r & \text{als } j = i+1 \end{cases} \quad \text{voor } i = 1, 2, \dots, N-1, \text{ waarbij } p, q, r \in (0,1) \text{ en met}$$

$p + q + r = 1$.

Bepaal f_{iN} en f_{i0} voor alle i.

Opgave 1.18 Een gokker heeft een oneindige hoeveelheid geld tot zijn beschikking.
Hij beslist om op twee machines op de volgende wijze te gokken.
Hij gebruikt machine A bij elke oneven poging en machine B bij elke even poging.
De machines hebben de volgende eigenschappen:
- elke poging kost 1 euro;
- machine A betaalt 2 euro uit met kans p en niets met kans $q = 1 - p$, waarbij $0 < p < 1$;
- machine B betaalt 2 euro uit met kans r en niets met kans $s = 1 - r$, waarbij $0 < r < 1$.

a. Modelleer de totale hoeveelheid gewonnen c.q. verloren kapitaal op elke dag als een Markov keten (aanwijzing: neem de eigenschap oneven of even in de toestandsruimte op).
Beschrijf de overgangskansen en geef de equivalentieklassen en de corresponderende perioden.
b. Veronderstel dat hij met 2 euro begint op machine A en stopt als hij failliet is ofwel een kapitaal van 5 euro bezit. Wat is de kans (als functie van p en r) dat hij met 5 euro eindigt?

Opgave 1.19 Bewijs de in Voorbeeld 1.7 genoemde eigenschap, die luidt:
Als $0 < p_t < 1$ voor alle $t \geq 0$, dan is $\prod_{t=0}^{\infty} (1 - p_t) > 0$ d.e.s.d. als $\sum_{t=0}^{\infty} p_t < \infty$.

Opgave 1.20 Een overgangsmatrix heet *dubbelstochastisch* als ook de kolomsommen gelijk zijn aan 1. Bepaal de stationaire matrix van een irreducibele dubbelstochastische overgangsmatrix met eindig veel toestanden.

Opgave 1.21 Beschouw een stochastische wandeling op $\{0, 1, \dots, N\}$ met 0 en N als 'terugkaatstoestanden', d.w.z. met overgangsmatrix ($0 < p_i = 1 - q_i < 1$ voor alle i):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de stationaire kansverdeling.

Opgave 1.22 Beschouw een Markov keten met $S = \{1, 2, \ldots, 6\}$ die de volgende overgangsmatrix heeft, waarbij $\alpha_i \geq 0$ voor alle i en $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_6 = 1$):

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bepaal π_1, de stationaire kans kans dat het systeem zich in toestand 1 bevindt.

Opgave 1.23 Beschouw een overgangsmatrix P met stationaire matrix P^* en laat $Z = P - P^*$. Bewijs dat $Z^n = P^n - P^*$ voor alle $n \geq 1$.

Opgave 1.24 Beschouw een computersysteem dat (op een willekeurige dag) met kans p stuk gaat ($0 < p < 1$). Veronderstel dat de reparatietijd stochastisch is en dat de kans dat de volgende dag het systeem gerepareerd is gelijk is aan β ($0 < \beta < 1$); als het systeem de volgende dag niet gerepareerd is dan is kans dat het systeem de daaropvolgende dag gererareerd is weer gelijk aan β, etc.)
Bepaal de kans, als functie van p en β, dat de computer werkt op een ver in de toekomst gelegen dag.

Opgave 1.25 Veronderstel dat een vlo op ieder tijdstip $t = 0, 1, \ldots$ in één van de acht hoekpunten van een kubus zit. Op ieder tijdstip maakt de vlo een sprong en gaat met gelijke kansen van $1/3$ naar een aangrenzend hoekpunt. Noemen we het hoekpunt waar de vlo op tijdstip t zit X_t, dan is $\{X_t \mid t = 0, 1, \ldots\}$ een eindige stationaire Markov keten.
a. Toon aan dat deze keten irreducibel is en bepaal de periode.
b. Bepaal de unieke stationaire kansverdeling van deze keten.
c. Kies één van de hoekpunten. Bepaal de terugkeertijd en de eerste doorkomsttijden
van de andere hoekpunten naar dit hoekpunt.

Opgave 1.26 Beschouw een Markov keten met $S = \{1, 2, 3, 4\}$, die de volgende overgangsmatrix heeft:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de stationaire kansverdeling.
b. Zij T de tijdsduur om, als we starten in toestand 1, voor het eerst in toestand 1 terug te keren. Bepaal de verwachting en variantie van T.

Opgave 1.27 Bij de fabricage van leren tassen beschouwen we het volgende deel van het productieproces. Na het snijden en het stikken van het leer gaat de tas naar een verfbad om daar de gewenste kleur te krijgen. In 80% van de gevallen gaat de tas direct naar het verfbad en in 20% van de gevallen krijgt de tas eerst een voorbehandeling (omdat anders de kwaliteit van het leer onvoldoende garantie biedt voor voldoende hechting van de verf). Tijdens de voorbehandeling wordt 10% van de tassen afgekeurd; van de tassen die het verfbad ondergaan wordt nog eens 10% afgekeurd, is 70% goed en is 20% nog niet goed. Van deze laatste 20% doorloopt een kwart nogmaals het verfbad, terwijl de overige driekwart eerst weer een voorbehandeling krijgt.
a. Modelleer dit proces als een Markov keten. Geef de toestandsruimte en de overgangsmatrix. Bepaal de recurrente klassen en de verz. van de transiënte toestanden.
b. Neem aan dat het snijden en stikken van het leer 6 minuten vergt en de voorbehandeling zowel als het verfbad 2 minuten. Hoe groot is de kans dat een tas in 10 of minder minuten klaar is en niet is afgekeurd?
c. Hoe groot is de kans dat een tas uiteindelijk wordt afgekeurd?
d. Hoe lang bevindt een tas zich gemiddeld in het productieproces?
e. Neem aan dat de kosten van het snijden en stikken, de voorbehandeling en het verfbad resp. 10, 2 en 7 euro bedragen. Wat zijn de gemiddelde kosten van één tas?
f. Welke prijs zal de fabrikant minstens voor een tas moeten vragen om geen verlies te leiden?

Opgave 1.28
Beschouw een stochastische wandeling op $\mathbb{N}_0$ met $p_{i,i-1} = 1,\ i \geq 1$ en $p_{0,i} = p_i > 0$ voor alle $i \geq 0$, waarbij $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ en $\sum_{i=0}^{\infty} ip_i < \infty$.
Toon aan dat deze Markov keten irreducibel, aperiodiek en positief recurrent is.
Bepaal eveneens de stationaire verdeling.

Opgave 1.29 Beschouw de generende functies $f_{ij}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n$ en $p_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^n$.
a. Toon aan dat voor $i \neq j$ geldt: $p_{ij}(z) = f_{ij}(z)p_{jj}(z)$.
b. Toon aan dat $p_{ii}(z) = \frac{1}{1-f_{ii}(z)}$.
c. Toon aan dat voor $i \neq j$ geldt: $\lim_{z\to 1} (1-z)p_{ij}(z) = \frac{f_{ij}}{\mu_{jj}}$.
d. Toon aan dat $\lim_{z\to 1} (1-z)p_{ii}(z) = \frac{1}{\mu_{ii}}$.

Opgave 1.30 Beschouw een Bernoulli-wandeling op $\mathbb{N}_0$ met $p_{0,1} = 1;\ p_{i,i+1} = p_i,\ p_{i,i-1} = q_i = 1 - p_i,\ i \geq 1$, waarbij $0 < p_i < 1$ voor alle $i \geq 1$.
a. Toon aan dat deze keten irreducibel is en bepaal de periode.
b. Ga na wanneer deze keten positief recurrent is en bepaal dan de stationaire kansverdeling.
c. Vereenvoudig de in onderdeel b gevonden resultaten voor het geval dat $p_i = p$ voor alle $i \geq 1$.

Opgave 1.31
Beschouw een Markov keten op $\mathbb{N}_0$ met $p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i+2} & \text{als } 0 \leq j \leq i+1 \\ 0 & \text{als } j > i+1 \end{cases}$, voor alle $i \in \mathbb{N}_0$.
Bepaal de stationaire kansverdeling van deze keten.

Opgave 1.32 Toon voor de Bernoulli-wandeling op $\mathbb{Z}$ met $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}$ voor alle $i \in \mathbb{Z}$ aan dat deze Markov keten irreducibel en 0-recurrent is.

Opgave 1.33 Toon Stelling 1.19 aan.

Opgave 1.34 Toon Stelling 1.20 aan.

Opgave 1.35 In een fabriek van halfgeleiders vindt het volgende productieproces plaats: op ruwe plakken silicium worden in 3 productiefasen halfgeleiders aangebracht, ongeveer 10.000 per plak. De tijd die nodig is per productiefase is 2 dagen. Na elke fase is een meetpunt. Alle plakken worden gemeten. Bij elke meting blijkt er een positieve kans te zijn dat de laatst uitgevoerde fase overgedaan moet worden. Ook is er na de tweede en derde fase een bepaalde kans dat de plak helemaal opnieuw moet beginnen. Deze kansen staan in de volgende matrix gegeven; hierbij representeren toestanden I,II en III fasen 1, 2 en 3 respectievelijk.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{klaar} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{klaar} \end{array} & \begin{pmatrix} 4/10 & 6/10 & 0 & 0 \\ 2/10 & 2/10 & 6/10 & 0 \\ 2/10 & 0 & 2/10 & 6/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) De fases waarin een plak zich achtereenvolgens bevindt, vormen een Markovketen. Bepaal de klassen van deze Markovketen en of zij transiënt, dan wel positief of nul-recurrent zijn.

b) Bereken de verwachte doorlooptijd van een plak (i.e. de verwachte tijd die een plak in het productieproces doorbrengt).

We veronderstellen dat bij elk meetpunt een bepaalde kans is dat de plak definitief wordt afgekeurd (gegeven dat een plak niet wordt afgekeurd blijven de overgangskansen naar de verschillende productie fasen gelijk). Laten deze afkeurkansen in fases I, II en III resp. 1/10, 1/10 en 3/10 zijn.

c) Bereken de kans dat een plak definitief wordt afgekeurd.

d) Wat is het aantal vergeefse productiehandelingen per plak (dus gegeven dat de plak wordt afgekeurd).

Opgave 1.36 Bekijk de volgende vorm van Stelling 1.20.

Laat $j \in \boldsymbol{S}$ gegeven zijn. Laat $S' \subset \{i \,|\, f_{ij} = 1\}$ een gesloten verzameling toestanden zijn.

i) $(\mu_{ij})_{i \in S'}$ de minimale, niet negatieve oplossing in $(\mathbf{R} \cup \{\infty\})^{|S'|}$ van het stelsel vergelijkingen

$$x_i = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} x_k, \quad i \in S'.$$

ii) Als S' een eindige klasse, dan is de oplossing eindig en uniek voor iedere $j \in S'$.

iii) Als het stelsel een eindige oplossing heeft, dan is j positief recurrent.

a) Bewijs deze stelling.

b) Bedenk een voorbeeld, waarbij bovenstaand stelsel voor gegeven toestand j, een oplossing heeft met zowel eindige als oneindige waarden.

Opgave 1.37 Bewijs Gevolg 1.14.

Opgave 1.38 We beschouwen een productielijn van flesjes bier bij Heineken. De flesjes ondergaan achtereenvolgens de volgende drie bewerkingen: I de flesjes worden gevuld en van dop voorzien, II gevulde flesjes worden gestickerd, III de flesjes worden in kratten gepakt. In elk fase is er een positeive kans op breuk. Een flesje breekt met kans 0,1 tijdens fase I, met kans 0,16 in fase II en met kans 0,2 in fase III.
Na fases I en II worden niet-gebroken flesjes geïnspecteerd: de kans dat een niet-gebroken flesje na fase I opnieuw door het proces moet, is 0,1, en derhalve 0,9 dat het flesje door mag naar fase II. Na fase II is de kans voor een niet-gebroken flesje eveneens $0,1$ dat het stickeren fout is gegaan en opnieuw moet worden gedaan.
Er zijn teven kostens verbonden aan het uitvoeren van de verschillende fasen. Fase I kost 2 (eenheid), fase II ook 2, en fase III kost 1. Elk gebroken flesje kost 5.

a) De achtereenvolgende fasen waarin een flesje zich bevindt, vormen een Markovketen. Bepaal de klassen van deze Markovketen en of zij transiënt, positief recurrent of nul recurrent zijn. Bereken de stationaire matrix P^*.

b) Bereken de verwachte kosten per flesje.

c) Bereken de verwachte kosten per gebroken flesje.

d) Heineken denkt erover de breukgevoeligheid te verbeteren, door machines aan te schaffen die de breukkans halveren (de overgangskansen voor een niet-gebroken flesje blijven natuurlijk dezelfde!). Dit vereist een investering van 10^6. Hoeveel flesjes moet Heineken *in verwachting produceren (sic!)* om de kosten van deze investering terug te hebben verdiend?

Hoofdstuk 2

VERNIEUWINGSTHEORIE

2.1 Inleiding

Een Poissonproces is een proces, waarbij de tussentijden onafhankelijke identiek verdeelde stochastische variabelen zijn met als verdelingsfunctie de exponentiële verdeling. Een vernieuwingsproces is algemener dan een Poissonproces.
Een vernieuwingsproces is gebaseerd op een rij $\{X_n,\, n = 1, 2, \dots\}$ van niet-negatieve onafhankelijke identiek verdeelde stochastische variabelen zijn met verdelingsfunctie $F(x) = \mathbb{P}\{X_n \leq x\}$. Voor de verwachting van X_n bestaat een mooie expressie.

Lemma 2.1 *Veronderstel dat X_n een dichtheid $f(x), x \geq 0$ heeft. Dan geldt $\mu = \mathbb{E}\{X_n\} = \int_0^\infty \{1 - F(x)\} dx > 0$ (eventueel $\mu = \infty$).*

Bewijs $\mu = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty f(x) \{\int_0^x dy\} dx = \int_0^\infty \{\int_y^\infty f(x) dx\} dy = \int_0^\infty \{1 - F(x)\} dx > 0.$ $\square$

N.B. Een analoge uitdrukking geldt ook als X_n een discrete verdeling heeft, zie Vraag 2.2.
Definieer nu $S_0 = 0,\ S_n = \sum_{i=1}^n X_i,\, n \geq 1$. We kunnen inzicht krijgen in het gedrag van S_n voor grote waarden van n door de volgende limietstelling: [1]

Stelling 2.2 *Sterke wet van de grote aantallen*
Laat $X_i,\ i = 1, 2, \dots$ een collectie onderling onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische variabelen zijn met verwachting μ. Dan geldt dat met kans 1:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \to \mu \quad \textit{als } n \to \infty. \tag{2.1.1}$$

Het *vernieuwingsproces* $\{N(t),\ t \geq 0\}$ bij $\{X_n,\, n = 1, 2, \dots\}$ is het proces dat het aantal gebeurtenissen telt dat plaatsvindt in tijdsduur t, d.w.z

$$N(t) = \sup\{n \mid S_n \leq t\},\, t \geq 0.$$

[1]Voor een bewijs zie S.M. Ross, *A first course in probability*, Macmillan Publishing Co (1976) 258-262.

Voorbeeld 2.1

Beschouw een apparaat dat kapot kan gaan. Laat Y de stochastische levenduur van het apparaat zijn met verdelingsfuncte $G(x)$. Het apparaat wordt vervangen door eenzelfde apparaat als het stuk gaat of na een bepaalde vaste tijd T. Dit leidt tot een vernieuwingsproces met tussentijden X_n, waarbij $X_n = \min(Y_n, T)$, met Y_n de levensduur van het n-de apparaat.

Voor de verdelingsfunctie $F(x)$ van X_n geldt: $F(x) = \begin{cases} G(x) & \text{voor } x < T \\ 1 & \text{voor } x \geq T \end{cases}$

Voor de verwachting van X geldt nu volgens Lemma 2.1

$$\mathbb{E}\{X_n\} = \int_0^\infty \{1 - F(x)\}dx = \int_0^T \{1 - G(x)\}dx.$$

Voorbeeld 2.2

Beschouw een rij onafhankelijke stochastische variabelen $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ die geometrisch verdeeld zijn met parameter p, d.w.z. $\mathbb{P}\{X_n = i\} = p(1-p)^{i-1}$, $i \geq 1$. Iedere X_n heeft dus als interpretatie het aantal experimenten nodig voor het eerste 'succes' als ieder experiment kans p op succes heeft. S_n is dan het aantal experimenten nodig voor n successen. Omdat vernieuwingen onafhankelijk gebeuren en ieder experiment kans p op succes heeft, geldt:

$$\mathbb{P}\{N(t) = n\} = \binom{\lfloor t \rfloor}{n} p^n (1-p)^{\lfloor t \rfloor - n},\ t \geq 1 \text{ en } 0 \leq n \leq \lfloor t \rfloor.$$

Natuurlijke eisen zijn dat $N(t) < \infty$ met kans 1, en dat $N(t) \to \infty$, $t \to \infty$, met kans 1. Dit geldt onder de volgende aanname, die we in de rest van dit hoofdstuk zullen aannemen!

Aanname 2.1

$\mu := \mathbb{E}\{X_n\} > 0$, d.w.z. $F(0) < 1$.

Laat $t < \infty$ gegeven zijn. Dan volgt uit de Sterke Wet van de grote aantallen dat met kans 1 $S_n \leq t$ voor slechts eindig veel waarden van n. Veronderstel namelijk dat dit niet zo is. Dan is $\mathbb{P}\{S_n \leq t, \forall n\} > 0$. We schrijven

$$\{S_n \leq t, \forall n\} = \{\frac{S_n}{n} \leq \frac{t}{n}, \forall n\} = \cap_{n \geq 1}\{\frac{S_n}{n} \leq \frac{t}{n}\} \subset \{\limsup_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = 0\}.$$

De kans op het rechterlid is 0. Hieruit volgen de twee gewenste eigenschappen, dat $N(t) < \infty$ met kans 1 en dat $N(t) \to \infty$ als $t \to \infty$.

We zeggen ook wel dat het proces $\{N(t), t \geq 0\}$ gegenereerd wordt door de *tussentijden* $X_1, X_2, \dots$. De n-de *vernieuwing* vindt plaatsop tijdstip t als $S_n = t$. Omdat de tussentijden X_n onafhankelijk en identiek verdeeld zijn, start bij iedere vernieuwing het proces in feite opnieuw. Dit geeft de volgende interpretaties:

X_n is de tijd tussen $(n-1)$-ste en n-de vernieuwing;

S_n is het tijdstip van de n-de vernieuwing;

$N(t)$ is het aantal vernieuwingen in het interval $[0, t]$.

Omdat $N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t$, geldt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{N(t) = n\} &= \mathbb{P}\{N(t) \geq n\} - \mathbb{P}\{N(t) \geq n+1\} \\ &= \mathbb{P}\{S_n \leq t\} - \mathbb{P}\{S_{n+1} \leq t\} = F_n(t) - F_{n+1}(t), \end{aligned}$$

waarbij F_n de verdelingsfunctie van S_n is.

Laat $m(t) = \mathbb{E}\{N(t)\}$, d.w.z. $m(t)$ is het verwachte aantal vernieuwingen in $[0, t]$, dat heet $m(t)$ de *vernieuwingsfunctie*. De relatie tussen $m(t)$ en $F_n(t)$ wordt gegeven in het volgende lemma.

Lemma 2.3 $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$, $t \geq 0$.

Bewijs Kies een $t \geq 0$.
$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ met $A_n = \begin{cases} 1 & \text{als de } n\text{-de vernieuwing plaatsvindt in } [0,t] \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$
$\mathbb{E}\{N(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\{A_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_n = 1\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{S_n \leq t\} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$. $\square$

Voorbeeld 2.3
Beschouw een vernieuwingsproces met tussen tijden die uniform zijn verdeeld op $[0, 1]$. Voor de dichtheid f van de verdelingsfunctie geldt dus $f(x) = 1,\ 0 \leq x \leq 1$. We gaan $m(t)$ bepalen voor $0 \leq t \leq 1$. $F_1(t) = t$ en met inductie zullen we bewijzen dat $F_n(t) = \frac{t^n}{n!}$. Merk op dat $S_n = S_{n-1} + X_n$, zodat we volgens de *convolutieregel*[2] en de inductieveronderstelling vinden dat

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(x) f(t-x) dx = \int_0^t \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} dx = \frac{t^n}{n!}.$$

Hieruit volgt

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t - 1,\ 0 \leq t \leq 1.$$

De gemiddelde tijdsduur van een vernieuwing is 0.5 (uniform verdeeld op $[0, 1]$) en het verwachte aantal vernieuwingen in het interval $[0, 0.5]$ is dus $e^{0.5} - 1 = 0.6487$.

In het volgende lemma tonen we aan dat $m(t)$ eindig is voor iedere t. Dit volgt niet automatisch uit het feit dat $N(t)$ met kans 1 eindig is. Beschouw immers een stochastische variabele Y die met kans $\frac{1}{2^n}$ gelijk is aan 2^n voor $n \geq 1$. Hiervoor geldt:

$$\mathbb{P}\{Y < \infty\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{Y = 2^n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

terwijl

$$\mathbb{E}\{Y\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{Y = 2^n\} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Lemma 2.4 $m(t) < \infty$ *voor alle* $t \geq 0$.

[2] zie: H.C. Tijms, *A first course in stochastic modeling*, Wiley (2003) p. 434.

Bewijs Omdat per aanname $\mathbb{P}\{X_n = 0\} < 1$, is er een $\alpha > 0$ is zdd. $\mathbb{P}\{X_n \geq \alpha\} > 0$.

Definieer een nieuw proces $\{X_n^*\}, n \geq 1$ door:

$$X_n^* = \begin{cases} 0 & \text{als } X_n < \alpha \\ \alpha & \text{als } X_n \geq \alpha \end{cases} \quad \text{met } N^*(t) = \sup\{n | S_n^* \leq t\}, \text{ waarbij } S_n^* = \textstyle\sum_{i=1}^n X_i^*,\ n \geq 1.$$

In dit nieuwe proces kunnen vernieuwingen alleen plaatsvinden op tijden $t = m\alpha$, $m \in \mathbb{N}_0$.
Laat $p = \mathbb{P}\{X_n \geq \alpha\}$, dan is het aantal vernieuwingen op ieder van deze equidistante tijdstippen een stochastische variabele die geometrisch verdeeld is met parameter p, zodat het verwachte aantal vernieuwingen gelijk is aan $\frac{1}{p} = \frac{1}{\mathbb{P}\{X_n \geq \alpha\}}$. Hieruit volgt:

$$\mathbb{E}\{N^*(t)\} \leq \frac{\lfloor \frac{t}{\alpha} \rfloor + 1}{\mathbb{P}\{X_n \geq \alpha\}} < \infty.$$

Omdat $X_n^* \leq X_n$ voor alle n, geldt dat

$N(t) \leq N^*(t)$ voor alle t, waaruit volgt dat $m(t) = \mathbb{E}\{N(t)\} \leq \mathbb{E}\{N^*(t)\} < \infty$. □

Het berekenen van de vernieuwingsfunctie is in het algemeen een lastig probleem. Soms kan het direct, in § 2.3 wordt nog iets gezegd over mogelijke andere berekeningsmethoden.

Voorbeeld 2.4 *Poisson proces*
We berekenen $m(t)$ rechtstreeks uit de definitie $m(t) = \mathbb{E}\{N(t)\}$. Het Poisson proces is een vernieuwingsproces met X_n een exponentieel verdeelde stochastische variabele met parameter λ, d.w.z. met verdelingsfunctie $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$.

Voor de verdelingsfunctie $F_n(t)$ van S_n geldt:[3]

$$F_n(t) = \mathbb{P}\{S_n \leq t\} = \mathbb{P}\{N(t) \geq n\} = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!},$$

zodat

$$\mathbb{P}\{N(t) = n\} = \mathbb{P}\{N(t) \geq n\} - \mathbb{P}\{N(t) \geq n+1\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} m(t) &= \mathbb{E}\{N(t)\} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{N(t) = n\} \cdot n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{N(t) = n\} \cdot n \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = (\lambda t)\, e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \lambda t. \end{aligned}$$

Vervolgens laten we zien hoe $m(t)$ berekend kan worden via de relatie $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$.

$$\begin{aligned} m(t) &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = e^{-\lambda t} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{j} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda t} \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{(j-1)!} = \lambda t\, e^{-\lambda t} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} = \lambda t. \end{aligned}$$

Opmerking
In § 2.3 wordt aangetoond dat er een ééneénduidig verband is tussen $F(t)$ en $m(t)$. Het Poisson proces is dientengevolge het enige proces met een lineaire vernieuwingsfunctie.

[3] Voor het bewijs zie S.M. Ross, *Introduction to probability models* 7th edition, Academic Press (2000).

Voorbeeld 2.5

Beschouw een vernieuwingsproces $\{N(t),\, t \geq 0\}$, waarvan de tussentijden een Gamma-verdeling met parameter (r, λ) hebben, d.w.z. dat de tussentijden een dichtheid

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}$$

hebben. Deze tussentijden zijn te beschouwen als de tijden na $r, 2r, 3r, \ldots$ aankomsten van een Poisson proces met parameter λ (zie Opgave 2.5). Hiervoor geldt dus:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{N(t) \geq n\} &= \mathbb{P}\{\text{in het Poisson proces zijn er } nr \text{ of meer aankomsten}\} \\ &= \textstyle\sum_{j=nr}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Voor de vernieuwingsfunctie $m(t)$ geldt (m.b.v. het resultaat uit Vraag 2.2):

$$\begin{aligned} m(t) &= \mathbb{E}\{N(t)\} = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{N(t) \geq n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=nr}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda t} \textstyle\sum_{j=r}^{\infty} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{j}{r} \rfloor} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = e^{-\lambda t} \sum_{j=r}^{\infty} \lfloor \frac{j}{r} \rfloor \frac{(\lambda t)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Merk op dat voor $r = 1$ geldt:

$$m(t) = e^{-\lambda t} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{(j-1)!} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} = \lambda t.$$

Vraag 2.1

Ga voor de volgende vragen na of ze waar zijn of niet:

a. $N(t) < n \Leftrightarrow S_n > t$.

b. $N(t) \leq n \Leftrightarrow S_n \geq t$.

c. $N(t) > n \Leftrightarrow S_n < t$.

Vraag 2.2

Bewijs dat voor een niet-negatieve geheeltallige stochastische variabele geldt

$$\mathbb{E}\{X\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{X \geq n\}.$$

Vraag 2.3

Beschouw een vernieuwingsproces $\{N(t),\, t \geq 0\}$ met vernieuwingsfunctie $m(t) = \frac{1}{2}t$.
Bepaal $\mathbb{P}\{N(5) = 0\}$.

2.2 Vernieuwingsvergelijking en Vernieuwingsstelling

Als we veronderstellen dat X_n een dichtheid $f(x)$, $x \geq 0$, heeft, kan voor $m(t)$ een integraalvergelijking worden afgeleid door te conditioneren naar het tijdstip van de eerste vernieuwing. Als de eerste vernieuwing plaatsvindt op tijdstip x, dan vernieuwt het proces zich vanaf dit tijdstip en is het verwachte aantal vernieuwingen $1 + m(t - x)$. Deze redenering geldt alleen voor $x \leq t$. Dit betekent dat

$$\mathbb{E}\{N(t) \mid X_1 = x\} = \begin{cases} 0 & x > t; \\ 1 + m(t-x) & x \leq t. \end{cases}$$

Hieruit volgt:

$$m(t) = \int_0^\infty \mathbb{E}\{N(t) \mid X_1 = x\} f(x)dx = \int_0^t \{1+m(t-x)\} f(x)dx = \int_0^t f(x)dx + \int_0^t m(t-x)f(x)dx,$$

zodat de volgende vergelijking geldt, de zogenaamde *vernieuwingsvergelijking*:

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)f(x)dx. \tag{2.2.1}$$

Omdat $t \mapsto m(t)$ een niet-dalende functie is, geldt dat $m(t)$ Riemann integreerbaar is, en bijna overal differentieerbaar (dit wordt preciezer gemaakt in het vak Maattheorie). Aannemende dat $m(t)$ overal differentieerbaar is, geldt er

$$\begin{aligned} m(t) &= F(t) + \int_0^t \int_0^{t-x} m'(u) du f(x) dx \\ &= F(t) + \int_0^t F(t-u) m'(u) du. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Dit is een speciaal geval van de zogenaamde **Key Renewal Theorem**.

Voorbeeld 2.3 (vervolg)
Veronderstel dat we een vernieuwingsproces hebben met X_n uniform verdeeld op $[0, 1]$. We zullen nu de vernieuwingsvergelijking oplossen voor $0 \leq t \leq 1$ met behulp van de vernieuwingsvergelijking. De integraal vergelijking luidt in dit geval:

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)f(x)dx = t + \int_0^t m(t-x)dx = t + \int_0^t m(y)dy,$$

de laatste gelijkheid via de substitutie $y = t - x$. Door bovenstaande vergelijking te differentiëren krijgen we

$$m'(t) = 1 + m(t).$$

Laat $h(t) = 1 + m(t)$, dan geldt: $h'(t) = h(t)$. Hieruit volgt $h(t) = K\, e^t$, zodat $m(t) = K\, e^t - 1$. Omdat $m(0) = 0$ is $K = 1$, waaruit volgt voor de vernieuwingsfunctie

$$m(t) = e^t - 1,\ 0 \leq t \leq 1.$$

We hebben gezien dat, met kans 1, $N(t) \to \infty$ als $t \to \infty$. We zullen nu onderzoeken hoe snel $N(t)$ naar oneindig gaat door $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}$ te bestuderen. In de volgende stelling wordt aangetoond dat, $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$, met kans 1, waarbij $\mu = \mathbb{E}\{X_n\}$.

Stelling 2.5 *Met kans 1 geldt:* $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$.

Bewijs Omdat $S_{N(t)}$ het tijdstip is van de laatste vernieuwing voor of op tijdstip t geldt

$$S_{N(t)} \leq t \leq S_{N(t)+1},$$

waaruit volgt

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}. \tag{2.2.3}$$

Uit de Sterke wet van de grote aantallen volgt, met kans 1, $\lim_{N(t)\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \mu$.

Omdat $N(t) \to \infty$ overeenkomt met $t \to \infty$ geldt eveneens met kans 1 dat $\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \mu$.

Verder kunnen we schrijven

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)},$$

zodat met kans 1 ook geldt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)+1}{N(t)} = \mu \cdot 1 = \mu.$$

Uit (2.2.3) volgt nu direct dat met kans 1 $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$. $\square$

Opmerkingen

1. Bovenstaande Stelling is ook waar als $\mu = \infty$. In dat geval moet voor $\frac{1}{\mu}$ de waarde 0 worden genomen.
2. Het getal $\frac{1}{\mu}$ heet de *snelheid* van het vernieuwingsproces.

Op grond van Stelling 2.5 verwacht je dat $m(t)/t \to \mu$, $t \to \infty$. Dit is veel lastiger te bewijzen. Daartoe hebben we het concept van stoptijden nodig.

Stoptijden en de vergelijking van Wald

Laat $X_1, X_2, \ldots$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn. Een geheeltallige, positieve stochastische variabele τ heet een *stoptijd* voor de rij $X_1, X_2, \ldots$ als de gebeurtenis $\tau = n$ onafhankelijk is van $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ voor alle $n = 1, 2, \ldots$.

Stelling 2.6 *(Vergelijking van Wald)*
Laat $X_1, X_2, \ldots$ een rij onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische variabelen zijn met $\mathbb{E}\{|X_1|\} < \infty$. Als τ een stoptijd is voor $X_1, X_2, \ldots$ met $\mathbb{E}\{\tau\} < \infty$, dan geldt

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{n=1}^{\tau} X_n\right\} = \mathbb{E}\{\tau\} \cdot \mathbb{E}\{X\}. \tag{2.2.4}$$

Bewijs Voor $Y_n = \begin{cases} 1 & \text{als } n \leq \tau \\ 0 & \text{als } n > \tau \end{cases}$ kunnen we schrijven $\sum_{n=1}^{\infty} X_n Y_n = \sum_{n=1}^{\tau} X_n$.

Hieruit volgt

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{n=1}^{\tau} X_n\right\} = \mathbb{E}\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n Y_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\{X_n Y_n\}.$$

De laatste verwisseling van verwachting en sommatie laat zich als volgt rechtvaardigen. Vervang allereerst alle X_n door $|X_n|$, in welk geval de verwisseling geoorloofd is op grond van de niet-negativiteit. Dit houdt echter in dat de oorspronkelijke verwisseling ook geoorloofd is op grond van de Stelling van gedomineerde convergentie.[4]

Omdat $Y_n = 0$ d.e.s.d. als $\tau \leq n-1$, en de eventualiteit $\tau \leq n-1$ niet afhangt van $X_n, X_{n+1}, \ldots$, wordt Y_n bepaald door $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ en is dus onafhankelijk van X_n. Dit geeft

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{\textstyle\sum_{n=1}^{\tau} X_n\right\} &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\{X_n\} \cdot \mathbb{E}\{Y_n\} = \mathbb{E}\{X\} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\{Y_n\} \\
&= \mathbb{E}\{X\} \cdot \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\tau \geq n\} = \mathbb{E}\{X\} \cdot \mathbb{E}\{\tau\},
\end{aligned}$$

de laatste gelijkheid volgens het resultaat dat in Vraag 2.2 wordt genoemd. □

Voorbeeld 2.6

Beschouw de rij $X_1, X_2, \ldots$ van onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische variabelen met

$$\mathbb{P}\{X_n = 0\} = \mathbb{P}\{X_n = 1\} = \tfrac{1}{2} \text{ voor alle } n,$$

zodat $\mathbb{E}\{X_n\} = \frac{1}{2}$ voor alle n. Laat

$$\tau = \min\{n \mid X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 10\},$$

dan geldt dat τ een stoptijd is.

Uit de vergelijking van Wald volgt

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{n=1}^{\tau} X_n\right\} = \mathbb{E}\{\tau\} \cdot \mathbb{E}\{X\} = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\{\tau\}.$$

Volgens de definitie van τ is $\mathbb{E}\left\{\sum_{n=1}^{\tau} X_n\right\} = 10$, zodat $\mathbb{E}\{\tau\} = 20$.

Beschouw vervolgens de rij $X_1, X_2, \ldots$ van onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische variabelen met

$$\mathbb{P}\{X_n = -1\} = \mathbb{P}\{X_n = 1\} = \tfrac{1}{2} \text{ voor alle } n,$$

zodat $\mathbb{E}\{X_n\} = 0$ voor alle n. Laat

$$\tau = \min\{n \mid X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 1\}.$$

Veronderstel dat de vergelijking van Wald geldt, d.w.z. dat

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{n=1}^{\tau} X_n\right\} = \mathbb{E}\{\tau\} \cdot \mathbb{E}\{X\} = 0.$$

Anderzijds volgt uit de definitie van τ dat

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{n=1}^{\tau} X_n\right\} = 1.$$

Dit betekent dat Wald's vergelijking niet geldt, dus moet $\mathbb{E}\{\tau\} = \infty$ zijn.

[4] Voor de Stelling van gedomineerde convergentie zie K.L. Chung, *A course in probability theory*, Harcourt (1968) p. 40, zie ook Hoofdstuk 4

We zullen de vergelijking van Wald toepassen in de vernieuwingstheorie. Daartoe hebben we een stoptijd nodig. $N(t)$ is hiervoor een natuurlijke kandidaat. Echter

$$N(t) = n \Leftrightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n \le t \text{ en } X_1 + X_2 + \cdots + X_{n+1} > t,$$

d.w.z. dat $N(t)$ afhankelijk is van X_{n+1} en dus geen stoptijd is. Daarentegen is $N(t)+1$ wel een stoptijd, omdat

$$N(t)+1 = n \Leftrightarrow N(t) = n-1 \Leftrightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} \le t \text{ en } X_1 + X_2 + \cdots + X_n > t.$$

$\mathbb{E}\{N(t)+1\} = m(t)+1 < \infty$ (volgens Lemma 2.4), zodat uit de vergelijking van Wald volgt

$$\mathbb{E}\{X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)+1}\} = \mathbb{E}\{X\} \cdot \mathbb{E}\{N(t)+1\}.$$

Hieruit volgt als $\mu < \infty$,

$$\mathbb{E}\{S_{N(t)+1}\} = \mu \cdot \{m(t)+1\}. \tag{2.2.5}$$

Voorbeeld 2.4 (vervolg)
Voor het Poissonproces geldt: $\mathbb{E}\{S_{N(t)+1}\} = \mu \cdot \{m(t)+1\} = \frac{1}{\lambda}(\lambda t + 1) = t + \frac{1}{\lambda}$. Dit is intuïtief duidelijk: vanwege de geheugenloosheid is $S_{N(t)+1} = t +$ de tijd tot de volgende gebeurtenis.

We hebben nu alle voorbereidingen gedaan om de Elementaire Vernieuwingsstelling te bewijzen.

Stelling 2.7 *(Elementaire Vernieuwingsstelling)* $\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$, *waarbij* $\frac{1}{\mu} = 0$ *als* $\mu = \infty$.

Bewijs Veronderstel eerst dat $\mu < \infty$. Omdat $S_{N(t)+1} \ge t$, is volgens (2.2.5)

$$\mu \cdot \{m(t)+1\} \ge t,$$

waaruit volgt

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \ge \frac{1}{\mu}.$$

We zullen nu bewijzen dat $\limsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \le \frac{1}{\mu}$, waarmee de stelling bewezen is.
Kies daartoe een willekeurige positieve constante M en definieer het afgeknotte vernieuwingsproces $\{X_n^*,\, n = 1,2,\ldots\}$ door

$$X_n^* = \begin{cases} X_n & \text{als } X_n \le M; \\ M & \text{als } X_n > M. \end{cases}$$

Laat

$$S_n^* = \textstyle\sum_{i=1}^n X_i^* \text{ en } N^*(t) = \sup\{n \mid S_n^* \le t\}.$$

Omdat de tussentijden X_n^* van het afgeknotte proces door M worden begrensd, geldt

$$S^*_{N^*(t)+1} \le t + M,$$

zodat volgens (2.2.5)

$$\mu^* \cdot \{m^*(t)+1\} \le t + M,$$

waarbij $\mu^* = \mathbb{E}\{X_n^*\}$. Hieruit volgt $\limsup_{t\to\infty} \frac{m^*(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu^*}$.

Aangezien $S_n^* \leq S_n$ voor alle n, is $N^*(t) \geq N(t)$ en dus ook $m^*(t) \geq m(t)$. Dit geeft

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{m^*(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu^*}.$$

Door $M \to \infty$ te laten gaan krijgen we $\limsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$.

Vervolgens beschouwen we het geval $\mu = \infty$ en nemen weer het afgeknotte proces.
Omdat $\mu^* \to \infty$ als $M \to \infty$ volgt het resultaat ook in dit geval. □

Opmerking

Op het eerste gezicht zou men kunnen denken dat de Elementaire Vernieuwingsstelling een direct gevolg is van Stelling 2.5 op grond van de volgende redenering: het gemiddeld aantal vernieuwingen convergeert naar $\frac{1}{\mu}$ als $t \to \infty$, dus convergeert het gemiddelde van het verwachte aantal vernieuwingen ook naar $\frac{1}{\mu}$. Het volgende voorbeeld toont aan dat we hiermee voorzichtig moeten zijn.

Beschouw een stochastische variabele U die homogeen verdeeld is op $[0, 1]$.

Definieer $Y_n(u) = \begin{cases} 0 & \text{als } u > \frac{1}{n} \\ n & \text{als } u \leq \frac{1}{n} \end{cases}$ and $Y(u) = 0$ voor alle u.

Dan convergeert Y_n met kans 1 naar Y, d.w.z. naar 0, want $\lim_{n\to\infty} Y_n(u) = 0 = Y(u)$ voor alle $u \in (0, 1)$. Anderzijds geldt $\mathbb{E}\{Y_n\} = n \cdot \mathbb{P}\{U \leq \frac{1}{n}\} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$ voor alle n.

Dus, ofschoon de rij Y_n naar 0 convergeert, convergeren de verwachtingen $\mathbb{E}\{Y_n\}$ niet naar 0.

Vraag 2.4 Laten $U_1, U_2, \ldots$ onafhankelijke homogene verdelingen zijn op $[0, 1]$ en definieer τ door:

$$\tau = \min\{n \mid U_1 + U_2 + \cdots + U_n > 1\}.$$

a. Bepaal $\mathbb{E}\{\tau\}$.

b. Bepaal de verwachte tijd vanaf $t = 1$ tot de volgende vernieuwing.

Vraag 2.5 Een spel met 52 kaarten wordt geschud en de kaarten worden één voor één open neergelegd.

Laat $X_n = 1$ als de n-de kaart een aas is en anders is $X_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots, 52$, d.w.z. dat $\mathbb{E}\{X_n\} = \frac{1}{13}$ voor alle n. Laat τ het aantal kaarten zijn dat geopend moet worden om alle azen te tonen: de vierde aas verschijnt als τ-de kaart.

Onderzoek of

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{n=1}^{\tau} X_n\right\} = \mathbb{E}\{\tau\} \cdot \mathbb{E}\{X_n\}.$$

Als deze gelijkheid niet geldt, wat is dan de reden?

2.3 Vernieuwingskansen en Laplace-Stieltjes transformatie

Vernieuwingskansen

We hebben gezien dat dat de gemiddelden $N(t)/t$ en $m(t)/t$ voor $t \to \infty$ naar μ^{-1} convergeren. Wat geldt er voor de kans dat je in een tijdinterval $[t, t+a)$ een vernieuwing ziet, voor grote waarden van t en gegeven waarde $a > 0$?
Dit belangrijke resultaat geven we zonder bewijs. Daartoe hebben we een definitie nodig. Stel dat $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ een vernieuwingsproces is, en F de verdelingsfunctie van X_n.

F heet *periodiek met periode* d als

1. $P\{X_n \in \{0, d, 2d, \dots\}\} = 1$;
2. d is de maximale waarde waarvoor (1) geldt.

Stelling 2.8 (Blackwell's stelling)

1. *Als F niet periodiek is dan geldt voor iedere constante $a \geq 0$ dat*
$$m(t+a) - m(t) \to a/\mu, \quad t \to \infty.$$
2. *Als F periodiek is met periode d dan geldt*
$$\mathbb{E}\{N(nd^+) - N(nd^-)\} \to d/\mu, \quad n \to \infty.$$

De Laplace transformatie

Zij F de verdelingsfunctie van een niet-negatieve stochastische variabele X met dichtheid f.
Dan wordt de *Laplace getransformeerde* F^* van F is gedefinieerd door:

$$F^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx \text{ voor } s \geq 0 \text{ (in dat geval bestaat de integraal).}$$[5]

De Laplace getransformeerde voldoet aan $F^*(s) = \mathbb{E}\{e^{-sX}\}$.

De Laplace transformatie kan ook worden gedefinieerd voor willekeurige functies g, gedefineerd op $[0, \infty)$, op de volgende manier:

$$g^*(s) = \textstyle\int_0^\infty e^{-sx} dg(x) \text{ voor } s \in \mathbb{C}, \text{ mits deze integraal bestaat.}$$

Uit de definitie van de Laplace getransformeerde is het volgende af te leiden: [6]

(1) Als $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$, dan is $F^*(s) = F_1^*(s) + F_2^*(s)$.

(2) Als $F(x) = \sum_{i=1}^\infty F_i(x)$, dan is $F^*(s) = \sum_{i=1}^\infty F_i^*(s)$, mits de bijbehorende integralen bestaan.

(3) $f^*(s) = sF^*(s) - F(0)$, als $f(x) = F'(x)$.

[5] Voor het bewijs zie: D.V. Widder, *An introduction to transform theory*, Academic Press, 1971.

[6] De bewijzen volgen direct uit de definitie van de Laplace getransformeerde of kunnen gevonden worden in Hoofdstuk XIII van W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, 1971.

(4) Als $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, waarbij S_n en X_i, $1 \leq i \leq n$, stochastische variabelen zijn met verdelingsfuncties resp. $F_n(x)$ en G_i, $1 \leq i \leq n$, en X_i, $i \geq 1$ zijn onderling onafhankelijk, dan is $F_n^*(s) = \prod_{i=1}^n G_i^*(s)$.
(5) De Laplace getransformeerde $F^*(s)$ bepaalt eenduidig de oorspronkelijke verdelingsfunctie F.

We hebben gezien hoe we uit een vernieuwingsproces een vernieuwingsfunctie kan worden afgeleid. We zullen nu laten zien dat een vernieuwingsfunctie eenduidig een vernieuwingsproces bepaalt omdat er een ééneénduidig verband is tussen $F(t)$ en $m(t)$.

Lemma 2.9 *Er is een ééneénduidig verband tussen $F(t)$ en $m(t)$.*

Bewijs $m(t) = \sum_{n=1}^\infty F_n(t)$, $t \geq 0$. Neem aan beide kanten de Laplace getransformeerden, dan geldt volgens de eigenschappen (2) en (4):

$$m^*(s) = \sum_{n=1}^\infty F_n^*(s) = \sum_{n=1}^\infty \{F^*(s)\}^n = \frac{F^*(s)}{1-F^*(s)},$$

waaruit volgt

$$F^*(s) = \frac{m^*(s)}{1+m^*(s)}.$$

Er is dus een ééneénduidig verband tussen $F^*(s)$ en $m^*(s)$, waaruit volgens eigenschap (5) volgt dat er een ééneénduidig verband is tussen $F(t)$ en $m(t)$. □

Opmerking

Voor de berekening van de vernieuwingsfunctie $m(t)$ wordt meestal één van de volgende vier methoden gebruikt:

a. Door middel van de definitie $m(t) = \mathbb{E}\{N(t)\} = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}\{N(t) = n\} \cdot n$, bijvoorbeeld in het geval $\mathbb{P}\{N(t) = n\}$ eenvoudig te bepalen is.

b. Via de relatie $m(t) = \sum_{n=1}^\infty F_n(t)$, bijvoorbeeld in het geval $F_n(t)$ eenvoudig te bepalen is.

c. Via Lemma 2.9: bepaal uit $F(t)$ de Laplace getransformeerde $F^*(s)$, daaruit de Laplace getransformeerde $m^*(s) = \frac{F^*(s)}{1-F^*(s)}$ en deze weer terugtransformeren naar $m(t)$.

d. Met behulp van de vernieuwingsvergelijking $m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)f(x)dx$

Voorbeeld 2.7 (Vervolg Poisson proces) De berekening van $m(t)$ met behulp van Laplace getransformeerden gaat als volgt:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \to \quad F^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)x}dx = \frac{\lambda}{s+\lambda}.$$

Hieruit volgt

$$m^*(s) = \frac{F^*(s)}{1-F^*(s)} = \frac{\frac{\lambda}{s+\lambda}}{1-\frac{\lambda}{s+\lambda}} = \frac{\lambda}{s}.$$

$m(t)$ moet nu worden opgelost uit

$$\frac{\lambda}{s} = \int_0^\infty e^{-sx}dm(x).$$

Omdat $\int_0^\infty e^{-sx}dx = \frac{1}{s}$, voldoet $m'(t) = \lambda$, en met $m(0) = 0$, geeft dit $m(t) = \lambda t$.

2.4 Vernieuwingsprocessen met opbrengsten

In veel modellen zijn er in het vernieuwingsproces opbrengsten of kosten. Stel dat er op het tijdstip van de n-de vernieuwing een opbrengst wordt ontvangen ter grootte R_n. R_n zal vaak afhangen van X_n, maar we veronderstellen dat de paren (X_n, R_n), $n \geq 1$, o.o. en identiek verdeeld zijn. De totale opbrengst tot tijdstip t is dan gegeven door

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n.$$

M.b.v. de volgende stelling kunnen de *de gemiddelde opbrengsten per tijdseenheid* $\lim_{t\to\infty} R(t)/t$ (over een oneindige horizon) en de *gemiddelde verwachte opbrengsten per tijdseenheid* $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\{R(t)\}/t$ berekend worden.

Stelling 2.10 *Als $\mathbb{E}\{|R_1|\}, \mathbb{E}\{X_1\} < \infty$ dan geldt*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}\{R_1\}}{\mathbb{E}\{X_1\}}, \qquad \textit{met kans 1} \tag{2.4.1}$$

en

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\{R(t)\}}{t} = \frac{\mathbb{E}\{R_1\}}{\mathbb{E}\{X_1\}}. \tag{2.4.2}$$

N.B. Voor $R_n \equiv 1$ reduceert dit tot het resultaat in Stellingen 2.5 en 2.7.

In Opgave 2.6 wordt gevraagd (2.4.1) te bewijzen.

Bewijs van Stelling 2.10, (2.4.2).
Neem eerst aan dat $R_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$.
$N(t) + 1$ is een stoptijd voor de rij stochasten $X_1, X_2, \ldots$ en dus ook voor de rij stochasten $R_1, R_2, \ldots$. Uit de vergelijking van Wald volgt dan

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^{N(t)} R_i\right\} &= \mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^{N(t)+1} R_i\right\} - \mathbb{E}\left\{R_{N(t)+1}\right\} \\
&= (m(t)+1)\,\mathbb{E}\{R_1\} - \mathbb{E}\left\{R_{N(t)+1}\right\}.
\end{aligned}$$

Dus geldt

$$\frac{\mathbb{E}\{R(t)\}}{t} \leq \frac{m(t)+1}{t}\,\mathbb{E}\{R_1\}.$$

Uit Stelling 2.7 volgt dat

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\{R(t)\}}{t} \leq \mathbb{E}\{R_1\} \limsup_{t\to\infty} \frac{m(t)+1}{t} = \frac{\mathbb{E}\{R_1\}}{\mathbb{E}\{X_1\}}.$$

Aan de andere kant geldt, met gebruikingmaking van het Lemma van Fatou en (2.4.1) dat

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\{R(t)\}}{t} = \liminf_{t\to\infty} \mathbb{E}\left\{\frac{R(t)}{t}\right\} \geq \mathbb{E}\left\{\liminf_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t}\right\} = \frac{\mathbb{E}\{R_1\}}{\mathbb{E}\{X_1\}}.$$

De stochastische vectoren (X_n, R_n^+), $n \geq 1$, zijn o.o. en identiek verdeeld. Verder geldt $\mathbb{E}\{R_n^+\} \leq \mathbb{E}\{|R_n|\} < \infty$. Dus voor deze rij geldt de uitspraak van de stelling. Analoog geldt dit voor de rij (X_n, R_n^-), $n \geq 1$. Dus geldt de uitspraak voor de rij $(X_n, R_n = R_n^+ - R_n^-)$, $n \geq 1$. $\square$

Voorbeeld 2.1 (vervolg)
Uit de elementaire vernieuwingsstelling volgt dat het gemiddelde verwachte aantal apparaten dat per tijdseenheid kapot gaat, gelijk is aan $1/\mathbb{E}\{X_n\}$. Stel dat te snel kapot gaan beboet wordt: de grootte van de boete is $R_n = T - X_n$ bij levensduur X_n. Gevraagd is de gemiddelde verwachte boetekosten per tijdseenheid.
Aannemende dat de levensduur van het apparaat een dichtheid $g(x)$, $x \geq 0$, heeft, geldt er $\mathbb{E}\{R_n\} = \int_0^T (T - x)g(x)dx$. Dus geldt

$$\frac{\mathbb{E}\{R(t)\}}{t} \to \frac{\int_0^T (T-x)g(x)dx}{\int_0^T (1-G(x))dx}, \quad t \to \infty.$$

N.B. Bij Stelling 2.10 hebben we verondersteld dat de opbrengsten op vernieuwingstijdstippen ontvangen worden. De uitspraken blijven geldig onder zekere voorwaarden als er ook opbrengsten ontvangen worden tussen de vernieuwingstijdstippen, door $R_n := R(S_n) - R(S_{n-1})$ te definiëren. De aannames van de stelling moeten wel van toepassing zijn op deze keuze van R_n. De extra voorwaarden zijn bijv. dat de opbrengsten naar boven (of naar onderen) met kans 1 begrensd zijn.

Voorbeeld 2.8 (Vervangingsmodel) Een onderdeel van een machine kan vervangen worden met kosten c_1. Als het onderdeel faalt, moet het vervangen worden en zijn de kosten c_2 ($c_2 > c_1$). De strategie die we willen gebruiken, is een vervangingsregel die de leeftijd van het onderdeel gebruikt. De kritieke–grens–s–regel vervangt het onderdeel, als de leeftijd s is of als het onderdeel vóór leeftijd s stuk gaat. De vraag is, wat de beste waarde van s is, als we de gemiddelde verwachte kosten per tijdseenheid zo klein mogelijk willen maken.
De levensduren van de onderdelen, $Y_1, Y_2, \ldots$, zijn stochastisch onafhankelijk en hebben allen dezelfde verdeling F. Als vernieuwingstijdstippen beschouwen we de tijdstippen waarop onderhoud wordt uitgevoerd, dus bij falen en preventief.
Bij kritieke–grens–s–regel is de duur X_n tussen de $(n-1)^{\mathrm{e}}$ en n^{e} vernieuwing gelijk aan $\min(s, Y_n)$. De kosten R_n bij de n'de vernieuwing zijn,

$$R_n = \begin{cases} c_1, & s < Y_n \\ c_2, & s \geq Y_n \end{cases}$$

Volgens Stelling 2.10 zijn $c(s)$, de gemiddelde verwachte kosten per tijdseenheid, gelijk aan $\mathbb{E}\{R_n\} / \mathbb{E}\{X_n\}$, met

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{R_n\} &= c_1(1 - F(s)) + c_2 F(s) \\ \mathbb{E}\{X_n\} &= \mathbb{E}\{\min(s, Y_n)\} = \int_0^s x\, dF(x) + s(1 - F(s)) = \int_0^s (1 - F(x))\, dx. \end{aligned}$$

Dus
$$c(s) = \frac{c_1(1-F(s)) + c_2F(s)}{\int_0^s (1-F(x))\,dx}.$$
De beste s-waarde vinden we door de afgeleide van $c(s)$ naar s te beschouwen. Voor de eenvoud van de afleiding nemen we aan, dat F een dichtheid f heeft. In vervangingsmodellen wordt vaak de *faal-intensiteit* gebruikt,
$$r(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}, \quad x \geq 0.$$
Een onderdeel met levensduur x faalt tussen x en $x+h$ met waarschijnlijkheid $r(x)\cdot h + o(h)$. We nemen aan dat $r(x)$ stijgend is in x en $\lim_{x\to\infty} r(x) = \infty$. Het unieke minimum van $c(s)$ wordt dan aangenomen voor de waarde s^* die voldoet aan

$$(c_2 - c_1)r(s^*) = c(s^*). \tag{2.4.3}$$

Stelling 2.10 kunnen we in een algemenere context toepassen.

2.5 Regeneratieve processen

Een collectie stochastische variabelen $\{X(t)\}_{t\in T}$, met T een interval in $\mathbf{R}_+$ of $\mathbf{Z}_+$ heet een stochastisch proces.
Een stochastisch proces tezamen met tijdstippen $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \cdots$ heet een *regeneratief proces met regeneratietijdstippen* $0, S_1, S_2, \ldots$, indien de deelprocessen op de intervallen $(0, S_1]$, $(S_1, S_2]$, $(S_2, S_3], \ldots$ dezelfde verdeling hebben en stochastisch onafhankelijk zijn.

Voorbeeld 2.9 Om de twee maanden worden de 100 lantaarnpalen in een stadswijk geïnspecteerd en kapotte lampen worden vervangen. Elk jaar worden op 1 januari alle lampen vervangen. De lampen hebben identiek en onafhankelijk verdeelde levensduren.
Laat $X(t)$ het aantal kapotte lampen zijn op tijdstip t, waarbij $t = 0$ correspondeert met 1 januari. Laat S_n het n-de vervangingstijdstip zijn van alle op dat moment aanwezige lampen, d.w.z. de n'de eerste januari na $t = 0$. Dan is $\{X(t)\}_t$ een regeneratief proces met regeneratietijdstippen $\{S_n\}_n$.

Een stochastisch proces tesamen met tijdstippen $S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \cdots$ heet een *uitgesteld regeneratief proces met regeneratietijdstippen* $S_1, S_2, \ldots$, indien de deelprocessen op de intervallen $(S_1, S_2]$, $(S_2, S_3], \ldots$ dezelfde verdeling hebben en stochastisch onafhankelijk zijn. Dan zijn ook S_1, $S_2 - S_1, \ldots$ o.o. en identiek verdeeld.

Voorbeeld 2.9 (vervolg) Als $t = 0$ niet op 1 januari valt, dan is $\{X_t\}_t$ een uitgesteld regeneratief proces met regeneratietijdstippen $\{S_n\}_n$.

Het tijdsinterval tussen opeenvolgende regeneratietijdstippen wordt een *herhalingsperiode (engels: cycle)* genoemd. M.b.v. Stelling 2.10 kunnen de volgende stellingen afgeleid worden.

Stelling 2.11 (Renewal-reward theorem) *Zij $X(t)$, $t \geq 0$ een uitgesteld regeneratief proces met als regeneratietijdstippen $S_1, S_2, \ldots$. Indien $\mathbb{E}\{S_2 - S_1\} < \infty$ en voor de functie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ geldt,*

$$\mathbb{E}\left\{\int_0^{S_1} |f(X(s))| ds\right\} < \infty \quad \textit{en} \quad \mathbb{E}\left\{\int_{S_1}^{S_2} |f(X(s))| ds\right\} < \infty,$$

dan volgt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \frac{\mathbb{E}\left\{\int_{S_1}^{S_2} f(X(s)) ds\right\}}{\mathbb{E}\{S_2 - S_1\}} \quad \textit{met kans 1} \tag{2.5.1}$$

en

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \mathbb{E}\left\{\int_0^t f(X(s)) ds\right\} = \frac{\mathbb{E}\left\{\int_{S_1}^{S_2} f(X(s)) ds\right\}}{\mathbb{E}\{S_2 - S_1\}}. \tag{2.5.2}$$

Bewijs. We passen Stelling 2.10 toe. Als vernieuwingspunten nemen we de regeneratietijdstippen. De opbrengsten worden ook tussen de vernieuwingstijdstippen ontvangen. Omdat het proces een uitgesteld regeneratief proces is, geldt dat de periode $(0, S_1]$ afwijkend is. Uit $\mathbb{E}\left\{\int_0^{S_1} |f(X(s))|\, ds\right\} < \infty$ volgt echter dat $\frac{1}{t}$ maal de bijdrage over deze periode naar nul convergeert voor $t \to \infty$. $\square$

Voor de gemiddelde (verwachte) opbrengst per tijdseenheid, is het dus voldoende om het gedrag van het proces tussen twee regeneratietijdstippen te bestuderen. Intuïtief is dat ook 'logisch'. In bovenstaand voorbeeld, kun je hiermee het gemiddelde verwachte aantal kapotte lampen per tijdseenheid berekenen.

In de toepassingen die volgen, komen we naast een uitgesteld regeneratief proces ook vaak een stochastisch proces met discrete tijdsparameter tegen (T is een interval in $\mathbf{Z}_+$). We zullen daarom ook de limietstelling voor een proces met discrete tijdstippen definiëren. Het bewijs kan weer via de resultaten voor vernieuwingsprocessen met opbrengsten gegeven worden.

Stelling 2.12 (Renewal-reward theorem voor discrete tijdsparameter) *Zij X_n, $n = 1, 2, \ldots$ een uitgesteld regeneratief proces met als regeneratietijdstippen $S'_1, S'_2, \ldots$. Indien $\mathbb{E}\{S'_2 - S'_1\} < \infty$ en voor de functie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ geldt,*

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{S'_1} |f(X_k)|\right\} < \infty \quad \text{en} \quad \mathbb{E}\left\{\sum_{k=S'_1+1}^{S'_2} |f(X_k)|\right\} < \infty$$

dan volgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) = \frac{\mathbb{E}\left\{\sum_{k=S'_1+1}^{S'_2} f(X_k)\right\}}{\mathbb{E}\{S'_2 - S'_1\}} \quad \textit{met kans 1} \tag{2.5.3}$$

en

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k)\right\} \quad \textit{bestaat en heeft dezelfde limiet.} \tag{2.5.4}$$

Voorbeeld 2.10 Veronderstel dat potentiële klanten bij een bank met één loket aankomen volgens een Poisson proces met parameter λ. Veronderstel bovendien dat een klant die bij een bank arriveert alleen binnengaat als hij het loket leeg aantreft (in het andere geval gaat hij weg). Neem aan dat de tijd die een klant aan het loket nodig heeft een verdeling G heeft met verwachting μ_G.

- Bereken de snelheid s waarmee klanten bij het loket aankomen.
- Bereken de fractie van de aankomende klanten die het loket leeg aantreffen?

Vanwege de geheugenloosheid van het Poisson proces is de verwachte tijd tot er een nieuwe klant arriveert, gegeven dat de vorige klant bij het loket klaar is en de bank verlaat, gelijk is aan de verwachte tussentijden van het Poisson proces, d.w.z. $\frac{1}{\lambda}$.
Definieer X_n als de tijd tussen de aankomst van de $(n-1)$-ste en die van de n-de klant bij het loket. Er geldt dat $\mathbb{E}\{X_n\} = 1/\lambda + \mu_G$ (waarom?). Dan is $N(t) = n$ d.e.s.d.a. er precies n klanten in $(0, t]$ bij het loket zijn gekomen. Dit is een vernieuwingsproces (door de geheugenloosheid van de exponentiële verdeling) en dus volgt uit Stelling 2.7 dat het gemiddelde verwachte aantal aankomsten per tijdseenheid gelijk is aan

$$s = \frac{1}{1/\lambda + \mu_G}.$$

Omdat het Poisson proces ook een vernieuwingsproces is, is het gemiddelde verwachte aantal klanten dat per tijdseenheid bij de bank aankomt gelijk aan $1/(1/\lambda) = \lambda$. De fractie die geholpen worden is $\frac{s}{\lambda} = \frac{1}{1+\lambda\mu_G}$.

Hiervoor hebben we de Renewal-Reward stelling niet nodig. We bekijken een variant van dit probleem.
Voor elke klant die vergeefs bij de bank komt, wordt een penalty van α gerekend, maar een beloning β voor elke bediende klant. Laat $X(t)$ de totale opbrengsten (beloning min penalty) in $(0, t]$ zijn en S_n het tijdstip van de n-de aankomst van een klant bij het loket. Dan is $\{X(t)\}_t$ een uitgesteld regeneratief proces met regeneratietijdstippen $\{S_n\}_n$. Bereken de gemiddelde verwachte opbrengsten per tijdseenheid.

2.6 Opgaven

Opgave 2.1 Beschouw een vernieuwingsproces $\{N(t)\, t \geq 0\}$, waarvan de tussentijden een Poisson-verdeling hebben met parameter λ, d.w.z. dat $\mathbb{P}\{X_n = k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots$.
a. Toon aan dat S_n Poisson-verdeeld is met parameter $n\lambda$.
b. Bepaal $\mathbb{P}\{N(t) = n\}$.

Opgave 2.2 Laat $\{N_1(t)\, t \geq 0\}$ en $\{N_2(t)\, t \geq 0\}$ twee onafhankelijke vernieuwingsprocessen zijn, en laat $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$, $t \geq 0$.
Beantwoord de volgende vragen en beargumenteer uw antwoord:
a. Zijn de tussentijden van het proces $\{N(t),\, t \geq 0\}$ onafhankelijk?
b. Zijn de tussentijden van het proces $\{N(t),\, t \geq 0\}$ identiek verdeeld?
c. Is $\{N(t),\, t \geq 0\}$ een vernieuwingsproces?

Opgave 2.3 Veronderstel dat gebeurtenissen plaatsvinden volgens een Poisson proces met parameter λ. Een gebeurtenis die plaatsvindt binnen tijdsduur d na de voorafgaande gebeurtenis heet een *d-gebeurtenis*.

Bijvoorbeeld, als $d = 1$ en de gebeurtenissen vinden plaats op de tijdstippen $2, 2.8, 4, 6, 6.7$, dan zijn de gebeurtenissen die plaatsvinden op de tijdstippen 2.8 en 6.7 d-gebeurtenissen.
a. Met welke snelheid treden d-gebeurtenissen op?
b. Welk deel van alle gebeurtenissen zijn d-gebeurtenissen?

Opgave 2.4 Beschouw iemand die in het donker onder de grond zit in een ruimte met drie openingen. Opening 1 brengt hem in vrijheid na een reis van twee dagen; opening twee brengt hem na een reis van vier dagen weer terug in dezelfde ruimte en opening drie brengt hem na een reis van zes dagen weer terug in dezelfde ruimte.
Veronderstel dat hij altijd met kans $\frac{1}{3}$ een van de openingen kiest, en laat T de tijd zijn voordat hij vrijkomt.
a. Definieer een rij onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische variabelen $X_1, X_2, \dots$ en een stoptijd τ zdd. $T = \sum_{i=1}^{\tau} X_i$.
b. Bepaal $\mathbb{E}\{T\}$ met de vergelijking van Wald.
c. Bereken $\mathbb{E}\{\sum_{i=1}^{\tau} X_i \mid \tau = n\}$ en laat zien dat dit niet hetzelfde is als $\mathbb{E}\{\sum_{i=1}^{n} X_i\}$.
d. Bepaal $\mathbb{E}\{T\}$ met het resultaat uit onderdeel c.

Opgave 2.5 Toon voor het Poisson proces met parameter λ het volgende aan:
a. Voor de dichtheid $f_n(t)$ van S_n geldt: $f_n(t) = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$, $n = 1, 2, \dots$, d.w.z. S_n heeft een Gamma-verdeling met parameter (n, λ).
b. De Laplace getransformeerde $F_n^*(s)$ van de verdelingsfunctie $F_n(t)$ van S_n voldoet aan: $F_n^*(s) = (\frac{\lambda}{\lambda+s})^n$.

Opgave 2.6 Bewijs Stelling 2.10 (2.4.1).

Opgave 2.7 In Voorbeeld 2.8 toon de juistheid van (2.4.3) aan en geef een verklaring van deze formule.

Opgave 2.8 De sheroot is een shuttle dienst in Israel, waarbij per busje 7 passagiers vervoerd kunnen worden. Bij een gegeven halte komen passagiers aan volgens een Poissonproces met parameter λ. Als er geen busje staat, lopen de passagiers door naar een andere halte. Busjes komen bij de halte aan volgens een Poissonproces met parameter μ. Als er al een ander busje staat, rijden ze door. Een busje vertrekt zodra het 7 passagiers heeft.

1. Laat $X(t)$ het aantal wachtende klanten bij de halte zijn op tijdstip t. Bepaal tijdstippen $\{S_n\}_n$, zodat $\{X(t)\}_t$ een (uitgesteld) regeneratief proces is.

2. Bereken de fractie van het aantal passagiers dat vanaf deze halte vervoerd wordt (m.b.v. geschikt gekozen vernieuwingstijdstippen).

3. Bereken de fractie van het aantal busjes dat doorrijdt (m.b.v. geschikt gekozen vernieuwingstijdstippen).

4. Vergelijk je antwoorden van (2) en (3). Geef een verklaring.

Opgave 2.9 De levensduur van een auto is een stochastische variabele met verdelingsfunctie F en kansdichtheid f. Jan heeft de strategie om een nieuwe auto te kopen zodra de vorige 6 jaar oud is of kapot. Laat τ de eerste keer zijn dat Jan zijn auto vervangt, voordat hij kapot gaat.

- Toon aan, dat
$$\mathbb{E}\{\tau\} = 6 + \frac{\int_0^6 xf(x)dx}{1-F(6)}$$
- Stel dat een nieuwe auto € K kost, en er additionele kosten € C zijn wanneer Jan's auto kapot gaat. Bereken de verwachte kosten per tijdseenheid. Specificeer de gekozen regeneratietijdstippen.
- Stel dat de tijdsduur tot de auto kapot gaat een homogene verdeling op het interval $[0, T]$ heeft. Jan vraagt zich af of hij de verwachte kosten per tijdseenheid kan verlagen door zijn vervangingsstrategie te veranderen. Laat $C(s)$ de verwachte kosten per tijdseenheid zijn bij vervanging na s jaar, of zodra de auto (binnen s jaar) kapot is. De kosten voor een nieuwe auto en de additionele kosten bij kapot gaan blijven € K en € C respectievelijk. Bereken $C(s)$. Voor welke s zijn deze kosten minimaal?

Opgave 2.10 (Voorraadmodel) Een winkel verkoopt een gegeven product. De vraag D_n naar het product in week n is een stochastische variabele met verdelingsfunctie G. D_n, $n \geq 1$, zijn onderling onafhankelijk. In het begin van de week moet de winkelier bepalen hoeveel extra eenheden product hij gaat bestellen. Hij gebruikt de zogenaamde (s, S) regel: als de huidige voorraad, zeg v, dan bestelt hij
$$\begin{cases} S - v, & v \leq s \\ 0, & v > s. \end{cases}$$
De order arriveert instantaan.
Als een klant naar het product vraagt, maar de voorraad is op, dan loopt de klant weg. Per order moet de winkelier vaste kosten K betalen, elke eenheid product kost C, en de prijs is P. Elke klant die wegloopt geeft boetekosten B.

- Leg uit hoe je de gemiddelde verwachte winst per week kunt berekenen. Specificeer hiertoe geschikt gekozen regeneratietijdstippen.

We nemen nu aan dat $\mathbb{P}\{D_n = x\} = \alpha^x(1-\alpha)$, $x = 0, 1, \ldots$, voor gegeven $\alpha \in (0, 1)$. Je kunt deze verdeling interpreteren als het aantal 'successen' (hier x) tot de eerste 'mislukking'.

- Beargumenteer dat
$$\mathbb{P}\{\sum_{i=1}^{k} D_i = x\} = \alpha^x(1-\alpha)^k \binom{x+k-1}{x}.$$
- Bereken voor de gegeven verdeling de verwachte gemiddelde winst per week.

Opgave 2.11 Gegeven een collectie van 3 bestanden (bijv. artikelen) op een centrale computer, zeg bestanden $1, 2, 3$. Deze bestanden zijn als een lijst opgeslagen. Elk tijdstip komt een verzoek

voor het raadplegen van een bestand gedurende één tijdsperiode binnen. Met kans α_i is dit een verzoek voor bestand i, $i = 1, 2, 3$. De computer doorzoekt dan de lijst van bovenaf tot het gewenste bestand is gevonden. Stel bijv. dat de lijst $\{1, 3, 2\}$ is en er komt een verzoek voor bestand 2. Dan vindt de computer dit bestand bij de derde controle. Het probleem is om de bestanden zo te ordenen dat het gemiddelde aantal controles per tijdseenheid minimaal is.
Als de kansen bekend zijn, ligt het voor de hand om de bestanden te ordenen in volgorde van afnemende opvraagkansen. Laat $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$, dan wordt de lijst $\{1, 2, 3\}$. We nemen dit voor de rest van de opgave aan.
Laat X_t het gevraagde bestand zijn op tijdstip t. Als $X_t = i$ dan zijn er i controles nodig om het gevraagde bestand i te vinden.

a) Beargumenteer dat $X = \{X_t\}_{t=1,\ldots}$ een discrete-tijd Markov keten is, op de toestandsruimte $\boldsymbol{S} = \{1, 2, 3\}$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

b) Laat zien dat het gemiddelde aantal controles per tijdseenheid

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\sum_{t=1}^{T} \sum_i i \cdot \mathbf{1}_{\{i\}}(X_t)}{T}$$

gelijk is aan $\sum_i i\alpha_i$. N.B.

$$\mathbf{1}_{\{i\}}(X_t) = \begin{cases} 1, & X_t = i \\ 0 & X_t \neq i \end{cases}.$$

Helaas zijn de opvraagkansen niet altijd bekend. Dan lijkt het een goede heuristiek om het bestand dat gevraagd wordt, bovenaan de lijst te zetten. De lijst is dan niet meer op elk tijdstip hetzelfde. Stel we beginnen op tijdstip 1 met de lijst $\{1, 2, 3\}$ en bestand 2 wordt gevraagd, dan is de lijst op tijdstip 2 gelijk aan $\{2, 1, 3\}$. Om de kwaliteit van deze heuristiek te beoordelen, blijven we er nog steeds vanuit gaan dat we de kansen kennen. Het gemiddelde aantal controles moet nu echter anders berekend worden.
Het is handig om per bestand te kijken naar het gemiddelde aantal controles. Kies bestand 1, en beginlijst $\{1, 2, 3\}$. Noteer met C_1 het gemiddelde aantal controles voor aanvragen voor bestand 1 per tijdseenheid.
Laat Y_n de tijd tussen het n-de en $(n+1)$-ste bezoek van de Markovketen aan toestand 1 zijn. Laat $N(t)$ het vernieuwingsproces met tussentijden $Y_1, \ldots$ zijn. Noem Y_n het *n-de interval*. Definieer

$$R_n = \begin{cases} 3 & X \text{ bezoekt 2 en 3 tijdens } n\text{-de interval}, \\ 2 & X \text{ bezoekt alleen 2 of alleen 3}, \\ 1 & X \text{ bezoekt noch 2 noch 3}. \end{cases}$$

c) Bereken eerst $\mathbb{E}\{Y_n\}$. Laat vervolgens zien dat

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{R_n\} &= 1 + \mathbb{P}\{X \text{ bezoekt 2 tijdens } n\text{-de interval}\} + \mathbb{P}\{X \text{ bezoekt 3 tijdens } n\text{-de interval}\} \\ &= 1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_3}. \end{aligned}$$

d) Beargumenteer dat
$$C_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n}{T}$$
en bereken de laatste expressie.

e) Wat is nu het gemiddelde aantal controles per tijdseenheid? Geef een korte motivatie.

Opgave 2.12 Laat $X_1, X_2, \ldots$ een rij onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische grootheden zijn met $\mathbb{E}\{|X_1|\}, \mathbb{E}\left\{X_1^2\right\} < \infty$. Laat verder τ een stoptijd voor de rij $X_1, \ldots$ zijn met $\mathbb{E}\{\tau\} < \infty$. Schrijf $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $\sigma^2 = \mathbb{E}\left\{(X_1 - \mathbb{E}\{X_1\})^2\right\}$. Toon aan dat $\mathbb{E}\left\{(S_\tau - \tau\,\mathbb{E}\{X_1\})^2\right\} = \sigma^2\,\mathbb{E}\{\tau\}$.
Hint: Je kunt overgaan op de stochastische variabelen $\hat{X}_i = X_i - \mathbb{E}\{X_i\}$ en toon aan dat $\mathbb{E}\left\{\hat{S}_\tau^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\hat{X}_1^2\right\}\mathbb{E}\{\tau\}$.

Opgave 2.13 Laat $X_1, \ldots$ een rij onafhankelijke en identiek verdeelde niet-negatieve stochastische variabelen zijn met $\mathbb{E}\{X_i\} < \infty$. $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ zij het vernieuwingsproces geassocieerd met de rij $X_1, \ldots$, en $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ het tijdstip van de n-de vernieuwing. Schrijf $F(t) = \mathbb{P}\{X_1 \leq t\}$ voor de verdelingsfunctie van X_1 en neem aan dat F continu differentieerbaar is naar t.
Definieer $R(t) = S_{N(t)+1} - t$ de resterende levensduur op tijdstip t (tot de volgende vernieuwing). Toon aan dat
$$\frac{\int_0^t \mathbf{1}_{\{[0,x]\}}(R(s))ds}{t}, \frac{\int_0^t \mathbb{P}\{R(s) \leq x\}ds}{t} \to \frac{\int_0^x (1-F(s))ds}{\mathbb{E}\{X_1\}}, \quad t \to \infty.$$
De verdelingsfunctie $F_e(x) = \frac{\int_0^x (1-F(s))ds}{\mathbb{E}\{X_1\}}$, $x \geq 0$, heet de *stationaire resterende levensduurverdeling.*

Opgave 2.14 De afdeling 'spoedopnames' in een ziekenhuis heeft plaats voor 2 traumapatiënten. Nieuwe patiënten die aankomen, wanneer de afdeling vol is (en beide bedden bezet zijn), worden naar een ander ziekenhuis in de regio gebracht.
Traumapatiënten komen aan volgens een Poissonproces, gemiddeld λ per dag. Per dag worden gemiddeld 4,2 patiënten geaccepteerd. Daarnaast zijn 16% van de tijd *beide* bedden bezet. Bereken λ. Welke percentage van de patiënten wordt doorgestuurd naar een ander ziekenhuis?
Hint: je mag aannemen dat zich gemiddeld λT patiënten bij de spoedopnames melden gedurende een stochastische duur van T dagen. Deze tijd T mag in 'stukjes opgeknipt' zijn.

Opgave 2.15 Bij een transportbedrijf komen producten aan volgens een vernieuwingsproces, waarbij de tussenaankomsttijden een eindige verwachting μ hebben. Zodra er M producten zijn, gaan ze onmiddellijk op transport. Laat $X(t)$ het aantal producten zijn dat op tijdstip t bij het transportbedrijf op transport wacht.

- Bereken de fractie van de tijd (over een oneindig tijdsinterval) dat er j producten op transport liggen te wachten. Bereken het gemiddelde aantal producten per tijdseenheid dat op transport ligt te wachten.

- Het bedrijf wil de partijgrootte M zo kiezen dat de verwachte kosten per tijdseenheid minimaal zijn. De relevante kosten zijn: C voor transporteren van een partij, en h voor de opslagkosten per tijdseenheid en per product. Noteer met $C(M)$ de verwachte transport- plus opslagkosten per tijdseenheid. Toon aan dat de waarde van M die $C(M)$ minimaliseert, gelijk is aan $\arg\min \big\{C(M) \mid M \in \{\lfloor\sqrt{2C/h\mu}\rfloor, \lceil\sqrt{2C/h\mu}\rceil\}\big\}$.

Hoofdstuk 3

MARKOVPROCESSEN

3.1 Inleiding

In (discrete) Markov ketens zijn de tijden tussen de toestandsovergangen constant. In vele stochastische problemen zijn deze tussentijden echter niet constant, maar stochastisch. Vaak zijn de tussentijden exponentieel verdeeld.

Voorbeeld 3.1
Bij een tankstation is in een aparte tank, met een capaciteit van N eenheden, een brandbaar product opgeslagen. Het vraagproces naar dit product wordt beschreven door een Poisson proces met intensiteit λ, d.w.z. klanten arriveren volgens onafhankelijke tussentijden die exponentieel verdeeld zijn met verwachte waarde $\frac{1}{\lambda}$ en elke klant vraagt één eenheid van het product. Gelegenheid tot aanvulling van de voorraad is mogelijk op stochastische tijdstippen, die worden gegenereerd door een Poisson proces met intensiteit μ. In verband met veiligheidsaspecten kan de voorraad op zo'n tijdstip alleen worden aangevuld als er geen voorraad meer in de tank zit.
We zijn geïnteresseerd in vragen als:
- Wat is de gemiddelde voorraad in de tank?
- Wat is de fractie van de tijd dat de tank leeg is?
We zullen later zien dat het stochastisch proces dat de voorraad in de tank beschrijft een Markovproces is.

We zullen nu eerst een formele definitie van een Markovproces geven. Beschouw een stochastisch proces $\{X(t), t \geq 0\}$ dat waarden aanneemt uit een discrete toestandsruimte S. Het proces is een *continue Markov keten* als voor iedere $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n < t_{n+1}$ en $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$ geldt dat

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{X(t_{n+1}) = j \mid X(t_0) = i_0, X(t_1) = i_1, \ldots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, X(t_n) = i\} \\ &\qquad = \mathbb{P}\{X(t_{n+1}) = j \mid X(t_n) = i\}. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Merk op dat als we de tijdstippen discreet nemen ($t_k = k,\ k = 0, 1, \ldots$), dit precies de definitie van een Markovketen is.

Als bovendien $\mathbb{P}\{X(t+s)=j \mid X(s)=i\}$ onafhankelijk is van s, dan heet het proces *homogeen* en noteren we $\mathbb{P}\{X(t+s)=j \mid X(s)=i\}$ met $p_{ij}(t)$. De matrix met elementen $p_{ij}(t)$ noteren we met $P(t)$. De collectie $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ noemen we de transitiefunctie van het Markov proces. We zullen in dit hoofdstuk alleen homogene processen beschouwen. We nemen verder aan dat de transitiefunctie continu in $t=0$ is.

Aanname 3.1 De transitiefunctie is standaard, d.w.z. $\lim_{t\downarrow 0} P(t) = I$ met I de identiteit.

Voorbeeld 3.2 *Poissonproces*
In Besliskunde 1 is het Poissonproces reeds geïntroduceerd als een vernieuwingsproces waarvan de tussentijden exponentieel verdeeld zijn, zeg met parameter λ. Het Poissonproces is het eenvoudigste continue Markov proces, maar tevens blijkt het een zeer geschikt model te zijn voor het modelleren van 'toevallige' gebeurtenissen, zoals de aankomsten van klanten, het kapotgaan van onderdelen in apparaten, het binnenkomen van telefoongesprekken, etc.
Zij $N(t)$ het aantal vernieuwingen in $[0,t]$, dan is

$$\mathbb{P}\{N(t)=n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \text{ voor alle } t \geq 0 \text{ en alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Uit de geheugenloosheid van de exponentiële verdeling volgt dat voor iedere
$0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < s < s+t$ en iedere $i_0 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_{n-1} \leq i \leq j$ geldt dat:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{N(t+s)=j \mid N(t_0)=i_0,\cdots,N(t_{n-1})=i_{n-1}, N(s)=i\} \\
&\qquad = \mathbb{P}\{N(t+s)=j \mid N(s)=i\} \\
&\qquad = \mathbb{P}\{N(t)=j-i)\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}.
\end{aligned}$$

Dit is dus een stationaire homogene Markov keten met $p_{ij}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & \text{voor } j \geq i; \\ 0 & \text{voor } j < i. \end{cases}$

Stelling 3.1 *Chapman - Kolmogorov vergelijkingen*[1]
Voor iedere $s,t > 0$ geldt dat $P(t+s) = P(t)P(s)$.

Bewijs:
Neem $i,j \in S$ willekeurig. Dan kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned}
\{P(t+s)\}_{ij} &= \mathbb{P}\{X(t+s)=j \mid X(0)=i\} = \textstyle\sum_k \mathbb{P}\{X(t+s)=j,\ X(t)=k \mid X(0)=i\} \\
&= \textstyle\sum_k \mathbb{P}\{X(t+s)=j \mid X(t)=k,\ X(0)=i\}\cdot \mathbb{P}\{X(t)=k \mid X(0)=i\} \\
&= \textstyle\sum_k \mathbb{P}\{X(t+s)=j \mid X(t)=k\}\cdot \mathbb{P}\{X(t)=k \mid X(0)=i\} \\
&= \textstyle\sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(s) = \{P(t)P(s)\}_{ij}.
\end{aligned}$$

□

[1]Dit heet ook wel de semi-groep eigenschap

Veronderstel dat de keten op een zeker tijdstip, zeg op tijdstip 0, overgaat in toestand i en veronderstel tevens dat het proces toestand i niet verlaat gedurende de komende tijdsduur s. Wat is dan de kans dat het systeem in toestand i vanaf tijdstip s nog een tijdsduur t verblijft?
Volgens de Markov eigenschap is de kans dat het systeem in toestand i blijft gedurende het interval $[s, s+t]$ gelijk aan de kans dat het systeem in toestand i blijft gedurende het interval $[0, t]$. Laat T_i de tijd zijn dat het systeem in toestand i verblijft voordat een overgang naar een andere toestand plaatsvindt. Dan geldt

$$\mathbb{P}\{T_i > s+t \mid T_i > s\} = \mathbb{P}\{T_i > t\}, \tag{3.1.2}$$

wat betekent dat de stochastische variabele T_i geheugenloos is. Uit (3.1.2) volgt dat

$$\mathbb{P}\{T_i > t\} = \mathbb{P}\{T_i > s+t \mid T_i > s\} = \frac{\mathbb{P}\{T_i > s+t\}}{\mathbb{P}\{T_i > s\}},$$

d.w.z.

$$\mathbb{P}\{T_i > s+t\} = \mathbb{P}\{T_i > s\} \cdot \mathbb{P}\{T_i > t\}, \qquad \text{voor alle } s, t \geq 0.$$

Laat $G_i(t) = \mathbb{P}\{T_i > t\}$, dan is $G_i(s+t) = G_i(s) \cdot G_i(t)$ voor alle $s, t \geq 0$. De exponentiële functie $G_i(t) = e^{-\nu_i t}$ voldoet aan deze eigenschap en er kan ook worden bewezen dat een exponentiële functie de enige niet triviale functie is die hieraan voldoet.[2] Voor de verdelingsfunctie $F_i(t)$ van T_i geldt dus

$$F_i(t) = \mathbb{P}\{T_i \leq t\} = 1 - e^{-\nu_i t},$$

wat de *negatief exponentiële verdeling* is met dichtheid $f_i(t) = \nu_i e^{-\nu_i t}$. Voor de verwachting van T_i geldt dat $\mathbb{E}\{T_i\} = \frac{1}{\nu_i}$, wat dus de verwachte tijdsduur in toestand i is. Als $\nu_i = \infty$ dan springt het proces dus onmiddellijk uit i weg.

Alternatieve definitie van een Markovproces In feite geeft dit een andere manier om een Markovproces te definiëren, namelijk als een stochastisch proces dat voor iedere $i \in S$ de volgende twee eigenschappen heeft zodra het toestand i bereikt:
(1) de verblijftijd T_i in toestand i is exponentieel verdeeld, zeg met parameter ν_i;
(2) als het proces toestand i verlaat, dan gaat het met *sprongkans* p_{ij} naar een toestand $j \neq i$, waarbij $\sum_{j \neq i} p_{ij} = 1$.

Het is voor onze doeleinden vaak handig om deze laatste definitie te hanteren, die als volgt geïnterpreteerd kan worden: *een Markovproces op een discrete toestandsruimte is een stochastisch proces dat van toestand naar toestand gaat volgens een (discrete tijd) Markovketen en waarbij de tijdsduur voordat de keten naar een andere toestand gaat exponentieel verdeeld is. N.B. als er op tijdstip t een sprong is, dan is $X(t)$ de bereikte toestand ná de sprong!*

Een Markovproces heet *regulier* als het aantal overgangen in ieder eindig tijdsinterval met kans 1 eindig is. Een voldoende voorwaarde voor regulariteit is dat $\sup_{i \in S} \nu_i < \infty$. We zullen ons

[2] Zie W. Feller: *An introduction to probability theory and its applications*, Volume I, 3rd edition, Wiley (1968) p. 459.

beperken tot reguliere Markovprocessen, zodat we in dit hoofdstuk werken onder de volgende aanname:

Aanname 3.2 We beschouwen in dit hoofdstuk alleen Markovprocessen, die regulier zijn. Voorts nemen we aan dat: $\nu_i < \infty$ voor alle i.

Laat

$$q_{ij} = \begin{cases} \nu_i p_{ij} & \text{als } i \neq j \\ -\nu_i & \text{als } i = j \end{cases} \tag{3.1.3}$$

dan geldt

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} = \nu_i, \; i \in S \text{ en } \sum_j q_{ij} = 0, \; i \in S. \tag{3.1.4}$$

Aangezien ν_i de snelheid is waarmee toestand i wordt verlaten en p_{ij} de kans dat het systeem dan overgaat naar toestand $j \neq i$, is q_{ij} de snelheid waarmee in toestand i een overgang naar toestand j wordt gemaakt. De matrix Q heet de *generator matrix*.

Voorbeeld 3.1 (vervolg)
Neem $S = \{0, 1, \ldots, N\}$, waarbij toestand i overeenkomt met de aanwezigheid van precies i eenheden in de tank. Zij $X(t)$ de voorraad in de tank op tijdstip t en laat de verblijftijd in toestand i exponentieel verdeeld zijn met parameter ν_i. Dan geldt:

$$\nu_i = \begin{cases} \lambda, & 1 \leq i \leq N \\ \mu, & i = 0 \end{cases} \quad \text{en} \begin{cases} p_{i,i-1} & = & 1, \; 1 \leq i \leq N \\ p_{i,N} & = & 1, \; i = 0 \end{cases}, \text{zodat } q_{ij} = \begin{cases} \lambda, & 1 \leq i \leq N, \; j = i - 1 \\ -\lambda, & 1 \leq i \leq N, \; j = i \\ \mu, & i = 0, \; j = N \\ -\mu, & i = 0, \; j = 0 \end{cases}$$

(andere overgangskansen zijn 0).

Zij X een positieve stochastische variabele met verdelingsfunctie $F(t)$ en kansdichtheid $f(t)$.
De *faalsnelheid* $r(t)$ wordt voor alle t waarvoor $F(t) < 1$ gedefinieerd door:

$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}. \tag{3.1.5}$$

Om dit begrip te verduidelijken beschouwen we een item met stochastische levensduur X, dat reeds t tijdseenheden heeft overleefd. We berekenen de kans dat het item een extra levensduur van dt tijdseenheden niet overleeft:

$$\mathbb{P}\{X \in (t, t+dt) \mid X > t\} = \frac{\mathbb{P}\{X \in (t, t+dt), \; X > t\}}{\mathbb{P}\{X > t\}} = \frac{\mathbb{P}\{X \in (t, t+dt)\}}{\mathbb{P}\{X > t\}} \approx \frac{f(t)dt}{1 - F(t)} = r(t)dt.$$

Voor een stochastische variabele X die exponentieel verdeeld is met parameter ν geldt

$$r(t) = \frac{\nu e^{-\nu t}}{e^{-\nu t}} = \nu, \tag{3.1.6}$$

d.w.z. dat de exponentiële verdeling een constante faalsnelheid heeft. Dit is inherent aan het geheugenloos zijn van deze verdeling.

In het Markovproces $X(t)$ geldt voor de verblijftijd T_i in toestand i voor h voldoende klein en voor iedere t:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X(t+h)=i \mid X(t)=i\} &\approx \mathbb{P}\{T_i \geq h\} = e^{-\nu_i h} = 1-\nu_i h + o(h) \\ \mathbb{P}\{X(t+h)=j \mid X(t)=i\} &\approx \mathbb{P}\{T_i < h\} \cdot p_{ij} = (1-e^{-\nu_i h}) \cdot p_{ij} \\ &\qquad = \nu_i h p_{ij} + o(h) = q_{ij} h + o(h),\ j \neq i, \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

waarbij $o(h)$ voor een functie $g(h)$ betekent dat $\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = 0$.

Uit (3.1.7) volgt direct het volgende lemma.

Lemma 3.2
Er geldt: $p'_{ii}(0) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{p_{ii}(h)-1}{h} = -\nu_i = q_{ii}$ *en* $p'_{ij}(0) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} = q_{ij}$ *als* $j \neq i$,
of in matrixnotatie: $P'(0) = Q$.

Formule (3.1.7) verklaart de naam *infinitesimale overgangssnelheden* voor de getallen q_{ij}, d.w.z. als $i \neq j$ dan is q_{ij} de kans per tijdseenheid dat het systeem een overgang van i naar j maakt en $-q_{ii}$ is de kans per tijdseenheid dat het systeem in toestand i blijft.

Vraag 3.1
In een dameskapperszaak staan twee stoelen. Een binnenkomende klant neemt eerst plaats in stoel 1 voor het eerste deel van haar behandeling. Als dit klaar is gaat de klant naar stoel 2 voor het tweede deel. De behandeltijden bij beide stoelen zijn onafhankelijk en exponentieel verdeeld met parameters μ_1 resp. μ_2. Veronderstel dat klanten volgens een Poisson proces met parameter λ arriveren, maar alleen naar binnen gaan als beide stoelen leeg zijn.
Beschrijf het proces van de bezetting van de stoelen in deze dameskapperszaak als een Markovproces en bepaal de toestandsruimte, de verblijftijden en de overgangskansen.

3.2 Differentiaalvergelijkingen en transiënt gedrag

Lemma 3.3 *Kolmogorov's voorwaartse differentiaalvergelijking*
$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t) q_{kj}$ *voor alle* $i, j \in S$ *en alle* $t \geq 0$, *of in matrixnotatie:* $P'(t) = P(t)Q$.

Bewijs
Uit de Kolmogorov vergelijking $P(t+h) = P(t)P(h)$ volgt voor kleine waarden van h:

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+h) &= \sum_{k\neq j} p_{ik}(t) p_{kj}(h) + p_{ij}(t) p_{jj}(h) \\ &= \sum_{k\neq j} p_{ik}(t) q_{kj} h + p_{ij}(t)(1-\nu_j h) + o(h). \end{aligned}$$

Hieruit volgt $\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} = \sum_{k\neq j} p_{ik}(t) q_{kj} + p_{ij}(t) q_{jj} + \frac{o(h)}{h} = \sum_k p_{ik}(t) q_{kj} + \frac{o(h)}{h}$.

Door $\lim_{h\to 0}$ te nemen (waarbij we aannemen dat deze limiet bestaat, wat onder milde voorwaarden het geval is[3]) wordt het resultaat van het lemma verkregen. □

[3] Voor meer details zie: P. Brémaud: *Markov chains*, Volume 31 of *Texts in Applied Mathematics*, Springer, 1999.

Lemma 3.4 *Kolmogorov's achterwaartse diffentiaalvergelijking*
$p'_{ij}(t) = \sum_k q_{ik}p_{kj}(t)$ *voor alle* $i, j \in S$ *en alle* $t \geq 0$*, of in matrixnotatie:* $P'(t) = QP(t)$.

Bewijs
Uit de Kolmogorov vergelijking $P(t+h) = P(h)P(t)$ volgt voor kleine waarden van h:

$$\begin{array}{rcl} p_{ij}(t+h) & = & \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) + p_{ii}(h)p_{ij}(t) \\ & = & \sum_{k\neq i} q_{ik}hp_{kj}(t) + (1-\nu_i h)p_{ij}(t) + o(h). \end{array}$$

Hieruit volgt $\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} = \sum_{k\neq j} q_{ik}p_{kj}(t) + q_{ii}p_{ij}(t) + \frac{o(h)}{h}$.

Door $\lim_{h\to 0}$ te nemen (waarbij we ook hier aannemen dat deze limiet bestaat), wordt het resultaat verkregen. □

Voorbeeld 3.3
Beschouw twee identieke machines, elk met een exponentiële levensduur met parameter λ.
Veronderstel dat op tijdstip $t = 0$ beide machines functioneren.
Zij $X(t)$ het aantal machines dat op tijdstip t functioneert, dus $X(0) = 2$.
$X(t)$ is een Markovproces met $S = \{0, 1, 2\}$, $p_{21} = p_{10} = 1$ en $\nu_0 = 0$, $\nu_1 = \lambda$, $\nu_2 = 2\lambda$.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda & -2\lambda \end{pmatrix}, \text{ zodat } \begin{array}{l} p'_{10}(t) = \lambda p_{00}(t) - \lambda p_{10}(t) = \lambda - \lambda p_{10}(t) \\ p'_{21}(t) = 2\lambda p_{11}(t) - 2\lambda p_{21}(t) \\ p'_{20}(t) = 2\lambda p_{10}(t) - 2\lambda p_{20}(t) \end{array}$$

Merk op dat $p_{10}(t) + p_{11}(t) = 1$ voor alle t en dat $p_{11}(t) = e^{-\lambda t}$, zodat $p_{10}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

De differentiaalvergelijkingen in matrixnotatie, d.w.z. $P'(t) = P(t)Q$*, hebben in matrixnotatie als oplossing (gebruik daarbij ook dat* $P(0) = I$*)*

$$P(t) = e^{tQ} \text{ waarbij } e^{tQ} \text{ gedefinieerd is als } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tQ)^k}{k!},$$

mits geëist wordt dat $\sup_i \nu_i < \infty$.

In het algemeen geldt niet dat het (i, j)-de element van e^{tQ} gelijk is aan $e^{tq_{ij}}$. Als de matrix Q echter te diagonaliseren is, d.w.z. $Q = UDU^{-1}$ met D een diagonaalmatrix en U een inverteerbare matrix, dan geldt dat $(UDU^{-1})^k = UD^kU^{-1}$ voor alle k (eenvoudig met inductie te bewijzen), waaruit volgt dat

$$e^{tQ} = e^{U(tD)U^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{U(tD)U^{-1}\}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U(tD)^kU^{-1}}{k!} = U\Big\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tD)^k}{k!}\Big\}U^{-1} = Ue^{tD}U^{-1}.$$

Voorbeeld 3.4

Beschouw een Markovproces met generator matrix $Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

We kunnen deze matrix diagonaliseren als $Q = UDU^{-1}$ (we leggen niet uit hoe) met

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{35}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ en } U^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{35}}{8} & 0 & \frac{\sqrt{35}}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

Hiermee vinden we: $P(t) = U \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} U^{-1}$, met voor $t = 1$:

$$P(1) = \begin{pmatrix} 0.415702 & 0.432332 & 0.151965 \\ 0.338877 & 0.567668 & 0.093456 \\ 0.397387 & 0.432332 & 0.170281 \end{pmatrix}$$ of bijvoorbeeld $p_{11}(t) = \frac{3}{8}e^{-4t} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}e^{-2t}$.

Vraag 3.2

Beschouw twee machines, die beide een exponentiële levensduur hebben met parameter λ. Er is één reparateur die de kapotte machines repareert in de volgorde waarin ze stuk zijn gegaan en met een reparatietijd die exponentiel verdeeld is met parameter μ.

Stel de achterwaartse Kolmogorov differentiaalvergelijkingen op (oplossen hoeft niet).

3.3 Geboorte-sterfte processen

Beschouw een systeem waarvan $X(t)$, de toestand op tijdstip t, overeenkomt met het aantal personen in het systeem op tijdstip t. Dus $S = \{0, 1, \ldots\}$. Een *geboorte-sterfte proces* is een Markovproces met voor iedere toestand i $p_{ij} = 0$ voor $j \neq i+1, i-1$: transities vanuit i gaan dus altijd naar $i+1$ (*geboorte*) of $i-1$ (*sterfte*). Laat $\lambda_i = q_{i,i+1},\ i \geq 0$ en $\mu_i = q_{i,i-1},\ i \geq 1$, de geboorte- resp. sterftesnelheid. Uit (3.1.4) en (3.1.3) (met $\mu_0 = 0$) volgt dat voor alle $i \in S$:

$$\nu_i = \lambda_i + \mu_i;\ p_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \text{ en } p_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}. \tag{3.3.1}$$

Een andere karakterisatie van een geboorte-sterfte proces is:

Als er i personen in het systeem zijn, dan geldt:

(1) de tijd tot de volgende aankomst is exponentieel verdeeld met parameter λ_i;

(2) de tijd tot het volgende vertrek is exponentieel verdeeld met parameter μ_i.

Opmerking:

$\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}$ is de kans dat, gegeven dat er i personen in het systeem zijn, een geboorte eerder plaatsvindt dan een sterfte.

Voorbeeld 3.2 (vervolg)

Het transiënt gedrag $p_{ij}(t)$ van het Poissonproces, d.w.z. een geboorte-sterfte op $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ met $\lambda_i = \lambda$ en $\mu_i = 0$ voor alle i, kan ook worden afgeleid uit de voorwaartse differentiaalvergelijking. De generator matrix van het Poissonproces is

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ zodat uit } P'(t) = P(t)Q \text{ volgt}$$

$$p'_{ij}(t) = \lambda p_{i,j-1}(t) - \lambda p_{ij}(t),\ j \geq i \geq 0 \text{ met als } i = j = 0\text{: } p'_{00}(t) = -\lambda p_{00}(t).$$

met begincondities $p_{ij}(0) = 0$. Het is eenvoudig na te gaan dat

$$p_{ij}(t) = e^{-\lambda t}\tfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!},\ j \geq i \geq 0,$$

voldoet aan deze differentiaalvergelijking, ook voor $i = j = 0$.

We kunnen $p_{ij}(t)$ expliciet bepalen als we een zuiver geboorte proces, d.w.z. $\mu_i = 0$ voor alle i, hebben. Laat voor zo'n proces X_k de tijdsduur zijn waarin het proces in toestand k verblijft voordat een transitie naar toestand $k+1$ plaatsvindt. Veronderstel dat het proces in toestand i is en laat $j > i$. Dan is $\sum_{k=i}^{j-1} X_k$ de tijd voordat toestand j wordt bereikt. Verder is het duidelijk dat

$X(t) < j \;\Leftrightarrow\; X_i + X_{i+1} + \cdots + X_{j-1} > t$, d.w.z. $\mathbb{P}\{X(t) < j \mid X(0) = i\} = \mathbb{P}\{\sum_{k=i}^{j-1} X_k > t\}$.

$X_i, X_{i+1}, \cdots, X_{j-1}$ zijn onafhankelijke exponentiële verdelingen met parameters $\lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{j-1}$. Voor convoluties van exponentiële verdelingen met verschillende parameters kan worden afgeleid [4] dat

$$\mathbb{P}\Big\{\sum_{k=i}^{j-1} X_k > t\Big\} = \sum_{k=i}^{j-1} e^{-\lambda_k t} \prod_{r=i,r\neq k}^{j-1} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k},$$

zodat ook geldt

$$\mathbb{P}\Big\{X(t) < j+1 \mid X(0) = i\Big\} = \sum_{k=i}^{j} e^{-\lambda_k t} \prod_{r=i,r\neq k}^{j} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k}.$$

Omdat $\mathbb{P}\{X(t) = j \mid X(0) = i\} = \mathbb{P}\{X(t) < j+1 \mid X(0) = i\} - \mathbb{P}\{X(t) < j \mid X(0) = i\}$ voor $j > i$ en $p_{ii}(t) = \mathbb{P}\{X_i > t\} = e^{-\lambda_i t}$, hebben we hiermee het volgende resultaat afgeleid.

Lemma 3.5

Voor een zuiver geboorteproces met $\lambda_i \neq \lambda_j$ voor $i \neq j$, geldt:

$p_{ij}(t) = \sum_{k=i}^{j} e^{-\lambda_k t} \prod_{r=i,r\neq k}^{j} \frac{\lambda_r}{\lambda_r-\lambda_k} - \sum_{k=i}^{j-1} e^{-\lambda_k t} \prod_{r=i,r\neq k}^{j-1} \frac{\lambda_r}{\lambda_r-\lambda_k},\ j > i$

$p_{ii}(t) = e^{-\lambda_i t}$.

Voorbeeld 3.5 *Het Yule proces*

Beschouw een populatie waarvan de individuen geboortes genereren en waarin geen sterfte plaatsvindt. De individuen handelen onafhankeljk van elkaar en ieder individu genereert een geboorte in een tijdsduur die exponentieel verdeeld in met parameter λ. Dit is dus een geboorte-sterfte

[4] Zie S.M. Ross: *Introduction to probability models*, 8th edition, Academic Press, 2003, p. 286.

proces met $S = \{1, 2, \dots\}$, $\lambda_i = i\lambda$ en $\mu_i = 0$ voor alle i. Dit proces is door George Yule in 1924 gebruikt om een mathematisch model voor de evolutie op te stellen. Uit Lemma 3.5 volgt reeds dat $p_{ii}(t) = e^{-i\lambda t}$. De generator matrix van dit model is:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Uit de voorwaartse differentiaalvergelijking $P'(t) = P(t)Q$ volgt dat

$$p'_{ij}(t) = \{P(t)Q\}_{ij} = (j-1)\lambda p_{i,j-1}(t) - j\lambda p_{ij}(t),\ j \geq i \geq 1. \tag{3.3.2}$$

met begincondities $p_{ij}(0) = 0$ en als $i = j = 1$: $p'_{11}(t) = -\lambda p_{11}(t)$, zodat $p_{11}(t) = e^{-\lambda t}$.
De oplossing van de algemene differentiaalvergelijking is (zie Vraag 3.7):

$$p_{ij}(t) = \binom{j-1}{i-1} e^{-i\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{j-i},\ j \geq i \geq 1. \tag{3.3.3}$$

Hieruit volgt dat $p_{1n}(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}$, wat de geometrische verdeling is met $p = e^{-\lambda t}$.

Voorbeeld 3.6 *Lineaire groei met immigratie*
Beschouw een geboorte-sterfte proces met $\mu_i = i\mu$ voor $i \geq 1$ en $\lambda_i = i\lambda + \theta$ voor $i \geq 0$. Zo'n proces heet een *lineair groeimodel met immigratie* en wordt bestudeerd in de biologie. Ieder individu in de populatie geeft een geboorte met een snelheid λ en een sterfte met een snelheid μ; daarnaast is er een instroom (immigratie) met een constante snelheid θ.
Laat $X(t)$ de populatiegrootte zijn op tijdstip t en veronderstel dat $X(0) = i$.
Laat $M(t) = \mathbb{E}\{X(t)\}$, dan gaan we $M(t)$ bepalen. Voor h voldoende klein en voor een gegeven $X(t)$ geldt:

$$X(t+h) = \begin{cases} X(t) & \text{met kans} \quad 1 - \{\theta + X(t)\lambda + X(t)\mu\}h + o(h) \\ X(t)+1 & \text{met kans} \quad \{\theta + X(t)\lambda\}h + o(h) \\ X(t)-1 & \text{met kans} \quad \{X(t)\mu\}h + o(h) \end{cases} \tag{3.3.4}$$

Hieruit volgt:

$\mathbb{E}\{X(t+h) \mid X(t)\} = X(t) + \{\theta + X(t)\lambda - X(t)\mu\}h + o(h)$.

$M(t+h) = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[X(t+h) \mid X(t)]\} = M(t) + \theta h + M(t)(\lambda - \mu)h + o(h)$.

$\frac{M(t+h)-M(t)}{h} = \theta + M(t)(\lambda - \mu) + \frac{o(h)}{h}$.

Door $h \to 0$ te nemen krijgen we de differentiaalvergelijking

$$M'(t) = \theta + M(t)(\lambda - \mu). \tag{3.3.5}$$

Beschouw eerst het geval $\lambda = \mu$.

De vergelijking luidt dan $M'(t) = \theta$, zodat $M(t) = \theta t + K$. Omdat $M(0) = i$, volgt hieruit dat

$$M(t) = \theta t + i. \tag{3.3.6}$$

Vervolgens het geval $\lambda \neq \mu$.

Laat $h(t) = \theta + M(t)(\lambda - \mu)$, dan is $h'(t) = M'(t)(\lambda - \mu)$. Hieruit volgt:

$$\frac{h'(t)}{\lambda - \mu} = M'(t) = \theta + M(t)(\lambda - \mu) = h(t).$$

Dit geeft $\frac{h'(t)}{h(t)} = \lambda - \mu$. Door te integreren krijgen we: $\ln h(t) = (\lambda - \mu)t + K$, ofwel $h(t) = e^{(\lambda-\mu)t+K}$.

Omdat $h(0) = \theta + M(0)(\lambda - \mu) = \theta + (\lambda - \mu)i$, geldt dat $e^K = \theta + (\lambda - \mu)i$. Hiermee krijgen we

$$h(t) = \{\theta + (\lambda - \mu)i\}e^{(\lambda-\mu)t}. \tag{3.3.7}$$

Dit geeft als volgt een uitdrukking voor $M(t)$:

$$M(t) = \frac{h(t) - \theta}{\lambda - \mu} = \frac{\{\theta + (\lambda - \mu)i\}e^{(\lambda-\mu)t} - \theta}{\lambda - \mu} = i \cdot e^{(\lambda-\mu)t} + \frac{\theta}{\lambda - \mu}\{e^{(\lambda-\mu)t} - 1\}. \tag{3.3.8}$$

Voorbeeld 3.7 *Radioactieve uitval*

Beschouw N radioactieve atomen. Ieder atoom heeft een levensduur die exponentieel verdeeld is met parameter λ. De tijdsduur tot het eerste atoom uitvalt is het minimum van N onderling onafhankelijke identiek verdeelde exponentiële verdelingen. Deze is dus weer exponentieel verdeeld is met parameter λN. Als X_{i+1} de tijdsduur is tussen het i-de en $(i+1)$-ste uitval. Dan is X_{i+1} exponentieel verdeeld met parameter $(N - i)\lambda,\ i = 0, 1, \ldots, N$.

Laat $X(t)$ het aantal uitgevallen atomen zijn op tijdstip t. Dan is $\{X(t),\ t \geq 0\}$ een Markovproces op $S = \{0, 1, \ldots, N\}$ met generator matrix

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -\lambda_{N-1} & \lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda_N \end{pmatrix} \text{ met } \lambda_i = (N-i)\lambda,\ i = 0, 1, \ldots, N.$$

Uit de voorwaartse differentiaalvergelijking $P'(t) = P(t)Q$ volgt (met $\lambda_1 = 0 = p_{0,j-1}(t)$) dat

$$p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t) = (N - j + 1)p_{i,j-1}(t) - (N - j)p_{ij}(t),\ N \geq j \geq i \geq 0.$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijking is (eenvoudig te controleren):

$$p_{ij}(t) = \binom{N-i}{j-i}\{e^{-\lambda t}\}^{N-j}(1 - e^{-\lambda t})^{j-i},\ N \geq j \geq i \geq 0.$$

Deze kans hoort bij de binomiale verdeling en geeft de kans op $j-i$ successen bij $N-i$ pogingen als de succeskans $p = 1 - e^{-\lambda t}$. Een overgang in tijdsduur t van toestand i naar toestand j, d.w.z. dat er nog $j-i$ atomen uitgevallen in tijdsduur t als er bij het begin nog $N-i$ atomen niet zijn uitgevallen, is inderdaad de kans op $j-i$ successen bij $N-i$ pogingen, waarbij iedere poging de kans op uitval in tijdsduur t, d.w.z. de kans $1-e^{-\lambda t}$, heeft.

Doorlooptijd We bekijken weer het algemene geboorte-sterfte proces. Laat T_i de tijd zijn totdat het systeem, startend in toestand i, toestand $i+1$ bereikt, $i = 0, 1, \ldots$. We zullen $\mathbb{E}(T_i)$ recursief berekenen. T_0 is exponentieel verdeeld, dus $\mathbb{E}(T_0) = \frac{1}{\lambda_0}$. Laat

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{als de eerste transitie van } i \text{ naar } i+1 \text{ gaat} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{I_i = 1\} &= \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i};\ \mathbb{P}\{I_i = 0\} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i};\ \mathbb{E}\{T_i \mid I_i = 1\} = \frac{1}{\nu_i} = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} \\ \mathbb{E}\{T_i \mid I_i = 0\} &= \frac{1}{\nu_i} + \mathbb{E}\{T_{i-1}\} + \mathbb{E}\{T_i\} = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \mathbb{E}\{T_{i-1}\} + \mathbb{E}\{T_i\}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{T_i\} &= \mathbb{E}\{T_i \mid I_i = 1\} \cdot \mathbb{P}\{I_i = 1\} + \mathbb{E}\{T_i \mid I_i = 0\} \cdot \mathbb{P}\{I_i = 0\} \\ &= \tfrac{1}{\lambda_i+\mu_i} \cdot \tfrac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i} + \left\{ \tfrac{1}{\lambda_i+\mu_i} + \mathbb{E}\{T_{i-1}\} + \mathbb{E}\{T_i\} \right\} \cdot \tfrac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i} \\ &= \tfrac{1}{\lambda_i+\mu_i} + \tfrac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i} \cdot \left\{ \mathbb{E}\{T_{i-1}\} + \mathbb{E}\{T_i\} \right\}, \end{aligned}$$

waaruit direct is af te leiden dat

$$\mathbb{E}\{T_i\} = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} \cdot \mathbb{E}\{T_{i-1}\}. \tag{3.3.9}$$

Hiermee zijn de getallen $\mathbb{E}(T_i)$ recursief te berekenen. We zullen dit uitwerken voor het geval dat λ_i en μ_i onafhankelijk zijn van i.

Beschouw eerst weer het geval $\lambda = \mu$. Dan is $\mathbb{E}\{T_i\} = \frac{1}{\lambda} + \mathbb{E}\{T_{i-1}\}$. Hieruit volgt $\mathbb{E}\{T_i\} = \frac{i+1}{\lambda}$, $i = 0, 1, \ldots$. Voor de verwachte tijd om toestand j te bereiken als we starten in toestand $k < j$ geldt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\text{tijd om van } k \text{ naar } j \text{ te komen}\} &= \mathbb{E}\{T_k\} + \mathbb{E}\{T_{k+1}\} + \cdots + \mathbb{E}\{T_{j-1}\} \\ &= \tfrac{(k+1)+(k+2)+\cdots+j}{\lambda} = \tfrac{j(j+1)-k(k+1)}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Vervolgens beschouwen we het geval dat $\lambda \neq \mu$, zodat

$$\mathbb{E}\{T_i\} = \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} \cdot \mathbb{E}\{T_{i-1}\}.$$

Met inductie is aan te tonen (zie Vraag 3.3) dat $\mathbb{E}\{T_i\} = \frac{1-(\frac{\mu}{\lambda})^{i+1}}{\lambda-\mu}$, $i = 0, 1, \ldots$.

De generator matrix $Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \mu_1 & -\lambda_1-\mu_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2-\mu_2 & \lambda_2 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$.

De voorwaartse en achterwaartse Kolmogorov differentiaalvergelijkingen worden, respectievelijk:

$$\begin{aligned} p'_{i0}(t) &= -\lambda_0 p_{i0}(t) + \mu_1 p_{i1}(t); \\ p'_{ij}(t) &= \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_{ij}(t) + \mu_{j+1} p_{i,j+1}(t),\ j \geq 1 \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

en

$$\begin{aligned} p'_{0j}(t) &= -\lambda_0 p_{0j}(t) + \lambda_0 p_{1j}(t); \\ p'_{ij}(t) &= \mu_i p_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1,j}(t),\ i \geq 1 \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Voorbeeld 3.8

In dit voorbeeld laten we, voor een eenvoudig geval, zien hoe uit de differentiaalvergelijkingen de toestandsovergangen $p_{ij}(t)$ bepaald kunnen worden. Laat $S = \{0, 1\}$ en de generator matrix

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Dit is dus een geboorte-sterfte proces waarbij tussen de toestanden 0 en 1 heen en weer wordt gesprongen. De parameters zijn $\lambda_0 = \lambda;\ \lambda_1 = 0;\ \mu_0 = 0$ en $\mu_1 = \mu$.
De eerste differentiaalvergelijking van (3.3.10) wordt:

$$p'_{00}(t) = -\lambda p_{00}(t) + \mu p_{01}(t) = -\lambda p_{00}(t) + \mu(1 - p_{00}(t)) = \mu - (\lambda + \mu) p_{00}(t). \tag{3.3.12}$$

Met standaard technieken uit de analyse is deze vergelijking op te lossen:

$$p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{3.3.13}$$

Omdat $p_{00}(t) + p_{01}(t) = 1$ voor alle t, geldt: $p_{01}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$.
Geheel analoog is af te leiden dat

$$p_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \text{ en } p_{11}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{3.3.14}$$

Merk op dat voor de *long run* kansen geldt:

$$\lim_{t\to\infty} p_{01}(t) = \lim_{t\to\infty} p_{11}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu};\ \lim_{t\to\infty} p_{00}(t) = \lim_{t\to\infty} p_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \tag{3.3.15}$$

Vraag 3.3

Toon aan dat in een geboorte-sterte proces waarin de λ_i's en μ_i's onafhankelijk van i zijn en $\lambda \neq \mu$ geldt: $\mathbb{E}\{T_i\} = \frac{1-(\frac{\mu}{\lambda})^{i+1}}{\lambda-\mu},\ i = 0, 1, \dots$.

Vraag 3.4

Beschouw een geboorte-sterfte proces met $\lambda_i = (i+1)\lambda,\ i \geq 0$ en $\mu_i = i\mu,\ i \geq 0$.

a. Bepaal de verwachte tijd om van toestand 0 naar toestand 4 te gaan.

b. Bepaal de verwachte tijd om van toestand 2 naar toestand 5 te gaan.

Vraag 3.5

Veronderstel voor het model uit Voorbeeld 3.8 dat $\mathbb{P}\{X(0) = 1\} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Toon aan dat $\mathbb{P}\{X(t) = 1\} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ voor alle $t \geq 0$.

Vraag 3.6

Beschouw een zuiver sterfte proces: $\lambda_i = 0$ voor alle i en $\mu_i = \mu$ voor alle $i \geq 1$.

Bepaal voor alle $i \geq 0$: $p_{ij}(t)$ voor alle $0 \leq j \leq i$ en alle $t \geq 0$.

Vraag 3.7

Laat zien dat (3.3.3) een oplossing is van de differentiaalvergelijking (3.3.2).

3.4 Uniformisatie

Met de uniformisatietechniek kan een continue Markov keten worden omgezet in een discrete keten. Beschouw allereerst het geval dat alle verblijftijden in stochastische zin hetzelfde zijn, d.w.z. $\nu_i = \nu$ voor alle $i \in S$. In dit geval is $N(t)$, het aantal transities in tijdsduur t, Poisson verdeeld met parameter νt, d.w.z.

$$\mathbb{P}\{N(t) = n\} = e^{-\nu t}\frac{(\nu t)^n}{n!},\ n \geq 0. \tag{3.4.1}$$

We kunnen nu $p_{ij}(t)$ berekenen door te conditioneren naar het aantal Poisson gebeurtenissen:

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= \mathbb{P}\{X(t) = j \mid X(0) = i\} \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X(t) = j \mid X(0) = i, N(t) = n\} \cdot \mathbb{P}\{N(t) = n \mid X(0) = i\} \qquad (3.4.2) \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X(t) = j \mid X(0) = i, N(t) = n\} \cdot e^{-\nu t}\frac{(\nu t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} e^{-\nu t}\frac{(\nu t)^n}{n!}, \end{aligned}$$

de laatste gelijkheid omdat $N(t) = n$ betekent dat er n transities van de discrete Markov keten hebben plaatsgevonden in $(0, t)$.

In het algemeen zijn de ν_i's echter niet identiek. Toch is bovenstaande techniek door een truc ook toe te passen. Het idee is om $\nu \geq \nu_i,\ i \in S$ te nemen, en fictieve transities van toestand i naar zichzelf toe te staan, $i \in S$. Het verlaten van toestand i met snelheid ν_i is stochastisch equivalent met het 'verlaten' van toestand i met snelheid ν, maar slecht een fractie $\frac{\nu_i}{\nu}$ 'door te laten' en het restant als transitie naar toestand i zelf te beschouwen. Dit betekent dat de transities worden bepaald door een andere discrete Markov keten, namelijk

$$\overline{P} = (\overline{p}_{ij}) \text{ met } \overline{p}_{ij} = \begin{cases} \frac{\nu_i}{\nu} \cdot p_{ij}, & j \neq i; \\ 1 - \frac{\nu_i}{\nu}, & j = i. \end{cases} \tag{3.4.3}$$

Zij $\{N(t)\}$, $t \geq 0\}$ een Poisson proces met parameter ν en beschouw de continue Markov keten $\{\overline{X}(t)\}$, $t \geq 0\}$ met $\overline{X}(t) = \overline{X}_{N(t)}$, waarbij $\overline{X}_{N(t)}$ de discrete Markov keten met transities $\overline{p}_{ij} = \begin{cases} \frac{\nu_i}{\nu} \cdot p_{ij}, & j \neq i; \\ 1 - \frac{\nu_i}{\nu}, & j = i. \end{cases}$ is. Analoog aan (3.4.2) geldt:

$$\overline{p}_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{p}_{ij}^{(n)} e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^n}{n!} \tag{3.4.4}$$

Het formele bewijs dat de continue Markov ketens $\{X(t)\}$ en $\{\overline{X}(t)\}$ stochastisch equivalent zijn, wordt gegeven in de volgende stelling.

Stelling 3.6
$p_{ij}(t) = \overline{p}_{ij}(t)$ voor alle $i, j \in S$ en alle $t \geq 0$.

Bewijs
Laat $P(t)$ de matrix zijn met elementen p_{ij}, $i, j \in S$. Uit de de Kolmogorov voorwaartse differentiaalvergelijkingen volgt (in vectornotatie) $P'(t) = P(t)Q$ met als oplossing

$$P(t) = P(0)e^{tQ} = e^{tQ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot Q^n, \; t \geq 0.$$

De matrix $\overline{P} = \frac{1}{\nu}Q + I$, ofwel $Q = \nu(\overline{P} - I)$, waaruit volgt

$$P(t) = e^{\nu t(\overline{P} - I)} = e^{-\nu t} \cdot e^{\nu t \overline{P}} = e^{-\nu t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu t)^n}{n!} \cdot \overline{P}^n = \overline{P}(t),$$

de laatste gelijkheid volgens (3.4.4). $\square$

Voorbeeld 3.8 (vervolg)
Neem $\nu = \lambda + \mu$. Voor de overgangsmatrix $\overline{P}$ geldt $\overline{P} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{pmatrix}$.

De kans om naar toestand 0 te gaan is dus altijd $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$, waaruit volgt $\overline{p}_{i0}^{(n)} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ voor alle $n \geq 1$ en $i = 0, 1$.

$$\begin{aligned} p_{00}(t) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \overline{p}_{00}^{(n)} e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^n}{n!} = e^{-\nu t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot e^{-\nu t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\nu t)^n}{n!} = e^{-\nu t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot e^{-\nu t}\{e^{\nu t} - 1\} \\ &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t}. \end{aligned}$$

Omdat $p_{00}(t) + p_{01}(t) = 1$ voor alle t, is $p_{01}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t}$.

Op grond van symmetrie krijgen we: $p_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t}$ en $p_{11}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t}$.

Voorbeeld 3.9 *Autowasserette*

Beschouw een autowasserette waarin plaats is voor één auto. Klanten arriveren volgens een Poissonproces met parameter 1, het wassen van de auto heeft een exponentiële tijdsduur met parameter 2, waarna afgerekend wordt wat ook een exponentiële tijdsduur heeft, met parameter 3. We veronderstellen dat een klant de wasserette alleen bezoekt als de wasserette leeg is.

Laat $S = \{0, 1, 2\}$ met $0 =$ geen auto in de wasserette, $1 =$ de auto wordt gewassen en $2 =$ er wordt afgerekend.

De bijbehorende generator matrix $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

De stationaire kansen volgen uit het stelsel $\begin{cases} P_0 &= 3P_2 \\ 2P_1 &= P_0 \\ 3P_2 &= 2P_1 \\ P_0 + P_1 + P_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \; P_0 = \frac{6}{11},\; P_1 = \frac{3}{11},\; P_2 = \frac{2}{11}.$

We zullen vervolgens uniformisatie toepassen.

Neem $\nu = 3$, wat de discrete Markov keten geeft met $\overline{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De stationaire verdeling van $\overline{P}$ volgt uit $\begin{cases} x_0 &= \frac{2}{3}x_0 + x_2 \\ x_1 &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_0 \\ x_2 &= \frac{2}{3}x_1 \\ x_0 + x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \; x_0 = \frac{6}{11},\; x_1 = \frac{3}{11},\; x_2 = \frac{2}{11}.$

Voor het transiënt gedrag krijgen we: $\overline{p}_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{p}_{ij}^{(n)} e^{-3t} \frac{(3t)^n}{n!}$

Hieruit volgt bijvoorbeeld: $\lim_{t\to\infty} \overline{p}_{00}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{p}_{00}^{(n)} e^{-3t} \frac{(3t)^n}{n!} = \frac{6}{11}$.

Dit laatste is intuïtief als volgt in te zien: voor kleine waarden van n is $\lim_{t\to\infty} \overline{p}_{00}^{(n)} e^{-3t} \frac{(3t)^n}{n!} = 0$ en voor grote waarden van n is $\overline{p}_{00}^{(n)} \approx \pi_0 = \frac{6}{11}$; verder is $\sum_{n \geq n_0} \frac{(3t)^n}{n!} \approx e^{3t}$ voor grote waarden van t, zodat $lim_{t\to\infty} \overline{p}_{00}(t) \approx \frac{6}{11} \cdot e^{-3t} \cdot e^{3t} = \frac{6}{11}$.

3.5 Stationair gedrag

Bij Voorbeeld 3.8 hebben we in formule (3.3.15) gezien dat $\lim_{t\to\infty}\; p_{ij}(t)$ bestaat en onafhankelijk is van i. In de praktijk is dit in veel situaties het geval.

Veronderstel dat $\lim_{t\to\infty}\; p_{ij}(t)$ bestaat en onafhankelijk is van i, zeg

$$0 < P_j = \lim_{t\to\infty}\; p_{ij}(t) \text{ voor alle } j \in S \text{ en onafhankelijk van } i. \tag{3.5.1}$$

De getallen $P_j,\ j \in S$, heten de *stationaire kansen*.

Aan bovenstaande veronderstelling is onder andere voldaan onder de volgende aanname.

Aanname 3.3 *:*

1. *Er is een toestand r zodat voor iedere begintoestand i met kans 1 het proces ooit in toestand r komt. Dit gebeurt in eindige verwachte tijd.*

2. *De verwachting van de tijd tussen twee opeenvolgende bezoeken aan r is eindig.*

Omdat $P_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)$, is $\lim_{t\to\infty} p'_{ij}(t) = 0$. Als we veronderstellen dat limiet en sommatie verwisseld mogen worden, dan volgt uit de voorwaartse differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to\infty} p'_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty} \{\textstyle\sum_{k\neq j} q_{kj}p_{ik}(t) - \nu_j p_{ij}(t)\} \\ &= \textstyle\sum_{k\neq j} q_{kj}P_k - \nu_j P_j,\ j \in S. \end{aligned}$$

Bovendien volgt uit $\sum_j p_{ij}(t) = 1$, dat $1 = \lim_{t\to\infty} \sum_j p_{ij}(t) = \sum_j P_j$. Ook kan het volgende resultaat worden aangetoond.

Stelling 3.7 *Veronderstel dat aannames 3.1 en 3.2 gelden.*

i) *Onder aanname 3.3 is $\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$ onafhankelijk van i, zeg de limiet is P_j, voor alle j. $P = (P_j)_j$ heet de stationaire verdeling. P is op een constante na de unieke oplossing van het stelsel lineaire vergelijkingen*

$$\nu_j x_j = \textstyle\sum_{k\neq j} q_{kj}x_k,\ j \in S, \tag{3.5.2}$$

d.w.z. de stationaire verdeling is een linker eigenvector van Q bij eigenwaarde 0.

ii) *Omgekeerd, stel dat er een toestand $r \in S$ is zodat r met kans 1 vanuit elke toestand bereikt wordt. Stel dat Q een linkseigenvector x heeft bij eigenwaarde 0, met $x_i > 0$ voor alle i. Als geldt dat $\sum_i x_i < \infty$, dan is $(x_j/\sum_i x_i)_j$ de stationaire verdeling van het Markovproces. Als $\sum_i x_i = \infty$, dan bestaat de stationaire verdeling niet.*

Opmerkingen

1) Het bewijs van Stelling 3.7 is te vinden in H.C. Tijms, *A first course in stochastic models*, Wiley, 2003, pagina 155. Het is gebaseerd op een vergelijkbaar resultaat voor discrete Markovketens.

2) Net als bij discrete Markov ketens heeft P_j de interpretatie van de fractie van de tijd dat het systeem op de lange duur in toestand j is.

3) De vergelijking (3.5.2) heeft de volgende interpretatie:

$$\begin{aligned} \nu_j P_j = &\quad \text{de 'stroom' waarmee het proces toestand } j \text{ verlaat;} \\ \sum_{k\neq j} q_{kj}P_k = &\quad \text{de 'stroom' waarmee het proces toestand } j \text{ bereikt;} \end{aligned}$$

Vergelijking (3.5.2) houdt dus in dat in iedere toestand de snelheid 'de toestand uit' gelijk is aan de snelheid de 'toestand in'. Vandaar dat (3.5.2) ook wel de *balansvergelijkingen* heten.

Voorbeeld 3.1 (vervolg)

Uit (3.5.2) volgt voor de stationaire kansen:

$\mu P_0 = \lambda P_1;\ \lambda P_i = \lambda P_{i+1},\ 1 \le i \le N-1;\ \lambda P_N = \mu P_0$; d.w.z. $P_1 = P_2 = \cdots = P_N = p$ en $P_0 = \frac{\lambda}{\mu} p$.

Uit $\sum_j P_j = 1$ volgt $Np + \frac{\lambda}{\mu} p = 1$, zodat $P_1 = P_2 = \cdots = P_N = \frac{\mu}{N\mu+\lambda}$ en $P_0 = \frac{\lambda}{N\mu+\lambda}$.

De (long run) gemiddelde voorraad in de tank is $\sum_{j=0}^N jP_j = \sum_{j=1}^N jP_j = \frac{1}{2}N(N+1)\frac{\mu}{N\mu+\lambda}$.

De (long run) fractie van de tijd dat de tank leeg is $P_0 = \frac{\lambda}{N\mu+\lambda}$.

Voorbeeld 3.10

Beschouw een apparaat met 2 componenten. De i-de component heeft een levensduur die exponentieel verdeeld is met parameter λ_i $(i=1,2)$. Als de i-de component stuk is, dan wordt deze gerepareerd, waarbij de reparatietijd exponentieel verdeeld is met parameter μ_i $(i=1,2)$. Als een van de componenten in reparatie is en de andere gaat stuk, dan wordt de huidige reparatie stopgezet en wordt begonnen met de reparatie van de als laatste kapot gegane component. Omdat de resterende reparatietijd weer exponentieel verdeeld is met dezelfde parameter is het onderliggende proces een Markoproces.

Als toestanden nemen we:

0: beide componenten functioneren;

1: component 1 is stuk en component 2 functioneert;

2: component 2 is stuk en component 1 functioneert;

3: beide componenten zijn stuk en component 1 is/gaat in reparatie;

4: beide componenten zijn stuk en component 2 is/gaat in reparatie.

Voor de getallen ν_i en q_{ij} geldt (we geven alleen waarden ongelijk 0):

$\nu_0 = \lambda_1 + \lambda_2;\ \nu_1 = \lambda_2 + \mu_1;\ \nu_2 = \lambda_1 + \mu_2;\ \nu_3 = \mu_1;\ \nu_4 = \mu_2$..

$q_{01} = \lambda_1;\ q_{02} = \lambda_2;\ q_{10} = \mu_1;\ q_{14} = \lambda_2;\ q_{20} = \mu_2;\ q_{23} = \lambda_1;\ q_{32} = \mu_1;\ q_{41} = \mu_2$.

Het stelsel (3.5.2) wordt:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\lambda_1+\lambda_2)P_0 & = & \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 \\ (\mu_1+\lambda_2)P_1 & = & \lambda_1 P_0 + \mu_2 P_4 \\ (\mu_2+\lambda_1)P_2 & = & \lambda_2 P_0 + \mu_1 P_3 \\ \mu_1 P_3 & = & \lambda_1 P_2 \\ \mu_2 P_4 & = & \lambda_2 P_1 \end{array} \right. \tag{3.5.3}$$

Uit de tweede en de vijfde vergelijking volgt: $P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} P_0$ en $P_4 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2} P_0$.

Uit de eerste vergelijking volgt nu $P_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} P_0$ en uit de vierde $P_3 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2} P_0$.

Hieruit volgt m.b.v. $\sum_j P_j = 1:\ P_0 = \left\{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + 2\frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}\right\}^{-1}$, waarmee alle stationaire kansen zijn bepaald.

Voor het geboorte-sterfteproces wordt het stelsel (3.5.2):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_0 P_0 & = & \mu_1 P_1 \\ (\lambda_j+\mu_j)P_j & = & \lambda_{j-1}P_{j-1} + \mu_{j+1}P_{j+1},\ j \ge 1 \end{array} \right. \tag{3.5.4}$$

Een intuïtieve afleiding van (3.5.4) kan ook uit de voorwaartse Kolmogorov differentiaalvergelijkingen worden verkregen. Onder de aanname van (3.5.1) geldt intuïtief dat stationair gedrag impliceert dat $\lim_{t\to\infty} p'_{ij}(t) = 0$ voor alle i en j. Met de eigenschap dat $lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = 0$ voor alle j onafhankelijk is van i, wordt uit (3.3.10) het stelsel (3.5.4) verkregen.

Met inductie naar j is eenvoudig in te zien dat uit (3.5.4) volgt:

$$\lambda_j P_j \;=\; \mu_{j+1} P_{j+1},\ j \geq 0 \tag{3.5.5}$$

Uit (3.5.5) volgt $P_j = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} P_{j-1} = \cdots = \frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}\cdots\lambda_0}{\mu_j\mu_{j-1}\cdots\mu_1} P_0,\ j \geq 1.$

Laat $C_0 = 1$ en $C_j = \frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}\cdots\lambda_0}{\mu_j\mu_{j-1}\cdots\mu_1},\ j \geq 1$. M.b.v. $\sum_j P_j = 1$, krijgen we $P_0 = \{\sum_{j=0}^{\infty} C_j\}^{-1}$, waaruit volgt

$$P_j \;=\; \Big\{\sum_{k=0}^{\infty} C_k\Big\}^{-1} \cdot C_j,\ j \geq 0. \tag{3.5.6}$$

Bovenstaande afleiding geeft ook aan wat noodzakelijkerwijs moet gelden opdat de stationaire kansen $P_j,\ j \in S$ bestaan, namelijk dat $\sum_{j=0}^{\infty} C_j < \infty$. Er kan worden aangetoond dat deze voorwaarde ook voldoende is.

Voorbeeld 3.6 (vervolg)

Uit $\lambda_i = i\lambda + \theta,\ i \geq 0$, en $\mu_i = i\mu,\ i \geq 1$, volgt dat voor het bestaan van de stationaire kansen nodig en voldoende is dat $1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta(\theta+\lambda)\cdots(\theta+[j-1]\lambda)}{j!\mu^j} < \infty$.

Uit de d'Alembert-test volgt dat moet gelden

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\theta(\theta+\lambda)\cdots(\theta+j\lambda)}{(j+1)!\mu^{(j+1)}} \cdot \frac{j!\mu^j}{\theta(\theta+\lambda)\cdots(\theta+[j-1]\lambda)} = \lim_{j\to\infty} \frac{\theta+j\lambda}{(j+1)\mu} < 1,$$

d.w.z. dat $\lambda < \mu$.

Verder merken we op dat $C_j = \frac{\frac{\theta}{\lambda}(\frac{\theta}{\lambda}+1)\cdots(\frac{\theta}{\lambda}+[j-1])}{j!} \cdot (\frac{\lambda}{\mu})^j = \begin{pmatrix} \frac{\theta}{\lambda}+j-1 \\ j \end{pmatrix} (\frac{\lambda}{\mu})^j$.

Omdat $(1-x)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n+j-1 \\ j \end{pmatrix} x^j$, geldt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\theta}{\lambda}+j-1 \\ j \end{pmatrix} (\tfrac{\lambda}{\mu})^j = (1-\tfrac{\lambda}{\mu})^{-\frac{\theta}{\lambda}}.$$

Hieruit volgt $P_0 = (1-\frac{\lambda}{\mu})^{\frac{\theta}{\lambda}}$ en $P_j = \begin{pmatrix} \frac{\theta}{\lambda}+j-1 \\ j \end{pmatrix} (\frac{\lambda}{\mu})^j \cdot (1-\frac{\lambda}{\mu})^{\frac{\theta}{\lambda}},\ j \geq 1$.

Vraag 3.8

Automobilisten komen aan bij een benzinestation volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 10 klanten per uur. Het benzinestation heeft slechts één benzinepomp en de tijd die nodig is om te tanken is voor iedere automobilist exponentieel verdeeld met een verwachtingswaarde van drie minuten. Een automobilist gaat het benzinestation alleen binnen als daar hoogstens twee andere auto's zijn.

a. Bereken het gemiddeld aantal auto's in het benzinestation.

b. Wat is de fractie automobilisten die doorrijdt?

Vraag 3.9

Beschouw het $M/M/1$-model, het geboorte-sterfte proces met $\lambda_i = \lambda, i \geq 0$ en $\mu_i = \mu, i \geq 1$.

a. Toon aan dat de stationaire kansen bestaan d.e.s.d. als $\lambda < \mu$.

b. Bepaal de stationaire kansen.

Vraag 3.10

In een productiehal zijn een snelle en een langzame machine aanwezig voor het afhandelen van orders. Orders komen binnen volgens een Poisson proces met parameter λ. Een binnenkomende klant die beide machines bezet treft, gaat verloren. Als een aankomende order beide machines vrij treft, dan wordt de order toegewezen aan de snelle machine. Is alleen de langzame machine vrij, dan gaat de order naar de langzame machine. De bewerkingstijd van een opdracht is exponentieel verdeeld met parameter μ_1 op de snelle machine en μ_2 op de langzame machine.

a. Bepaal de generator matrix van dit Markovproces .

b. Stel de balansvergelijkingen op.

3.6 Reversibiliteit

Beschouw een Markovproces onder Aanname 3.1 en 3.2. Verder nemen we aan dat het Markovproces irreducibel is. We zullen nu de stationaire kansen P_j vanuit een ander perspectief beschouwen.

Neem aan dat het Markovproces gedefinieerd is voor $t \in (-\infty, \infty)$. Op tijdstip t loopt het al oneindig lang, en is het derhalve in de stationaire verdeling. Kies nu tijdstip t, en beschouw het omgekeerde proces

$$\hat{X}(s) = X(t-s), \quad s \in (-\infty, \infty).$$

Dan is $\hat{X}$ weer een homogeen Markovproces (zie Opgave 3.19) met transitiefunctie $\{\hat{P}(t)\}_t$ die we als volgt berekenen:

$$\begin{aligned}
\hat{p}_{ij}(u) &= \mathbb{P}\{\hat{X}(s+u) = j \,|\, \hat{X}(s) = i\} \\
&= \frac{\mathbb{P}\{X(t-s) = i \,|\, X(t-s-u) = j\}\mathbb{P}\{X(t-s-u) = j\}}{\mathbb{P}\{X(t-s) = i\}} \\
&= \frac{p_{ji}(u)P_j}{P_i}.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de generator $\hat{Q}$ van $\hat{X}$ wordt gegeven door

$$\hat{q}_{ij} = q_{ji}\frac{P_j}{P_i}.$$

Merk op dat $\hat{q}_{ii} = q_{ii}$ en dus heeft de verblijftijd van X in i dezelfde verdeling als de verblijftijd van $\hat{X}$ in i. We kunnen nu het begrip *reversibiliteit* introduceren. Het Markovproces X is *reversibel* als X en $\hat{X}$ dezelfde waarschijnlijkheidswet hebben, d.w.z. als $Q = \hat{Q}$.

Vullen we de uitdrukking voor $\hat{Q}$ in, dan krijgen we dat X reversibel is d.e.s.d.a.

$$P_i q_{ij} = P_j q_{ji}. \tag{3.6.1}$$

Vergelijking (3.6.1) heeft de interpretatie dat de stroom van i naar j, d.w.z. $P_i q_{ij}$, gelijk is aan de stroom van j naar i, d.w.z. $P_j q_{ji}$, voor alle i en j.

Vergelijking (3.6.1) impliceert dat de stationaire verdeling (mits deze bestaat) van een reversibel proces heel gemakkelijk te berekenen is. Kies hiervoor een vaste referentietoestand, zeg 0. Stel dat $0 \to i_1 \to i_2 \to \ldots \to i_n \to i$ een pad in de geassocieerde gerichte graaf is. Dan zegt de reversibiliteit dat je in omgekeerde richting een pijlenpad terug kunt lopen. I.h.b. kun je de stationaire kans P_i op i net als bij geboorte-sterfte processen uitdrukken in de stationaire kans P_0 op 0 door

$$P_i = \frac{q_{i_n i}}{q_{i_n i}} P_{i_n} = \frac{q_{n_i i} q_{i_{n-1} i_n}}{q_{i n_i} q_{i_n i_{n-1}}} P_{i_{n-1}} = \cdots = \frac{q_{i_n i} q_{i_{n-1} i_n} \cdots q_{0 i_1}}{q_{i n_i} q_{i_n i_{n-1}} \cdots q_{i_1 0}} P_0,$$

m.a.w. P_i/P_0 is gelijk aan het product van de intensiteiten langs een pad van 0 naar i gedeeld door het product van de intensiteiten langs hetzelfde pad, maar dan met omgekeerde pijlen. Dit geeft een karakterisatie van reversibiliteit die geen stationaire kansen gebruikt.

Stel nl. dat we een ander pad van i naar 0 kiezen. Dan kunnen we op dezelfde manier P_0 in P_i uitdrukken als een quotiënt van de intensiteiten langs het pad van 0 naar i en het product van de intensiteiten langs het omgekeerde pad. Als we de twee expressies combineren, krijgen we dat $1 = P_0/P_0$ is gelijk aan product van de intensiteiten langs een pijlenronde van 0 naar 0 gedeeld het product van de intensiteiten langs de omgekeerde ronde.

Stelling 3.8 *Stel het Markov proces $\{X(t), t \geq 0\}$ is irreducibel. Het Markov proces is reversibel d.e.s.d.a. voor elke pijlenronde in de geassocieerde gerichte graaf geldt dat het product van de intensiteiten langs de pijlenronde gelijk is aan het product van de intensiteiten langs de omgekeerde ronde.*

We hebben één kant op al bewezen, het bewijs van de omgekeerde bewering is een opgave.

Stelling 3.9
Irreducibele geboorte-sterfte processen zijn reversibel.

Bewijs Dit volgt direct uit Stelling 3.8. □

Vraag 3.11
Beschouw een groep van n machines en een service faciliteit om de machines te repareren. Als machine i stuk gaat, dan vereist dat een exponentieel verdeelde reparatieduur met parameter μ_i. De service faciliteit verdeelt zijn aandacht gelijk over de kapotte machines, d.w.z. dat als er k machines stuk zijn waaronder machine i, machine i geholpen wordt met een snelheid van $\frac{\mu_i}{k}$ per tijdseenheid. Als machine i functioneert, dan gaat deze machine stuk na een tijdsduur die exponentieel verdeeld is met een snelheid van λ_i.

a. Bepaal een geschikte toestandsruimte S zodat we bovenstaand proces kunnen beschouwen als een Markov keten met deze toestandsruimte. Geef de bijbehorende infinitesimale overgangssnelheden q_{ij}.

b. Laat zien dat dit model reversibel is.

c. Bereken de stationaire kansen P_i, $i \in S$.

3.7 Opgaven

Opgave 3.1

Beschouw een fabriek met N identieke machines, die elk een exponentiële levensduur hebben met paramater λ. Er is één monteur die de kapotte machines repareert. De reparatietijd is exponentiële verdeeld met paramater μ. Zij $\{X(t)\}$ het aantal machines dat op tijdstip t kapot is.

a. Beargumentaar waarom $\{X(t)\}$ een continue Markov keten is.

b. Geef de generator matrix Q.

Opgave 3.2

Veronderstel dat een ééncellig organisme in twee verschijningen kan voorkomen: of als A of als B. Een organisme van type A gaat na een tijdsduur die exponentieel verdeeld is met parameter α over in type B; een organisme van type B splitst zich na een tijdsduur die exponentieel verdeeld is met parameter β in twee organismen van type A.

Definieer een geschikte continue Markov keten om de populatie van dit organisme te beschrijven en bepaal de verblijftijden en de overgangskansen.

Opgave 3.3

Beschouw een populatie van N personen, waarvan er één op tijdstip $t = 0$ besmet is met een virus. Een besmet persoon blijft altijd besmet en maakt in een tijdsduur h met kans $\alpha h + o(h)$ een niet-besmet persoon ook besmet.

Neem $X(t)$ = het aantal besmette personen op tijdstip t, dan is het proces $X(t)$ een zuiver geboorteproces op toestandsruimte $S = \{1, 2, \dots, N\}$, waarbij toestand i aangeeft dat er i personen besmet zijn.

a. Toon aan dat $\lambda_i = \begin{cases} (N-i)i\alpha & \text{als } i = 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & \text{als } i = N \end{cases}$

b. Laat T de tijd zijn totdat de totale populatie ziek is.

Toon aan dat $\mathbb{E}\{T\} = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i(N-i)} \approx \frac{2 \cdot ln\,(N-1)}{N\alpha}$,

waarbij de benadering mag worden toegepast voor grote waarden van N.

Opgave 3.4

Beschouw het model uit Voorbeeld 3.8. Bepaal $p_{00}(t)$ m.b.v. de achterwaartse differentiaalvergelijking en los deze vergelijking expliciet op door het volgende te doen:

a. Toon aan dat $\mu p'_{00}(t) + \lambda p'_{10}(t) = 0$.

b. Leid hierna formule (3.3.12) af.

Opgave 3.5

Beschouw een zuiver geboorte-proces, d.w.z. $\mu_i = 0$ voor alle i.

De voorwaartse differentiaalvergelijkingen (3.3.10) worden in dit geval: $p'_{ii}(t) = -\lambda_i p_{ii}(t),\ i \geq 0;\ \ p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t),\ j \geq i+1.$

Laat zien dat het volgende stelsel een recursieve oplossing geeft van deze vergelijkingen:

$p_{ii}(t) = e^{-\lambda_i t},\ i \geq 0;$

$p_{ij}(t) = \lambda_{j-1} e^{-\lambda_j t} \int_0^t\ e^{\lambda_j s} p_{i,j-1}(s) ds,\ j \geq i+1.$

Opgave 3.6

Beschouw twee identieke machines die onafhankelijk van elkaar werken met een levensduur die exponentieel verdeeld is met parameter λ.

Laat $X(t)$ het aantal machines zijn dat op tijdsduur t nog functioneert.

a. Stel de achterwaartse Kolmogorov differentiaalvergelijkingen op voor $p'_{10}(t),\ p'_{11}(t),\ p'_{20}(t),\ p'_{21}(t)$ en $p'_{22}(t)$.

b. Bepaal $p_{10}(t),\ p_{11}(t),\ p_{20}(t),\ p_{21}(t)$ en $p_{22}(t)$.

Opgave 3.7

Een bedrijf heeft drie machines en twee monteurs. Iedere machine functioneert gedurende een exponentieel verdeelde tijdsduur met parameter 4 en de reparatietijd van iedere monteur is exponentieel verdeeld met parameter 5.

a. Wat is het gemiddeld aantal machines dat werkt?

b. Wat is de fractie van de tijd dat beide monteurs tegelijk aan het werk zijn?

Opgave 3.8

Beschouw het $M/M/s$-model, $s \geq 1$, d.w.z. het geboorte-sterfte proces met $\lambda_i = \lambda,\ i \geq 0$ en

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu,\ 1 \leq i \leq s \\ s\mu,\ i \geq s+1 \end{cases}$$

a. Toon aan dat de stationaire kansen bestaan d.e.s.d. als $\lambda < s\mu$.

b. Bepaal de stationaire kansen.

Opgave 3.9

Beschouw een kleine kapperszaak met één kapper en twee kappersstoelen. Potentiële klanten arriveren volgens een Poisson proces met een snelheid van drie per uur; als de stoelen bezet zijn gaat een aankomende klant weg. De kapper knipt de klanten in een tijdsduur die exponentieel verdeeld is met een gemiddelde van een kwartier.

a. Wat is het gemiddeld aantal klanten in de zaak en hoeveel klanten worden (op de lange duur) per uur geknipt?

b. Als de kapper twee keer zo snel zou werken, hoeveel meer klanten kan hij dan per uur aan?
c. Als er twee kappers zijn, die elk knippen met een tijdsduur die exponentieel verdeeld is met een gemiddelde van een kwartier, hoeveel klanten worden er dan gemiddeld per uur geholpen?

Opgave 3.10
Bij een loket met één bediende komen potentiële klanten aan volgens een Poisson proces met aankomstintensiteit λ.
Een klant die bij aankomst n andere klanten aantreft, blijft op bediening wachten met kans $\frac{1}{n+1}$ en vertrekt met kans $\frac{n}{n+1}$.
De bedieningstijden zijn exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $\frac{1}{\mu}$.
a. Toon aan dat de stationaire verdeling van het aantal aanwezige klanten een Poisson verdeling is met verwachtingswaarde $\frac{\lambda}{\mu}$.
b. Wat is het gemiddeld aantal klanten dat per tijdseenheid tot het systeem toetreedt?

Opgave 3.11
Beschouw een geboorte-sterfte proces waarin ieder individu een geboorte geeft met exponentiële snelheid 1 en een sterfte met exponentiële snelheid 2. Daarnaast is er immigratie met exponentiële snelheid 1 als er 2 of minder individuen zijn.
Bepaal voor dit model P_0.

Opgave 3.12
Twee personen zitten in dezelfde ruimte en zijn aan het werk, tenzij ze aan de telefoon zitten (er zijn ook twee telefoons). De tijdsduur dat ze aan het werk zijn voordat de telefoon gaat is exponentieel verdeeld is met parameter λ. De tijdsduur van de telefoongesprekken is ook exponentieel verdeeld, maar met parameter μ.
Laat $X(t)$ het aantal personen zijn dat op tijdsduur t aan de telefoon is.
a. Bepaal de generator matrix van deze continue Markov keten.
b. Als $X(0) = 1$, wat is dan de verwachte tijdsduur voordat beide personen weer aan het werk zijn?
c. Wat is de fractie van de tijd dat beide tegelijk aan het werk zijn?

Opgave 3.13
Beschouw een taxibusje met 7 zitplaatsen en vertrekt zodra al deze zitplaatsen zijn gevuld met klanten. Als de taxi vertrokken is, duurt het een exponentiële tijd met parameter μ voordat een nieuw taxibusje bij de standplaats arriveert.
Potentiële klanten komen bij de standplaats aan volgens een Poisson proces met parameter λ.
Een aankomende klant die meer dan 7 wachtenden aantreft, blijft niet wachten, maar gaat weg.
Formuleer een continue Markov keten om bovenstaand probleem te analyseren.

Bepaal de toestandsruimte, de overgangsintensiteiten en de verblijftijden.

Hint:

Neem een tweedimensionale toestandsruimte $\{(i, j)\}$ met i het aantal wachtende klanten en j het aantal wachtende busjes.

Opgave 3.14

Beschouw het model uit Vraag 3.1.

a. Stel voor dit model het stelsel (3.5.2) op.

b. Bepaal de stationaire kansen.

Opgave 3.15

Beschouw een continue Markov keten met toestandsruimte $S = \{0, 1, 2\}$ en met generator matrix

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -\lambda - \mu & \lambda \\ \mu & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

a. Zij $T_i,\ i = 1, 2$, de tijd, startend in toestand i, voordat het proces toestand 0 bereikt.

Bepaal $\mathbb{E}\{T_1\}$ en $\mathbb{E}\{T_2\}$.

b. Zij S_0 de tijd, startend in toestand 0, om voor de eerste keer terug te keren in toestand 0.

Bepaal $\mathbb{E}\{S_0\}$.

c. Zij P_0 de stationaire kans op toestand 0.

Toon aan dat $P_0 = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\mathbb{E}\{S_0\}}$ en geef een interpretatie aan deze formule.

Opgave 3.16

Na gerepareerd te zijn, functioneert een machine gedurende een exponentiële tijd met parameter λ, waarna de machine stuk gaat. Als de machine stuk gaat, dan gaat deze in reparatie. Het reparatie proces bestaat uit k achtereenvolgende fases. De tijden van deze fases zijn exponentieel verdeeld met parameters $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$.

a. Welk deel van de tijd is de machine in fase i van de reparatie, $i = 1, 2, \ldots, k$?

b. Welk deel van de tijd is de machine in werking?

Opgave 3.17

Een monteur heeft twee machines in onderhoud. Als een machine gerepareerd is, dan blijft deze functioneren gedurende een exponentieel verdeelde tijdsduur met parameter $\lambda_i,\ i = 1, 2$.

Als machine i uitvalt, dan is de reparatietijd exponentieel verdeeld met parameter $\mu_i,\ i = 1, 2$.

Als machine 1 uitvalt dan gaat de monteur deze direct repareren ook als hij op dat moment met machine 2 bezig is.

Geef een formule voor de fractie van de tijd dat machine 2 functioneert.

Opgave 3.18

Klanten arriveren volgens een Poisson aankomstproces met parameter λ. Er zijn twee bedienden om de klanten te helpen met een exponentiële bedieningsduur met parameter μ_i voor bediende i, $i = 1, 2$, waarbij $\mu_1 + \mu_2 > \lambda$. Als een klant beide bedienden vrij aantreft gaat hij met kans $\frac{1}{2}$ naar bediende 1 en met kans $\frac{1}{2}$ naar bediende 2.
Bewijs dat dit proces een reversibele continue Markov keten is en bepaal de stationaire kansen.

Opgave 3.19

Laat zien dat het omgekeerde proces $\hat{X}$ een Markov proces is.

Opgave 3.20

Bewijs de "slechts dan" uitspraak in Stelling 3.8: als voor elke pijlenronde het product van de intensiteiten langs de ronde gelijk is aan het product van de intensiteiten langs de omgekeerde ronde, dan is het Markov proces reversibel. Hint: poneer wat de stationaire kansen zouden moeten zijn, verifieer dat dit inderdaad de stationaire kansen zijn en dat zij voldoen aan (3.6.1).

Opgave 3.21 Cloud computing

Om piekperiodes in de vraag goed op te kunnen vangen heeft Amazon.com een overcapaciteit aan computerfaciliteiten. Daarom biedt Amazon.com aan klanten de mogelijkheid om tegen betaling tijdens rustiger periodes gebruik te maken van zijn computerfaciliteiten.

Niet alle klanten hebben behoefte aan een even grote rekencapaciteit. Sommige klanten willen daardoor meer zogenaamde 'virtuële machines' (VM's) dan andere. Aankomende klanten wier vraag niet voldaan kan worden, gaan verloren (worden geblokkeerd). Amazon.com is geïnteresseerd in de fractie van klanten die verloren gaan.

We bekijken een klein voorbeeld. Neem aan dat er 5 VM's beschikbaar zijn. Type 1 klanten zijn de klanten die 1 VM nodig hebben. Deze komen aan volgens een Poissonproces met parameter λ_1 en hebben de VM een exponentieel verdeelde tijd nodig met parameter μ_1. Type 2 klanten zijn klanten die 2 VM's nodig hebben (en geen genoegen nemen met minder). Deze komen aan volgens een Poissonproces met parameter λ_2. Type 2 klanten hebben de twee VM's in het totaal een exponentieel verdeelde duur nodig met parameter μ_2.
Aankomstprocessen en bedieningsduren zijn onafhankelijk van elkaar. $X_{t,i}$ is het aantal type i klanten in het systeem op tijdstip t, $i = 1, 2$. $X_t = (X_{t,1}, X_{t,2})$, $t \geq 0$, is dus een twee-dimensionaal proces.

a) Specificeer de toestandsruimte, en de overgangsintensiteiten van het proces.

b) Stel dat X_t, $t \geq 0$, stationair is. Laat zien dat X_t reversibel is.

c) Bereken de stationaire verdeling.

d) Geef (in termen van de stationaire kansen) de blokkeringskans voor type 1, voor type 2 en voor willekeurige aankomende klanten. Specificeer het gemiddelde aantal ongebruikte VM's per tijdseenheid, ook in termen van de stationaire kansen.

Hoofdstuk 4

ACHTERGROND STELLINGEN

4.1 Convergentiestellingen

Gegeven functies $a_n, b_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $n \in Z_+$ met de eigenschap dat $\sum_n |a_n(t)|, \sum_n |b_n(t)| < \infty$.

Stelling 4.1 Gedomineerde convergentie stelling *Veronderstel* $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, *dat* $0 \leq |b_n(t)| \leq a_n(t)$, $t \geq 0$, *en dat* $\lim_{t\to\infty} a_n(t)$ *en* $\lim_{t\to} b_n(t)$ *bestaan. Dan volgt uit*

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t\to\infty} a_n(t) < \infty$$

dat ook geldt

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t\to\infty} b_n(t) < \infty.$$

Bewijs zelf.

Stelling 4.2 Lemma van Fatou *Laat* $a_n(t) \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *en* $t \geq 0$. *Dan geldt dat*

$$\liminf_{t\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \liminf_{t\to\infty} a_n(t).$$

Bewijs zelf.

We geven andere vormen van deze convergentiestellingen, geformuleerd in termen van stochastische variabelen. Deze stellingen komen bij maattheorie aan bod. Laat X_n, $n = 1, \ldots$, X, Y een collectie stochasten, gedefinieerd op dezelfde kansruimte.

Stelling 4.3 Gedomineerde convergentie stelling 2 *Stel dat*

i) $|X_n| \leq Y$, $n = 1, 2, \ldots$;

ii) $\mathbb{P}\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = 1$;

iii) $\mathsf{E}|Y| < \infty$.

Dan geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E} X_n = \mathsf{E} X. \tag{4.1.1}$$

Stelling 4.4 Lemma van Fatou 2 *Stel dat* $X_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ *Dan geldt dat*

$$\liminf_{n\to\infty} \mathsf{E} X_n \geq \mathsf{E} \liminf_{n\to\infty} X_n.$$

Stelling 4.5 Monotone convergentie *Stel dat*

i) $\mathbb{P}\{X_n \leq X_{n+1}\} = 1$, $n = 1, 2, \ldots$;

ii) $\mathbb{P}\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = 1$;

iii) *ofwel* $\mathbb{P}\{X_n \geq 0\} = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, *ofwel* $\mathsf{E}|X_n| < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$.

Dan geldt (4.1.1).

4.2 Abel en Césarolimieten

Stelling 4.6 Laat $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ een begrensde rij reële getallen zijn. Dan geldt:

$$\liminf_{T\to\infty} x_T \leq \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t \leq \liminf_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)\sum_{t\geq 1}\alpha^t x_t \leq$$

$$\limsup_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)\sum_{t\geq 1}\alpha^t x_t \leq \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t \leq \limsup_{T\to\infty} x_T.$$

Opmerking 1: deze limieten worden respectievelijk Cesaro liminf, Abel liminf, Abel limsup en Cesaro limsup genoemd.

Opmerking 2: als de Cesaro limiet $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t$ bestaat, dan bestaat de Abel limiet $\lim_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)\sum_{t\geq 1}\alpha^t x_t$ en deze is gelijk aan de Cesaro limiet. Verrassend genoeg is het omgekeerde zelfs ook waar (Hardy).

Als de limiet bestaat, dan bestaan ook Césaro- en Abellimiet, en zijn ze allemaal aan elkaar gelijk!

Bewijs. Laat $\gamma^* = \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t$ en $x^* = \liminf_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)\sum_{t\geq 1}\alpha^t x_t$. Laat verder $\gamma_N = \inf_{T\geq N} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t$. De rij γ_N is niet-dalend, begrensd en

$$\sum_{t=1}^{N} \gamma_t \leq N\gamma_N \leq \sum_{t=1}^{N} x_t.$$

Nu geldt

$$\begin{aligned}
x^* = \liminf_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)\sum_{t\geq 1}\alpha^t x_t &= \liminf_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)^2\sum_{t\geq 1}\frac{\alpha^t}{1-\alpha}x_t \\
&= \liminf_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)^2\sum_{t\geq 1}\sum_{k\geq t}\alpha^k x_t \\
&= \liminf_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)^2\sum_{k\geq 1}\alpha^k\sum_{t=1}^{k} x_t \\
&\geq \liminf_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)^2\sum_{k\geq 1}\alpha^k\sum_{t=1}^{k} \gamma_t \\
&= \liminf_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)\sum_{t\geq 1}\alpha^t \gamma_t. \qquad (4.2.1)
\end{aligned}$$

Laat $\epsilon > 0$. Dan bestaat er T_ϵ zodanig dat $\gamma_t \geq \gamma^* - \epsilon$, voor $t \geq T_\epsilon$. Dit impliceert

$$\begin{aligned} \liminf_{\alpha \uparrow 1} (1-\alpha) \sum_{t \geq 1} \alpha^t \gamma_t &\geq \liminf_{\alpha \uparrow 1} \Big\{ (1-\alpha) \sum_{t=1}^{T_\epsilon} \alpha_t \gamma_t + (1-\alpha) \sum_{t \geq T_\epsilon + 1} \alpha^t (\gamma^* - \epsilon) \Big\} \\ &= (\gamma^* - \epsilon). \end{aligned}$$

Dit geldt voor alle $\epsilon > 0$, en derhalve geldt $\liminf_{\alpha \uparrow 1} (1-\alpha) \sum_{t \geq 1} \alpha^t \gamma_t \geq \gamma^*$. Combinatie met (4.2.1) geeft het gewenste resultaat. De derde ongelijkheid is per definitie waar. De vierde ongelijkheid is analoog aan de eerste te bewijzen. Het bewijs van de eerste en de laatste ongelijkheden mag je zelf proberen! QED

Bijlage A

OPLOSSING VAN DE VRAGEN

A.1 Hoofdstuk 1

Vraag 1.1

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 = 1 \mid X_0 = 0\} &= p_{01}p_{11} = 0.2 \times 0.6 = 0.12. \\
\mathbb{P}\{X_2 = 1, X_3 = 1 \mid X_0 = 0\} &= p_{01}^{(2)}p_{11} = \{p_{00} \times p_{01} + p_{01} \times p_{11} + p_{02} \times p_{21}\} \times p_{11} \\
&= (0.7 \times 0.2 + 0.2 \times 0.6 + 0.1 \times 0.0) \times 0.6 = 0.26 \times 0.6 = 0.156.
\end{aligned}$$

Vraag 1.2

Volgens Voorbeeld 1.3 is $\{X_t,\ t = 0, 1, \dots\}$ is een Markov keten. De overgangsmatrix is:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Vraag 1.3

$\mathbb{P}\{T > t + s \mid T > t\} = \frac{\mathbb{P}\{T>t+s,\ T>t\}}{\mathbb{P}\{T>t\}} = \frac{\mathbb{P}\{T>t+s\}}{\mathbb{P}\{T>t\}} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$.

Vraag 1.4

Stel i is recurrent. Omdat de eigenschappen transiënt en recurrent klasse eigenschappen zijn, zitten i en j in verschillende klassen. Omdat recurrente klassen gesloten zijn (Lemma 5.7) is het niet mogelijk vanuit toestand i toestand j te bereiken: tegenspraak.

Vraag 1.5

Onderdeel a:

Zij X een niet-negatieve stochastische variabele. Dan geldt:

$$\mathsf{E}\{X\} = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}\{X = n\} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{X = n\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\{X = n\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{X \geq k\}.$$

Onderdeel b:

Laat N_i = het aantal keren dat toestand i opnieuw wordt bezocht als we starten in i.

Volgens onderdeel a geldt: $\mathsf{E}\{N_i\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{N_i \geq k\}$.

Het is dus voldoende om te bewijzen dat $\mathbb{P}\{N_i \geq k\} = (f_{ii})^k$ voor $k = 1, 2, \dots$.

We bewijzen dit met inductie naar k. Voor $k = 1$ geldt

$$\mathbb{P}\{N_i \geq 1\} = 1 - \mathbb{P}\{N_i = 0\} = 1 - (1 - f_{ii}) = f_{ii},$$

want $\mathbb{P}\{N_i = 0\}$ = de kans om nooit meer terug te keren in $i = (1 - f_{ii})$.

Voor de inductiestap kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{N_i \geq k\} &= \mathbb{P}\{N_i \geq k, N_i \geq k-1\} = \mathbb{P}\{N_i \geq k \mid N_i \geq k-1\} \cdot \mathbb{P}\{N_i \geq k-1\} \\ &= \mathbb{P}\{N_i \geq 1\} \cdot \mathbb{P}\{N_i \geq k-1\} = f_{ii} \cdot (f_{ii})^{k-1} = (f_{ii})^k.\end{aligned}$$

Vraag 1.6

Omdat $X_t = X_{t-1} + Y_t$ met Y_t onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische variabelen met

$$\mathsf{E}\{Y_t\} = p \cdot 1 + (1-p) \cdot (-1) = 2p - 1,$$

en

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} Y_i = \frac{X_t - X_0}{t},$$

geldt volgens de Sterke wet van de grote aantallen dat

$$\frac{X_t - X_0}{t} \to 2p - 1 \text{ als } t \to \infty.$$

Als $p > \frac{1}{2}$, dan betekent dit dat $X_t \to +\infty$ voor $t \to \infty$.

Als $p < \frac{1}{2}$, dan betekent dit dat $X_t \to -\infty$ voor $t \to \infty$.

Als $p \neq \frac{1}{2}$ geldt voor iedere vaste toestand i: de kans dat naar toestand i wordt teruggekeerd is niet gelijk aan 1, d.w.z. $f_{ii} < 1$.

Vraag 1.7

Onderdeel a:

Gebruik het idee dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Neem $p_i = \frac{1/i^3}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}}$. Dit is een goede kansverdeling en

$$\sum_{i=1}^{\infty} i p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1/i^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}} < \infty.$$

Onderdeel b:

Gebruik het idee dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Neem $q_i = \frac{1/i^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$. Dit is een goede kansverdeling en

$$\sum_{i=1}^{\infty} i q_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1/i}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}} = \infty.$$

Vraag 1.8

Onderdeel a:

De communicerende klassen zijn: $\{1,4,9\}$, $\{5\}$, $\{3,8\}$, $\{2\}$, $\{6\}$ en $\{7\}$.

De eerste drie verz. zijn recurrent, de laatste drie zijn transiënte toestanden.

Als we de toestanden in de volgorde $1,4,9,5,3,8,2,6,7$ schrijven, dan wordt de standaardvorm:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Onderdeel b:

Het stelsel $f_{2j} = p_{2j} + \sum_{k \neq j} p_{2k} f_{kj},\ 1 \leq j \leq 9$ geeft:

$$\begin{aligned}
f_{21} &= 0 + \tfrac{1}{4} f_{21} + \tfrac{1}{4} f_{31} + \tfrac{1}{4} f_{51} + \tfrac{1}{4} f_{91} \\
f_{22} &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} f_{32} + \tfrac{1}{4} f_{52} + \tfrac{1}{4} f_{92} \\
f_{23} &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} f_{23} + \tfrac{1}{4} f_{53} + \tfrac{1}{4} f_{93} \\
f_{24} &= 0 + \tfrac{1}{4} f_{24} + \tfrac{1}{4} f_{34} + \tfrac{1}{4} f_{54} + \tfrac{1}{4} f_{94} \\
f_{25} &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} f_{25} + \tfrac{1}{4} f_{35} + \tfrac{1}{4} f_{95} \\
f_{26} &= 0 + \tfrac{1}{4} f_{26} + \tfrac{1}{4} f_{36} + \tfrac{1}{4} f_{56} + \tfrac{1}{4} f_{96} \\
f_{27} &= 0 + \tfrac{1}{4} f_{27} + \tfrac{1}{4} f_{37} + \tfrac{1}{4} f_{57} + \tfrac{1}{4} f_{97} \\
f_{28} &= 0 + \tfrac{1}{4} f_{28} + \tfrac{1}{4} f_{38} + \tfrac{1}{4} f_{58} + \tfrac{1}{4} f_{98} \\
f_{29} &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} f_{29} + \tfrac{1}{4} f_{39} + \tfrac{1}{4} f_{59}
\end{aligned}$$

Omdat $f_{3j} = 0,\ j \neq 8,\ f_{38} = 1,\ f_{5j} = 0$ voor alle j en $f_{9j} = 0,\ j \neq 1,4,9,\ f_{91} = f_{94} = 1$ geeft dit:

$$\begin{aligned}
f_{21} &= 0 + \tfrac{1}{4} f_{21} + \tfrac{1}{4} \\
f_{22} &= \tfrac{1}{4} \\
f_{23} &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} f_{23} \\
f_{24} &= 0 + \tfrac{1}{4} f_{24} + \tfrac{1}{4} \\
f_{25} &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} f_{25} \\
f_{26} &= 0 + \tfrac{1}{4} f_{26} \\
f_{27} &= 0 + \tfrac{1}{4} f_{27} \\
f_{28} &= 0 + \tfrac{1}{4} f_{28} + \tfrac{1}{4} \\
f_{29} &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} f_{29}
\end{aligned}$$

De oplossing is: $f_{21} = \frac{1}{3},\ f_{22} = \frac{1}{4},\ f_{23} = f_{24} = f_{25} = \frac{1}{3},\ f_{26} = f_{27} = 0,\ f_{28} = f_{29} = \frac{1}{3}$.

Vraag 1.9

Uit de oplossing van Vraag 1.8 volgt dat $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, zodat $I - Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Dit geeft $(I-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$, zodat $t_1 = \frac{4}{3} + 0 + 0 = \frac{4}{3}$, $t_2 = \frac{4}{3} + 1 + 0 = \frac{7}{3}$ en $t_3 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 3$.

Vraag 1.10

We passen inductie naar t toe (het klopt voor $t = 0$).

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_{t+1} = i\} &= \textstyle\sum_j \mathbb{P}\{X_{t+1} = i, X_t = j\} = \sum_j \mathbb{P}\{X_{t+1} = i \mid X_t = j\} \cdot \mathbb{P}\{X_t = j\} \\ &= \textstyle\sum_j p_{ji} \cdot \pi_j = \pi_i. \end{aligned}$$

Vraag 1.11

Neem als toestand het aantal ballen in bak A. Dan is $S = \{0,1,2,3,4,5\}$.

Onderdeel a:

Het is direct in te zien dat $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en dat deze keten irreducibel is.

Het stelsel voor de stationaire kansverdeling luidt:

$\pi_0 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1;\ \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_2;\ \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3;\ \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_4.$

$\pi_4 = \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_5;\ \pi_5 = \frac{1}{2}\pi_4 + \frac{1}{2}\pi_5;\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1.$

De unieke oplossing is: $\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = \frac{1}{6}$.

Onderdeel b:

Het is direct in te zien dat $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en dat deze keten irreducibel is.

Het stelsel voor de stationaire kansverdeling luidt:

$\pi_0 = \frac{1}{2}\pi_1;\ \pi_1 = \pi_0 + \frac{2}{5}\pi_2;\ \pi_2 = \frac{4}{5}\pi_1 + \frac{3}{5}\pi_3;\ \pi_3 = \frac{3}{5}\pi_2 + \frac{2}{5}\pi_4.$

$\pi_4 = \frac{2}{5}\pi_3 + \pi_5;\ \pi_5 = \frac{1}{5}\pi_4;\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1.$

De unieke oplossing is: $\pi_0 = \frac{1}{32},\ \pi_1 = \frac{5}{32},\ \pi_2 = \frac{10}{32},\ \pi_3 = \frac{10}{32},\ \pi_4 = \frac{5}{32},\ \pi_5 = \frac{1}{32}$.

Vraag 1.12

a. Het stelsel voor de stationaire kansverdeling luidt:

$\pi_1 = (1-\alpha)\pi_1 + \beta\pi_2;\ \pi_2 = \alpha\pi_1 + (1-\beta)\pi_2;\ \pi_1 + \pi_2 = 1.$

Dit heeft als unieke oplossing: $\pi_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$, $\pi_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

b. $f_{11}^{(1)} = p_{11} = 1 - \alpha$ en $f_{11}^{(t)} = p_{12} p_{22}^{t-2} p_{21} = \alpha(1-\beta)^{t-2}\beta$ voor $t \geq 2$.

c. $\mu_{11} = \sum_{t=1}^{\infty} t f_{11}^{(t)} = (1-\alpha) + \sum_{t=2}^{\infty} t\alpha\beta(1-\beta)^{t-2} = (1-\alpha) + \frac{\alpha\beta}{1-\beta} \sum_{t=2}^{\infty} t(1-\beta)^{t-1}$.

$\sum_{t=2}^{\infty} t(1-\beta)^{t-1} = \sum_{t=1}^{\infty} t(1-\beta)^{t-1} - 1 = \left(-\sum_{t=1}^{\infty} (1-\beta)^t\right)' - 1 = (\frac{\beta-1}{\beta})' - 1 = \frac{1-\beta^2}{\beta^2}$.

Hieruit volgt: $\mu_{11} = (1-\alpha) + \frac{\alpha\beta}{1-\beta} \cdot \frac{1-\beta^2}{\beta^2} = (1-\alpha) + \frac{\alpha(1+\beta)}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{1}{\pi_1} = \frac{1}{p_{11}^*}$.

A.2 Hoofdstuk 2

Vraag 2.1

a. Omdat $N(t) \geq n$ d.e.s.d. als $S_n \leq t$ geldt: $N(t) < n$ d.e.s.d. als $S_n > t$.

b. Als $S_n < t$ en $S_{n+1} > t$, dan is $N(t) \leq n$ (in feite $N(t) = n$), terwijl $S_n < t$.

c. Als $S_n < t$ en $S_{n+1} > t$, dan is $S_n < t$, terwijl $N(t) \leq n$ (in feite $N(t) = n$).

Vraag 2.2

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\{X\} &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{X = n\} \cdot n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{X = n\} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\{X = n\} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{X \geq k\}. \end{aligned}$$

Vraag 2.3

Dit vernieuwingsproces is een Poissonproces met $\lambda = \frac{1}{2}$.

Hieruit volgt: $\mathbb{P}\{N(5) = 0\} = e^{-5\lambda} \frac{(5\lambda)^0}{0!} = e^{-2.5} = 0.082$.

Vraag 2.4

a. Merk op dat $\tau = N(1) + 1$, waarbij $N(1)$ het aantal vernieuwingen in $[0, 1]$ is.

In Voorbeeld 2.3 is aangetoond dat voor $N(t)$, het aantal vernieuwingen in $[0, t]$ geldt:

$m(t) = e^t - 1,\ 0 \leq t \leq 1$. Hieruit volgt: $\tau = (e - 1) + 1 = e$.

b. $S_{N(t)+1}$ is het tijdstip van de eerste vernieuwing van t. Volgens Formule (2.2.5) geldt: $\mathbb{E}\{S_{N(t)+1}\} = \mu \cdot \{m(t) + 1\}$. In ons geval is $t = 1,\ \mu = \frac{1}{2}$ en $m(t) = e^t - 1$, zodat de gevraagde tijd gelijk is aan $\frac{1}{2}e$.

Vraag 2.5

Er geldt $\sum_{n=1}^{\tau} X_n = 4$ en $\mathbb{E}\{X_n\} = \frac{1}{13}$ voor alle n.

Als de vergelijking van Wald geldt, dan geeft dit $4 = \mathbb{E}\left\{\sum_{n=1}^{\tau} X_n\right\} = \mathbb{E}\{\tau\} \cdot \frac{1}{13}$, zodat $\mathbb{E}\{\tau\} = 52$, wat duidelijk onjuist is. De vergelijking van Wald is niet toepasbaar omdat $X_1, X_2, \ldots$ niet onafhankelijk zijn.

A.3 Hoofdstuk 3

Vraag 3.1
Als toestandsruimte nemen we $S = \{0, 1, 2\}$, waarbij toestand 0 betekent dat er geen klant aanwezig is, toestand 1 dat er een klant is in stoel 1 en toestand 2 dat er een klant is in stoel 2. Omdat de klanten volgens een Poissonproces aankomen is de verblijftijd in toestand 0 exponentieel verdeeld met parameter λ (in Besliskunde 1 hebben we gezien dat het Poisson proces een vernieuwingsproces is met tussentijden die exponentieel verdeeld zijn). Zo is ook de verblijftijd in de toestanden 1 en 2 exponentieel verdeeld met parameters μ_1 en μ_2 respectievelijk.
Hieruit volgt dat het proces een continue Markov keten is.
Voor de verblijftijden en de overgangskansen geldt:
$\nu_0 = \lambda,\ \nu_1 = \mu_1,\ \nu_2 = \mu_1$ en $p_{01} = p_{12} = p_{20} = 1$ (de andere overgangskansen zijn 0).

Vraag 3.2
Als toestandsruimte nemen we $S = \{0, 1, 2\}$, waarbij toestand i betekent dat er i machines functioneren. Voor de overgangskansen geldt: $p_{01} = 1,\ p_{10} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu},\ p_{12} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$. $p_{21} = 1$.
De parameters van de verblijftijden zijn: $\nu_0 = \mu,\ \nu_1 = \lambda + \mu,\ \nu_2 = 2\lambda$.

Dit geeft voor de generator matrix: $Q = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ \lambda & -\lambda-\mu & \mu \\ 0 & 2\lambda & -2\lambda \end{pmatrix}$.

De achterwaartse differentiaalvergelijkingen worden gegeven door $P'(t) = QP(t)$, d.w.z.
$p'_{00}(t) = -\mu p_{00}(t) + \mu p_{10}(t)$.
$p'_{01}(t) = -\mu p_{01}(t) + \mu p_{11}(t)$.
$p'_{02}(t) = -\mu p_{02}(t) + \mu p_{12}(t)$.
$p'_{10}(t) = \lambda p_{00}(t) - (\lambda + \mu)p_{10}(t) + \mu p_{20}(t)$.
$p'_{11}(t) = \lambda p_{01}(t) - (\lambda + \mu)p_{11}(t) + \mu p_{21}(t)$.
$p'_{12}(t) = \lambda p_{02}(t) - (\lambda + \mu)p_{12}(t) + \mu p_{22}(t)$.
$p'_{20}(t) = 2\lambda p_{10}(t) - 2\lambda p_{20}(t)$.
$p'_{21}(t) = 2\lambda p_{11}(t) - 2\lambda p_{21}(t)$.
$p'_{22}(t) = 2\lambda p_{12}(t) - 2\lambda p_{22}(t)$.

Vraag 3.3
We passen inductie naar i toe. Voor $i = 0$: $\frac{1-\frac{\mu}{\lambda}}{\lambda-\mu} = \frac{\lambda-\mu}{\lambda(\lambda-\mu)} = \frac{1}{\lambda}$, wat klopt.

Veronderstel dat $\mathsf{E}\{T_{i-1}\} = \frac{1-(\frac{\mu}{\lambda})^i}{\lambda-\mu}$. Dan volgt uit (3.3.9):

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\{T_i\} &= \tfrac{1}{\lambda} + \tfrac{\mu}{\lambda} \cdot \mathsf{E}\{T_{i-1}\} = \tfrac{1}{\lambda} + \tfrac{\mu}{\lambda} \cdot \tfrac{1-(\frac{\mu}{\lambda})^i}{\lambda-\mu} \\ &= \tfrac{(\lambda-\mu)+\mu\{1-(\frac{\mu}{\lambda})^i\}}{\lambda(\lambda-\mu)} = \tfrac{\lambda-\mu(\frac{\mu}{\lambda})^i}{\lambda(\lambda-\mu)} = \tfrac{1-(\frac{\mu}{\lambda})^{i+1}}{\lambda-\mu}. \end{aligned}$$

Vraag 3.4

Het is duidelijk dat $\mathsf{E}\{T_0\} = \frac{1}{\lambda}$. Verder hebben we afgeleid dat $\mathsf{E}\{T_i\} = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} \cdot \mathsf{E}\{T_{i-1}\},\ i \geq 1$.

Hieruit volgt:

$\mathsf{E}\{T_1\} = \frac{1}{2\lambda} + \frac{\mu}{2\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda+\mu}{2\lambda^2}$.

$\mathsf{E}\{T_2\} = \frac{1}{3\lambda} + \frac{2\mu}{3\lambda} \cdot \frac{\lambda+\mu}{2\lambda^2} = \frac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{3\lambda^3}$.

$\mathsf{E}\{T_3\} = \frac{1}{4\lambda} + \frac{3\mu}{4\lambda} \cdot \frac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{3\lambda^3} = \frac{\lambda^3+\lambda^2\mu+\lambda\mu^2+\mu^3}{4\lambda^4}$.

$\mathsf{E}\{T_4\} = \frac{1}{5\lambda} + \frac{4\mu}{5\lambda} \cdot \frac{\lambda^3+\lambda^2\mu+\lambda\mu^2+\mu^3}{4\lambda^4} = \frac{\lambda^4+\lambda^3\mu+\lambda^2\mu^2+\lambda\mu^3+\mu^4}{5\lambda^5}$.

a. De verwachte tijd om van toestand 0 naar toestand 4 te gaan is: $\mathsf{E}\{T_0\}+\mathsf{E}\{T_1\}+\mathsf{E}\{T_2\}+\mathsf{E}\{T_3\}$.

b. De verwachte tijd om van toestand 2 naar toestand 5 te gaan is: $\mathsf{E}\{T_2\} + \mathsf{E}\{T_3\} + \mathsf{E}\{T_4\}$.

Vraag 3.5

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X(t)=1\} &= \mathbb{P}\{X(t)=1 \mid X(0)=1\} \cdot \mathbb{P}\{X(0)=1\} + \mathbb{P}\{X(t)=1 \mid X(0)=0\} \cdot \mathbb{P}\{X(0)=0\} \\
&= \tfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot p_{11}(t) + \tfrac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot p_{01}(t) \\
&= \tfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\left\{\tfrac{\lambda}{\lambda+\mu} + \tfrac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\right\} + \tfrac{\mu}{\lambda+\mu}\left\{\tfrac{\lambda}{\lambda+\mu} - \tfrac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\right\} \\
&= \tfrac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} + \tfrac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} = \tfrac{\lambda}{\lambda+\mu}.
\end{aligned}$$

Vraag 3.6

Aangezien er alleen sterftes zijn is de kans op k sterftes in tijdsduur t gelijk aan $\frac{(\mu t)^k}{k!} \cdot e^{-\mu t}$ voor $k = 0, 1, \ldots$. Hieruit volgt dat voor alle $i \geq 0$:

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t) &= \tfrac{(\mu t)^{i-j}}{(i-j)!} \cdot e^{-\mu t} \text{ voor } 1 \leq j \leq i \\
p_{i0}(t) &= \textstyle\sum_{k=i}^{\infty} \tfrac{(\mu t)^k}{k!} \cdot e^{-\mu t}.
\end{aligned}$$

Vraag 3.7

$$\begin{aligned}
(j-1)\lambda p_{i,j-1}(t) &= (j-1)\lambda\left\{\tbinom{j-2}{i-1}e^{-i\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-i-1}\right\} \\
&= \lambda\tbinom{j-1}{i-1}e^{-i\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-i-1} \cdot (j-i). \\
j\lambda p_{ij}(t) &= j\lambda\left\{\tbinom{j-1}{i-1}e^{-i\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-i}\right\} \\
&= \lambda\tbinom{j-1}{i-1}e^{-i\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-i-1} \cdot \{j(1-e^{-\lambda t})\} \\
p'_{ij}(t) &= \tbinom{j-1}{i-1}e^{-i\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-i}\{-i\lambda\} + \tbinom{j-1}{i-1}e^{-i\lambda t}(j-i)(1-e^{-\lambda t})^{j-i-1}\{\lambda e^{-\lambda t}\} \\
&= \lambda\tbinom{j-1}{i-1}e^{-i\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-i-1} \cdot \{-i(1-e^{-\lambda t}) + (j-i)\lambda e^{-\lambda t}\}.
\end{aligned}$$

We moeten dus aantonen dat $(j-i) - j(1-e^{-\lambda t}) = -i(1-e^{-\lambda t}) + (j-i)\lambda e^{-\lambda t}$.

Aan beide zijden staat $-i + je^{-\lambda t}$, dus het klopt.

Vraag 3.8

Neem als toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, 3\}$, waarbij toestand i betekent dat er i auto's zijn.

Het model is een geboorte-sterfte proces met $\lambda_i = 10,\ 0 \leq i \leq 2$ en $\mu = 20,\ 1 \leq i \geq 3$.

De generatormatrix $Q = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 & 0 \\ 20 & -30 & 10 & 0 \\ 0 & 20 & -30 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & -20 \end{pmatrix}$, waaruit de balansvergelijkingen volgen:

$$\begin{cases} 10x_0 = 20x_1 \\ 30x_1 = 10x_0 + 20x_2 \\ 30x_2 = 10x_1 + 20x_3 \\ 20x_1 = 10x_2 \\ x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad P_0 = \tfrac{8}{15},\ P_1 = \tfrac{4}{15},\ P_2 = \tfrac{2}{15},\ P_3 = \tfrac{1}{15}.$$

Het gemiddeld aantal auto's is $\sum_{i=0}^{3} iP_i = 0 + \frac{4}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} + 3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{11}{15}$.

De fractie automobilisten die doorrijdt is $P_3 = \frac{1}{15}$.

Vraag 3.9

$C_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \quad \rightarrow \quad \sum_{j=0}^{\infty} C_j$ bestaat d.e.s.d. als $\lambda < \mu$.

Als $\lambda < \mu$, dan is $\sum_{j=0}^{\infty} C_j = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\mu}{\mu-\lambda}$ $\;P_0 = \frac{\mu-\lambda}{\mu} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$, zodat $P_j = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j,\ j \geq 0$.

Vraag 3.10

Neem de toestanden $(i,j),\ i,j = 0,1$, waarbij de eerste (tweede) component het aantal orders aangeeft bij de snelle (langzame) machine. Laat $s_1 = (0,0),\ s_2 = (1,0),\ s_3 = (0,1),\ s_4 = (1,1)$.

De generator matrix $Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda) & 0 & \lambda \\ \mu_2 & 0 & -(\mu_2+\lambda) & \lambda \\ 0 & \mu_2 & \mu_1 & -(\mu_1+\mu_2) \end{pmatrix}$.

De balansvergelijkingen zijn: $\begin{cases} \lambda x_1 = \mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 \\ (\lambda+\mu_1)x_2 = \lambda x_1 + \mu_2 x_4 \\ (\lambda+\mu_2)x_3 = \mu_1 x_4 \\ (\mu_1+\mu_2)x_4 = \lambda x_2 + \lambda x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

Vraag 3.11

a. Neem als toestandsruimte de verz. van alle deelverz. $X \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$, waarbij X de verz. van kapotte machines is. Door het exponentiële karakter van de reparatietijden en de levensduren is dit een continue Markov keten. Als we een toestand X nemen, dan gaan de overgangen alleen naar $X - \{i\}$ voor een $i \in X$ en naar een Y met $Y = X + \{j\}$ met $j \notin X$.

De infinitesimale overgangssnelheden zijn: $q_{X,X-\{i\}} = \frac{\mu_i}{|X|}$ en $q_{X,X+\{j\}} = \lambda_j$.

b. Stelsel (3.6.1) luidt voor dit model dat voor iedere $X \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$:

$P_X\, q_{X,X-\{i\}} = P_{X-\{i\}}\, q_{X-\{i\},X},\ i \in X$ en $P_X\, q_{X,X+\{j\}} = P_{X+\{j\}}\, q_{X+\{j\},X},\ j \notin X$.

Omdat we deze vergelijkingen voor alle $X \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ geven, is het voldoende om alleen de vergelijkingen $P_X\, q_{X,X-\{i\}} = P_{X-\{i\}}\, q_{X-\{i\},X},\ i \in X$ voor alle $X \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ te beschouwen. Door de infinitesimale overgangssnelheden in te vullen wordt het stelsel

$$P_X \frac{\mu_i}{|X|} = P_{X-\{i\}}\, \lambda_i \text{ voor alle } X \subseteq \{1,2,\ldots,n\}, \tag{A.3.1}$$

d.w.z.

$$P_X = P_{X-\{i\}}\,|X|\frac{\lambda_i}{\mu_i} \text{ voor alle } X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{A.3.2}$$

Door (A.3.2) te itereren krijgen we: $P_X = P_\emptyset \{|X|!\} \prod_{i \in X} \frac{\lambda_i}{\mu_i}$.
Sommeer over alle deelverz. X: $1 = P_\emptyset \sum_X \{|X|!\} \prod_{i \in X} \frac{\lambda_i}{\mu_i}$, ofwel $P_\emptyset = \left\{ \sum_X \{|X|!\} \prod_{i \in X} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right\}^{-1}$.
Hieruit volgt

$$P_X = \frac{\{|X|!\} \prod_{i \in X} \frac{\lambda_i}{\mu_i}}{\sum_X \{|X|!\} \prod_{i \in X} \frac{\lambda_i}{\mu_i}}. \tag{A.3.3}$$

c. Het is uit de formule (A.3.3) direct duidelijk dat aan (A.3.1) wordt voldaan.

Bijlage B

Index

Index