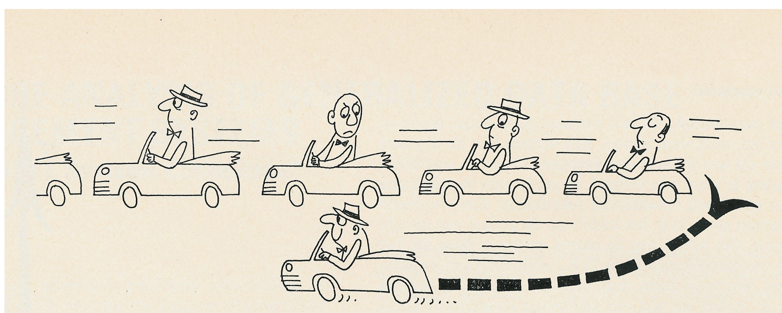
# BESLISKUNDE A

## Najaar 2016
## Deel 2


L.C.M. KALLENBERG en F.M. SPIEKSMA

UNIVERSITEIT LEIDEN

# Inhoudsopgave

# Hoofdstuk 5

# WACHTTIJDTHEORIE

## 5.1 Inleiding

In de wachttijdtheorie wordt een model bestudeerd waarin klanten een systeem binnenkomen volgens een bepaald *aankomstproces*, daar een zekere bediening krijgen (*bedieningsproces*) en vervolgens het systeem verlaten. Als de bedienden bezet zijn, dan moeten de klanten in een *wachtrij* plaatsnemen. Deze wachtrij kan een beperkt of een onbeperkt aantal plaatsen hebben. Als er een nieuwe klant arriveert terwijl de wachtrij vol is, dan zal deze klant zonder bediening ontvangen te hebben het systeem verlaten. We zullen de onderdelen *aankomstproces, bedieningsproces* en *wachtrij* nader bespreken.

In de wachttijdtheorie wordt een groot aantal wachttijdmodellen geanalyseerd. Exacte oplossingen zijn vrijwel alleen voor eenvoudige modellen te vinden. Wel kunnen de gevonden formules vaak zinvol zijn als benadering voor complexere modellen. Vaak worden ook computersimulaties gebruikt om wachttijdproblemen te analyseren. De waarde van simulatie moet niet overschat worden. Een wiskundige analyse van een model geeft inzicht, waar simulatie vooral getallen produceert. Het is niet altijd eenvoudig om uit deze getallen bruikbare conclusies te trekken. Waar mogelijk lijkt een samenspel van wiskundige analyse en simulatie de aangewezen weg.

Wachttijdproblemen treden in de praktijk op in vele uiteenlopende situaties: in de telecommunicatie, waarin gesprekken en berichten wachten op beschikbare communicatielijnen; in zeehavens waar schepen wachten op beschikbare laad- en losfaciliteiten; in een productiehal waar goederen wachten op beschikbare machines, etc. De wachttijdtheorie startte in 1905 met het werk van A.K. Erlang, die een telefoonsysteem moest ontwikkelen en daarbij de vraag beantwoorden hoeveel parallelgesprekken tegelijkertijd gevoerd moesten kunnen worden om onder een bepaalde getal, de *blokkeringskans* (het percentage van de aanvragen die geen gesprek konden krijgen), te blijven.

Bij het ontwerp van allerlei systemen moet antwoord gegeven worden op vragen van het type: "Hoeveel telefoonlijnen zijn nodig om een zeker service-niveau te bereiken"? Anderzijds wil men de kosten van deze systemen minimaal houden. Dit geeft een wisselwerking en spanning tussen het wachten van klanten en de bezettingsgraad van de telefoonlijnen. Hoe hoger het service-niveau, hoe groter de kosten. Meestal wordt een bepaald service-niveau als uitgangspunt gekozen. Gegeven dit service-niveau wordt gevraagd naar minimale kosten. Uit de theorie is af te leiden dat als dit soort systemen zwaarder wordt belast de wachttijden veel sterker dan lineair, vaak zelfs exponentieel, toenemen.

**Aankomstproces**

We zullen in dit hoofdstuk, tenzij anders vermeld, aannemen dat de klanten aankomen volgens een *Poisson proces* met parameter $\lambda$. Een Poissonproces is een vernieuwingsproces waarvan de tussentijden exponentieel verdeeld zijn. Dit aankomstproces veronderstelt een oneindige populatie en is bruikbaar om vele praktische situaties te modelleren. Het Poisson proces kan met name goed worden gebruikt als de kans dat in een komend klein tijdsinterval een klant arriveert niet afhangt van hoe lang het geleden is dat voor het laatst een klant aankwam; dit is bijvoorbeeld het geval als de aankomsttijdstippen onvoorspelbaar is. Het zal blijken dat in het geval van een Poisson aankomstproces eenvoudige wachttijdformules kunnen worden afgeleid.

Het Poissonproces is een telproces $\{N(t),\ t \geq 0\}$, met $N(t)$ het aantal aankomsten in het interval $[0, t]$, dat voldoet aan de volgende drie eisen:
1. $N(0) = 0$.
2. $\{N(t),\ t \geq 0\}$ heeft onafhankelijke aanwas, d.w.z. dat voor alle keuzes van $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ de $n$ stochastische variabelen $N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ onafhankelijk zijn.
3. Het aantal aankomsten in ieder interval ter lengte $t$ heeft een Poisson verdeling met parameter $\lambda t$, d.w.z. $\mathbb{P}\{N(t+s) - N(s) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t}$ voor alle $s, t \geq 0,\ n \in \mathbb{N}_0$.

De kans in voorwaarde 3 is onafhankelijk van het verleden $s$; vandaar dat ook wel wordt gesproken over aankomsten met de *Markov eigenschap*. Uit de eigenschappen van de Poisson verdeling volgt dat $\mathbb{E}\{N(t)\} = \mathsf{var}\{N(t)\} = \lambda t$.

Er kan worden bewezen[1] dat het Poisson proces ook equivalent gekarakteriseerd wordt door in plaats van eigenschap 3 de volgende twee eigenschappen te eisen:
3a. $\mathbb{P}\{N(t) = 1\} = \lambda t + o(t)$, waarbij $o(t)$ betekent dat $lim_{t\to 0} \frac{o(t)}{t} = 0$.
3b. $\mathbb{P}\{N(t) = 0\} = 1 - \lambda t + o(t)$.
Eigenschap 3a is de reden dat $\lambda$ ook wel de *aankomstsnelheid* wordt genoemd.

Zij $\{X_n\}$ de tijd tussen de $(n-1)$-ste en $n$-de aankomst. De rij $\{X_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ is de rij van *tussentijden*. Op grond van eigenschap 2 zijn de $X_n$'s onderling onafhankelijk. Merk op dat volgens eigenschap 3 geldt:

$$\mathbb{P}\{X_n > t\} = \mathbb{P}\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t} \text{ voor alle } n = 1, 2, \ldots,$$

d.w.z. dat iedere $X_n$ een exponentiële verdeling heeft met parameter $\lambda$. Deze verdeling heeft als verwachting $\frac{1}{\lambda}$, waaruit volgt:

[1] S.M. Ross, "Applied Probability Models with Optimization Applications", Holden-Day, 1970 (chapter 2).

$\mathbb{E}\{\text{tijdsduur tussen twee opeenvolgende aankomsten}\} = \frac{1}{\lambda}$.

**Bedieningsproces**

Bij het bedieningsproces hebben we te maken met de volgende drie aspecten:

*1. De bedieningsdiscipline*

De bedieningsdiscipline is een voorschrift voor de volgorde waarin de klanten die in de wachtrij staan worden geselecteerd voor een vrijgekomen bediening. We zullen in dit hoofdstuk aannemen dat de bedieningsvolgorde dezelfde is als de volgorde van aankomst. Deze regel heet *FIFO* (first in - first out).

*2. De bedieningsduur*

Voor iedere bediende moet de kansverdeling van de bedieningsduur van een klant gegeven zijn. Een veel voorkomende keuze voor de verdeling van de bedieningsduur is de exponentiële verdeling met parameter $\mu$.
In dat geval heeft de bedieningsduur $B$ de volgende eigenschappen:
(1) Markov eigenschap: $\mathbb{P}\{B > t + s \mid B > s\} = \mathbb{P}\{B > t\}$ voor alle $s, t \geq 0$.
(2) $\mathbb{P}\{B > t\} = e^{-\mu t}$.
(3) $\mathbb{E}\{B\} = \mu^{-1}$ en $\mathsf{var}\{T\} = \mu^{-2}$.

*3. Het aantal bedienden*

Dit aantal wordt met $s$ genoteerd.

**Eindige klantenbron**

Een belangrijke groep wachttijdmodellen zijn die waarbij het aantal klanten eindig is. We spreken dan van een model met een *eindige klantenbron*. Een voorbeeld van een model met een eindige klantenbron is het onderhoud van een zeker aantal, zeg $N$, machines. Als er $n$ machines in reparatie (bediening) zijn, dan zijn er $N - n$ die zich eventueel kunnen melden voor reparatie. Nemen we aan dat de tijdsduur voordat een machine stuk gaat exponentiëel verdeeld is met parameter $\lambda$, dan melden potentiële klanten zich volgens een Poisson proces met parameter $\lambda$.

**De wachtrij**

De wachtrij is de ruimte waar de klanten op bediening wachten. Deze ruimte kan een eindig, zeg $N$, of een oneindig aantal plaatsen bevatten. De aanname van een oneindig aantal plaatsen is vaak gebruikelijk in wachttijdmodellen, zelfs als er in feite eindig, maar zeer veel, plaatsen zijn. Dan kan deze oneindigheidsaanname worden gedaan als de kans dat de wachtrij vol raakt zeer klein is. Als het aantal plaatsen klein is of de kans dat alle plaatsen bezet raken niet verwaarloosbaar is, dan moet de wachtrij inderdaad eindig worden genomen.

## 5.2 Wachttijdparadox

Veronderstel dat bussen bij een bushalte aankomen volgens een Poisson proces met een gemiddelde van twee per uur. De tussentijden van de aankomsten zijn dus exponentieel verdeeld met een gemiddelde tijdsduur van 30 minuten. Als we op een willekeurig tijdstip bij de bushalte komen, wat is dan de wachttijd tot de eerst-aankomende bus?

Intuïtief ben je geneigd te denken dat dit 15 minuten is (de helft van de gemiddelde tijd tussen twee aankomsten), maar in werkelijkheid is deze wachttijd langer. De argumentatie hiervoor is dat de tussentijden weliswaar gemiddeld 30 minuten zijn, maar dat iemand die op een willekeurig tijdstip bij de halte arriveert een grotere kans heeft om een lange dan om een korte tussentijd aan te treffen; de variantie speelt hierbij een rol. Dit verschijnsel staat bekend als de *wachttijdparadox*.

Voordat we dit verschijnsel wiskundig zullen bewijzen voor het Poissonproces, zullen we het eerst plausibel maken aan de hand van een simpel getallenvoorbeeld. Veronderstel dat de bussen aankomen met tussentijden die om en om 45 en 15 minuten zijn; gemiddeld zijn deze tussentijden dus inderdaad 30 minuten. Een willekeurig aankomende klant heeft dan kans $\frac{3}{4}$ om een tussentijd van 45 minuten aan te treffen en een kans $\frac{1}{4}$ op een tussentijd van 15 minuten. Dus de verwachting van de tussentijd die zo'n persoon aantreft is $\frac{3}{4} \cdot 45 + \frac{1}{4} \cdot 15 = 37.5$ minuten. Omdat we - gemiddeld genomen - in het midden van zo'n tussentijd aankomen, is de verwachting van de wachttijd van een willekeurig aankomend persoon 18.75 minuten: inderdaad groter dan de op het eerste gezicht verwachte 15 minuten.

Als het aankomstproces een Poisson proces is met parameter $\lambda$, dan zijn de tussentijden onderling onafhankelijk exponentieel verdeeld met parameter $\lambda$. Laat $A$ de stochastische variabele van zo'n tussentijd zijn en zij $W(t)$ de wachttijd van iemand die op tijdstip $t$, gerekend vanaf de vorige aankomst van een bus, bij de bushalte aankomt. Dan geldt:

$$\mathbb{P}\{W(t) > x\} = \mathbb{P}\{A > t + x \mid A > t\} = \mathbb{P}\{A > x\} = e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$

Dit impliceert dat de wachttijd exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda$. De verwachting van de wachttijd van iemand die op een willekeurig tijdstip $t$ aankomt is dus $\frac{1}{\lambda}$. In bovengenoemd voorbeeld is de tijdseenheid één uur en $\lambda = 2$, waaruit volgt dat de verwachte wachttijd een half uur, dus 30 minuten is.

Voor algemene aankomstprocessen met onderling onafhankelijke identiek verdeelde tussentijden $A$ is af te leiden[2] dat de verwachting van de wachttijd gelijk is aan:

$$\tfrac{1}{2}(1 + c_A^2)\,\mathbb{E}(A),$$

waarbij $c_A$ de *variatiecoëfficiënt* van $A$ is, d.w.z. $c_A^2 = \frac{\mathsf{var}(A)}{\mathbb{E}(A)^2}$.

[2] R.B. Cooper: "Introduction to Queueing Theory", 2e edition, North Holland, 1981 (chapter 5, section 7).

## 5.3 De formule van Little en PASTA

We zullen de formule van Little eerst illustreren aan de hand van een voorbeeld. Beschouw een postkantoor waar per minuut gemiddeld $\bar{\lambda} = 2$ klanten *binnen*komen (dat kan een andere waarde zijn dan het aantal dat per minuut gemiddeld aan de 'poort' komt!) en waar een klant gemiddeld $W = 3$ minuten verblijft. Op het moment dat de 'gemiddelde' klant na 3 minuten het systeem verlaat zijn er, gemiddeld genomen, zes nieuwe klanten gearriveerd. Laat $L$ het gemiddeld aantal klanten in het postkantoor zijn, dan is het duidelijk dat $L = \bar{\lambda}W = 6$. De formule

$$L = \bar{\lambda}W \tag{5.3.1}$$

is de *formule van Little* en is een soort natuurwet in de wachttijdtheorie. Deze formule geeft het verband aan tussen het gemiddeld aantal klanten in het systeem ($L$) en de gemiddelde verblijftijd ($W$) in het systeem.

Definieer de volgende vijf stochastische variabelen:

| | |
|---|---|
| $\overline{N}(t)$ | = het aantal *binnen*komsten in het interval $[0, t]$; |
| $L(t)$ | = het aantal klanten in het systeem op tijdstip $t$; |
| $L_q(t)$ | = het aantal klanten dat op bediening wacht op tijdstip $t$; |
| $V_n$ | = de verblijftijd van de $n$-de klant in het systeem; |
| $W_n$ | = de wachttijd (tijd voordat de bediening begint) van de $n$-de klant in het systeem. |

Vervolgens introduceren we de volgende vijf getallen:

| | | |
|---|---|---|
| $\bar{\lambda}$ | $= \lim_{t\to\infty} \frac{\overline{N}(t)}{t}$ | : de gemiddelde *binnen*komstsnelheid; |
| $L$ | $= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t L(s)ds$ | : het gemiddeld aantal klanten in het systeem; |
| $L_q$ | $= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t L_q(s)ds$ | : het gemiddeld aantal klanten in de wachtrij; |
| $W$ | $= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^n V_m$ | : de gemiddelde verblijftijd van een klant in het systeem; |
| $W_q$ | $= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^n W_m$ | : de gemiddelde wachttijd van een klant in de wachtrij. |

Deze limieten bestaan onder algemene voorwaarden, die erop neerkomen dat het systeem van tijd tot tijd leegraakt, waarbij de verwachting van de tijdsduur voordat het systeem leeg is eindig is.

We zullen nu eerst een intuïtieve verklaring geven voor de formule van Little. Veronderstel dat elke klant 1 euro betaalt voor iedere tijdseenheid die de klant in het systeem verblijft. De systeembeheerder ontvangt dan op de lange duur $L$ euro per tijdseenheid. Anderzijds is het gemiddelde bedrag dat een klant betaalt op de lange duur $W$ euro en per tijdseenheid komen gemiddeld $\bar{\lambda}$ klanten binnen. Als de klanten bij binnenkomst moeten betalen, dan ontvangt de systeembeheerder gemiddeld dus $\bar{\lambda}W$ euro per tijdseenheid. Hieruit volgt dat $L = \bar{\lambda}W$. We zullen nu een formeel bewijs geven.

Laat $I_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{als de } n\text{-de klant op tijdstip } t \text{ in het systeem is;} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$

Dan geldt:

$$V_n = \int_0^\infty I_n(t)dt \text{ en } L(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(t). \tag{5.3.2}$$

Laat $T_n$ de *binnen*komsttijd zijn van de $n$-de klant, $X(t)$ de som van de verblijftijden van de klanten die in $[0,t]$ arriveren, d.w.z. $X(t) = \sum_{\{n|T_n \le t\}} V_n$.

**Stelling 5.1** *Neem aan dat $\bar{N}(t)$ een uitgesteld regeneratief proces is, met regeneratietijdstippen tijdstippen dat een klant in een leeg systeem binnenkomt. Als twee van de drie grootheden $\bar{\lambda}$, $W$ en $L$ bestaan en eindig zijn, dan dan bestaat de derde ook, zij is eindig, en er geldt $L = \bar{\lambda} W$.*

**Bewijs**

We nemen eerst aan dat alledrie grootheden bestaan en eindig zijn.

Laat $\ell_n$ het aantal klanten in het systeem zijn bij binnenkomst van de $n$-de klant (hij telt zelf niet mee). Dan is $\{\ell_n\}_n$ een (uitgesteld) regeneratief proces met regeneratietijdstippen de *nummers van de klanten* die in een leeg systeem binnenkomen. Laten $\tau_1, \tau_2, \ldots$ deze nummers zijn. Met het vernieuwingsinterval $\tau_{i+1} - \tau_i$ associeren we een 'opbrengst' $R_{i+1} = \sum_{m=\tau_i}^{\tau_{i+1}-1} V_m$, dat is som van de verblijfsduren van de klanten die in het $i+1$-ste interval binnenkomen. Met behulp van de Renewal-Reward stelling 3.8 kun je laten zien dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=1}^n V_m}{n} = \frac{\mathbb{E}\left\{\sum_{\tau_1}^{\tau_2-1} V_m\right\}}{\mathbb{E}\{\tau_2 - \tau_1\}}.$$

Laten $T_1, \ldots$ de achtereenvolgende tijdstippen zijn dat een klant in een leeg systeem binnenkomt. Dan is $\tau_{i+1} - \tau_i$ precies het aantal klanten dat in $[T_i, T_{i+1})$ is binnengekomen. Met een redenering als boven volgt dat

$$\bar{\lambda} = \lim_{t\to\infty} \frac{\bar{N}(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}\{\tau_2 - \tau_1\}}{\mathbb{E}\{T_2 - T_1\}}.$$

Door combinatie krijgen we

$$\bar{\lambda} W = \frac{\mathbb{E}\left\{\sum_{\tau_1}^{\tau_2-1} V_m\right\}}{\mathbb{E}\{T_2 - T_1\}} \tag{5.3.3}$$

Het proces $L(t)$, $t \ge 0$, vormt ook een (uitgesteld) regeneratief proces, met regeneratietijdstippen $T_1, T_2, \ldots$. Dan geldt weer als boven

$$L = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t L(s)ds}{t} = \frac{\mathbb{E}\left\{\int_{T_1}^{T_2} L(s)ds\right\}}{\mathbb{E}\{T_2 - T_1\}}. \tag{5.3.4}$$

Met een 'betalingsargument' analoog aan het argument voor de formulering van de stelling volgt dat

$$\mathbb{E}\left\{\int_{T_1}^{T_2} L(s)ds\right\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{\tau_1}^{\tau_2-1} V_m\right\}.$$

Combinatie van (5.3.3) en (5.3.4) geeft de gestelde relatie. Je kunt nu zelf gemakkelijk nagaan dat het bestaan en eindig zijn van twee van de drie grootheden, het bestaan en eindig zijn van de derde impliceert.

□

Opmerking:
Een alternatieve vorm van de formule van Little krijgen we als we $L$ definiëren als de het aantal klanten in het stationaire proces (we nemen hierbij dus aan dat het proces op de lange duur in een stationaire situatie komt). Dan is $\mathbb{E}\{L\} = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot P_j$, waarbij $P_j$ de kans is dat het stationaire proces $j$ klanten heeft. Voor $W$ nemen we de verblijftijd van een (gemiddelde) klant in het systeem. dan geldt:

$$\mathbb{E}\{L\} = \bar{\lambda}\,\mathbb{E}\{W\}. \tag{5.3.5}$$

Op analoge wijze kan ook de volgende stelling worden bewezen.

**Stelling 5.2**
*Neem aan dat $\bar{N}(t)$ een uitgesteld regeneratief proces is, met regeneratietijdstippen tijdstippen dat een klant in een leeg systeem binnenkomt. Als twee van de drie grootheden $\bar{\lambda}$, $W_q$ en $L_q$ bestaan en eindig zijn, dan dan bestaat de derde ook, zij is eindig, en er geldt $L_q = \bar{\lambda} W_q$.*

**Gevolg 5.3** *Combinatie van de twee Little formules heeft een interessant gevolg. Immers, $W - W_q$ is precies de bedieningsduur van een klant, zeg deze is verdeeld als de stochastische grootheid $S$. Dan geldt*

$$\bar{\lambda}\,\mathbb{E}\{S\} = \bar{\lambda}(W - W_q) = L - L_q.$$

*Als we een systeem met één bediende hebben, geldt $L - L_q = \sum_j jP_j - \sum_{j\geq 1}(j-1)P_j = 1 - P_0$. D.w.z. $P_0 = 1 - \bar{\lambda}\,\mathbb{E}\{S\}$!. Het getal $\bar{\lambda}\,\mathbb{E}\{S\}$ kan geïnterpreteerd worden als het verwachte aantal aankomsten per bedieningsduur, per bediende. Dit wordt ook wel de bedieningsintensiteit genoemd, een genoteerd met de letter $\rho$.*

Voor wachttijdsystemen met een Poisson aankomstproces geldt dat op de lange duur een binnenkomende klant het systeem in de gemiddelde situatie aantreft, onafhankelijk van hoe de verdeling van de bedieningsduur is, of anders gezegd: de fractie van de aankomende klanten die $n$ klanten in het systeem aantreffen is gelijk aan de fractie van de tijd dat er $n$ klanten in het systeem zijn. Deze eigenschap heet *PASTA (= Poisson Arrivals See Time Averages)*.
Voor algemene aankomstprocessen geldt deze eigenschap niet. Beschouw namelijk een aankomstproces waarin de klanten precies om de twee minuten arriveren en een bedieningsduur van precies één minuut krijgen. Iedere klant die binnenkomt treft het systeem leeg aan, terwijl het systeem gemiddeld voor 50% van de tijd leeg is. We zullen nu deze PASTA-eigenschap plausibel maken.[3]

Laat $\{N(t), t \geq 0\}$ het Poisson aankomstproces (met parameter $\lambda$) beschrijven en $\{X(t), t \geq 0\}$ de evolutie van de toestand van het systeem zijn (bijv. het aantal klanten in het systeem op tijdstip $t$). De PASTA-eigenschap houdt in dat op de lange termijn geldt:

De fractie van het aantal aankomende klanten dat het systeem in een bepaalde toestandsverzameling

[3] Voor een formeel bewijs, zie: R.W. Wolf: *Poisson arrivals see time averages*, Operations Research 30 (1982) 223–231.

aantreft is de fractie van de tijd dat het systeem in die bepaalde toestandsverzameling verkeert.

We veronderstellen dat het proces $\{X(t), t \geq 0\}$ een *regeneratief proces* is, d.w.z. dat er (stochastische) tijdstippen zijn (*regeneratiepunten*), waarop het systeem - kanstheoretisch gezien - opnieuw begint (bijv. de tijdstippen waarop het systeem leeg raakt). De perioden tussen de regeneratiepunten heten *cykels*.
Zij $T$ de (stochastische) lengte van een cykel, met $0 < \mathbb{E}(T) < \infty$, $N$ het (stochastische) aantal aankomsten gedurende een cykel en laat $A$ een toestandsverz. zijn.
Definieeer verder:
$T_A =$ de tijdsduur dat het systeem gedurende een cykel in toestandsverz. $A$ is;
$N_A =$ het aantal aankomsten tijdens een cykel dat het systeem in toestandsverz. $A$ aantreft.
Nu kan worden bewezen dat

$$\mathbb{E}(N_A) = \lambda\,\mathbb{E}(T_A) \tag{5.3.6}$$

voor iedere toestandsverz. $A$. Door voor $A$ alle toestanden te nemen krijgen we $\mathbb{E}(N) = \lambda\,\mathbb{E}(T)$, zodat

$$\frac{\mathbb{E}(N_A)}{\mathbb{E}(N)} = \frac{\mathbb{E}(T_A)}{\mathbb{E}(T)}. \tag{5.3.7}$$

Op grond van de theorie van vernieuwingsprocessen [4] geldt dat $\frac{\mathbb{E}(N_A)}{\mathbb{E}(N)}$ op de lange duur de fractie van de aankomende klanten is die het systeem in de toestandsverz. $A$ aantreffen en dat $\frac{\mathbb{E}(T_A)}{\mathbb{E}(T)}$ de fractie van de tijd is dat het systeem in toestand $A$ is. Hiermee is de PASTA-eigenschap verklaard.

**Vraag 5.1**
Geef een intuïtieve verklaring met een 'betaalregel' dat $L_q = \bar{\lambda} W_q$.

**Vraag 5.2**
Een wachttijdsysteem heeft twee bedienden en het systeem kan maximaal 5 klanten bevatten. De stationaire kansverdeling is als volgt: $P_0 = 0.05,\ P_1 = 0.15,\ P_2 = 0.25,\ P_3 = 0.25,\ P_4 = 0.20$ en $P_5 = 0.10$. Bepaal voor dit model de grootheden $L,\ L_q$ en de bedieningsintensiteit $\rho$.

## 5.4 Geboorte-sterfte processen (vervolg)

We hebben in paragraaf 5.3 gezien dat geboorte-sterfte processen een speciaal geval zijn van een continue Markov keten. Dit impliceert dat $\lambda_n$ en $\mu_n$ de gemiddelde geboorte- resp. sterftesnelheid is als het systeem zich in toestand $n$ bevindt. Verder hebben we gezien dat voor de stationaire kansen $P_j$, geldt:

$$P_n = \frac{C_n}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n},\ n = 0, 1, \ldots, \tag{5.4.1}$$

[4] zie betreffende hoofdstuk, zie ook S.M. Ross: *Applied probability models with optimization applications*, Holden-Day, 1970 (chapter 3).

waarbij $C_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}$, $n = 1, 2, \ldots$ en $C_0 = 1$.

Voor de gemiddelde aankomstsnelheid $\overline{\lambda}$ (om niet in verwarring te komen met de $\lambda$ van het aankomstproces gebruiken we - anders dan in de formule van Little - hier de notatie $\overline{\lambda}$) geldt: $\overline{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$. Met behulp van (5.4.1) en de formule van Little zijn de karakteristieke grootheden $L$, $L_q$, $W$ en $W_q$, die informatie geven over de *performance* van het systeem, als volgt te bepalen (dit heet de *mean-value techniek*):

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n;\; L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)P_n;\; \overline{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n;\; W = \frac{L}{\overline{\lambda}};\; W_q = \frac{L_q}{\overline{\lambda}} \tag{5.4.2}$$

In welke verdeling zien aankomende klanten het systeem? Met een zelfde redenering als in de vorige paragraaf krijgen we dat $\mathbb{E}(N_i)$, het gemiddeld aantal klanten per cykel dat bij aankomst $i$ klanten in het systeem ziet, gelijk is aan $\lambda_i \, \mathbb{E}\, T_i$, met $T_i$ de tijd gedurende een cykel dat $i$ klanten aanwezig zijn. Immers, gedurende de perioden dat er $i$ klanten zijn, 'gedraagt' het aankomstproces zich als een Poisson($\lambda_i$) aankomstproces. Dus is $\mathbb{E}\, N = \sum_i \mathbb{E}\, N_i = \sum_i \lambda_i \, \mathbb{E}\, T_i$.
De fractie $\Pi_i$ van het aantal klanten per cykel dat bij aankomst $i$ klanten aantreft is dus gelijk aan

$$\Pi_i = \frac{\mathbb{E}\, N_i}{\mathbb{E}\, N} = \frac{\lambda_i \, \mathbb{E}\, T_i}{\sum_j \mathbb{E}\, T_j} = \frac{\lambda_i \, \mathbb{E}\, T_i / \mathbb{E}\, T}{\sum_j \mathbb{E}\, T_j / \mathbb{E}\, T} = \frac{\lambda_i P_i}{\sum_j \lambda_j P_j} = \frac{\lambda_i}{\overline{\lambda}} P_i,$$

dit wordt de *stationaire verdeling van aankomende klanten* genoemd.

Bovenstaande resultaten zijn afgeleid onder de aanname dat de stationaire situatie wordt bereikt. We gaan hier niet verder in op de vraag wanneer het systeem in een stationaire situatie komt. We vermelden alleen dat als de gemiddelde aankomstsnelheid $\overline{\lambda}$ kleiner is dan de gemiddelde vertreksnelheid $\overline{\mu}$ dit onder zekere regulariteitsvoorwaarden het geval is. De stationaire situatie wordt niet bereikt als $\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \infty$.

**Vraag 5.3**
Klanten komen bij een kapperszaak aan volgens een Poissonproces met een gemiddelde van 3 per uur. Er is slechts één kapper en de behandeltijd van de klanten is exponentieel met een gemiddelde van 30 minuten. Een aankomende klant gaat met kans $\frac{1}{3}n$ weg als er reeds $n \geq 3$ klanten in de zaak aanwezig zijn. De kapper verdient 20 euro per klant.
Wat is zijn verlies aan klanten die direct weer weggaan?

## 5.5 Modellen gebaseerd op het geboorte-sterfte proces

We zullen in deze paragraaf een aantal modellen uitwerken die gebaseerd zijn op het geboorte-sterfte proces. Om een bepaald wachtrijprobleem aan te geven gebruiken we de volgende notatie, afkomstig van D.G. Kendall:

$$a/b/c;\; d/e/f$$

waarbij

$a$: het aankomstproces aangeeft;

$b$: de bedieningsduur aangeeft;

$c$: het aantal bedienden voorstelt;

$d$: de bedieningsdiscipline weergeeft;

$e$: het maximum aantal klanten in het systeem is;

$f$: het aantal elementen in de klantenbron voorstelt.

Als $d$ de FIFO-regel is (first-in-first-out) en $e = f = \infty$, dan laten we het stuk $d/e/f$ in de notatie weg. Zowel Poisson input (tussentijden exponentieel verdeeld) als een exponentiële bedieningsduur worden aangegeven met de letter $M$ van Markov. Voor een deterministische kansverdeling wordt de letter $D$ gebruikt en voor een algemene kansverdeling de letter $G$.

**a. Het M/M/1 model**

Dit is het meest eenvoudige wachttijdmodel. Klanten komen aan volgens een Poisson proces met parameter $\lambda$; de bedieningstijd van een klant is exponentieel verdeeld met parameter $\mu$, er is één bediende en er is een oneindig grote wachtruimte. We veronderstellen in dit model dat $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$; $\rho$ heet de *bedieningsintensiteit*.

Dit model is een geboorte-sterfte proces waarin $\lambda_n = \lambda$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ en $\mu_n = \mu$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, zodat $C_n = \rho^n$ voor $n = 0, 1, \ldots$. Uit de formules (5.4.1) en (5.4.2) volgt:

$$P_n = \frac{\rho^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = (1-\rho)\rho^n, n \in \mathbb{N}_0 \tag{5.5.1}$$

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\rho^n = (1-\rho)\rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \rho^{n-1}}{\partial \rho} \\ &= (1-\rho)\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1} = (1-\rho)\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho}(1-\rho)^{-1} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)};\ W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\rho)};\ L = \lambda W = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{5.5.3}$$

In de formules voor $L$, $L_q$, $W$ en $W_q$ zien we dat in de noemer de term $(1-\rho)$ staat. Dit betekent dat deze grootheden snel toenemen als de bezettingsgraad toeneemt. Als de bezettingsgraad toeneemt van 90% naar 95% (een toename van 5%), dan nemen deze grootheden met 100% toe. We spreken dan ook van een *exponentiële toename*.

De bediende in dit systeem is dus afwisselend bezig en vrij. De fractie van de tijd dat de bediende vrij is, is gelijk aan $P_0$, dus $1-\rho$. De gemiddelde tijd dat de bediende vrij is, is de gemiddelde tijd tot er weer een klant binnenkomt. Vanwege de geheugenloosheid van de exponentiële verdeling is deze tijdsduur $\frac{1}{\lambda}$. De *regeneratietijd* is dus $\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1-\rho}$ en de gemiddelde tijdsduur dat de bediende bezig is, is dus $\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1-\rho} \cdot (1-P_0) = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}$, wat gelijk is aan $W$, de tijd die een klant in het systeem verblijft.

**Voorbeeld 5.1**

Veronderstel dat schepen in een haven aankomen volgens een Poisson proces met een gemiddelde

van 5 schepen per etmaal. De havendirectie moet een beslissing nemen over de aanschaf van een kraan om de schepen te lossen. De dagelijkse kosten van de kraan zijn $5000 \times \mu$ euro, waarbij de lostijd per schip exponentieel verdeeld is met parameter $\mu$ (de gemiddelde lostijd per schip is $1/\mu$ uur). Gedurende 24 uur per etmaal kan er worden gelost. Voor elk schip zijn er verblijfkosten van 25 euro per uur dat het in de haven verblijft (ook voor de lostijd moet worden betaald). De directie moet een beslissing nemen over de keuze van $\mu$ en wil die keuze zó maken dat de totale kosten per etmaal minimaal zijn. Welke waarde van $\mu$ is optimaal?
Dit is een $M/M/1$-model. Laten we een uur als tijdseenheid nemen, dan is $\lambda = \frac{5}{24}$.
De gemiddelde ligkosten (per uur) van de schepen $= 25 \times L = \frac{25\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{125}{24\mu-5}$.
De gemiddelde kosten (per uur) voor de kraan zijn $\frac{5000}{24}\mu$.
Voor de kostenfunctie $f(\mu)$ geldt dus: $f(\mu) = \frac{125}{24\mu-5} + \frac{5000}{24}\mu$.
$f'(\mu) = 0$ geeft: $-\frac{24\times 125}{(24\mu-5)^2} + \frac{5000}{24} = 0$, waaruit volgt $(24\mu-5)^2 = \frac{24^2\times 125}{5000} = 14.4$,
zodat $24\mu - 5 = \sqrt{14.4} = 3.7947$. Aldus vinden we $\mu = 0.3664$.

*De verdeling van de verblijftijd*
Zij $W^*$ de tijd die een willekeurige aankomende klant in het systeem verblijft, als het systeem zich in een stationaire situatie bevindt, dus $\mathbb{E}\{W^*\} = W$. Om de kansverdeling van $W^*$ te bepalen conditioneren we naar het aantal klanten dat in het systeem aanwezig is op het moment dat de aankomende klant arriveert:

$$\mathbb{P}\{W^* \le t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{W^* \le t \mid n \text{ klanten in het systeem als de aankomende klant arriveert}\} \cdot \mathbb{P}\{n \text{ klanten in het systeem als de aankomende klant arriveert}\}.$$

Uit de PASTA-eigenschap volgt:

$\mathbb{P}\{n$ klanten in het systeem als de aankomende klant arriveert$\} = P_n = (1-\rho)\rho^n,\ n \in \mathbb{N}_0$.

Als $n = 0$, dan is de verblijftijd van de aankomende klant gelijk aan zijn bedieningsduur; als $n \ge 1$, dan ontvangt één klant bediening en zijn er $n-1$ klanten die eerst geholpen moeten worden voordat de aankomende klant zijn bediening ontvangt. Vanwege de geheugenloosheid van de exponentiële verdeling, is de resterende bedieningsduur van de klant die in bediening is weer exponentieel (met dezelfde parameter $\mu$).
Voor verblijftijd $T^{(n)}$ van de aankomende klant die $n$ klanten in het systeem aantreft geldt dus:

$$T^{(n)} = T_1 + T_2 + \cdots + T_{n+1},\ n = 0, 1, \ldots,$$

met $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ onderling onafhankelijke identiek verdeelde stochastische variabelen die elk negatief exponentieel verdeeld zijn met parameter $\mu$. Dit heet een *Erlang-(n+1)* verdeling.[5] Er kan worden aangetoond (zie Opgave 5.9) dat $T^{(n)}$ als dichtheid $\mu e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^n}{n!}$ heeft, zodat geldt:
$\mathbb{P}\{W^* \le t \mid n \text{ klanten in het systeem}\} = \int_0^t \mu e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^n}{n!}dx$.
We kunnen nu schrijven:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{W^* \le t\} &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n \cdot \int_0^t \mu e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^n}{n!}dx = (1-\rho)\int_0^t \mu e^{-\mu x}\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^n}{n!}\Big\}dx \\ &= (\mu-\lambda)\int_0^t e^{-(\mu-\lambda)x}dx = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t}. \end{aligned}$$

[5] Naar de Deense wiskundige Erlang, de grondlegger van de wachttijdtheorie, begin twintigste eeuw.

De verblijftijd is dus ook exponentieel verdeeld met parameter $\mu - \lambda$. De verwachting hiervan is $\frac{1}{\mu-\lambda}$, wat overeenkomt met de formule voor de gemiddelde verblijftijd $W$.

**b. Het M/M/s model**

De analyse van dit model is in principe hetzelfde als voor het $M/M/1$-model, alleen hebben we nu $s$ bedienden en veronderstellen we dat $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$. Deze $\rho$ heeft de interpretatie de fractie van de tijd waarin een individuele bediende bezet is.

In dit geboorte-sterfte proces is $\lambda_n = \lambda$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ en $\mu_n = \begin{cases} n\mu \text{ voor } 1 \leq n \leq s-1; \\ s\mu \text{ voor } n \geq s. \end{cases}$

Hieruit volgt $C_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} & \text{voor } n < s; \\ \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho^{n-s} & \text{voor } n \geq s. \end{cases}$

Uit de formules (5.4.1) en (5.4.2) volgt:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \sum_{n=s}^{\infty} \rho^{n-s} \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \frac{1}{1-\rho} \right\}^{-1}. \quad (5.5.4)$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \cdot P_0 & \text{voor } n < s; \\ \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho^{n-s} \cdot P_0 & \text{voor } n \geq s. \end{cases} \quad (5.5.5)$$

Vervolgens gaan we $L_q$ berekenen:

$$\begin{aligned} L_q &= \textstyle\sum_{n=s}^{\infty} (n-s)P_n = \sum_{j=0}^{\infty} jP_{s+j} = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho^j P_0 \\ &= \textstyle\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho P_0 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial \rho^j}{\partial \rho} = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho P_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \right\}. \end{aligned}$$

Omdat $\frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \right\} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ (1-\rho)^{-1} \right\} = (1-\rho)^{-2}$, krijgen we:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho P_0 \cdot (1-\rho)^{-2} = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \frac{1}{1-\rho} \right\}^{-1}. \quad (5.5.6)$$

Hieruit volgen de overige grootheden volgens de formule van Little:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda};\ W = W_q + \frac{1}{\mu};\ L = \lambda W. \quad (5.5.7)$$

In de formules voor $L,\ L_q,\ W$ en $W_q$ is weer te zien dat in de noemer de term $(1-\rho)$ voorkomt; ook hier hebben we dus weer een exponentiële toename als $\rho$ naar 1 nadert.

De fractie van de tijd dat alle bedienden bezet zijn is:

$$\textstyle\sum_{n=s}^{\infty} P_n = P_0 \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho^{n-s} = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot P_0(1-\rho)^{-1}.$$

Op grond van de PASTA-eigenschap volgt hieruit dat de fractie van de klanten die moeten wachten ook gelijk is aan $\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot P_0(1-\rho)^{-1}$. Deze laatste formule voor de kans dat een aankomende klant moet wachten voordat hij bediening ontvangt heet de *Erlang wachtformule*.

**Voorbeeld 5.2**

In een postkantoor zijn twee loketten, één voor geldzaken en één voor postzaken. De klanten voor geldzaken komen aan volgens een Poisson proces met een aankomstsnelheid van 15 klanten per

uur; de klanten voor postzaken komen, onafhankelijk van de klanten voor geldzaken, aan volgens een Poisson proces met een aankomstsnelheid van 18 klanten per uur.
De bedieningsduur van elke klant is exponentieel verdeeld met een verwachting van 3 minuten. Bij de huidige inrichting kan een klant voor geldzaken alleen terecht bij het loket geldzaken en kan een klant voor postzaken alleen terecht bij het loket postzaken.
Overwogen wordt beide loketten open te stellen voor zowel geld- als postzaken met één gezamenlijke wachtrij voor de loketten. Wat is het effect van de nieuwe inrichting op de bezetting van de loketten en op het gemiddelde aantal klanten in het postkantoor?
Kies als tijdseenheid een uur.
In de huidige situatie hebben we twee onafhankelijke $M/M/1$ systemen.
Voor het loket geldzaken is $\lambda = 15,\ \mu = 20$, dus de fractie van de tijd dat dit loket bezet is is $\rho = \frac{3}{4}$. Het gemiddeld aantal klanten voor geldzaken $L_{geld} = \frac{\rho}{1-\rho} = 3$. De wachttijd voordat de klant aan de beurt is bedraagt $\frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = 0.15$ uur (9 minuten).
Voor het loket postzaken is $\lambda = 18,\ \mu = 20$, dus de fractie van de tijd dat dit loket bezet is is $\rho = \frac{9}{10}$. Het gemiddeld aantal klanten voor postzaken $L_{post} = \frac{\rho}{1-\rho} = 9$. De wachttijd voordat de klant aan de beurt is bedraagt $\frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = 0.45$ uur (27 minuten).
Dus in totaal zijn gemiddeld $3 + 9 = 12$ klanten in het postkantoor aanwezig.
Beschouw vervolgens de voorgestelde situatie, waarin beide loketten beschikbaar zijn voor zowel geld- als postzaken. Dit is een $M/M/2$ systeem met $\lambda = 15 + 18 = 33,\ \mu = 20$, dus $\rho = 0.825$. Uit de formules van het $M/M/2$ systeem volgt:

$$P_0 = 0.0959;\ L_q = 3.516;\ W_q = 0.107:\ W = 0.157;\ L = 5.166.$$

We zien dus dat in het geval van samenvoegen van de loketten zowel het gemiddeld aantal klanten in het systeem flink daalt (van 12 naar 5.166) als dat de gemiddelde wachttijd van beide soort klanten eveneens sterk daalt (van 0.15 naar 0.107 resp. van 0.45 naar 0.107). Deze laatste daling is niet altijd het geval; als de $\lambda$'s sterk verschillen, dan kunnen de klanten met de kleinste $\lambda$ er door het samenvoegen op achteruitgaan.
Een andere vraag is hoe het $M/M/2$ systeem met bedieningssnelheid $\mu$ zich verhoudt tot het $M/M/1$ systeem met bedieningssnelheid $2\mu$. Laat het gemiddeld aantal klanten dat wacht $L_q(2)$ resp. $L_q(1)$ zijn en het aantal klanten in het systeem $L(2)$ resp. $L(1)$. Neem $\lambda = 15$ en $\mu = 10$ (dus $\rho = \frac{3}{4}$), dan hebben we hierboven gezien dat $L(1) = 3$. Uit de formules van het $M/M/1$ model volgt dat $L_q(1) = \frac{9}{4}$. Voor het $M/M/2$ model (waarin $\rho$ dus weer $\frac{3}{4}$ is) krijgen we: $L_q(2) = \frac{27}{14}$ en $L(2) = \frac{24}{7}$. We zien dus het opmerkelijke verschijnsel dat $L_q(2) < L_q(1)$, terwijl $L(2) > L(1)$. Dit resultaat hangt niet van de gekozen getallen af, maar geldt algemeen (zie Opgave 5.10).

Opmerking:
Als $s = \infty$ (altijd voldoende bedienden), dan is $C_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}$, zodat $P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} e^{-\lambda/\mu}$ voor alle $n$, d.w.z. dat de stationaire kansen Poisson-verdeeld zijn met parameter $\lambda/\mu$.

**c. Het M/M/s; FIFO/N/$\infty$ model**

In dit model kunnen er maximaal $N$ klanten in het systeem zijn. We nemen bovendien aan dat $s \leq N$ (het is duidelijk dat $s > N$ zinloos is). In termen van het geboorte-sterfte proces betekent dit dat:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda \text{ voor } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 \text{ voor } n \geq N \end{cases} \quad \text{en } \mu_n = \begin{cases} n\mu \text{ voor } 1 \leq n \leq s-1 \\ s\mu \text{ voor } n \geq s \end{cases}$$

Hieruit volgt $C_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} & \text{voor } 0 \leq n \leq s-1; \\ \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot (\frac{\lambda}{s\mu})^{n-s} & \text{voor } s \leq n \leq N. \end{cases}$

Laat weer $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$ (we hoeven nu niet te eisen dat $\rho < 1$, want omdat er maximaal $N$ klanten zijn kan het systeem zich niet 'opblazen'). Uit de formules (5.4.1) en (5.4.2) volgt weer:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \sum_{n=s}^{N} \rho^{n-s} \right\}^{-1}. \tag{5.5.8}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \cdot P_0 & \text{voor } 0 \leq n \leq s-1; \\ \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho^{n-s} \cdot P_0 & \text{voor } s \leq n \leq N; \\ 0 & \text{voor } n > N. \end{cases} \tag{5.5.9}$$

$P_N$ is niet alleen de fractie van de tijd dat het systeem vol is, maar - op grond van de PASTA-regel - ook de fractie van de tijd dat een aankomende klant het systeem vol aantreft, d.w.z. dat de klant geweigerd wordt; dit heet de *blokkeringskans*.

Als $N = s$, d.w.z. dat er geen ruimte aanwezig is om te wachten, dan geldt $P_N = \frac{(\lambda/\mu)^s/s!}{\sum_{n=0}^{s}(\lambda/\mu)^n/n!}$. Dit heet de *Erlang verliesformule*. Ook nu gaan we eerst $L_q$ berekenen:

$$\begin{aligned} L_q &= \textstyle\sum_{n=s}^{\infty}(n-s)P_n = \sum_{j=0}^{N-s} jP_{s+j} = \sum_{j=0}^{N-s} j\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho^j P_0 \\ &= \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho P_0 \cdot \textstyle\sum_{j=0}^{N-s} \frac{\partial \rho^j}{\partial \rho} = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \rho P_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\big\{ \sum_{j=0}^{N-s} \rho^j \big\}. \end{aligned}$$

Omdat $\frac{\partial}{\partial \rho}\big\{ \sum_{j=0}^{m} \rho^j \big\} = \frac{\partial}{\partial \rho}\big\{ \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho} \big\} = \frac{1}{(1-\rho)^2} \cdot \big\{1 - \rho^m - m\rho^m(1-\rho)\big\}$, krijgen we:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot \big\{1 - \rho^{N-s} - (N-s)\rho^{N-s}(1-\rho)\big\}P_0. \tag{5.5.10}$$

Vervolgens berekenen we $\overline{\lambda}$:

$$\overline{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda P_n = \lambda(1 - P_N) = \lambda\big\{1 - \frac{\rho^N s^s}{s!} P_0\big\}. \tag{5.5.11}$$

Hieruit volgen de overige grootheden volgens de formule van Little:

$$W_q = \frac{L_q}{\overline{\lambda}};\ W = W_q + \frac{1}{\mu};\ L = \overline{\lambda} W. \tag{5.5.12}$$

**Voorbeeld 5.3**

Beschouw een kapperszaak met 3 stoelen en daarnaast is nog plaats voor 4 wachtende klanten. De potentiële klanten komen aan volgens een Poisson proces met een gemiddelde van één klant per 4 minuten. Een behandeling heeft een exponentiële bedieningsduur met een gemiddelde van 24 minuten. Gevraagd worden $L, W$ en het verwachte aantal klanten dat per uur verloren gaat.

Dit is een $M/M/s; FIFO/N/\infty$-model met $s = 3$ en $N = 7$.
Neem als tijdseenheid een uur, dan is $\lambda = 15,\ \mu = \frac{5}{2},\ \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = 2$.
$P_0 = \{\sum_{n=0}^{2} \frac{6^n}{n!} + \frac{6^3}{3!} \sum_{n=3}^{7} 2^{n-3}\}^{-1} = \frac{1}{1141}$ en $P_7 = \frac{6^3}{3!} \cdot 2^4 P_0 = \frac{576}{1141}$.
$L_q = \frac{6^3}{3!} \cdot \frac{2}{(1-2)^2}\{1 - 2^4 - 4 \cdot 2^4(1-2)\}P_0 = \frac{3528}{1141} \approx 3.09$ personen.
$\overline{\lambda} = \lambda(1 - P_7) = \frac{8475}{1141}$.
$W_q = \frac{L_q}{\overline{\lambda}} = \frac{3528}{8475} \approx 0.41$ uur $\approx 25$ minuten.
$W = W_q + \frac{1}{\mu} \approx 0.81$ uur $\approx 49$ minuten.
$L = \overline{\lambda}W = \frac{6918}{1141} \approx 6.06$ personen.
Het verwachte aantal klanten dat per uur verloren gaat is $\lambda P_7 = \frac{8640}{1141} \approx 7.57$.

Voor het speciale geval $s = 1$ krijgen we de volgende formules voor $P_0,\ \overline{\lambda}$ en $L_q$ (merk op dat deze voor $N \to \infty$ overeenkomen met de formules van het $M/M/1$ model):

$$P_0 = \left\{1 + \rho \cdot \sum_{n=1}^{N} \rho^{n-1}\right\}^{-1} = \left\{1 + \rho \cdot \frac{1-\rho^N}{1-\rho}\right\}^{-1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}. \tag{5.5.13}$$

$$\overline{\lambda} = \lambda \cdot \{1 - \rho^N P_0\} = \lambda \cdot \frac{1-\rho^N}{1-\rho^{N+1}}. \tag{5.5.14}$$

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} \cdot \left\{1 - \rho^{N-1} - (N-1)\rho^{N-1}(1-\rho)\right\} \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \\ &= \frac{\rho^2}{1-\rho} \cdot \left\{1 - N\rho^{N-1} + (N-1)\rho^N\right\} \cdot \frac{1}{1-\rho^{N+1}}. \end{aligned} \tag{5.5.15}$$

Hoewel we opgemerkt hebben dat dit model geldig is voor alle waarden van $\rho$, geven de formules problemen als $\rho = 1$. In dat geval moeten de formules wel op analoge wijze worden bereken, maar leidt dit tot andere formules. We zullen dit laten zien voor het geval dat $s = 1$.

$P_0 = \{1 + \sum_{n=1}^{N} 1\}^{-1} = \frac{1}{N+1};\ P_j = \frac{1}{N+1},\ 1 \le j \le N;\ L_q = \sum_{n=0}^{N-1} jP_{j+1} = \frac{1}{2}\frac{(N-1)N}{N+1};$
$\overline{\lambda} = \lambda \cdot (1 - P_0) = \lambda \cdot \frac{N}{N+1};\ W_q = \frac{L_q}{\overline{\lambda}} = \frac{N-1}{2\lambda};\ W = W_q + \frac{1}{\mu} = W_q + \frac{1}{\lambda} = \frac{N+1}{2\lambda};\ L = \overline{\lambda}W = \frac{N}{2}.$

**d. Het M/M/s; FIFO/N/N model**

In dit model is er een eindige klantenbron met $N$ elementen. Dus als er in het systeem reeds $n$ klanten aanwezig zijn, dan is het aantal potentiële klanten $N - n$. Het aantal bedienden $s$ is weer hoogstens $N$. We nemen aan dat iedere klant zich (onafhankelijk van elkaar) volgens een Poissonproces met parameter $\lambda$ kan melden. Dit geeft de volgende schematische voorstelling van de stationaire situatie: $\lambda_n = (N-n)\lambda,\ 0 \le n \le N$ en $\mu_n = \begin{cases} n\mu \text{ voor } 1 \le n \le s-1; \\ s\mu \text{ voor } s \le n \le N. \end{cases}$

Hieruit volgt: $C_n = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!n!} \cdot (\lambda/\mu)^n & \text{voor } 0 \le n \le s-1 \\ \frac{N!}{(N-n)!s!s^{n-s}} \cdot (\lambda/\mu)^n & \text{voor } s \le n \le N \end{cases}$ en

$$P_0 = \left\{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{N!}{(N-n)!n!} \cdot (\lambda/\mu)^n + \frac{N!s^s}{s!} \sum_{n=s}^{N} \frac{1}{(N-n)!s^n} \cdot (\lambda/\mu)^n\right\}^{-1}. \tag{5.5.16}$$

De berekening van de vier karakteristieke getallen verloopt als volgt:

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda} &= \textstyle\sum_{n=0}^{N} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{N} \lambda(N-n)P_n = \lambda N \sum_{n=0}^{N} P_n - \lambda \sum_{n=0}^{N} nP_n = \lambda(N-L). \\
L_q &= \textstyle\sum_{n=s}^{N} (n-s) C_n P_0.
\end{aligned}$$

Omdat $L = L_q + \frac{\overline{\lambda}}{\mu} = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \cdot (N-L)$, volgt hieruit dat $L = \frac{\lambda N + \mu L_q}{\lambda + \mu}$.

Met behulp van (5.5.16) levert dit de volgende formules op:

$$P_n = \frac{N! s^s}{(N-s)! s! s^n} \cdot (\lambda/\mu)^n P_0, \ s \le n \le N. \tag{5.5.17}$$

$$L_q = \sum_{n=s}^{N} (n-s) P_n; \ L = \frac{\lambda N + \mu L_q}{\lambda + \mu}; \ \overline{\lambda} = \lambda(N-L); \ W_q = \frac{L_q}{\overline{\lambda}}; \ W = \frac{L}{\overline{\lambda}}. \tag{5.5.18}$$

Tenslotte beschouwen we weer het speciale geval $s = 1$, waarvoor de volgende formules voor $P_0$ en $L_q$ gelden:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} \cdot (\lambda/\mu)^n \right\}^{-1}. \tag{5.5.19}$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{N} (n-1) P_n = L - (1-P_0) = \frac{\lambda N + \mu L_q}{\lambda + \mu} - (1-P_0).$$

Hieruit volgt dat

$$L_q = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} \cdot (1-P_0). \tag{5.5.20}$$

**Vraag 5.4**

Een bank heeft één drive-in loket open. Klanten komen aan volgens een Poissonproces met een gemiddelde tussentijd van 40 seconden. De bediening duurt gemiddeld 30 seconden en is exponentieel verdeeld.

Op de oprit naar het loket is slechts plaats voor 3 wachtende auto's; zijn er meer klanten, dan sluiten deze aan in de wachtrij die een deel van de straat in beslag neemt.

Om de klanten tevreden te houden vindt de directie van de bank dat aan de volgende twee voorwaarden voldaan moet zijn:

(1) de gemiddelde wachttijd van een klant voordat deze bediend wordt mag niet langer zijn dan 1 minuut;

(2) de wachtrij mag niet meer dan 10% van de tijd een deel van de straat in beslag nemen.

Is aan deze voorwaarden voldaan? Zo niet, lost een tweede (identiek) loket het probleem op?

Beschouw vervolgens het probleem met de extra voorwaarde dat niet op straat mag worden gewacht (het aantal auto's in de wachtrij is dus hoogstens 3). De directie stelt in dit geval als eis dat tenminste 95% van de aankomende klanten in het systeem moet worden toegelaten. Zijn twee loketten nu voldoende?

**Vraag 5.5**

Tijdens het oogsten komen met graan geladen wagens bij een verzamelpunt waar ze gelost worden. Veronderstel dat het aankomstproces Poisson is met gemiddeld 9 aankomsten per uur en dat de lostijd exponentieel verdeeld is met een gemiddelde van 6 minuten.
Bereken de verwachting van de tijd die een wagen bij dit verzameldepot verblijft.
Om deze tijd te verkorten worden drie voorstellen gedaan:
a. De capaciteit van het lossen vergroten waardoor de lostijd gemiddeld 4 minuten wordt.
b. Een tweede loseenheid installeren op dit verzamelpunt met eveneens een gemiddelde lostijd van 6 minuten.
c. Een extra verzamelpunt elders maken dat verder identiek is aan het huidige en de wagens over beide verzamelpunten gelijk verdelen.
Wat wordt in ieder van deze drie voorstellen de verwachte verblijftijd van een wagen bij het lossen?

**Vraag 5.6**

In een werkplaats staan $N$ machines. De levensduur van elke machine is exponentieel verdeeld met verwachting $\frac{1}{\lambda}$. Een machine die kapot gaat wordt hersteld door een reparateur, waarna de machine weer als nieuw is. De reparatietijd is ook exponentieel verdeeld met verwachting $\frac{1}{\mu}$.
Er zijn $s \leq N$ reparateurs beschikbaar. De chef van de werkplaats wil de kans dat het werk volledig stil ligt (t.g.v. defecten aan alle machines) bepalen.
a. Modelleer dit probleem als wachtrijmodel; stel de balansvergelijkingen op.
b. Los het probleem op voor $N = 3,\ \lambda = 1,\ \mu = 2$ en $s = 2$.

## 5.6 Het M/G/1 model

Veronderstel dat de bedieningsduur $B$ een willekeurige tijdsduur heeft met verwachting $\tau$, variantie $\sigma^2$ en dichtheid $f(t)$. Per tijdseenheid komen gemiddeld $\lambda$ klanten aan die dus gemiddeld per tijdseenheid $\lambda\tau$ aan bediening nodig hebben. We veronderstellen daarom dat $\lambda\tau < 1$ en dat er een stationaire situatie ontstaat.
Zij $N_k$ het aantal klanten in het systeem als de $k$-de klant net vertrokken is na een bediening gehad te hebben, en laat $X_k$ het aantal klanten zijn dat binnenkomt terwijl de $k$-de klant bediend wordt:

$$N_{k+1} = \begin{cases} N_k + X_{k+1} - 1 & \text{als } N_k \geq 1; \\ X_{k+1} & \text{als } N_k = 0. \end{cases}$$

Laat

$$\delta(N_k) = \begin{cases} 1 & \text{als } N_k \geq 1; \\ 0 & \text{als } N_k = 0. \end{cases}$$

We kunnen nu schrijven $N_{k+1} = N_k + X_{k+1} - \delta(N_k)$, zodat

$$\begin{aligned} N_{k+1}^2 &= N_k^2 + X_{k+1}^2 + \delta(N_k)^2 + 2N_kX_{k+1} - 2N_k\delta(N_k) - 2X_{k+1}\delta(N_k) \\ &= Nk^2 + X_{k+1}^2 + \delta(N_k) + 2N_kX_{k+1} - 2N_k - 2X_{k+1}\delta(N_k), \end{aligned}$$

waaruit volgt:

$$\mathbb{E}\{N_{k+1}\} = \mathbb{E}\{N_k\} + \mathbb{E}\{X_{k+1}\} - \mathbb{E}\{\delta(N_k)\}$$

en

$$\mathbb{E}\{N_{k+1}^2\} = \mathbb{E}\{N_k^2\} + \mathbb{E}\{X_{k+1}^2\} + \mathbb{E}\{\delta(N_k)\} + 2\,\mathbb{E}\{N_k\}\cdot\mathbb{E}\{X_{k+1}\} - 2\,\mathbb{E}\{N_k\} - 2\,\mathbb{E}\{X_{k+1}\}\cdot\mathbb{E}\{\delta(N_k)\}.$$

Vanwege de aanname dat er een stationaire situatie ontstaat geldt:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\{N_k\} = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\{N_{k+1}\}.$$

Laat voor de stationaire grootheden de index $k$ weg. Dit levert het volgende op.
Uit de formule van $\mathbb{E}\{N_{k+1}\}$ volgt $\mathbb{E}\{\delta(N)\} = \mathbb{E}\{X\}$ en uit de formule voor $\mathbb{E}\{N_{k+1}^2\}$ met het bovenstaande:

$$0 = \mathbb{E}\{X^2\} + \mathbb{E}\{X\} + 2\,\mathbb{E}\{N\}\cdot\mathbb{E}\{X\} - 2\,\mathbb{E}\{N\} - 2\,\mathbb{E}\{X^2\}.$$

Hieruit volgt:

$$\mathbb{E}\{N\} = \frac{\mathbb{E}\{X^2\} + \mathbb{E}\{X\}\cdot(1 - 2\,\mathbb{E}\{X\})}{2(1-\mathbb{E}\{X\})}. \tag{5.6.1}$$

Zij $N(t)$ het aantal aankomsten in tijdsduur $t$. Uit de eigenschappen van de exponentiële verdeling is bekend dat $\mathbb{E}\{N(t)\} = \mathsf{var}\{N(t)\} = \lambda t$. De waarden voor $\mathbb{E}\{X\}$ en $\mathbb{E}\{X^2\}$ kunnen als volgt worden berekend:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{X\} &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}(X|T)\} = \textstyle\int_0^\infty \mathbb{E}\{X|T=t\})f(t)dt = \int_0^\infty \mathbb{E}\{N(t)\}f(t)dt \\
&= \lambda \textstyle\int_0^\infty t f(t)dt = \lambda\cdot\mathbb{E}\{T\} = \lambda\tau. \\
\mathbb{E}\{X^2\} &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}(X^2|T)\} = \textstyle\int_0^\infty \mathbb{E}\{X^2|T=t\}f(t)dt = \int_0^\infty \mathbb{E}\left\{\{N(t)\}^2\right\}f(t)dt \\
&= \textstyle\int_0^\infty \left\{\mathsf{var}\{N(t)\} + \left\{\mathbb{E}\{N(t)\}\right\}^2\right\}f(t)dt = \int_0^\infty \{\lambda t + (\lambda t)^2\}f(t)dt \\
&= \lambda\tau + \lambda^2 \textstyle\int_0^\infty t^2 f(t)dt = \lambda\tau + \lambda^2(\sigma^2+\tau^2).
\end{aligned}$$

Vullen we deze waarden in (5.6.1) in, dan krijgen we:

$$\mathbb{E}\{N\} = \frac{\lambda\tau + \lambda^2(\sigma^2+\tau^2) + \lambda\tau(1-2\lambda\tau)}{2(1-\lambda\tau)} = \lambda\tau + \frac{\lambda^2(\sigma^2+\tau^2)}{2(1-\lambda\tau)}. \tag{5.6.2}$$

Laat $\rho = \lambda\tau$, dan luiden de formules van dit model:

$$L = \rho + \frac{\lambda^2\sigma^2+\rho^2}{2(1-\rho)};\ L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2+\rho^2}{2(1-\rho)};\ W = \frac{L}{\lambda};\ W_q = \frac{L_q}{\lambda} \tag{5.6.3}$$

Voor de tijdsduur $W_q$ dat men moet wachten voordat men bediend wordt, volgt uit bovenstaande formule dat

$$W_q = \frac{\rho}{1-\rho}\cdot\{\frac{\tau}{2} + \frac{\sigma^2}{2\tau}\} \tag{5.6.4}$$

Dit is de zogenaamde formule van *Pollaczek-Khintchine*. We kunnen deze formule ook intuïtief afleiden met een 'betaalregel', zoals we ook hebben gedaan bij de formule van Little.

Laat de *werklast* van een systeem de som zijn van de verwachtingen van de (resterende) bedieningsduren in het systeem dat zich in een stationaire situatie bevindt. Volgens de PASTA-regel moet een aankomende klant wachten voordat hij bediend wordt gedurende een tijdsduur gelijk aan de werklast van het systeem: werklast = $W_q$.
Beschouw nu de volgende betaalregel: iedere klant betaalt met een 'snelheid' (d.w.z. bedrag per tijdseenheid) gelijk aan zijn (resterende) bedieningsduur. Zolang een klant niet bediend wordt, gemiddeld dus gedurende $W_q$ tijdseenheden, betaalt hij met een snelheid $T$ en als hij reeds $x$ tijdseenheden in bediening is betaalt hij met snelheid $T - x$. De verwachte betaling van een klant is dus:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{TW_q + \int_0^T (T-x)dx\right\} &= \tau W_q + \tfrac{1}{2}\,\mathbb{E}\{T^2\} = \tau W_q + \tfrac{1}{2}\Big\{\mathsf{var}\{T\} + \mathbb{E}\{T\}^2\Big\} \\ &= \tau W_q + \tfrac{1}{2}(\sigma^2 + \tau^2).\end{aligned}$$

Omdat er per tijdseenheid $\lambda$ klanten het systeem binnenkomen ontvangt het systeem dus per tijdseenheid (laat de klanten aan de poort betalen en gebruik dat $\lambda\tau = \rho$): $\rho\big\{W_q + \frac{\sigma^2}{2\tau} + \frac{\tau}{2}\big\}$.
Anderzijds ontvangt het systeem per tijdseenheid de werklast, d.w.z. $W_q$, zodat geldt:

$$W_q = \rho\big\{W_q + \tfrac{\sigma^2}{2\tau} + \tfrac{\tau}{2}\big\} \quad \rightarrow \quad W_q = \tfrac{\rho}{1-\rho} \cdot \big\{\tfrac{\sigma^2}{2\tau} + \tfrac{\tau}{2}\big\}.$$

We zullen twee speciale gevallen van dit model verder uitwerken.

*a. Constante bedieningsduur*
Veronderstel dat de bedieningsduur een constante waarde $\tau$ heeft. Dan is $\sigma = 0$, wat het volgende oplevert:

$$W_q = \frac{\rho\tau}{2(1-\rho)};\ L_q = \lambda W_q;\ L = L_q + \rho;\ W = \frac{L}{\lambda}. \tag{5.6.5}$$

*b. Erlang-verdelingen*
In model a is $\sigma = 0$ en in het $M/M/1$-model is de $\sigma = \frac{1}{\mu}$, wat vaak vrij groot is. Hier tussenin zitten de Erlang-verdelingen met parameters $(\mu, k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Dit zijn verdelingen behorende bij tijdsduur $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$, waarbij $T_1, T_2, \ldots T_k$ onderling onafhankelijke identiek verdeelde stochastische variabelen zijn, die elk een negatief exponentiële verdeling met parameter $\mu$ hebben.
Met behulp van deze interpretatie zijn de verwachting en de variantie eenvoudig te bepalen:

$$\mathbb{E}\{T\} = \textstyle\sum_{i=1}^k \mathbb{E}\{T_i\} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\mu} = \frac{k}{\mu};\ \mathsf{var}\{T\} = \sum_{i=1}^k \mathsf{var}\{T_i\} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\mu^2} = \frac{k}{\mu^2}.$$

We hebben al eerder opgemerkt dat de dichtheid van een Erlang-verdeling met parameter $(\mu, k)$ gelijk is aan:

$$f(x) = \mu \cdot e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^{k-1}}{(k-1)!},\ x \geq 0. \tag{5.6.6}$$

Voor $k = 1$ is $f(x) = \mu e^{-\mu x}$, de dichtheid van de exponentiële verdeling, en voor $k \to \infty$ gaat $f(x)$ naar de gedegenereerde verdeling van model a met $\tau = \mu^{-1}$.

Het bovenstaande levert de volgende formules op voor de vier karakteristieke grootheden:

$$W_q = \frac{1}{2}k(k+1) \cdot \frac{\lambda}{\mu(\mu - k\lambda)};\ L_q = \lambda W_q;\ L = L_q + \frac{k\lambda}{\mu};\ W = \frac{L}{\lambda}. \tag{5.6.7}$$

We kunnen ook de stationaire kansen van de Erlang-verdelingen bepalen. Daartoe nemen we niet het aantal klanten in het systeem als toestand, maar het aantal fasen, d.w.z. aantal negatief exponentiële verdeling dat nog bediening moet krijgen. We hebben dan overgangen van toestand $i$ naar $i+k$ met snelheid $\lambda$ (aankomst) en naar toestand $i-1$ met snelheid $\mu$ (afhandeling van een fase). De bijbehorende balansvergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned} \lambda P_0 &= \mu P_1 & \\ \lambda P_n + \mu P_n &= \mu P_{n+1} & n = 1, 2, \ldots, k-1 \\ \lambda P_n + \mu P_n &= \lambda P_{n-k} + \mu P_{n+1} & n \geq k \end{aligned}$$

Door $P_n = 0$ te nemen als $n < 0$, kunnen we de laatste twee vergelijkingen samenvoegen tot

$$\lambda P_n + \mu P_n = \lambda P_{n-k} + \mu P_{n+1},\ n \geq 1. \tag{5.6.8}$$

We zullen dit stelsel oplossen m.b.v. de genererende functie, d.w.z. de functie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n$. Deze is goed gedefinieerd als $|z| < 1$. Vermenigvuldigen we (5.6.8) met $z^n$ en sommeren we deze over alle $n \geq 1$, dan krijgen we:

$$(\lambda + \mu) \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-k} z^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} z^n,$$

ofwel

$$(\lambda + \mu)\{f(z) - P_0\} = \lambda z^k f(z) + \mu z^{-1}\{f(z) - P_0 - P_1 z\},$$

waaruit volgt $f(z) = \frac{(\lambda+\mu)P_0 - \mu z^{-1} P_0 - \mu P_1}{\lambda + \mu - \lambda z^k - \mu z^{-1}}$. Door de eerste balansvergelijking $\lambda P_0 = \mu P_1$ in te vullen en teller en noemer met $-z$ te vermenigvuldigen krijgen we:

$$f(z) = \frac{\mu P_0 (1-z)}{\mu(1-z) - \lambda z(1-z^k)}. \tag{5.6.9}$$

Verder is $1 - z^k = (1-z)(1 + z + \cdots + z^{k-1})$ en $P_0 = 1 - \rho$ met $\rho = \lambda \cdot \frac{k}{\mu} < 1$ de bezettingsgraad. Vullen we dit in (5.6.9) in, dan krijgen we

$$f(z) = \frac{1-\rho}{1 - \rho \cdot \frac{z + z^2 + \cdots + z^k}{k}}. \tag{5.6.10}$$

De noemer van (5.6.10) is een polynoom van de graad $k$ met $k$ (complexe) nulpunten $z_i,\ 1 \leq i \leq k$, zodat de noemer te schrijven is als $\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)$. Deze nulpunten zijn verschillend (zie Vraag 5.7) en ook geldt $|z_i| > 1$ voor alle $i$, immers:

$1 - \rho \cdot \frac{z_i + z_i^2 + \cdots + z_i^k}{k} = 0 \ \rightarrow\ \frac{|z_i + z_i^2 + \cdots + z_i^k|}{k} = \frac{1}{\rho} > 1$, terwijl als $|z_i| \leq 1$, dan is $\frac{|z_i + z_i^2 + \cdots + z_i^k|}{k} \leq 1$.

$f(z)$ is dus te schrijven als (zie ook Vraag 5.7)

$$f(z) = \frac{1-\rho}{\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)} = (1-\rho)\left\{\frac{A_1}{1 - z/z_1} + \frac{A_2}{1 - z/z_2} + \cdots + \frac{A_k}{1 - z/z_k}\right\}, \tag{5.6.11}$$

met $A_i = \left\{ \prod_{j\neq i} (1 - z_i/z_j)\right\}^{-1},\ i = 1, 2, \ldots, k$. Hieruit volgt

$$f(z) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\sum_{i=1}^{k} A_i\big(\frac{1}{z_i}\big)^n\Big\}z^n, \tag{5.6.12}$$

zodat $P_n = (1-\rho)\sum_{i=1}^{k} A_i\big(\frac{1}{z_i}\big)^n$. Voor de kans $Q_m$ op $m \geq 1$ klanten in het systeem geldt:

$$\begin{aligned} Q_m &= \textstyle\sum_{n=(m-1)k+1}^{mk} P_n = (1-\rho)\sum_{n=(m-1)k+1}^{mk}\sum_{i=1}^{k} A_i\big(\frac{1}{z_i}\big)^n \\ &= \textstyle(1-\rho)\sum_{i=1}^{k} A_i \sum_{n=(m-1)k+1}^{mk}\big(\frac{1}{z_i}\big)^n \\ &= \textstyle(1-\rho)\sum_{i=1}^{k} A_i\big(\frac{1}{z_i}\big)^{mk+1}\{z_i^k + z_i^{k-1} + \cdots + z_i\} = \frac{k}{\rho}(1-\rho)\sum_{i=1}^{k} A_i\big(\frac{1}{z_i}\big)^{mk+1}. \end{aligned}$$

**Voorbeeld 5.4**

Beschouw een Erlang verdeling met $k = 2,\ \lambda = 1$ en $\mu = 6$. Dan is $\rho = \lambda \cdot \frac{k}{\mu} = \frac{1}{3}$.

$f(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho\cdot\frac{z+z^2+\cdots+z^k}{k}} = \frac{2/3}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{z+z^2}{2}} = \frac{2/3}{(1-z/2)(1+z/3)}$.

Hieruit volgt: $z_1 = 2,\ z_2 = -3;\ A_1 = \big(1 - \frac{z_1}{z_2}\big)^{-1} = \frac{3}{5},\ A_2 = \big(1 - \frac{z_2}{z_1}\big)^{-1} = \frac{2}{5}$.

Dit geeft:

$$\begin{aligned} P_n &= \textstyle\frac{2}{3}\{\frac{3}{5}\big(\frac{1}{2}\big)^n + \frac{2}{5}\big(\frac{-1}{3}\big)^n\} = \frac{2}{5}\big(\frac{1}{2}\big)^n + \frac{4}{15}\big(\frac{-1}{3}\big)^n. \\ Q_m &= \textstyle\frac{2}{1/3}\cdot\frac{2}{3}\{\frac{3}{5}\big(\frac{1}{2}\big)^{2m+1} + \frac{2}{5}\big(\frac{-1}{3}\big)^{2m+1}\} = \frac{6}{5}\big(\frac{1}{4}\big)^m - \frac{8}{15}\big(\frac{1}{9}\big)^m. \end{aligned}$$

**Vraag 5.7**

a. Toon aan dat alle nulpunten van de noemer van (5.6.10) enkelvoudig zijn.

b. Toon aan dat formule (5.6.11) juist is.

## 5.7 Netwerken van wachtrijen

### 5.7.1 De tandem wachtrij

Beschouw een systeen met twee bedienden. Klanten komen aan bij de eerste wachtrij, met bediende 1, volgens een Poisson proces met parameter $\lambda$. Na hier bediend te zijn gaan ze door naar een tweede wachtrij, waar bediende 2 werkzaam is. De bedieningsduur bij bediende $i$ is negatief exponentieel verdeeld met parameter $\mu_i,\ i = 1, 2$. We veronderstellen dat de wachtruimtes onbegrensd zijn en dat $\rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i} < 1,\ i = 1, 2$.

Definieer $N_i(t)$ als het aantal klanten dat op tijdstip $t$ aanwezig is bij wachtrij $i,\ i = 1, 2$. Dan is het proces $\{(N_1(t), N_2(t)), t \geq 0\}$ een continue Markov keten. De evenwichtsverdeling (op grond van de aanname $\rho_i < 1,\ i = 1, 2$ kan worden aangetoond dat deze bestaat en gevonden kan worden als unieke oplossing van het stelsel lineaire vergelijkingen (5.7.1)) van deze Markov keten noteren we met $P_{n,m},\ n, m \in \mathbb{N}_0$. $P_{n,m}$ heeft weer de interpretatie als de fractie van de tijd dat op de lange duur gelijktijdig $n$ klanten in wachtrij 1 en $m$ klanten in wachtrij 2 zijn.

We zullen nu eerst bewijzen dat het vertrekproces van wachtrij 1 weer een Poissonproces is met parameter $\lambda$. Bij de $M/M/1$-wachtrij hebben we gezien dat de stationaire kansverdeling van wachtrij 1 voldoet aan $P_n = (1-\rho_1)\rho_1^n,\ n \in \mathbb{N}_0$. Nu geldt:

$\mathbb{P}\{$een klant vertrekt gedurende het interval $[t, t+\Delta t)\} =$

$\mathbb{P}\{$minstens één klant op tijdstip $t$ en de bediening van deze klant loopt af vóór tijdstip $t+\Delta t\} =$

$(1-P_0)\cdot \mu_1 \Delta t = \frac{\lambda}{\mu_1}\cdot \mu_1\Delta t = \lambda\Delta t.$

De vertreksnelheid bij wachtrij 1 is dus $\lambda$, wat overeenkomt met het Poissonproces met parameter $\lambda$.[6] Dit is het aankomstproces bij wachtrij 2 en voor de kans $P_m$ dat er $m$ klanten bij wachtrij 2 zijn geldt weer: $P_m = (1-\rho_2)\rho_2^m,\ m \in \mathbb{N}_0$. Als de aantallen klanten bij de wachtrijen onafhankelijk van elkaar zijn, dan zou hieruit volgen dat:

$$P_{n,m} = (1-\rho_1)\rho_1^n(1-\rho_2)\rho_2^m,\ n,m \in \mathbb{N}_0. \tag{5.7.1}$$

Deze formule is inderdaad juist, maar we zullen dit niet m.b.v. de onafhankelijkheid bewijzen, maar via de evenwichtsvergelijkingen. Deze evenwichtsvergelijkingen zien er als volgt uit:

| Toestand | Stroom in | = | Stroom uit |
|---|---|---|---|
| $0,0$ | $\mu_2 P_{0,1}$ | = | $\lambda P_{0,0}$ |
| $n,0; n\geq 1$ | $\lambda P_{n-1,0} + \mu_2 P_{n,1}$ | = | $(\lambda+\mu_1)P_{n,0}$ |
| $0,m; m \geq 1$ | $\mu_2 P_{0,m+1} + \mu_1 P_{1,m-1}$ | = | $(\lambda+\mu_2)P_{0,m}$ |
| $n,m; n,m\geq 1$ | $\lambda P_{n-1,m} + \mu_2 P_{n,m+1} + \mu_1 P_{n+1,m-1}$ | = | $(\lambda+\mu_1+\mu_2)P_{n,m}$ |

**Stelling 5.4** $P_{n,m} = (1-\rho_1)\rho_1^n(1-\rho_2)\rho_2^m,\ n,m \in \mathbb{N}_0.$

**Bewijs**

We zullen laten zien dat de $P_{n,m}$ uit de Stelling voldoen aan de evenwichtsvergelijkingen. Omdat evenwichtsvergelijkingen een unieke oplossing hebben, is daarmee het bewijs geleverd.

$\mu_2 P_{0,1} = \mu_2(1-\rho_1)(1-\rho_2)\rho_2 = \lambda(1-\rho_1)(1-\rho_2) = \lambda P_{0,0}.$

$\lambda P_{n-1,0} + \mu_2 P_{n,1} = \lambda(1-\rho_1)\rho_1^{n-1}(1-\rho_2) + \mu_2(1-\rho_1)\rho_1^n(1-\rho_2)\rho_2 =$

$(1-\rho_1)\rho_1^n(1-\rho_2)\{\lambda\rho_1^{-1}+\mu_2\rho_2\} = (1-\rho_1)\rho_1^n(1-\rho_2)\{\mu_1+\lambda\} = (\lambda+\mu_1)P_{n,0},\ n\geq 1.$

$\mu_2 P_{0,m+1} + \mu_1 P_{1,m-1} =$

$\mu_2(1-\rho_1)(1-\rho_2)\rho_2^{m+1} + \mu_1(1-\rho_1)\rho_1(1-\rho_2)\rho_2^{m-1} =$

$(1-\rho_1)(1-\rho_2)\rho_2^m[\mu_2\rho_2 + \mu_1\rho_1\rho_2^{-1}] = (\lambda+\mu_2)P_{o,m},\ m\geq 1.$

$\lambda P_{n-1,m} + \mu_2 P_{n,m+1} + \mu_1 P_{n+1,m-1} =$

$\lambda(1-\rho_1)\rho_1^{n-1}(1-\rho_2)\rho_2^m + \mu_2(1-\rho_1)\rho_1^n(1-\rho_2)\rho_2^{m+1} + \mu_1(1-\rho_1)\rho_1^{n+1}(1-\rho_2)\rho_2^{m-1} =$

[6] Burke heeft zelfs bewezen dat het vertrekproces van een $M/M/s$-wachtrij weer een Poisson proces met parameter $\lambda$ is (P.J. Burke: *Output processes and tandem queues*, Proceedings of the symposium on computer-communications network and teletraffic, New York, Polytechnic Institute of Broollyn Press (1972) 419–428).

$$(1-\rho_1)\rho_1^n(1-\rho_2)\rho_2^m]\{\lambda\rho_1^{-1}+\mu_2\rho_2+\mu_1\rho_1\rho_2^{-1}\}=(\mu_1+\lambda+\mu_2)P_{n,m}. \qquad \square$$

Met behulp van deze stationaire kansen zijn de karakteristieke grootheden $L$ en $W$ weer uit te rekenen:

$$\begin{aligned}
L &= \textstyle\sum_{n,m=0}^{\infty}(n+m)P_{n,m}=(1-\rho_1)(1-\rho_2)\big\{\sum_{n,m=0}^{\infty} n\rho_1^n\rho_2^m+\sum_{n,m=0}^{\infty} m\rho_1^n\rho_2^m\big\}=\\
&= (1-\rho_1)(1-\rho_2)\big\{\rho_1\textstyle\sum_{m=0}^{\infty}\rho_2^m\ \sum_{n=1}^{\infty} n\rho_1^{n-1}+\rho_2\sum_{n=0}^{\infty}\rho_1^n\ \sum_{m=1}^{\infty} m\rho_2^{m-1}\big\}\\
&= (1-\rho_1)(1-\rho_2)\big\{\rho_1(1-\rho_2)^{-1}(1-\rho_1)^{-2}+\rho_2(1-\rho_1)^{-1}(1-\rho_2)^{-2}\big\}\\
&= \tfrac{\rho_1}{1-\rho_1}+\tfrac{\rho_2}{1-\rho_2}=\tfrac{\lambda}{\mu_1-\lambda}+\tfrac{\lambda}{\mu_2-\lambda}.\\
W &= \tfrac{L}{\lambda}=\tfrac{1}{\mu_1-\lambda}+\tfrac{1}{\mu_2-\lambda}.
\end{aligned}$$

Opmerking

Als we een tandem wachtrij hebben met $s_1$ bedienden bij wachtrij 1 en $s_2$ bedienden bij wachtrij 2, waarbij verondersteld wordt dat $\frac{\lambda}{s_1\mu_1}<1$ en $\frac{\lambda}{s_2\mu_2}<1$, dan geldt ook dat de wachtrijen zich in de evenwichtssituatie gedragen als onafhankelijke $M/M/s_1$- resp. $M/M/s_2$-wachtrijen.

**Voorbeeld 5.5**

Op een vliegveld moeten passagiers eerst een veiligheidscontrole ondergaan en vervolgens een bagagecontrole. De tijden die per passagier vereist zijn voor de veiligheidscontrole en de bagagecontrole zijn onafhankelijke stochastische variabelen die exponentieel verdeeld zijn met verwachtingswaarde van resp. 1 en 2 minuten. De passagiers komen aan volgens een Poisson proces met een gemiddelde van 75 passagiers per uur. In totaal zijn er 10 beambten beschikbaar om verdeeld te worden over de veiligheidscontrole en de bagagecontrole. Voor welke opsplitsing van deze beambten is het gemiddeld aantal klanten dat zich in het controleproces bevindt minimaal?
Kies als tijdseenheid een uur, dan is $\lambda=75$, $\mu_1=60$ en $\mu_2=30$. Als we $k$ beambten toekennen aan de veiligheidscontrole en $10-k$ aan de bagagecontrole, dan moet voor het bereiken van een evenwichtssituatie gelden dat
$\frac{\lambda}{k\mu_1}=\frac{75}{60k}<1$, d.w.z. $k\geq 2$ en $\frac{\lambda}{(10-k)\mu_2}=\frac{75}{30(10-k)}<1$, d.w.z. $10-k\geq 3$, ofwel $k\leq 7$.
Voor $k$ kunnen we dus de waarden $2,3,4,5,6$ en $7$ kiezen. Voor ieder van deze $k$'s kunnen we in beide wachtrijen volgens de formules uit het $M/M/s$-model (zie (5.5.6) en (5.5.7)) de $L_1$ (aantal personen bij de veiligheidscontrole) en $L_2$ (aantal personen bij de bagagecontrole) en dus ook het totaal aantal personen in het controleproces ($L_1+L_2$) berekenen:

| $k$ | $L_1$ | $L_2$ | $L_1+L_2$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 2.0513 | 2.5020 | 4.5533 |
| 3 | 1.3605 | 2.5086 | 3.8691 |
| 4 | 1.2692 | 2.5339 | 3.8031 |
| 5 | 1.2532 | 2.6304 | 3.8836 |
| 6 | 1.2505 | 3.0331 | 4.2836 |
| 7 | 1.2500 | 6.0111 | 7.2611 |

We zien dat $L_1+L_2$ minimaal is voor $k=4$. Er zijn dan gemiddeld ongeveer 3.8 klanten in controle.

### 5.7.2 Open netwerk van wachtrijen (Jackson netwerken)

De analyse van de tandem wachtrij kan aanmerkelijk worden gegeneraliseerd.[7] Beschouw een systeem met $K$ bedienden die ieder een wachtrij beheren. Klanten komen het systeem binnen en kunnen direct naar wachtrij $i$ gaan volgens een Poisson proces met parameter $r_i,\ i = 1, 2, \ldots, K$. Voor de aankomstsnelheid $\lambda$ bij het totale systeem geldt: $\lambda = \sum_{i=1}^{K} r_i$. Na bediend te zijn bij wachtrij $i$ volgens een exponentieel verdeelde bedieningsduur met snelheid $\mu_i$, gaat een klant naar wachtrij $j$ met kans $p_{ij},\ 1 \leq j \leq K$, òf hij verlaat het systeem met kans $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{K} p_{ij}$ voor $i = 1, 2, \ldots, K$.

Zij $\lambda_i$ de gemiddelde totale aankomstsnelheid bij wachtrij $i,\ i = 1, 2, \ldots, K$. Vanwege het principe dat in de evenwichtssituatie 'stroom in = stroom uit', is de vertreksnelheid bij wachtrij $i$ ook $\lambda_i$. Met kans $p_{ij}$ wordt vervolgens gegaan naar wachtrij $j$.

Beschouw de toestandsruimte $\{0, 1, 2, \ldots, K\}$, waarbij toestand 0 'de buitenwereld' is. We nemen aan dat de toestanden $1, 2, \ldots, K$ *transient* zijn, d.w.z. dat een klant het systeem met kans 1 uiteindelijk verlaat. Neem $p_{00} = 1$, dan is dus toestand 0, de enige recurrente toestand, *absorberend*. Uit de theorie van Markov ketens volgt dan dat de getallen $\lambda_j,\ 1 \leq j \leq K$ kunnen dan worden verkregen als unieke oplossing van het stelsel

$$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1}^{K} \lambda_i p_{ij},\ j = 1, 2, \ldots, K. \tag{5.7.2}$$

Laat $\rho_j = \frac{\lambda_j}{\mu_j},\ j = 1, 2, \ldots, K$. Om een evenwichtsituatie te bereiken is het nodig dat $\rho_j < 1$ voor $j = 1, 2, \ldots, K$. Er kan worden aangetoond dat in dat geval

$$\mathbb{P}\{n \text{ klanten in wachtrij } j\} = (1 - \rho_j)\rho_j^n,\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{5.7.3}$$

en, weer via de balansvergelijkingen, dat $\mathbb{P}(n_1, n_2, \ldots, n_K)$, d.w.z. de kans dat er $n_j$ klanten zijn bij wachtrij $j,\ 1 \leq j \leq K$, de *productvorm* heeft:

$$\mathbb{P}(n_1, n_2, \ldots, n_K) = \prod_{j=1}^{K} (1 - \rho_j)\rho_j^{n_j},\ n_j \in \mathbb{N}_0, 1 \leq j \leq K. \tag{5.7.4}$$

Formule (5.7.3) is opmerkelijk omdat het aankomstproces bij wachtrij $j$ geen Poisson proces hoeft te zijn. We kunnen dit inzien aan de hand van het volgende voorbeeld.
Laat $K = 1,\ p_{11} = 0.9,\ r_1 = 1$ en $\mu_1 = 100$. Uit (5.7.2) volgt dat $\lambda_1 = 10$, zodat $\rho_1 = 0.1$. Gemiddeld $\frac{1}{\mu_1} = 0.01$ tijdseenheden na een aankomst is een bediening klaar, waarna de klant met kans van 0.9 weer arriveert bij deze wachtrij. De gemiddelde aankomstsnelheid bij het systeem is één aankomst per tijdseenheid. Dus kort na een aankomst is er een grote kans om in korte tijd weer een aankomst te hebben, terwijl op een willekeurig tijdstip er slechts een vrij kleine kans is op een aankomst. Het aankomstproces heeft dus geen onafhankelijke tussentijden en is dus niet Poisson.

[7] Dit is gedaan door Jackson, zie: J.R. Jackson: *Networks of waiting lines*, Operations Research 5 (1957) 518–521 en J.R. Jackson: *Jobson-like queueing systems*, Management Science 10 (1963) 131–142.

We zullen laten zien dat (5.7.4) voldoet aan de balansvergelijkingen voor dit model. Daartoe noteren we de vector $(n_1, n_2, \ldots, n_K)$ met $n$ en de vector $(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ met $e_i$ als de 1 op plaats $i$ staat. Verder is $P(n) = \mathbb{P}(n_1, n_2, \ldots, n_K)$, waarbij we afspreken dat $P(n) = 0$ als minstens één $n_i < 0$.

Als we toestand $n$ beschouwen, dan kunnen we uit deze toestand vertrekken door aankomsten van buitenaf of doordat een van de bedieningen afloopt. Dit geeft in de balansvergelijkingen de bijdrage $\{\sum_{i=1}^K r_i + \sum_{i=1}^K \mu_i \delta(n_i)\} P(n)$, waarbij $\delta(n_i) = \begin{cases} 0 & \text{als } n_i = 0; \\ 1 & \text{als } n_i \geq 1. \end{cases}$ Merk op dat

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^K r_i &= \textstyle\sum_{i=1}^K \{\lambda_i - \sum_{j=1}^K \lambda_j p_{ji}\} = \sum_{i=1}^K \lambda_i - \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \lambda_j p_{ji} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^K \lambda_i - \sum_{j=1}^K \lambda_j (1 - p_{j0}) = \sum_{i=1}^K \lambda_i p_{i0}. \end{aligned}$$

We kunnen van een andere toestand toestand $n$ bereiken door:

(1) aankomsten van buiten via toestanden $n - e_i,\ 1 \leq i \leq K$: dit geeft bijdrage $\sum_{i=1}^K r_i P(n - e_i)$, ofwel $\sum_{i=1}^K \{\lambda_i - \sum_{j=1}^K \lambda_j p_{ji}\} P(n - e_i) = \sum_{i=1}^K \lambda_i P(n - e_i) - \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \lambda_j p_{ji} P(n - e_i)$.

(2) vertrek van een klant (via toestanden $n + e_i,\ 1 \leq i \leq K$) in een der wachtrijen die daarna het systeem verlaat: dit geeft bijdrage $\sum_{i=1}^K \mu_i p_{i0} P(n + e_i)$.

(3) vertrek van een klant in wachtrij $j$ die daarna naar wachtrij $i$ gaat (dus overgang vanuit toestand $n + e_j - e_i,\ 1 \leq i, j \leq K$): dit geeft bijdrage $\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \mu_j p_{ji} P(n + e_j - e_i)$.

Hieruit volgen de balansvergelijkingen:

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i=1}^K \lambda_i p_{i0} P(n) + \sum_{i=1}^K \mu_i \delta(n_i) P(n) = \sum_{i=1}^K \lambda_i P(n - e_i) - \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \lambda_j p_{ji} P(n - e_i) + \\ &\textstyle\sum_{i=1}^K \mu_i p_{i0} P(n + e_i) + \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \mu_j p_{ji} P(n + e_j - e_i). \end{aligned} \tag{5.7.5}$$

Vervolgens merken we op dat de formule $P(n) = \prod_{j=1}^K (1 - \rho_j) \rho_j^{n_j}$ voldoet aan:

(1) $\lambda_i P(n - e_i) = \mu_i \delta(n_i) P(n)$ voor alle $i$ en $n$.

(2) $\lambda_j P(n - e_i) = \mu_j P(n + e_j - e_i)$ voor alle $i, j$ en $n$.

(3) $\lambda_i P(n) = \mu_i P(n + e_i)$ voor alle $i$ en $n$.

Hieruit volgt direct dat aan de balansvergelijkingen is voldaan.

Voor $L$, het gemiddeld aantal klanten in het systeem, geldt:

$$L = \sum_{j=1}^K \{\text{het gemiddeld aantal klanten bij wachtrij } j\} = \sum_{j=1}^K \frac{\lambda_j}{\mu_j - \lambda_j}. \tag{5.7.6}$$

Met behulp van de formule van Little vinden we (de gemiddelde aankomstsnelheid $\lambda$ van het systeem voldoet aan $\lambda = \sum_{j=1}^K r_j$):

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\sum_{j=1}^K \frac{\lambda_j}{\mu_j - \lambda_j}}{\sum_{j=1}^K r_j}. \tag{5.7.7}$$

**Voorbeeld 5.6**

Beschouw een systeem met twee wachtrijen, waar klanten van buiten aankomen volgens Poisson processen: bij wachtrij 1 met een snelheid van 4 en bij wachtrij 2 met een snelheid van 5. De bedieningsduren zijn exponentieel verdeeld met snelheden 8 in wachtrij 1 en 10 in wachtij 2. Een klant die bij wachtrij 1 is bediend gaat met kans 0.5 naar wachtrij 2 en verlaat het systeem ook met kans 0.5; een klant die bij wachtrij 2 is bediend gaat met kans 0.25 naar wachtrij 1 en verlaat het systeem met kans 0.75. Bereken de stationaire kansen en de grootheden $L$ en $W$.

Het stelsel (5.7.2) is: $\begin{cases} \lambda_1 = 4 + \frac{1}{4}\lambda_2 \\ \lambda_2 = 5 + \frac{1}{2}\lambda_1 \end{cases}$ waaruit volgt dat $\lambda_1 = 6$ en $\lambda_2 = 8$, zodat $\rho_1 = \frac{3}{4}$ en $\rho_2 = \frac{4}{5}$. Dit geeft volgens (5.7.4),(5.7.6) en (5.7.7):

$\mathbb{P}(n,m) = \frac{1}{4} \cdot (\frac{3}{4})^n \cdot \frac{1}{5} \cdot (\frac{4}{5})^m,\ n,m \in \mathbb{N}_0;\ L = \frac{6}{8-6} + \frac{8}{10-8} = 7;\ W = \frac{L}{r_1+r_2} = \frac{7}{4+5} = \frac{7}{9}.$

<u>Opmerking</u>

De productvorm (5.7.4) is gevonden onder de veronderstelling dat alle bedieningstijden exponentieel zijn. Tevens is verondersteld dat elke wachtrij slechts één bediende heeft. Deze productvorm geldt ook [8] in een van de volgende gevallen:

1. Iedere wachtrij heeft een willekeurig aantal bedienden. In dit geval moet in (5.7.4) aan de rechterzijde het product staan van de kansen zoals die uit het $M/M/s$ model volgen.

2. Elke klant treft altijd direct een bediende (te modelleren alsof er oneindig veel bedienden zijn), in welk geval de bedieningsduren een willekeurige verdeling mogen hebben. Nu moet in (5.7.4) aan de rechterzijde het product staan van de kansen van Poissonverdelingen met verwachtingswaarde $\lambda_j\, \mathbb{E}(S_j)$, waarbij $\mathbb{E}(S_j)$ de verwachtingswaarde is van de bedieningstijd in wachtrij $j,\ j = 1, 2, \ldots, K$.

### 5.7.3 Gesloten netwerk van wachtrijen

Beschouw een systeem met $K$ wachtrijen, waarin een vast aantal klanten, zeg $N$, aanwezig is. Elke wachtrij heeft één bediende met een bedieningstijd die exponentieel verdeeld is met parameter $\mu_i,\ i = 1, 2, \ldots, K$. Als de bediening van een klant bij wachtrij $i$ klaar is, gaat de klant met kans $p_{ij}$ naar wachtrij $j$, waarbij $\sum_j p_{ij} = 1$ voor alle $i$. Verder wordt verondersteld dat iedere wachtrij een oneindige wachtruimte heeft en dat de Markov keten $P$ irreducibel is. Het stochastische proces dat simultaan het aantal aanwezige klanten bij elk van de stations beschrijft, is een continue Markov keten.

Zij $\mathbb{P}(n_1, n_2, \ldots, n_K)$ de kans dat op de lange duur bij wachtrij $i$ $n_i$ klanten aanwezig zijn, waarbij $n_1 + n_2 + \cdots + n_K = N$. Ook in dit geval kan worden bewezen dat $\mathbb{P}(n_1, n_2, \ldots, n_K)$ de fractie van de tijd is dat er gelijktijdig $n_i$ klanten bij wachtrij $i$ zijn, $i = 1, 2, \ldots, K$ en dat deze kansverdeling weer een productvorm heeft. Om deze op te stellen hebben we het volgende nodig.

[8] F. Baskett, K.M. Chandy, R.R. Muntz and F. Palacios: "Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers", Journal of the ACM <u>22</u> pp. 248-260 (1975).

Laat $\lambda_i$ = het gemiddeld aantal aankomsten per tijdseenheid op de lange duur zijn bij wachtrij $i$, $i = 1, 2, \ldots, K$. Op grond van het principe 'stroom in = stroom uit' is $\lambda_i$ ook het gemiddeld aantal vertrekken bij $i$. De $\lambda_i$'s kunnen verkregen worden als oplossing van het lineaire stelsel

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i p_{ij}, \; j = 1, 2, \ldots, K. \tag{5.7.8}$$

Het stelsel (5.7.8) heeft echter geen unieke oplossing, maar is op een constante na bepaald. We kunnen dus schrijven $\lambda_j = \alpha \pi_j, \; j = 1, 2, \ldots, K$, waarbij $\pi$ de unieke oplossing is van het stelsel

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{K} \pi_i p_{ij}, \; j = 1, 2, \ldots, K \tag{5.7.9}$$

$$\sum_{j=1}^{K} \pi_j = 1 \tag{5.7.10}$$

Uit de theorie van de Markov ketens weten we dat $\pi$ de stationaire verdeling is van de Markov keten $P$. De gezochte productvorm voor de simultane kansverdeling luidt nu:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(n_1, n_2, \ldots, n_K) &= C \cdot \prod_{i=1}^{K} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i} = C \cdot \alpha^{n_1+n_2+\cdots+n_K} \prod_{i=1}^{K} \left(\frac{\pi_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \\ &= C \cdot \alpha^N \prod_{i=1}^{K} \left(\frac{\pi_i}{\mu_i}\right)^{n_i} = C' \cdot \prod_{i=1}^{K} \left(\frac{\pi_i}{\mu_i}\right)^{n_i}, \end{aligned} \tag{5.7.11}$$

waarbij $C'$ een normeringsconstante is. Deze constante is in het algemeen lastig te bepalen. We moeten namelijk sommeren over alle mogelijke combinaties $(n_1, n_2, \ldots, n_K)$, waarbij $n_1 + n_2 + \cdots + n_K = N$. Het aantal termen is $\binom{N+K-1}{N}$, wat in het algemeen een enorm groot getal is.[9] Als bijvoorbeeld $K = 10$ en $N = 35$, dan is het aantal termen 52.451.256. Bovendien vereist iedere term de berekening van $K = 10$ constanten, waarmee het aantal bewerkingen meer dan een half miljard wordt!

Er zijn echter goede algoritmen om deze constante efficiënt te berekenen. We bespreken een algoritme van Buzen, dat complexiteit $\mathcal{O}(K \cdot N^2)$ heeft.[10] De constante die we moeten bepalen is de inverse van $\sum_{\{(n_1,n_2,\ldots,n_K) | n_1+n_2+\cdots+n_K=N\}} \prod_{i=1}^{K} \left(\frac{\pi_i}{\mu_i}\right)^{n_i}$. We gaan deze recursief berekenen en definiëren daartoe:

$S(n,k) = \{\underline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_k) \mid n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n\}; \; G(n,k) = \sum_{\underline{n} \in S(n,k)} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\pi_i}{\mu_i}\right)^{n_i}$.

Uit deze definities is het direct duidelijk dat we $G(N,K)$ moeten bepalen en dat de randvoorwaarden zijn:

$G(0,k) = 1$ voor $k = 1, 2, \ldots, K$ en $G(n,1) = \left(\frac{\pi_1}{\mu_1}\right)^n$ voor $n = 0, 1, \ldots, N$.

[9] Dit is een $K$-herhalingscombinatie uit $N$ elementen. In Besliskunde 1 is aangetoond dat dit aantal $\binom{N+K-1}{N}$ is.

[10] J.P. Buzen: *Computational algoritmes for closed queueing networks with exponential servers*, Communications of the ACM 16 (1973) 527–531.

Verder geldt:

$$\begin{aligned} G(n,k) &= \sum_{\underline{n}\in S(n,k)} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\pi_i}{\mu_i}\right)^{n_i} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{\{\underline{n}\in S(n,k), n_k=j\}} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\pi_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\pi_k}{\mu_k}\right)^{j} \sum_{\underline{n}\in S(n-j,k-1)} \prod_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\pi_i}{\mu_i}\right)^{n_i} = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\pi_k}{\mu_k}\right)^{j} G(n-j,k-1). \end{aligned}$$

Dit geeft onderstaand algoritme om $C'$ te bepalen.

**Algoritme 5.1** *Algoritme van Buzen voor de bepaling van de constante $C'$*

1. $G(0,k) = 1$ voor $k = 1,2,\ldots,K$ en $G(n,1) = \left(\frac{\pi_1}{\mu_1}\right)^n$ voor $n = 1,2,\ldots,N$.
2. Voor $k = 2,3,\ldots,K-1$ doe

   Voor $n = 1,2,\ldots,N$ doe: $G(n,k) = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\pi_k}{\mu_k}\right)^j G(n-j,k-1)$.
3. $G(N,K) = \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{\pi_K}{\mu_K}\right)^j G(N-j,K-1)$ en $C' = \{G(N,K)\}^{-1}$.

Uit het algoritme volgt direct dat de complexiteit $\mathcal{O}(K \cdot N^2)$ is (de berekening van $G(n,k)$ in stap 2 is van de orde $N$).

Soms is het niet nodig om $C'$ expliciet te bepalen, bijvoorbeeld als we alleen het gemiddeld aantal klanten of de gemiddelde wachttijd bij de verschillende wachtrijen willen weten. Dit kan worden gedaan via het zogenaamde *mean-value algoritme*.

**Mean-value algoritme**

Dit algoritme is gebaseerd op de volgende stelling die we zonder bewijs zullen geven.

**Stelling 5.5**

*In een gesloten netwerk met $N$ klanten geldt in de evenwichtssituatie dat de kans dat een klant die bij een wachtrij aankomt $n_i$ andere klanten ziet bij de wachtrij $i$, waarbij $n_1+n_2+\cdots n_K = N-1$ is gelijk aan $\mathbb{P}(n_1,n_2,\ldots,n_K)$.*

Dit resultaat zegt dus dat een aankomende klant het systeem ziet in de evenwichtssituatie behorende bij één klant minder in het systeem. Definieer nu voor $n = 1,2,\ldots,N$:

| | | |
|---|---|---|
| $L_n(i)$ | = | het gemiddeld aantal klanten bij wachtrij $i$ als er $n$ klanten in het systeem zijn. |
| $W_n(i)$ | = | gemiddelde tijd die een klant in wachtrij $i$ verblijft als er bij aankomst van de klant $n$ klanten in het systeem zijn. |
| $\lambda_n(i)$ | = | het gemiddeld aantal aankomsten per tijdseenheid bij wachtrij $i$ als er $n$ klanten in het systeem zijn. |

Op grond van Stelling 5.5 geldt dat in een netwerk met $n$ klanten een klant die bij wachtrij $i$ aankomt daar gemiddeld $L_{n-1}(i)$ andere klanten aantreft. Vanwege de geheugenloosheid van de exponentiële bedieningsduren geldt voor de gemiddelde tijd dat deze klant bij wachtrij $i$ verblijft:

$$W_n(i) = \frac{L_{n-1}(i)+1}{\mu_i},\ 1 \leq i \leq K. \tag{5.7.12}$$

Passen we de formule van Little toe, dan krijgen we voor $L_n(i)$:

$$L_n(i) = \lambda_n(i)W_n(i),\ 1 \leq i \leq K. \tag{5.7.13}$$

Verder geldt weer

$$\lambda_n(i) = \alpha_n \pi_i,\ 1 \leq i \leq K, \tag{5.7.14}$$

waarbij $\pi_i$ bepaald wordt door (5.7.9) en (5.7.10). Omdat $\sum_{i=1}^K L_n(i) = n$, volgt uit (5.7.13) en (5.7.14)

dat $n = \alpha_n \sum_{i=1}^K \pi_i W_n(i)$, d.w.z. $\alpha_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^K \pi_i W_n(i)}$. Hiermee zijn $L_N(i)$ en $W_N(i)$, het gemiddeld aantal klanten resp. de gemiddelde verblijftijd bij wachtrij $i, 1 \leq i \leq K$, als er $N$ klanten in het systeem zijn, te bereken met het volgende algoritme.[11]

**Algoritme 5.2** *Mean-value algoritme*

1. a. Bepaal de stationaire kansen $\pi_i,\ 1 \leq i \leq K$ van de Markov keten $P$ door het stelsel (5.7.9) en (5.7.10) op te lossen.

   b. Laat $n = 1$.

   c. $W_1(i) = \frac{1}{\mu_i}$ voor $i = 1, 2, \dots, K$.

2. $\alpha_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^K \pi_i W_n(i)}$; $\lambda_n(i) = \alpha_n \cdot \pi_i,\ 1 \leq i \leq K;\ L_n(i) = \lambda_n(i)W_n(i),\ 1 \leq i \leq K.$

   Als $n = N$: stop;

   Anders: ga naar stap 3.

3. a. $n := n+1;\ W_n(i) = \frac{L_{n-1}(i)+1}{\mu_i},\ 1 \leq i \leq K.$

   b. Ga naar stap 2.

Dit algoritme geeft niet alleen $L_N(i)$ en $W_N(i)$ voor alle $i$, maar ook de $\lambda_N(i)$, het gemiddeld aantal klanten dat per tijdseenheid door wachtrij $i$ wordt verwerkt, $i = 1, 2, \dots, K$. Tenslotte merken we op dat deze resultaten weer gegeneraliseerd kunnen worden tot de gevallen die aan het einde van het stukje over open netwerken zijn vermeld.

**Voorbeeld 5.7**

Beschouw een gesloten netwerk met $K = 2;\ N = 3;\ \mu_1 = \mu_2 = \mu;\ p_{11} = \frac{2}{3},\ p_{12} = \frac{1}{3};$ $p_{21} = \frac{2}{3},\ p_{22} = \frac{1}{3}$. De stationaire verdeling van de Markov keten volgt uit het stelsel:

[11] Deze techniek is afkomstig van Reiser en Lavenberg: M. Reiser and S. S. Lavenberg: *Mean-value analysis of closed multichain queuing networks*, Journal of the ACM 27 (1980) 313–322.

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} = \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 \\ \pi_2 = \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22} = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \pi_1 = \frac{2}{3},\ \pi_2 = \frac{1}{3}.$$ *Iteratie 1:*

$n = 1;\ W_1(1) = \frac{1}{\mu},\ W_1(2) = \frac{1}{\mu};\ \alpha_1 = \mu;\ \lambda_1(1) = \frac{2}{3}\mu,\ \lambda_1(2) = \frac{1}{3}\mu;\ L_1(1) = \frac{2}{3},\ L_1(2) = \frac{1}{3}.$

*Iteratie 2:*

$n = 2;\ W_2(1) = \frac{5}{3\mu},\ W_2(2) = \frac{4}{3\mu};\ \alpha_2 = \frac{9}{7}\mu;\ \lambda_2(1) = \frac{6}{7}\mu,\ \lambda_2(2) = \frac{3}{7}\mu;\ L_2(1) = \frac{10}{7},\ L_2(2) = \frac{4}{7}.$

*Iteratie 3:*

$n = 3;\ W_3(1) = \frac{17}{7\mu},\ W_3(2) = \frac{10}{7\mu};\ \alpha_3 = \frac{7}{5}\mu;\ \lambda_3(1) = \frac{14}{15}\mu,\ \lambda_3(2) = \frac{7}{15}\mu;\ L_3(1) = \frac{34}{15},\ L_3(2) = \frac{11}{15}.$

**Vraag 5.8**

Beschouw een tandemwachtrij met twee stations waarin geen wachtruimtes zijn. Klanten komen bij het eerste station aan volgens een Poissonproces met 10 klanten per uur. Als het station bezet is, dan vertrekt de klant; als het station vrij is, dan wordt de klant bediend volgens een exponentiële bedieningsduur met een verwachte bedieningsduur van 5 minuten. Als een klant klaar is bij het eerste station, dan gaat hij direct naar het tweede station als dit station vrij is. Als het tweede station bezet is, dan blijft de klant in het eerste station wachten totdat de bediening die daar aan de gang is afgelopen is; intussen kunnen er in het eerste station geen nieuwe klanten worden toegelaten. De bedieningsduur in het tweede station is eveneens exponentieel met een verwachting van 5 minuten.

a. Bepaal de stationaire kansen m.b.v. de evenwichtsvergelijkingen.

b. Wat is de kans dat een aankomende klant het systeem niet binnenkomt?

c. Wat is het verwachte aantal klanten in het systeem?

d. Wat is de verwachte tijdsduur die een klant in het systeem doorbrengt?

**Vraag 5.9**

Beschouw een open netwerk met 3 stations. Klanten arriveren van buiten bij de 3 stations volgens Poisson processen met snelheden die resp. 5, 10 en 15 zijn. De bedieningsduren op de 3 stations zijn exponentieel verdeeld met snelheden resp. 10, 50 en 100. Klanten die klaar zijn bij station 1 gaan met dezelfde kans ($\frac{1}{3}$) naar station 2, naar station 3 of verlaten het systeem; klanten die station 2 verlaten gaan naar station 3 en klanten die station 3 verlaten gaan met kans $\frac{1}{2}$ naar station 2 en ook met kans $\frac{1}{2}$ verlaten ze het systeem.

a. Wat is het gemiddeld aantal mensen in het systeem (bij alle stations tezamen)?

b. Wat is de gemiddelde tijd die een klant in het syseem verblijft?

## 5.8 Opgaven

**Opgave 5.1**

a. Geef een intuïtieve verklaring met een 'betaalregel' dat het gemiddeld aantal bedienden dat bezet is gelijk is aan $\lambda\,\mathbb{E}(B)$, met $B$ de bedieningsduur.

b. Geef een intuïtieve verklaring met een 'betaalregel' dat $\mathbb{E}(N_A) = \lambda\,\mathbb{E}(T_A)$ (zie (5.3.6)).

**Opgave 5.2**

In een winkel komen de klanten volgens een Poissonproces bij de kassa aan met een gemiddelde van 30 klanten per uur. Er is één kassa en de bedieningsduur is exponentieel met een gemiddelde van 2 minuten.

Model a: Als er 3 of meer klanten bij de kassa staan wordt de cassière bijgestaan door een inpakster. De bedieningsduur blijft dan exponentieel, maar het gemiddelde zakt tot 1 minuut.

Model b: Als er 3 of meer klanten bij de kassa staan wordt een tweede kassa geopend die ook een negatief exponentiële bedieningsduur heeft met een gemiddelde van 2 minuten.

Stel voor beide modellen de balansvergelijkingen op en bereken $L, L_q, W$ en $W_q$.

**Opgave 5.3**

Klanten arriveren bij een bepaalde systeem volgens een Poisson proces met parameter $\lambda = 80$; iedere klant ontvangt van de systeembeheerder 10 euro per uur dat hij in het systeem verblijft. De beheerder van het systeem heeft de keuze uit de volgende twee bedieningsmogelijkheden. De eerste mogelijkheid heeft een bedieningssnelheid van 100 klanten per uur en kost hem 50 euro per uur; de tweede mogelijkheid heeft een bedieningssnelheid van 200 klanten per uur en kost hem 80 euro per uur. Voor welk van deze mogelijkheden zal de systeembeheerder, op basis van kostenvergelijking, kiezen?

**Opgave 5.4**

Beschouw een $M/M/1$-wachtrij.

Zij $W_q^*$ de tijd die een willekeurige aankomende klant in de wachtrij verblijft (als het systeem zich in een stationaire situatie bevindt) voordat hij bediening krijgt, dus $\mathbb{E}\, W_q^* = W_q$.

Toon aan dat $\mathbb{P}\{W_q^* \le t\} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu-\lambda)t}$ voor $t \ge 0$.

**Opgave 5.5**

Een groep van $N$ personen bezoekt een service-station met één bediende op de volgende manier. Als een persoon het service-station heeft verlaten, dan keert hij weer terug na een exponentiële tijdsduur met snelheid $\lambda$. De bedieningsduren zijn ook exponentieel verdeeld met snelheid $\mu$.

a. Bepaal de toestanden van deze continue Markov keten en stel de balansvergelijkingen op.

b. Bepaal, in termen van de stationaire kansen, de gemiddelde snelheid waarmee deze personen het service-station bereiken.

c. Bepaal, in termen van de stationaire kansen, de gemiddelde tijd die een persoon bij het service-station verblijft.

**Opgave 5.6**

Beschouw een $M/M/1$-wachtrij met de volgende variatie: als een bediening is afgelopen, dan vertrekt de klant met kans $\alpha$ uit het systeem en met kans $1 - \alpha$ sluit hij achteraan aan in de wachtrij voor een volgende bediening.

a. Stel de balansvergelijkingen op voor dit model en los ze op (wanneer is er een oplossing?).
b. Bepaal de verwachte wachttijd van een klant vanaf het tijdstip dat hij bij de wachtrij aankomt totdat hij voor de eerste keer bediend wordt.
c. Wat is de kans dat een klant precies $n$ bedieningen krijgt?
d. Wat is de verwachte tijd die een klant aan al zijn bedieningen krijgt?

**Opgave 5.7**

Beschouw een wachtrijsysteem met één bediende; de bedieningsduur is negatief exponentieel verdeeld met parameter $\mu$. De aankomstsnelheid van de klanten is $\frac{\lambda}{i+1}$ als er $i$ klanten in het systeem zijn. Veronderstel dat we met een geboorte-sterfte proces te maken hebben.
a. Stel de balansvergelijkingen op en los deze op.
b. Bepaal de gemiddelde aankomstsnelheid $\overline{\lambda}$, $L$ en $W$ als functie van $\lambda$ en $\mu$.

**Opgave 5.8**

Bij een pompstation komen auto's aan volgens een Poissonproces met een gemiddelde van één per minuut. Er zijn vier pompen en daarnaast is er nog plaats voor maximaal drie auto's om te wachten tot een pomp vrij komt. De tijd die auto's bij de pomp doorbrengen is negatief exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 3 minuten.
a. Bepaal de kans dat voor een aankomende auto geen plaats is.
b. Bereken $L, L_q, W$ en $W_q$.

**Opgave 5.9**

Zij $T$ een Erlang-$n$ verdeling, d.w.z. $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ met $T_1, T_2, \ldots, T_n$ onderling onafhankelijke identiek verdeelde stochastische variabelen die elk negatief exponentieel verdeeld zijn met parameter $\mu$. Toon aan dat de dichtheid $T$ gelijk is aan $\mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!}$.

**Opgave 5.10**

Vergelijk het $M/M/2$ systeem met bedieningssnelheid $\mu$ en het $M/M/1$ systeem met bedieningssnelheid $2\mu$. Laat het gemiddeld aantal klanten dat wacht $L_q(2)$ resp. $L_q(1)$ zijn en het aantal klanten in het systeem $L(2)$ resp. $L(1)$ zijn.
Toon aan dat in het algemeen geldt: $L_q(2) < L_q(1)$ en $L(2) > L(1)$.

**Opgave 5.11**

Een bedrijf moet een keuze maken voor een automatiseringsplan. Er zijn twee mogelijkheden: twee vrij krachtige computers of drie minder krachtige. Een krachtige computer doet eenzelfde opdracht in tweederde van de tijd die een minder krachtige er over doet; maar een krachtige computer is anderhalf keer zo duur. Op het eerste gezicht is er dus niet zo veel verschil tussen beide keuzes.

Modelleer het werk dat door de computers moet worden uitgevoerd als $M/M/s$ wachtrij, met de computers als bedienden.
Wat valt er te zeggen over de twee alternatieven als vooral gelet wordt op het werk dat op behandeling moet wachten?

**Opgave 5.12**

Beschouw een wachttijdsysteem van het type $M/G/1$ met $\lambda = 8$ en $\tau = 1/10$.
Bepaal de vier grootheden $L$, $L_q$, $W$ en $W_q$ voor de volgende drie gevallen van de bedieningsduur:
a. negatief exponentiële verdeling;
b. constante bedieningsduur;
c. Erlang bedieningsduur met $k = 4$.

**Opgave 5.13**

Beschouw een productiesysteem met vier machines. Elk van de machines opereert als een één-bediende systeem. Nieuwe opdrachten van buiten komen aan bij machine 1 volgens een Poisson proces met een gemiddelde van één opdracht per twee minuten. Als de bewerking van een opdracht bij machine 1 klaar is, dan gaat de opdracht voor een volgende bewerking met kans $\frac{1}{2}$ naar machine 2 en met kans $\frac{1}{2}$ naar machine 3. Na de bewerking op machine 2 of 3 volgt een eindbewerking op machine 4, waarna de opdracht klaar is en het systeem verlaat. De bewerkingstijden op de verschillende machines zijn onafhankelijk van elkaar en exponentieel verdeeld met respectievelijk verwachtingswaarden van 48 seconden op machine 1, 144 seconden op machine 2, 180 seconden op machine 3 en 72 seconden op machine 4.
a. Bepaal de bezettingsgraad van elk van de machines.
b. Bepaal de evenwichtsverdeling van de aantallen opdrachten bij de verschillende machines.
c. Bepaal de gemiddelde doorlooptijd van een nieuwe opdracht.

**Opgave 5.14**

Beschouw een systeem met drie stations, waar klanten van buiten aankomen bij station 1 aankomen volgens een Poisson proces met parameter $r_1 = 4$. Alle bedieningsduren zijn exponentieel verdeeld. Bij het eerste station zijn twee bedienden, elk met snelheid van 3; bij de stations 2 en 3 is één bediende met snelheid 2 resp. 6. Een klant die station 1 verlaat gaat met kans $\frac{1}{3}$ naar station 2 en met kans $\frac{2}{3}$ naar station 3; een klant die station 2 verlaat gaat naar station 3 met kans 1; klanten die station 3 verlaten, verlaten ook het systeem. Bereken de stationaire kansen.

**Opgave 5.15**

Beschouw een gesloten netwerk met twee klanten die zich tussen twee bedienden bewegen. De bedieningstijd van een klant bij station $i$ is exponentioneel verdeeld met parameter $\mu_i$ voor $i = 1, 2$. Als een klant bediend is een station, dan gaat de klant met kans $\frac{1}{2}$ naar het andere station en met kans $\frac{1}{2}$ voegt de klant zich bij het huidige station voor een nieuwe bediening.

a. Specificeer de simultane kansverdeling van de aantallen klanten bij elk bedieningsstation.

b. Wat is de fractie van de tijd dat bedieningsstation $i$ bezet is voor $i = 1, 2$?

c. Wat is de kans dat een klant aankomend bij bedieningsstation $i$ het station bezet aantreft, $i = 1, 2$?

**Opgave 5.16**

Beschouw een CPU-disk model met één centrale processor en twee disks. De processor is de centrale rekeneenheid en de disks dienen als achtergrondgeheugen. Het gesloten systeem bevat drie jobs die afwisselend de centrale computer en één van de twee disks bezoeken. Neem aan dat na afloop van een bediening bij de processor een job met kans $\frac{1}{3}$ naar disk 1 gaat en met kans $\frac{2}{3}$ naar disk 2. De werktijden in de verschillende stations zijn onafhankelijk van elkaar en hebben een exponentiële kansverdeling met een respectievelijke verwachtingswaarde van 5 microseconde voor de centrale processor en 15 microseconde voor elk van de twee disks.

a. Bepaal de normeringsconstante in de simultane kansverdeling van de aantallen jobs bij de drie stations op directe wijze en met het algoritme van Buzen.

b. Wat is het gemiddeld aantal jobs in elk van de stations?

**Opgave 5.17** Op de Franse snelwegen moet zoals bekend tol betaald worden. Bij Bordeaux veroorzaakt het tolbetalingspunt grote problemen: tijdens spitsuur zijn de rijen voor de tolpoorten zo lang dat de afrit van de snelweg verstopt raakt. Op dit moment zijn er 10 tolpoorten. Het aankomstproces bij de tol gedurende spitsuur is een Poissonproces met 13 aankomsten per minuut. De gemiddelde tijd om een kaartje te betalen is 45 seconden, met een hoge variantie van 20 seconden. Voor het gemak nemen we aan dat aankomende auto's bij aankomst een willekeurige tolpoortrij kiezen, en dat het spitsuur zo lang is dat er een stationaire situatie is ontstaan.

**a)** Wat is het aankomstproces bij elke tolpoort? Bereken de fractie van de tijd dat een employee in een tolpoort niets te doen heeft. Hoe groot is de kans dat er een tolpoort is waar een aankomende chauffeur zijn betaling onmiddellijk zou kunnen verrichten.

**b)** Bereken de verwachte rijlengte, en de verwachte wachttijd per tolpoort.

De tolorganisatie denkt dat het probleem kan worden opgelost door in een aantal poorten de employees te vervangen door een automatisch betalingssysteem met pasjes. Zo'n pasje hoeft slechts gescand te worden, en dat kost een deterministische tijdsduur van 10 seconden. Onderzoek wijst uit dat 20 procent van de klanten geïnteresseerd is om zo'n pasje aan te schaffen.

**c)** Stel dat één tolpoort geautomatiseerd is en dat alle klanten met een pasje ook naar die poort gaan. Stel dat inderdaad 20% van de klanten een betalingspasje hebben aangeschaft. Neem aan dat de betalingsduurverdeling bij de overige tolpoorten niet verandert. Bereken de gemiddelde rijlengte en gemiddelde wachttijd voor de geautomatiseerde poort.

**d)** Is de maximale van de verwachte twee rijlengtes in dit nieuwe systeem een verbetering t.o.v. de oude situatie?

# Hoofdstuk 6

# SIMULATIE

## 6.1 Inleiding

Vele problemen in de besliskunde zijn te gecompliceerd voor een exacte mathematische analyse. We kunnen dan het model vereenvoudigen zodat een wiskundige oplossing wel mogelijk is. Een alternatief daarvoor is om simulatie toe te passen op het oorspronkelijke probleem. Bij simulatie worden grootheden door experimenten bepaald. Op grond van de uitkomsten doen we statistische uitspraken over het model. Bij het toepassen van simulatie kunnen de volgende stadia worden onderscheiden.

*a. Formulering van het probleem*
In dit stadium wordt het probleem verbaal omschreven en zal men zich bezig houden met de vragen die beantwoord moeten worden. De doelstellingen van het experiment dienen expliciet vastgesteld te worden.

*b. Constructie van het wiskundig model*
Uitgaande van de in stap a geformuleerde doelstellingen zal men het probleem nu in een wiskundige vorm, d.w.z. met variabelen en relaties ertussen, gaan modelleren. Als het model een systeem op één vast tijdstip beschrijft, dan spreken we van een statisch simulatie model (ook wel *Monte Carlo simulatie* genoemd). Beschrijft het model het systeem gedurende de tijd, waarbij de toestand van het systeem wijzigt op stochastische tijdstippen, dan spreken we over *discrete-event simulatie* dan hebben we te maken met een *dynamisch model*.
Als het wiskundig model is opgesteld, dan moet worden nagegaan of het model geschikt is. Dit heet *verificatie* en *validatie*. Verificatie houdt in dat wordt nagegaan of het model doet wat de ontwerper wil dat het model doet; validatie betekent dat het model een goede voorstelling van de werkelijkheid is.

*c. Ontwerp van het experiment*
Nadat het model is geconstrueerd wordt een serie experimenten uitgevoerd om bepaalde gegevens te verkrijgen waaruit de conclusies zullen worden getrokken. Daarbij moet van tevoren over het volgende worden beslist:

- Wat moet worden berekend en hoe worden de berekeningen uitgevoerd?
- Hoe groot is het aantal series experimenten?
- Wat is de lengte van iedere serie?

Deze grootheden moeten zo worden vastgesteld dat de gewenste statistische eigenschappen (bijv. een zekere betrouwbaarheid) worden bereikt.

*d. Ontwikkelen van het computerprogramma*

Voor het uitvoeren van de experimenten dient een computerprogramma geschreven te worden. Het administreren van de opeenvolgende gebeurtenissen en het opbouwen van het daarop betrekking hebbend statistische cijfermateriaal is vaak een gecompliceerde en tijdrovende zaak.
Wegens het vaak gebruiken van de simulatietechniek zijn er speciale talen ontwikkeld, waarin vaak voorkomende formuleringen door eenvoudige standaarduitdrukkingen kunnen worden voorgesteld.

*e. Controle op de validiteit van het model*

In deze fase gaat men na of het model een goede afspiegeling van de werkelijkheid is, d.w.z. of de aspecten waaraan men wil gaan experimenteren goed zijn weergegeven. Hierbij kan de moeilijkheid optreden dat men de resultaten van het model niet goed kan vergelijken met de werkelijkheid, bijv. wanneer men een model heeft van een nog te ontwerpen systeem.

*f. Uitvoeren van het experiment*

Als de voorafgaande stadia zijn doorlopen, dan kunnen de experimenten worden uitgevoerd. Meestal levert dit een zeer groot aantal getallen (data) op. Het is gewenst deze op een overzichtelijke manier te presenteren en tussentijdse berekeningen uit te voeren.

*g. Het analyseren van de gegevens*

Uit de verkregen gegevens zal een aantal grootheden, zoals gemiddelden en varianties, worden berekend. Bij de verwerking van de gegevens moet er naar worden gestreefd om de varianties zo klein mogelijk te krijgen. Ook is het gewenst om statistische uitspraken te doen over de betrouwbaarheid.

## 6.2 Statistische verwerking van gegevens

Veronderstel dat $X_1, X_2, \ldots, X_n$ onafhankelijke realisaties zijn van een stochastische variabele met onbekende verwachting $\mu$ en onbekende variantie $\sigma^2$. Het gemiddelde van deze $n$ realisaties,

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

heet het *steekproefgemiddelde*. De *steekproefvariantie* $S_n^2$ is gedefinieerd door

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

Uit de statistiek is bekend[1] dat $\mathbb{E}\{\overline{X}_n\} = \mu$ en $\mathbb{E}\{S_n^2\} = \sigma^2$, d.w.z. dat $\overline{X}_n$ en $S_n^2$ zuivere schatters van $\mu$ resp. $\sigma^2$ zijn. Verder is $\mathsf{var}\{\overline{X}_n\} = \frac{\sigma^2}{n}$. Bovendien geldt volgens de *Sterke wet*

[1] L.J. Bain and M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Duxbury (1987) p. 183.

*van de grote aantallen*[2] dat $\overline{X}_n$ in waarschijnlijkheid convergeert naar $\mu$, d.w.z. voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt: $lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|\overline{X}_n - \mu| < \varepsilon\} = 1$.

We zullen het steekproefgemiddelde $\overline{X}_n$ gebruiken als schatting voor de onbekende verwachting $\mu$ en de vraag is hoe betrouwbaar deze schatting is. We gebruiken hiervoor de *centrale limietstelling*[3] die zegt dat voor voldoende grote $n$ de stochast

$$\overline{Y}_n := \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

bij benadering standaard normaal verdeeld is, d.w.z. dat $lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\overline{Y}_n \leq x) = \Phi(x)$ voor alle $x$, waarbij $\Phi(x)$ de verdelingsfunctie van de $N(0,1)$-verdeling is.
Een probleem om dit resultaat toe te kunnen passen is dat we $\sigma$ in het algemeen niet kennen. Dit probleem kan gelukkig worden opgelost door i.p.v. $\sigma$ de steekproefdeviatie $S_n$ te nemen. Volgens een resultaat dat bekend staat als de *Stelling van Slutsky*[4] geldt namelijk dat voor

$$\overline{Z}_n := \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}}$$

ook $lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\overline{Z}_n \leq x) = \Phi(x)$ voor alle $x$. Dit betekent dat voor $n$ voldoende groot $\overline{Z}_n$ bij benadering $N(0,1)$-verdeeld is.

In deze paragraaf bestuderen we het probleem hoe groot $n$ moet zijn opdat $\overline{X}_n$ een betrouwbare schatting van $\mu$ is en aansluitend hierop willen we een interval aangeven waar $\mu$ met een bepaalde waarschijnlijkheid in ligt, d.w.z. we willen het volgende probleem oplossen: gegeven $\alpha$ en $\varepsilon$, hoe groot moet $n$ zijn opdat $\overline{X}_n$ met een kans van minstens $1 - \alpha$ niet verder dan $\varepsilon$ van $\mu$ af ligt.

Laat $z_{\frac{1}{2}\alpha}$ het $\frac{1}{2}\alpha$-*percentiel* van de $N(0,1)$-verdeling zijn, d.w.z. $\mathbb{P}\{-z_{\frac{1}{2}\alpha} \leq Z \leq z_{\frac{1}{2}\alpha}\} = 1 - \alpha$ met $Z$ een $N(0,1)$-verdeelde stochastische variabele. Voor $n$ voldoende groot weten we dat

$$1 - \alpha \approx \mathbb{P}\Big\{ -z_{\frac{1}{2}\alpha} \leq \overline{Z}_n \leq z_{\frac{1}{2}\alpha}\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\overline{X}_n - \frac{z_{\frac{1}{2}\alpha}S_n}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}_n + \frac{z_{\frac{1}{2}\alpha}S_n}{\sqrt{n}}\Big\}, \tag{6.2.1}$$

d.w.z. dat $\Big\{\overline{X}_n - \frac{z_{\frac{1}{2}\alpha}S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{z_{\frac{1}{2}\alpha}S_n}{\sqrt{n}}\Big\}$ het benaderend $100(1-\alpha)\%$ *betrouwbaarheidsinterval* is. Bovenstaande moet niet worden geïnterpreteerd als de kans dat $\mu$ in dit interval ligt. De grootheid $\mu$ is geen stochastische variabele, maar een (onbekend) getal dat wel of niet in het interval ligt. Elke keer als een simulatierun wordt uitgevoerd, vind je een betrouwbaarheidsinterval met in het algemeen andere grenzen. De juiste interpretatie is: als je vele malen onafhankelijk van elkaar $n$ waarnemingen doet en telkens het bijbehorende betrouwbaarheidsinterval bepaalt, dan zal in ongeveer $100(1-\alpha)\%$ van de gevallen $\mu$ in dit interval liggen.

Hoe groot $n$ gekozen moet worden opdat $\overline{Z}_n$ bij benadering normaal verdeeld is, hangt sterk af van de onderliggende kansverdeling van de beschouwde stochastische variabele $X$. We volstaan

[2] L.J. Bain and M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Duxbury (1987) p. 243.
[3] L.J. Bain and M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Duxbury (1987) p. 235.
[4] L.J. Bain and M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Duxbury (1987) p. 246.

met een pragmatische opmerking dat het aantal waarnemingen vrij groot moet zijn om een niet al te groot betrouwbaarheidsinterval te krijgen en dat bij symmetrische kansverdelingen de convergentie sneller gaat dan bij asymmetrische kansverdelingen. In de praktijk worden in een simulatierun steeds nieuwe waarnemingen gegenereerd totdat de gewenste breedte $\varepsilon$ van het betrouwbaarheidsinterval is bereikt, d.w.z. $\frac{z_{\frac{1}{2}\alpha} S_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, ofwel $n \geq \left(2\frac{z_{\frac{1}{2}\alpha} S_n}{\varepsilon}\right)^2$. Voor toenemende $n$ zal $S_n$ niet al te zeer veranderen ($S_n^2$ is een zuivere schatter van $\sigma^2$), zodat $\sqrt{n}$ in feite de breedte van het interval bepaalt. Om een twee keer zo klein interval te krijgen zijn dus vier keer zoveel waarnemingen nodig.
Een andere manier om het interval te verkleinen (zonder het aantal waarnemingen te vergroten) is om op de een of andere manier de steekproefvariantie $S_n^2$ te verkleinen. Dit heet *variantiereductie* en zal in paragraaf 6.5 worden besproken.

Bij onze berekeningen gebruiken we $\overline{X}_n$ en $S_n^2$. Voor een volgende $n$, hoeven we deze waarden niet van vooraf aan uit te rekenen. We kunnen handig gebruikmaken van de volgende recurrrente betrekkingen (ga zelf de juistheid na, zie ook Opgave 6.1):

$$\overline{X}_{n+1} = \overline{X}_n + \frac{X_{n+1} - \overline{X}_n}{n+1} \quad \text{en} \quad S_{n+1}^2 = (1 - \frac{1}{n})S_n^2 + (n+1)(\overline{X}_{n+1} - \overline{X}_n)^2. \tag{6.2.2}$$

Het bovenstaande leidt tot het volgende algoritme om te bepalen wanneer we stoppen met een simulatierun. Omdat bovenstaande analyse alleen valide is voor grote waarden van $n$, voeren we in ieder geval een vrij groot aantal, zeg $N$, iteraties uit voor we nagaan of we al kunnen stoppen. In de praktijk wordt als orde van grootte voor $N$ genomen: $N \approx 50$.

**Algoritme 6.1** *Grootte van een simulatierun*

1. a. Kies $\varepsilon$, $\alpha$ en $N$, doe twee waarnemingen $X_1$ en $X_2$ en laat $n = 2$.
   b. Bereken $\overline{X}_n = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ en $S_n^2 = (X_1 - \overline{X}_n)^2 + (X_2 - \overline{X}_n)$.
2. Als $n \geq N$ en $n \geq \left(\frac{2z_{\frac{1}{2}\alpha}}{\varepsilon}\right)^2 S_n^2$: neem $\overline{X}_n$ als schatting voor de te bepalen grootheid en STOP.

   Anders: ga naar stap 3.
3. a. Doe een nieuwe waarneming $X_{n+1}$.
   b. Bereken $\overline{X}_{n+1} = \overline{X}_n + \frac{X_{n+1} - \overline{X}_n}{n+1}$ en $S_{n+1}^2 = (1 - \frac{1}{n})S_n^2 + (n+1)(\overline{X}_{n+1} - \overline{X}_n)^2$.
   c. $n := n + 1$ en ga naar stap 2.

Opmerking:
Stel dat de waarnemingen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ alleen de waarden 0 of 1 kunnen aannemen (Bernoulli data). In dat geval simuleer je in feite een onbekende kans $p$, waarbij $X_i = \begin{cases} 1 \text{ met kans } p \\ 0 \text{ met kans } 1 - p. \end{cases}$

We willen dus $\mathbb{E}\{X\} = p$ schatten. Omdat we weten dat $\mathsf{var}\{X\} = p(1-p)$, is het niet nodig om de steekproefvariantie $S_n^2$ te gebruiken als benadering voor deze variantie. Een natuurlijke schatting voor de variantie is dan $\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)$. Voor Bernoulli data is $S_n^2 = \frac{n}{n-1}\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)$ (zie Vraag 6.1). Bovenstaand Algoritme 6.1 kan dan eenvoudig zo worden aangepast dat alleen $\overline{X}_n$ wordt gebruikt.

Het betrouwbaarheidsinterval wordt dan: $\left\{\overline{X}_n - \frac{z_{\frac{1}{2}\alpha}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}, \overline{X}_n + \frac{z_{\frac{1}{2}\alpha}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}\right\}$.

Deze formule geeft ook inzicht in simulatie om zeer kleine kansen te bepalen. Stel bijvoorbeeld dat de te simuleren kans van de orde $10^{-6}$ is en je wilt een 95% betrouwbaarheidsinterval (d.w.z. $\alpha = 0.05$ en $z_{\frac{1}{2}\alpha} = 1.96$) met een intervalbreedte van $10^{-8}$.

Omdat $\overline{X}_n \approx 10^{-6}$, geldt $\overline{X}_n(1-\overline{X}_n) \approx 10^{-6}$, zodat moet gelden: $2 \cdot \frac{1.96}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{10^{-6}} \leq 10^{-8}$, d.w.z. dat ruwweg moet gelden: $\frac{4}{\sqrt{n}} \leq 10^{-5}$, ofwel $n \geq 16 \times 10^{10} = 160$ miljard. Het aantal trekkingen wordt dus gigantisch groot als je een kleine kans nauwkeurig wilt bepalen.

Soms is het helaas niet mogelijk, of te kostbaar, om een groot aantal waarnemingen te doen. In dat geval is bovenstaande aanpak niet verantwoord. Dan kan $\overline{Z}_n$ niet als $N(0,1)$-verdeeld worden beschouwd. In dat geval is wel een zinvolle analyse mogelijk onder de volgende aanname:

**Aanname 6.1**

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ zijn normaal verdeeld, zeg $N(\mu, \sigma^2)$.

Onder deze aanname heeft $\overline{Z}_n$ een zogenaamde *Student-verdeling* met $n-1$ vrijheidsgraden.[5] Deze verdeling is net als de standaard normale verdeling symmetrisch om 0. Voor $n \to \infty$ convergeert de Student-verdeling naar de N(0,1)-verdeling. Analoog aan onze eerdere analyse geldt dat

$$1-\alpha \approx \mathbb{P}\left\{-t_{\frac{1}{2}\alpha}(n-1) \leq \overline{Z}_n \leq t_{\frac{1}{2}\alpha}(n-1)\right\} = \mathbb{P}\left\{\overline{X}_n - \frac{t_{\frac{1}{2}\alpha}(n-1)S_n}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}_n + \frac{t_{\frac{1}{2}\alpha}(n-1)S_n}{\sqrt{n}}\right\}, \tag{6.2.3}$$

waarbij $t_{\frac{1}{2}\alpha}(n-1)$ een waarde is die voor een aantal waarden voor $\alpha$ en $n$ uit een tabel is af te lezen (Tabel II). Bijvoorbeeld als $\alpha = 0.05$ en $n = 15$, dan is $t_{\frac{1}{2}\alpha}(n-1) = 2.145$.

Voor uitspraken over de variantie, weer onder de aanname dat de trekkingen $X_i$ normaal verdeeld zijn, gaan we als volgt te werk. Zij $T_{n-1} = (n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2}$, dan heeft deze stochast een Chi-kwadraat verdeling met $(n-1)$ vrijheidsgraden,[6] waarvoor geldt dat $\mathbb{E}\{T_{n-1}\} = n-1$ en $\mathsf{var}\{T_{n-1}\} = 2(n-1)$.

M.b.v. Tabel III kunnen bij gegeven $n$ en $\alpha$ met waarschijnlijkheid $1-\alpha$ grenzen voor $\sigma^2$ worden bepaald, volgens: $\mathbb{P}\left\{\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\frac{1}{2}\alpha}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{1}{2}\alpha}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$.

Als $\alpha = 0.05$ en $n = 15$, dan is $\chi^2_{\frac{1}{2}\alpha}(n-1) = 26.119$ en $\chi^2_{1-\frac{1}{2}\alpha}(n-1) = 5.629$ (zie Tabel III).

[5] L.J. Bain and M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Duxbury (1987) p. 220.

[6] L.J. Bain and M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Duxbury (1987) p. 217.

**Vraag 6.1**
Veronderstel dat de waarnemingen $X_1, X_2, \cdots \in \{0,1\}$.

Toon dan aan dat voor $n \geq 2$ geldt: $S_n^2 = \frac{n}{n-1}\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)$.

## 6.3 Voorbeelden van simulaties

We zullen in deze paragraaf een viertal voorbeelden bespreken. In de eerste drie voorbeelden is simulatie niet echt nodig omdat analytische oplossingen bekend zijn, maar ze worden hier gepresenteerd om er de verschillende onderdelen van simulatie mee te illustreren. De eerste twee voorbeelden betreffen een statisch model, de laatste twee zijn dynamisch.

**Voorbeeld 6.1**
Veronderstel dat je moet beslissen of je het volgende spel wel of niet speelt:

Gooi steeds een zuivere munt op totdat het verschil tussen het aantal keren kop en munt drie is. Iedere worp kost één euro en als het verschil tussen kop en munt drie geworden is, dan ontvang je 8 euro en wordt het spel gestopt.

Hoe kom je met computersimulatie tot een beslissing? Een computer kan geen munt opgooien, maar wel zogenaamde *aselecte getallen* (zie ook de volgende paragraaf) genereren. Veronderstel dat we aselecte getallen van één cijfer gaan genereren, en dat we $\{0,1,2,3,4\}$ associëren met 'kop' en $\{5,6,7,8,9\}$ met 'munt'. Veronderstel dat we afspreken dat we het spel 14 keer spelen. Laat de computer de volgende worpen genereren: 8, 1, 3, 7, 2, 7, 1, 6, 5, 5, 7, 9, 0, 0, 3, 4, 3, 5, 6, 8, 5, 8, 9, 4, 8, 0, 4, 8, 6, 5, 3, 5, 9, 2, 5, 7, 9 , 7, 2, 9, 3, 9, 8, 5, 8, 9, 2, 5, 7, 6, 0, 7, 3, 9, 8, 2, 7, 1, 0, 3, 2, 6, 2, 7, 1, 3, 7, 0, 4, 4, 1, 8, 3, 2, 1, 3, 9, 5, 9, 0, 5, 0, 3, 8, 7, 8, 5, 4, 0, 8, 3, 8, 0.

We hebben in feite 14 keer het spel gesimuleerd met de volgende resultaten (ga dit zelf na):

| spel | resultaat | aantal worpen |
|---|---|---|
| 1 | M K K M K M K M M M M | 11 |
| 2 | M K K K K | 5 |
| 3 | K M M M M | 5 |
| 4 | M M K M K K M M M | 9 |
| 5 | K M M K M M M | 7 |
| 6 | M K M K M M M | 7 |
| 7 | M M K M M | 5 |
| 8 | M M M | 3 |
| 9 | M K M K M M K M K K K K M K M K K | 17 |
| 10 | M K K K K | 5 |
| 11 | M K K K K | 5 |
| 12 | M M M | 3 |
| 13 | K M K K M M M M M | 9 |
| 14 | K K M K M K K | 7 |

Het gaat erom informatie te verkrijgen over het gemiddeld aantal worpen nodig om een spel te spelen en op grond daarvan te beslissen of je het spel wilt spelen: als het verwachte aantal worpen minder is dan 8, dan is het (op de lange duur) gunstig om het spel te spelen en anders niet. We kunnen nu de volgende berekeningen uitvoeren met $X_i$ = het aantal worpen in het $i$-de spel.

Steekproefgemiddelde $\overline{X}_{14} = (11 + 5 + \cdots + 7)/14 = 7.00$.

Steekproefvariantie $S_{14}^2 = \{(11 - 7.00)^2 + (5 - 7.00)^2 + \cdots (7 - 7.00)^2\}/13 = 13.54$.

We veronderstellen dat het aantal worpen in een spel $N(\mu, \sigma^2)$-verdeeld is. Om kansuitspraken over $\mu$ en $\sigma$ te doen met een betrouwbaarheid van 95%, nemen we $\alpha = 0.05$.
Omdat $t_{0.025}(13) = 2.160$ (zie Tabel II) en $\chi^2_{0.025}(13) = 24.736$ en $\chi^2_{0.975}(13) = 5.009$ (zie Tabel III) gelden de volgende uitspraken met kans 0.95:

$$
\begin{array}{rcccll}
\overline{X}_{14} - t_{0.025}(13) \cdot \frac{S_{14}}{\sqrt{14}} & \leq & \mu & \leq & \overline{X}_{14} + t_{0.025}(13) \cdot \frac{S_{14}}{\sqrt{14}} & \text{d.w.z. } 4.89 \leq \mu \leq 9.11 \\
\frac{13 S_{14}^2}{\chi^2_{0.025}(13)} & \leq & \sigma^2 & \leq & \frac{13 S_{14}^2}{\chi^2_{0.975}(13)} & \text{d.w.z. } 7.11 \leq \sigma^2 \leq 35.1
\end{array}
$$

Hoewel het steekproefgemiddelde $\overline{X}_{14}$ lager is dan 8 (d.w.z. dat het spel spelen gunstig is), is het niet evident welke beslissing genomen moet worden. Hiervoor zal het aantal gesimuleerde spelen veel groter moeten zijn.

**Voorbeeld 6.2**

Dit voorbeeld is een typisch voorbeeld van Monte Carlo simulatie. Veronderstel dat we $\pi$ willen benaderen. Beschouw een stuk van de eenheidscirkel in het eerste kwadrant (met oppervlakte $\frac{1}{4}\pi$) en het eenheidsvierkant (met oppervlakte 1). De fractie van het eenheidsvierkant dat binnen de eenheidscirkel ligt is $\frac{1}{4}\pi$. Als we een groot aantal punten willekeurig in het eenheidsvierkant kiezen, dan is de fractie van de punten die ook binnen de eenheidscirkel liggen gelijk aan $\frac{1}{4}\pi$. Een trekking

$(x, y)$ uit het eenheidsvierkant krijgen we door onafhankelijk van elkaar twee willekeurige getallen uit het interval $[0, 1]$ te trekken. Het punt $(x, y)$ ligt binnen de eenheidscirkel als $x^2 + y^2 \leq 1$. Voor trekkingen uit het interval $[0, 1]$ kunnen we de aselecte getallen van 5 cijfers uit Tabel IV nemen. De eerste twee getallen zijn 0.09656 en 0.96657 met $0.09656^2 + 0.96657^2 = 0.94358 < 1$: het getallenpaar $(0.09656, 0.96657)$ ligt dus binnen de eenheidscirkel. Tabel IV bevat 200 getallen en beschouw deze als 4 series van elk 25 getallenparen. De verwachte uitkomst per serie is dus $\frac{25}{4}\pi$. In onderstaande tabel staan de resultaten.

| serie | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| aantal in eenheidscirkel | 23 | 19 | 19 | 22 |

Dit geeft:

steekproefgemiddelde $\overline{X}_4 = \{23 + 19 + 19 + 22\}/4 = 20.75$;

steekproefvariantie $S_4^2 = \{(23 - 20.75)^2 + (19 - 20.75)^2 + (19 - 20.75)^2 + (22 - 20.75)^2\}/3 = 4.25$.

De schatting voor $\pi$ volgt uit $\frac{25}{4}\pi = 20.75$, d.w.z. $\pi = 3.32$. Voor een statistische uitspraak met een betrouwbaarheid van 90% moeten we kijken bij de Student-verdeling met 3 vrijheidsgraden en met $t_{0.05}(3) = 2.353$. Met kans 90% ligt $\frac{25}{4}\pi$ tussen $20.75 - 2.353 \cdot \frac{S_4}{\sqrt{4}} \approx 18.33$ en $20.75 + 2.353 \cdot \frac{S_4}{\sqrt{4}} \approx 23.17$, d.w.z. met kans 90% ligt $\pi$ tussen 2.93 en 3.71. We zien dat we voor een betrouwbare schatting binnen een klein interval veel waarnemingen nodig hebben. Voor een 90% betrouwbare uitspraak over de variantie gebruiken we de Chi-kwadraatverdeling met 3 vrijheidsgraden: $\frac{3S^2}{\chi^2_{0.05}(3)} = \frac{12.75}{7.815} \approx 1.63 \leq \sigma^2 \leq \frac{3S^2}{\chi^2_{0.95}(3)} = \frac{12.75}{0.352} \approx 36.22$. Voor de variantie van de schatting voor $\pi$ moeten we deze getallen delen door $\left(\frac{25}{4}\right)^2 = 39.0625$. Deze variantie ligt dus tussen 0.04 en 0.93.

**Voorbeeld 6.3**

Beschouw een voorraadmodel met een stochastische vraag. Uit het verleden zijn de volgende gegevens over de vraag per dag en over de levertijd (in dagen) bekend:

| vraag | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| frequentie | 0.26 | 0.14 | 0.12 | 0.10 | 0.08 | 0.07 | 0.06 | 0.05 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | 0.01 | 0.01 |
| levertijd | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | | | | | | |
| frequentie | 0.07 | 0.13 | 0.18 | 0.26 | 0.18 | 0.10 | 0.05 | 0.03 | | | | | | |

De verwachting en de variantie van de vraag kunnen geschat worden door:

$\overline{X} = \{26 \times 0 + 14 \times 2 + \cdots + 1 \times 13\}/100 = 3.21$

$S^2 = \{26 \times (0 - 3.21)^2 + 14 \times (1 - 3.21)^2 + \cdots + 1 \times (13 - 3.21)^2\}/99 = 10.29$

Analoog kan $\overline{L}$, de verwachting van de levertijd, geschat worden door:

$\overline{L} = \{7 \times 7 + 13 \times 8 + \cdots + 3 \times 14\}/100 = 10.00$

Verder hanteren we de volgende gegevens voor dit model, waarbij een jaar bestaat uit 250 (werk)dagen:

| | |
|---|---|
| vaste bestelkosten | : 4,50 euro |
| verwachte vraag per jaar | : 800 stuks |
| voorraadkosten per stuk per jaar | : 2,00 euro |
| kosten per tekort | : 1,50 euro |

We zullen in dit voorbeeld een zogenaamde $(Q, r)$-strategie analyseren. Een $(Q, r)$-strategie is een strategie die iedere keer als de voorraad $r$ is een hoeveelheid $Q$ bestelt. We zullen in dit voorbeeld voor de $(Q, r)$-strategie met $Q = 65$ en $r = 45$ de bijbehorende kosten schatten.
Het simulatiemodel gebruikt equidistante tijdstippen (per dag wordt het systeem bekeken) en het volgende wordt gesimuleerd:
de *vraag*: deze wordt door aselecte getallen van twee cijfers gegenereerd: $00 - 25$ (26%) voor een vraag 0, $26 - 39$ (14%) voor een vraag 1, enz. tot en met 99 (1%) voor vraag 13.
de *levertijd*: deze trekkingen kunnen op analoge wijze met aselecte getallen van twee cijfers gegenereerd worden: $00 - 06$ (7%) voor levertijd van 7 dagen, $07 - 19$ (13%) voor levertijd van 8 dagen, $\ldots, 97 - 99$ (3%) voor een levertijd van 14 dagen.
Hiermee kunnen we de vraag, de voorraad, de tekorten en de bestellingen administreren, waaruit de jaarlijkse kosten eenvoudig kunnen worden berekend.

Veronderstel dat de simulatie gedurende 1000 dagen wordt uitgevoerd en dat dit de volgende jaargemiddelden oplevert:

| | | |
|---|---|---|
| vraag | : | 780 |
| gemiddelde voorraad | : | 48 |
| aantal bestellingen | : | 13 |
| aantal tekorten | : | 9 |

Hiermee kunnen de totale kosten worden berekend: $48 \times 2 + 9 \times 1,50 + 13 \times 4,50 = 168$ euro.
Laten we op deze wijze een achttal runs uitvoeren met als jaarlijkse kosten:

| run | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| kosten (in euro's) | 168 | 143 | 152 | 171 | 159 | 162 | 171 | 154 |

Dit geeft voor de jaarlijkse kosten:

$$\begin{aligned}\text{steekproefgemiddelde } \overline{X}_8 &= \{168 + 143 + 152 + 171 + 159 + 162 + 171 + 154\}/8 = 160;\\ \text{steekproefvariantie } S_8^2 &= \{(168-160)^2 + (143-160)^2 + (152-160)^2 + (171-160)^2\\ &\quad + (159-160)^2 + (162-160)^2 + (171-160)^2 + (154-160)^2\}/7\\ &= 100.\end{aligned}$$

Willen we met een betrouwbaarheid van 95% statistische uitspraken doen over de jaarlijkse kosten, dan moeten we kijken bij de Student-verdeling met 7 vrijheidsgraden en met $t_{0.025}(7) = 2.363$. Met kans 95% liggen de jaarlijkse kosten tussen $160 - 2.363 \cdot \frac{S_8}{\sqrt{8}} \approx 151.6$ en $160 + 2.363 \cdot \frac{S_8}{\sqrt{8}} \approx 168.4$ euro. Voor een 95% betrouwbare uitspraak over de variantie gebruiken we de Chi-kwadraatverdeling met 7 vrijheidsgraden: $\frac{7S^2}{\chi^2_{0.025}(7)} = \frac{700}{16.013} \approx 43.7 \leq \sigma^2 \leq \frac{7S^2}{\chi^2_{0.975}(7)} = \frac{700}{1.690} \approx 414$.

**Voorbeeld 6.4**

Beschouw een wachtrijmodel met één bediende. Veronderstel dat zowel de tussentijden tussen de aankomsten als de bedieningsduren een uniforme verdeling hebben op resp. $\{6, 8, 10, \ldots, 24\}$ en $\{1, 3, 5, \ldots, 19\}$. Voor dit model zijn geen analytische resultaten bekend.

Veronderstel dat de tussentijden en bedieningsduren met aselecte getallen van één cijfer worden gegenereerd: het aselecte getal $i$ $(0 \leq i \leq 9)$ correspondeert met een tussentijd $6 + 2i$ en met een bedieningsduur $1 + 2i$ $(0 \leq i \leq 9)$; voor de tussentijden en bedieningsduren trekken we uiteraard aparte getallen.

Bij dit model houden we steeds het volgende bij:

- de relevente tijdstippen: aankomsten en vertrekken;
- het aantal klanten in het systeem;
- het getrokken aselecte getal: als er een klant binnenkomt dan trekken we de volgende tussentijd, gaat er een klant weg dan trekken we de volgende bedieningsduur (als een klant binnenkomt op het moment dat het systeem leeg is dan trekken we zowel de tussentijd als
- de bedieningsduur) het tijdstip waarop een volgende klant zal binnenkomen;
- het tijdstip waarop de volgende bediening klaar zal zijn.

De volgende tabel een voorbeeld van mogelijke data.

| tijdstip | aantal klanten | aselect(e) getal(len) | volgende aankomst | volgend vertrek |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 9 | 24 | n.v.t. |
| 24 | 1 | 2,6 | 34 | 37 |
| 34 | 2 | 4 | 48 | 37 |
| 37 | 1 | 6 | 48 | 50 |
| 48 | 2 | 4 | 62 | 50 |
| 50 | 1 | 1 | 62 | 53 |
| 53 | 0 | n.v.t. | 62 | n.v.t. |
| 62 | 1 | 1,1 | 70 | 65 |
| 65 | 0 | n.v.t. | 70 | n.v.t. |
| 70 | 1 | 3,9 | 82 | 89 |
| 82 | 2 | 1 | 90 | 89 |
| 89 | 1 | 4 | 90 | 98 |
| 90 | 2 | 1 | 98 | 98 |
| 98 | 2 | 1,5 | 106 | 109 |
| 106 | 3 | 6 | 124 | 109 |
| 109 | 2 | 2 | 124 | 114 |
| 114 | 1 | 1 | 124 | 117 |
| 117 | 0 | n.v.t. | 124 | n.v.t. |
| 124 | 1 | 5,6 | 140 | 137 |
| 137 | 0 | n.v.t. | 140 | n.v.t. |
| 140 | 1 | 9,3 | 164 | 147 |
| 147 | 0 | n.v.t. | 164 | n.v.t. |
| 164 | 1 | | | |

We zijn geïnteresseerd in de wachttijden van de klanten. Zij voor de $i$-de klant $X_i$ en $Y_i$ de tijden die de $i$-de klant in het systeem resp. de wachtrij doorbrengt.
De simulatie heeft het volgende opgeleverd:

$X_1 = 13$ $Y_1 = 0$ $X_2 = 16$ $Y_2 = 3$ $X_3 = 5$ $Y_3 = 2$ $X_4 = 3$ $Y_4 = 0$
$X_5 = 19$ $Y_5 = 0$ $X_6 = 16$ $Y_6 = 7$ $X_7 = 19$ $Y_7 = 8$ $X_8 = 16$ $Y_8 = 11$
$X_9 = 11$ $Y_9 = 8$ $X_{10} = 13$ $Y_{10} = 0$ $X_{11} = 7$ $Y_{11} = 0$

Voor het steekproefgemiddelde en de steekproefvariantie van deze data geldt:
Tijd in systeem: steekproefgemiddelde $= \frac{138}{11} = 12.55$ en steekproefvariantie $= \frac{300.73}{10} = 30.07$.
Tijd in wachtrij: steekproefgemiddelde $= \frac{39}{11} = 3.55$ en steekproefvariantie $= \frac{172.73}{10} = 17.27$.
Ook in dit geval is het in principe weer mogelijk om statistische uitspraken op te stellen met betrouwbaarheidsintervallen. Om tot zinvolle uitspraken te komen zijn echter veel meer data nodig.

**Vraag 6.2**
Toon analytisch aan dat het verwachte aantal worpen voordat het spel van Voorbeeld 6.1 uit is, gelijk is aan 9.

## 6.4 Aselecte getallen en aselecte trekkingen

We hebben in de vorige paragraaf gezien dat aselecte getallen een belangrijke rol spelen bij simulatie, omdat er trekkingen uit kansverdelingen mee gegenereerd kunnen worden. In deze paragraaf zullen we dit onderwerp nader uitwerken.
Aselecte getallen kunnen op de volgende manier worden verkregen:
a. Door een fysisch experiment uit te voeren:
Bijvoorbeeld door worpen te doen met een tienkantige dobbelsteen kunnen de 10 getallen van één cijfer (0 t/m 9) worden gegenereerd. Vijftallen van 5 opeenvolgende worpen geven dan aselecte trekkingen van de getallen $00000, 00001, \ldots, 99999$.
b. Met behulp van een algoritme:
Bijvoorbeeld met de zogenaamde *congruentie methode*. Beschouw de congruentie $x_{n+1} \equiv ax_n + c \ (mod\ m)$ met $a < m,\ c < m$ en $x_0$ willekeurig. Als $x_0$ wordt gekozen, dan liggen alle getallen $x_n$ volledig vast: we spreken daarom van *pseudo aselecte getallen*.
Lang niet alle waarden van $a, c$ en $m$ zijn geschikt. Voor $m$ wordt meestal een zeer groot getal gekozen. Bekend is dat de keuze $a = 843314861,\ c = 453816693$ en $m = 2^{31} = 2147483648$ goed voldoet om getallen te genereren die statistisch gezien niet van echte aselecte getallen te onderscheiden zijn.

We zullen nu aangeven hoe trekkingen uit een kansverdeling gegenereerd kunnen worden m.b.v. (pseudo) aselecte getallen. Dit gebeurt met de *inverse transformatie methode*. Het idee hierbij is om een random getal te genereren uit een uniforme verdeling en hiermee (via een formule) een random getal uit een andere verdeling te bepalen. Dat dit in principe mogelijk is, is gebaseerd op het volgende lemma.

**Lemma 6.1**
*Zij $U$ een stochastische variabele die uniform verdeeld is op $[0, 1]$. Dan geldt voor iedere verdelingsfunctie $F$ dat de stochastische variabele $X$, gedefinieerd door $X = F^{-1}(U)$, de functie $F$ als verdelingsfunctie heeft.*

**Bewijs**
$\mathbb{P}\{X \leq x\} = \mathbb{P}\{F^{-1}(U) \leq x\} = \mathbb{P}\{U \leq F(x)\} = F(x)$, de laatste gelijkheid omdat $U$ uniform verdeeld is.
□

Dit lemma kan nu als volgt worden toegepast om een aselecte trekking te genereren uit een kansverdeling met een bekende verdelingsfunctie $F(x)$:

1. Trek een $u$ uit de uniforme verdeling m.b.v. (pseudo) aselecte getallen.
2. $x$, bepaald via $x = F^{-1}(u)$, is een aselecte trekking van de $X$ met verdelingsfunctie $F$.

In sommige gevallen kan $F$ expliciet worden bepaald of via een eenvoudig algoritme.
We geven enkele voorbeelden.

*Uniforme verdeling*
Veronderstel dat $X$ uniform verdeeld is op $[a, b]$. Dan kan een random getal $u \in [0, 1]$ met een trekking van $X$ worden geassocieerd d.m.v. $x = a + (b - a)u$.

*Exponentiële verdeling, Erlang verdeling en Weilbull verdeling*
Veronderstel dat $X$ een exponentiële verdeling heeft met parameter $\lambda$. Dan is de verdelingsfunctie $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Nu geldt:

$u = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda x} = 1 - u \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda x = ln(1 - u) \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{\lambda} ln(1 - u)$.

Omdat $1 - u$ ook een aselecte trekking is uit $[0, 1]$, mogen we $1 - u$ wel vervangen door $u$, d.w.z. de trekking geeft: $x = -\frac{1}{\lambda} ln(u)$.

M.b.v. het bovenstaande kunnen we ook trekkingen uit een *Erlang verdeling* genereren. Zij $X$ Erlang-verdeeld met parameters $(\lambda, k)$, d.w.z. $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ met $X_i$ een exponentiële verdeling met parameter $\lambda$, $1 \leq i \leq k$.
Het volgende algoritme geeft een trekking van $X$.

1. Genereer $k$ random getallen $u_i \in [0, 1]$, $1 \leq i \leq k$.
2. Laat $x_i = -\frac{1}{\lambda} \, ln(u_i)$, $1 \leq i \leq k$.
3. $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$.

Ook een trekking uit een *Weilbull verdeling* gaat op analoge wijze. Zij $X$ Weilbull verdeeld, dan is de verdelingsfunctie $F(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^\alpha}$ (dus voor $\alpha = 1$ is dit de exponentiële verdeling).
Nu geldt:

$u = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-(\lambda x)^\alpha} = 1 - u \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda x)^\alpha = -ln(1 - u) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\lambda}\{-ln(1 - u)\}^{1/\alpha}$.

We mogen $1 - u$ weer vervangen door $u$, d.w.z. de trekking geeft: $x = \frac{1}{\lambda}\{-ln(u)\}^{1/\alpha}$.

*Poisson proces*
Veronderstel dat we de gebeurtenissen van een Poisson proces met parameter $\lambda$ willen genereren gedurende het tijdsinterval $[0, T]$. Hiervoor maken we gebruik van de eigenschap dat de tussentijden exponenieel verdeeld zijn (met dezelfde parameter $\lambda$). We kunnen dus random trekkingen $u_i \in [0, 1]$ nemen en hieruit tussentijden $t_i = -\frac{1}{\lambda} ln(u_i)$ afleiden. Als we het proces gedurende $[0, T]$ willen genereren, kunnen we dat doen met het volgende algoritme, waarin $i$ het aantal gebeurtenissen is.

1. $t_0 = 0$; $i = 0$.
2. Genereer een random $u_i \in [0, 1]$.
3. $t_{i+1} = t_i - \frac{1}{\lambda} ln(u_i)$.
4. Als $t_{i+1} > T$: stop.

Anders: $i := i + 1$; ga naar stap 2.

*Normale en lognormale verdeling*

Veronderstel dat $X$ $N(\mu, \sigma^2)$-verdeeld is. In dit geval is de vergelijking $u = F(x)$ niet direct om te zetten in een expliciete formule voor $x$. Wel geldt de volgende afleiding die gebaseerd is op de centrale limietstelling.

Zij $U_1, U_2, \ldots, U_n$ onderling onafhankelijke trekkingen uit de homogene verdeling op $[0, 1]$ en definieer $T_n$ door: $T_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.

Dan geldt (zie ook Vraag 6.3): $\mathbb{E}\{T_n\} = \frac{n}{2}$ en $\mathsf{var}\{T_n\} = \frac{n}{12}$.

Zij $Z_n = \frac{T_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/12}}$. Volgens de Centrale limietstelling is $Z_n$ asymptotisch $N(0, 1)$-verdeeld. In de praktijk kan $Z_n$ al voor redelijk kleine waarden van $n$ als $N(0, 1)$-verdeeld beschouwd worden.

We nemen daarom maar aan dat $Z_{12}$ een $N(0, 1)$-verdeling heeft. Merk op dat $Z_{12} = T_{12} - 6$.

$\frac{X-\mu}{\sigma}$ is eveneens $N(0, 1)$-verdeeld. $Z_{12}$ kan dus worden opgevat als een waarneming van $\frac{X-\mu}{\sigma}$.

Zij $u_1, u_2, \ldots, u_{12}$ onafhankelijke trekkingen uit de homogene verdeling op $[0, 1]$, dan kan $x$, met $x = \mu + \sigma\{\sum_{i=1}^{12} u_i - 6\}$ worden opgevat als een waarneming van de $N(\mu, \sigma)$-verdeelde $X$.

Er bestaan snellere methoden om random trekkingen te doen uit de normale verdeling.[7]

Het bovenstaande geeft ook trekkingen uit een *lognormale verdeling*. $X$ is lognormaal verdeeld met parameters $\mu$ en $\sigma$ als de stochast $Y = ln(X)$ een $N(\mu, \sigma^2)$-verdeling heeft. Omdat $Y = ln(X) \;\Leftrightarrow\; X = e^Y$, kan een trekking uit de lognormale verdeling als volgt worden verkregen.

1. Genereer een random trekking $y$ uit de normale verdeling met parameters $\mu$ en $\sigma$.
2. Neem $x = e^y$.

*Discrete verdeling*

Hetzelfde principe kan ook worden toegepast op een discrete verdeling. In feite hebben we dit reeds gedaan in de voorbeelden 6.3 en 6.4. We zullen nog een voorbeeld geven.

Veronderstel dat $X = 0, 1, 2, 3$ met kans $0.1, 0.3, 0.4$ en $0.2$ respectievelijk.

Dan geldt voor de verdelingsfunctie $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0.1 & 0 \leq x < 1 \\ 0.4 & 1 \leq x < 2 \\ 0.8 & 2 \leq x < 3 \\ 1.0 & x = 3 \end{cases}$$

[7] Zie bijvoorbeeld J.H. Ahrends and U. Dieter, *An alias method for sampling from the normal distribution*, Computing 42 (1982) 159-170.

Zij $u$ een aselect getal uit $[0,1]$, dan hoort hierbij de volgende $x$:
als $0.0 \leq u \leq 0.1 \quad \rightarrow \quad x = 0$; als $0.1 < u \leq 0.4 \quad \rightarrow \quad x = 1$;
als $0.4 < u \leq 0.8 \quad \rightarrow \quad x = 2$; als $0.8 < u \leq 1.0 \quad \rightarrow \quad x = 3$.
Veronderstel dat $X \in \{1, 2, \ldots, n\}$, elk met kans $\frac{1}{n}$. Zij $u$ een aselect getal uit $[0,1)$, dan hoort bij $u$ de waarde $x = i \Leftrightarrow \frac{i-1}{n} \leq u < \frac{i}{n},\ i = 1, 2, \ldots, n$, d.w.z. $x = \lfloor nu \rfloor + 1$.

*Poisson verdeling*
Voor een stochastische variabele $X$ met een Poisson verdeling met parameter $\lambda$ geldt:

$$p_n = \mathbb{P}\{X = n\} = \tfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, n = 0, 1, \ldots.$$

Het genereren van trekkingen uit de uniforme verdeling op $[0,1]$ is gebaseerd op het (eenvoudig te controleren) feit dat $p_0 = e^{-\lambda}$ en $p_{n+1} = \frac{\lambda}{n+1} p_n, n = 0, 1, \ldots$.
We trekken eerst een willekeurig getal $u \in [0,1]$.
Als $u < e^{-\lambda} = p_0$, dan associëren we deze trekking met $x = 0$, die immers een kans $p_0$ heeft.
Als $p_0 \leq u < p_0 + p_1 = p_0 + \lambda p_0$, dan associëren we deze trekking met $x = 1$, etc.
Dit geeft het volgende algoritme.

1. Trek random een $u \in [0,1]$; $n = 0$; $p = e^{-\lambda}$; $F = p$.
2. Als $u < F$: neem $x = n$ en stop;

Anders: $p := \frac{\lambda}{n+1} p$, $F := F + p$; $n := n + 1$; en herhaal stap 2.
Omdat de verwachting van een Poisson verdeelde stochast de waarde $\lambda$ heeft, is de verwachting van het aantal stappen van bovenstaand algoritme $\lambda + 1$.

*Geometrische verdeling*
Voor een stochastische variabele $X$ met een geometrische verdeling met parameter $p$ geldt:

$$\mathbb{P}\{X = n\} = pq^{n-1}, n = 1, 2, \ldots, \text{ waarbij } 0 < p < 1 \text{ en } q = 1 - p.$$

De bijbehorende interpretatie is dat $X$ de poging met het eerste succes is, als iedere poging succeskans $p$ heeft: $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{X = i\} = 1-$ kans geen succes in de eerste $n$ pogingen $= 1 - q^n,\ n \geq 1$.
We kunnen nu een trekking uit $X$ genereren uit een trekking $u \in [0,1]$ door $1 - q^{n-1} \leq u < 1 - q^n$ te associëren met $x = n$, immers:
de kans hierop is $(1 - q^n) - (1 - q^{n-1}) = q^{n-1} - q^n = q^{n-1}(1 - q) = pq^{n-1} = \mathbb{P}\{X = n\}$.
Omdat $1 - q^{n-1} \leq U < 1 - q^n \quad \Leftrightarrow \quad q^n < 1 - U \leq q^{n-1}$ geldt dat $X = min\{n \mid q^n < 1 - U\}$.
Aangezien $1 - U$ ook uniform verdeeld is op $[0,1]$, kunnen we voor $x$ ook nemen:
$x = \min\{n \mid q^n < u\}$. Vervolgens merken we op dat de logaritme een monotone functie is, zodat tevens geldt:
$x = \min\{n \mid nlog(q) < log(u)\}$, ofwel $x = \min\left\{n \mid n > \frac{log(u)}{log(q)}\right\}$, m.a.w. $x = \lfloor \frac{log(u)}{log(q)} \rfloor + 1$.

*Binomiale verdeling*

Voor een stochastische variabele $X$ met een binomiale verdeling met parameters $(n, p)$ geldt:

$\mathbb{P}[X = i] = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}, 0 \leq i \leq n$, waarbij $0 < p < 1$ en $q = 1 - p$.

De bijbehorende interpretatie is dat $X$ het aantal successen uit $n$ pogingen is, als iedere poging succeskans $p$ heeft. In dit geval gebruiken we weer, net zoals bij de Poisson verdeling een recurrente relatie, namelijk dat $\mathbb{P}\{X = i + 1\} = \frac{n-i}{i+1} \cdot \frac{p}{q} \cdot \mathbb{P}\{X = i\}$, tezamen met de beginconditie dat $\mathbb{P}\{X = 0\} = q^n$. Dit geeft het volgende algoritme.

1. Trek random een $u \in [0, 1]$; $i = 0$; $a = \frac{p}{q}$; $b = q^n$; $F = b$.
2. Als $u < F$: neem $x = i$ en stop;

Anders: $b := \frac{n-i}{i+1} \cdot a \cdot b$, $F := F + b$; $i := i + 1$; en herhaal stap 2.

Omdat de verwachting van de binomiale verdeling de waarde $np$ heeft, is de verwachting van het aantal stappen van dit algoritme $np + 1$.

Als $p > \frac{1}{2}$, dan kunnen we het beter iets anders doen. Dan genereren we op analoge wijze een binomiaal verdeelde veriabele bij de parameters $(n, q)$; deze heeft de interpretatie van het aantal mislukkingen uit $n$ trekkingen en de verwachting van het aantal benodigde iteraties van het algoritme van $nq + 1 < np + 1$ stappen. Tenslotte nemen we voor een trekking uit de oorspronkelijke $X$ de waarde $n$ minus de uitkomst van het algoritme.

*Permutaties*

Veronderstel dat we een random permutatie van de getallen van de getallen $1, 2, \ldots, n$ willen genereren, d.w.z. dat ieder van de $n!$ mogelijke permutaties een gelijke kans heeft om gegenereerd te worden. We doen dit door eerst random een van de getallen $1, 2, \ldots, n$ te trekken en deze op plaats $n$ te zetten; daarna kiezen we random een van de overgebleven $n - 1$ getallen en zetten deze op plaats $n - 1$, etc. Het is handig en efficiënt de getallen $1, 2, \ldots, n$ in een geordende lijst te zetten en dan random een van de $n$ posities te kiezen in plaats van het getal zelf. Dit betekent dat we, startend met een beginordening $P_1, P_2, \ldots, P_n$, random een van de getallen uit $1, 2, \ldots, n$ kiezen, zeg getal $i$, waarna we $P_n$ en $P_i$ verwisselen. Daarna kiezen we random een van de getallen uit $1, 2, \ldots, n$, zeg getal $j$, waarna we $P_{n-1}$ en $P_j$ verwisselen, etc.

Dit geeft het volgende algoritme, waarin met $P_i = i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ wordt gestart.

1. Start met $P_i = i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ en laat $k = n$.
2. Trek random een $u \in (0, 1)$ en laat $i = \lfloor k \cdot u \rfloor + 1$.
3. Verwissel de getallen op de plaatsen $i$ en $k$; $k := k - 1$; als $k \geq 2$: ga naar stap 2.
4. $P_1, P_2, \ldots, P_n$ is de gegenereerde permutatie.

Opmerking:

Het bovenstaande idee kan ook gebruikt worden om random een deelverz. van $r$ verschillende elementen uit $1, 2, \ldots, n$ te trekken. We stoppen dan als in stap 3 de waarde van $k$ gelijk is aan $n - r$. Dit wordt bijvoorbeeld gedaan bij medische proefnemingen. Veronderstel dat we willen testen of een nieuw geneesmiddel het cholesterol verlaagt. Er zijn 1000 proefpersonen, die verdeeld moeten worden in twee groepen van elk 500. De eerste groep (de behandelgroep) krijgt het geneesmiddel en de tweede (de controlegroep) een placebo. Zowel de deelnemers als de onderzoekers mogen niet weten wie tot welke groep behoort; zo'n test heet *dubbel-blind*. Er moet bepaald worden wie in welke groep terecht komt. Daarvoor worden op willekeurige wijze 500 getallen uit de getallen $1, 2, \dots, 1000$ getrokken en deze personen komen in de behandelgroep.

*De acceptatie-verwerping methode*
Stel dat we een efficiënte methode hebben om een trekking van een stochastische discrete variabele $Y$ te genereren met massa $\{g_i,\ i \in I\}$. Dit kunnen we gebruiken voor een trekking van een stochastische variabele $X$ met massa $\{f_i,\ i \in I\}$ via het volgende algoritme.
1. Bepaal $c$ zódat $\frac{f_i}{g_i} \leq c$ voor alle $i$.
2. Genereer een trekking van $Y$, zeg $y = i$.
3. Genereer een random $u \in [0, 1]$.
4. Als $u \leq \frac{f_i}{c \cdot g_i}$: accepteer $i$ als trekking voor $X$.
Anders: ga naar stap 2.

**Stelling 6.2**
*Bovenstaand algoritme geeft een aselecte trekking uit de kansverdeling van $X$.*

**Bewijs**
Omdat $\mathbb{P}\{AB\} = \mathbb{P}\{A \mid B\} \cdot \mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{B \mid A\} \cdot \mathbb{P}\{A\}$, kunnen we schrijven (neem $Y = i$ voor $A$ en voor $B$ de acceptatie):
$\mathbb{P}\{Y = i \mid \text{acceptatie}\} \cdot \mathbb{P}\{\text{acceptatie}\} = \mathbb{P}\{\text{acceptatie} \mid Y = i\} \cdot \mathbb{P}\{Y = i\} = \frac{f_i}{c \cdot g_i} \cdot g_i = \frac{f_i}{c}$.
Sommeer bovenstaande gelijkheid over alle $i$:

$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{Y = i \mid \text{acceptatie}\} \cdot \mathbb{P}\{\text{acceptatie}\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{c}$,
ofwel $\mathbb{P}\{\text{acceptatie}\} = \frac{1}{c}$. Dit geeft $\mathbb{P}\{X = i\} = \mathbb{P}\{Y = i \mid \text{acceptatie}\} = \frac{f_i/c}{1/c} = f_i$ voor alle $i$, zodat de aan $X$ toegekende waarde inderdaad overeenkomt met de gewenste massa. $\square$

$\mathbb{P}\{\text{acceptatie}\} = \frac{1}{c}$, d.w.z. dat de toekenning van een waarde voor $X$ te beschouwen is als trekkingen uit een geometrische verdeling met $p = \frac{1}{c}$. De geometrische verdeling heeft $\frac{1}{p} = c$ als verwachting, dus het aantal te verwachten stappen van het algoritme is $c$: het algoritme werkt sneller naarmate $c$ kleiner is, d.w.z. naarmate $\{g_i,\ i \in I\}$ meer lijkt op $\{f_i,\ i \in I\}$, wat logisch is. Tenslotte merken we op dat deze acceptatie-verwerping methode ook kan worden toegepast op continue stochastische variabelen.[8]

**Voorbeeld 6.5**
Veronderstel dat we een trekking willen doen met waarden 1, 2, ..., 10 met kansen 0.13, 0.10, 0.11, 0.06, 0.12, 0.11, 0.08, 0.09, 0.14 en 0.06, en dat we daarvoor de uniforme verdeling op

[8] H.C. Tijms: *Operationele analyse: een inleiding in methoden en methoden*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2002 pp. 435- 437.

$\{1, 2, \ldots, 10\}$ willen gebruiken, dus $g_i = \frac{1}{10}$, $1 \leq i \leq 10$. In dit model kunnen we $c = 1.4$ nemen en kan het volgende algoritme worden gebruikt.

1. Genereer een random $u_1 \in [0, 1]$ en laat $y = \lfloor 10u_1 \rfloor + 1$.
2. Genereer een random $u_2 \in [0, 1]$.
3. Als $u_2 \leq \frac{f_i}{c \cdot g_i} = \frac{f_i}{1.4 \cdot 0.1} = \frac{f_i}{0.14}$: accepteer $y$ als trekking voor $X$.

Anders: ga naar stap 1.

**Vraag 6.3**
Zij $U_1, U_2, \ldots, U_n$ onderling onafhankelijke trekkingen uit de homogene verdeling op $[0, 1]$ en definieer $T_n$ door: $T_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$. Toon aan dat geldt: $\mathbb{E}\{T_n\} = \frac{n}{2}$ en $\mathsf{var}\{T_n\} = \frac{n}{12}$.

**Vraag 6.4**
Leid formules af om m.b.v. aselecte getallen uit $[0, 1]$ trekkingen te generenen uit verdelingen met de volgende dichtheden $f(x)$:

a. $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} & 10 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$

**Vraag 6.5**
Gebruik de volgende 12 aselecte getallen uit $[0, 1]$ om een trekking uit een normale verdeling met $\mu = 100$ en $\sigma = 20$ te genereren: $0.485, 0.304, 0.154, 0.707, 0.987, 0.654, 0.996, 0.406, 0.357, 0.612, 0.608$ en $40.916$.

**Vraag 6.6**
Beschouw een wachttijdmodel met één bediende. Veronderstel dat er Poissoninput is met $\lambda = 0.2$ minuten en dat de bedieningsduur exponentieel verdeeld is met parameter $\mu = 0.25$ minuten.
Het systeem wordt gedurende 60 minuten geobserveerd.
Maak voor het genereren van aselecte getallen gebruik van Tabel IV.
a. Bereken analytisch de grootheden $L, L_q, W, W_q$ en $\rho$.
b. Bepaal met de 'gewone' simulatietechniek $L, L_q, W, W_q$ en $\rho$.
(iedere klant gebruikt de twee volgende aselecte getallen uit Tabel IV voor de tussentijd resp. de bedieningsduur).

## 6.5 Variantie reducerende technieken

Een experiment levert een eindig aantal waarnemingen op. Dit zijn realisaties van een stochastische variabele met verwachting $\mu$ en variantie $\sigma^2$. Uit de waarnemingen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ worden $\mu$ en $\sigma^2$ als volgt benaderd:

1. De verwachting $\mu$: het steekproefgemiddelde $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ is hiervoor een zuivere schatter.
2. De variantie $\sigma^2$: de steekproefvariantie $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$ is hiervoor een zuivere

schatter.

Het steekproefgemiddelde $\overline{X}_n$ is, zeker als $n$ niet erg groot is, vaak onbetrouwbaar als benadering voor $\mu$. De variantie van $\overline{X}_n$ is dan nog vaak vrij groot zijn (we hebben gezien dat $\mathsf{var}\{\overline{X}_n\} = \frac{\sigma^2}{n}$). Als we nu op de een of andere manier een ander steekproefgemiddelde kunnen vinden, maar met een kleinere variantie, dan verdient dat de voorkeur. Hiervoor zijn diverse technieken beschikbaar, waarvan we er enkele zullen bespreken, zonder echt nieuwe waarnemingen te doen.

### 6.5.1 Stratificatie

Soms hebben de steekproeven de 'tekortkoming' dat ze onvoldoende representatief zijn, d.w.z. dat bepaalde gebieden van de mogelijke uitkomsten onder- of oververtegenwoordigd zijn. Bij stratificatie gaan we op voorhand uit van een aantal stroken, zeg $k$, waarin de waarnemingen terecht komen. We nemen aan dat we van iedere strook ('stratum') de kans weten dat een willekeurige waarneming in deze strook terecht komt, zeg $p_i$ is de kans dat een willekeurige waarneming in strook $i$ terecht komt. Als er in totaal $n$ waarnemingen worden gegenereerd, dan moeten er eigenlijk $np_i$ uit strook $i$ komen. We kiezen nu natuurlijke getallen $n_i$ (bij voorkeur ligt $n_i$ enigszins in de buurt van $np_i$ en zorgen er voor dat $n_i$ waarnemingen in strook $i$ vallen, $i = 1, 2, \ldots, k$. Als strook $i$ hoort bij random trekkingen uit het deelinterval $[a_i, b_i]$ van $[0, 1]$, dan kan $u \in [0, 1]$ worden vervangen door $u' = a_i + (b_i - a_i)u \in [a_i, b_i]$. Nadat we aldus $n_i$ waarnemingen hebben uit strook $i$, geven we deze het gewicht $w_i = \frac{np_i}{n_i}$ voor de mate waarin de waarnemingen in de stroken vertegenwoordigd zijn (gewicht 1 is 'eerlijk', kleiner dan 1 hoort bij overtegenwoordiging en groter dan 1 bij ondervertegenwoordiging).

Intuïtief is duidelijk dat we op deze manier eerlijker te werk gaan. We kunnen inderdaad aantonen dat deze aanpak dezelfde verwachting van het steekproefgemiddelde oplevert en een niet-grotere variantie. Om dit in te zien moeten we ons realiseren dat de gestratificeerde waarnemingen conditionele kansen zijn, waarbij de conditie is dat er uit iedere strook een 'eerlijk' aantal waarnemingen komt. Noem deze conditie $Y$, dan geldt bovenstaande bewering op grond van de eigenschappen van conditionele verwachting en variantie: [9]

$\mathbb{E}\{X\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}(X \,|\, Y)\}$ en $\mathsf{var}\{X\} = \mathbb{E}\{\mathsf{var}(X \,|\, Y)\} + \mathsf{var}\{\mathbb{E}(X \,|\, Y)\} \geq \mathsf{var}\{\mathbb{E}(X \,|\, Y)\}$.

De verwachting blijft dus hetzelfde, maar de variantie zal in het algemeen kleiner worden.

De gelijkheid $\mathsf{var}\{X\} = \mathbb{E}\{\mathsf{var}(X \,|\, Y)\} + \mathsf{var}\{\mathbb{E}(X \,|\, Y)\}$ kan als volgt worden verkregen:

$\mathsf{var}\{\mathbb{E}(X \,|\, Y)\} = \mathbb{E}\left\{\{\mathbb{E}(X \,|\, Y)\}^2\right\} - \left\{\mathbb{E}\{\mathbb{E}(X \,|\, Y)\}\right\}^2 = \mathbb{E}\left\{\{\mathbb{E}(X \,|\, Y)\}^2\right\} - \{\mathbb{E}(X)\}^2$ en

$\mathsf{var}(X \,|\, Y) = \mathbb{E}(X^2 \,|\, Y) - \{E(X \,|\, Y)\}^2$, zodat we kunnen schrijven:

$\mathbb{E}\{\mathsf{var}(X \,|\, Y)\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}(X^2 \,|\, Y)\} - \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}(X \,|\, Y)\}^2\right\} = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}\left\{\{\mathbb{E}(X \,|\, Y)\}^2\right\}$.

Optellen geeft: $\mathsf{var}\{\mathbb{E}(X \,|\, Y)\} + \mathsf{var}\{\mathbb{E}(X \,|\, Y)\} = \mathbb{E}(X^2) - \{\mathbb{E}(X)\}^2 = \mathsf{var}\{X\}$.

[9] S.M. Ross, *A course in Simulation*, Macmillan, 1991 (chapter 2).

**Algoritme 6.2** *Stratificatie*

1. Verdeel het gebied waar de $n$ waarnemingen in terecht kunnen komen in $k$ stroken.

2. Bepaal $p_i$ = de kans dat een willekeurige waarneming in strook $i$ terechtkomt, kies natuurlijke getallen $n_i$ (bij voorkeur $n_i \approx np_i$) en laat $w_i = \frac{np_i}{n_i},\ i = 1, 2, \ldots, k$.

3. Genereer de waarnemingen en zorg er voor dat er $n_i$ uit strook $i$ komen, $i = 1, 2, \ldots, k$.

4. $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} w_i \cdot$ (de som van de waarnemingen uit strook $i$).

**Voorbeeld 6.6**
Beschouw de exponentiële verdeling met parameter $\lambda = 1$. Het is bekend dat de verwachting hiervan gelijk aan 1 is, maar veronderstel dat we deze verwachting met simulatie willen benaderen. Zoals in de vorige paragraaf is uitgewerkt kunnen trekkingen uit deze verdeling worden gegenereerd m.b.v. aselecte trekkingen uit $[0, 1]$. Beschouw een steekproef zonder stratificatie van 10 getallen zoals hieronder is getabelleerd.

| $i$ | $u_i$ | $x_i = -ln(1 - u_i)$ | $i$ | $u_i$ | $x_i = -ln(1 - u_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.495 | 0.684 | 6 | 0.698 | 1.199 |
| 2 | 0.335 | 0.408 | 7 | 0.013 | 0.014 |
| 3 | 0.791 | 1.568 | 8 | 0.761 | 1.433 |
| 4 | 0.469 | 0.623 | 9 | 0.290 | 0.343 |
| 5 | 0.279 | 0.328 | 10 | 0.693 | 1.183 |

Deze steekproef heeft als gemiddelde 0.799 en de steekproefvariantie is 0.286.

Vervolgens zullen we de stratificatie techniek toepassen op dit voorbeeld. Als stroken nemen we: $0 \le x < 1,\ 1 \le x < 3$ en $x \ge 3$, wat overeenkomt met $p_1 = 0.64,\ p_2 = 0.32$ en $p_3 = 0.04$.
Neem nu $n_1 = 4, n_2 = 4$ en $n_3 = 2$, zodat $w_1 = \frac{6.4}{4} = 1.6, w_2 = \frac{3.2}{4} = 0.8$ en $w_3 = \frac{0.4}{2} = 0.2$.
In onderstaande tabel staat het schema voor de berekeningen.

| strook | $i$ | $u_i$ | $u'_i$ | $x'_i = -ln(1 - u'_i)$ | strook | $i$ | $u_i$ | $u'_i$ | $x'_i = -ln(1 - u'_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.495 | 0.317 | 0.381 | 2 | 6 | 0.698 | 0.864 | 1.995 |
| 1 | 2 | 0.335 | 0.215 | 0.242 | 2 | 7 | 0.013 | 0.644 | 1.033 |
| 1 | 3 | 0.791 | 0.507 | 0.707 | 2 | 8 | 0.761 | 0.884 | 2.154 |
| 1 | 4 | 0.469 | 0.300 | 0.357 | 3 | 9 | 0.290 | 0.972 | 3.561 |
| 2 | 5 | 0.279 | 0.729 | 1.306 | 3 | 10 | 0.693 | 0.988 | 4.398 |

Dit geeft voor het gestratificeerde steekproefgemiddelde:
$\{1.6(0.381 + 0.242 + 0.707 + 0.357) + 0.8(1.306 + 1.995 + 1.033 + 2.154) + 0.2(3.561 + 4.398)\}/10 = 0.948$.

### 6.5.2 Complementaire aselecte getallen

Een tweede manier om te variantie te reduceren is die van de complementaire aselecte getallen. Als een getal $u \in [0,1]$ wordt getrokken, dan beschouwen we behalve $u$ ook $u' = 1 - u$. Dit geeft een rij waarnemingen $\{X_i\}$ en een rij $\{X_i'\}$. Intuïtief is ook nu weer duidelijk dat we op deze wijze corrigeren voor 'oneerlijke' trekkingen. Laat $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ en $\overline{X}'_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i'$, dan nemen we in dit geval voor het steekproefgemiddelde: $X^* = \frac{\overline{X}_n + \overline{X}'_n}{2}$. Omdat $\mathbb{E}\{\overline{X}_n\} = \mathbb{E}\{\overline{X}'_n\} = \mu$ en $\mathsf{var}\{\overline{X}_n\} = \mathsf{var}\{\overline{X}'_n\} = \frac{\sigma^2}{n}$, en omdat $\overline{X}_n$ en $\overline{X}'_n$ negatief gecorreleerd zijn geldt:
$\mathbb{E}\{X^*\} = \frac{\mathbb{E}\{\overline{X}_n\} + \mathbb{E}\{\overline{X}'_n\}}{2} = \mu;$
$\mathsf{var}\{X^*\} = \frac{1}{4}\big\{\mathsf{var}\{\overline{X}_n\} + \mathsf{var}\{\overline{X}'_n\} + 2cov(\overline{X}_n, \overline{X}'_n)\big\} \leq \frac{1}{4}\big\{\mathsf{var}\{\overline{X}_n\} + \mathsf{var}\{\overline{X}'_n\}\big\} = \frac{\sigma^2}{2n}.$

**Voorbeeld 6.6 (vervolg)**
De techniek van de complementaire random getallen, toegepast op het voorbeeld, geeft:

| $i$ | $u_i$ | $x_i = -ln(1-u_i)$ | $u_i'$ | $x_i' = -ln(1-u_i')$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.495 | 0.684 | 0.505 | 0.702 |
| 2 | 0.335 | 0.408 | 0.665 | 1.092 |
| 3 | 0.791 | 1.568 | 0.209 | 0.234 |
| 4 | 0.469 | 0.633 | 0.531 | 0.756 |
| 5 | 0.279 | 0.328 | 0.721 | 1.275 |
| 6 | 0.698 | 1.199 | 0.302 | 0.359 |
| 7 | 0.013 | 0.014 | 0.978 | 4.305 |
| 8 | 0.761 | 1.433 | 0.239 | 0.272 |
| 9 | 0.290 | 0.343 | 0.710 | 1.236 |
| 10 | 0.693 | 1.183 | 0.307 | 0.366 |

$\overline{X}_n = 0.799$; $\overline{X}'_n = 1.060$, dus $X^* = (0.779 + 1.060)/2 = 0.920$.

**Voorbeeld 6.7**
Veronderstel dat we $\int_0^1 e^x\, dx$ willen bepalen met simulatie (natuurlijk is de uitkomst $e-1$, maar het gaat in dit voorbeeld om variantie reductie te tonen). Door heel vaak $e^u$ te nemen met $u$ een random trekking uit de uniform homogene verdeling kunnen we de integraal benaderen.
Voor een trekking $U$ geldt:
$\mathsf{var}\{e^U\} = \mathbb{E}\{e^{2U}\} - \big\{\mathbb{E}\{e^U\}\big\}^2 = \int_0^1 e^{2x}\, dx - \big\{\int_0^1 e^x\, dx\big\}^2 = \frac{1}{2}(e^2-1) - (e-1)^2 = 0.2420.$
Als we twee onafhankelijke trekkingen $U_1$ en $U_2$ nemen, dan is de variantie van het gemiddelde:
$\mathsf{var}\big\{\frac{1}{2}(e^{U_1} + e^{U_2})\big\} = \frac{1}{4}\mathsf{var}\big\{e^{U_1} + e^{U_2}\big\} = 0.1210.$
Als we het gemiddelde van de twee afhankelijke trekkingen $U$ en $1-U$ nemen, dan is de variantie van het gemiddelde:
$\mathsf{var}\big\{\frac{1}{2}(e^U + e^{1-U})\big\} = \frac{1}{4}\big\{\mathsf{var}\{e^U\} + \mathsf{var}\{e^{1-U}\} + 2cov(e^U, e^{1-U})\big\}.$
Omdat $cov(e^U, e^{1-U}) = \mathbb{E}\{e^U \cdot e^{1-U}\} - \mathbb{E}\{e^U\} \cdot \mathbb{E}\{e^{1-U}\} = e - (e-1)^2 = -0.2342$, krijgen we:

$\mathsf{var}\{\frac{1}{2}(e^U + e^{1-U})\} = \frac{1}{4}\{0.2420 + 0.2420 + 2 \times (-0.2342)\} = 0.0039.$

Dit geeft dus een enorme variantie reductie.

## 6.6 Opgaven

**Opgave 6.1**

Toon aan dat voor $n \geq 2$ geldt:

$$\overline{X}_{n+1} = \overline{X}_n + \frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{n+1} \text{ en } S^2_{n+1} = (1-\tfrac{1}{n})S^2_n + (n+1)(\overline{X}_{n+1} - \overline{X}_n)^2.$$

**Opgave 6.2**

Leid formules af om m.b.v. aselecte getallen uit $[0,1]$ trekkingen te generenen uit verdelingen met de volgende dichtheden $f(x)$:

a. $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^3}{4} & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$

**Opgave 6.3**

Beschouw de kansverdeling met dichtheid $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$ en met verdelingsfunctie $F(x)$.

a. Gevraagd wordt om een simulatie experiment te ontwerpen om de verwachting van deze kansverdeling te schatten. Voer daartoe het volgende uit:

(1) gebruik de 'gewone' simulatietechniek met de volgende 10 aselecte getallen uit $[0,1]$:
$0.096, 0.569, 0.665, 0.764, 0.842, 0.492, 0.224, 0.950, 0.610$ en $0.145$.

(2) Pas de stratificatietechniek toe op de stroken met $0 \leq F(x) < 0.6$, $0.6 \leq F(x) < 0.9$ en $0.9 \leq F(x) \leq 1$, met respectievelijk 3, 3 en 4 waarnemingen.

(3) Gebruik de methode van de complementaire aselecte getallen.

b. Bepaal de verwachting van deze kansverdeling ook analytisch.

**Opgave 6.4**

Beschouw een voorraadmodel met de volgende gegevens:

- de vraag per maand is normaal verdeeld met $\mu = 100$ en $\sigma = 20$;
- de voorraadkosten zijn 0,25 euro per eenheid die aan het einde van de maand over is;
- de bestelkosten zijn 40 euro per bestelling;
- per tekort zijn er kosten van 1 euro en tekorten worden niet nageleverd.

Onderzoek de volgende twee strategieën:

a. bestel aan het begin van iedere maand 100 eenheden (deze zijn direct beschikbaar);

b. bestel aan het begin van iedere vier maanden 400 eenheden (deze zijn direct beschikbaar).

Ga met simulatie na wat de kosten van beide strategieën zijn over een periode van 1 jaar. Voer voor beide strategieën vier runs uit, gebaseerd op de aselecte getallen van Tabel V.

**Opgave 6.5**

Beschouw een wachttijdmodel met twee bedienden. Veronderstel dat er Poissoninput is met $\lambda = 0.2$ minuten en dat de bedieningsduur van beide bedienden exponentieel verdeeld is met parameter $\mu = 0.25$ minuten. Het systeem wordt gedurende 60 minuten geobserveerd.
Maak voor het genereren van aselecte getallen gebruik van Tabel IV.
a. Bereken analytisch de grootheden $L, L_q, W, W_q$ en $\rho$.
b. Bepaal met de 'gewone' simulatietechniek $L, L_q, W, W_q$ en $\rho$.
(iedere klant gebruikt de twee volgende aselecte getallen uit Tabel IV voor de tussentijd resp. de bedieningsduur).

**Opgave 6.6**

Beschouw het volgende onderhoudsprobleem. Een machine bevat vier identieke onderdelen die stuk kunnen gaan. Als een onderdeel stuk is, dan werkt de machine niet meer.
Vergelijk de volgende strategieën:
a. als een onderdeel kapot gaat, dan vervangen we dit onderdeel;
b. als een onderdeel kapot gaat, dan vervangen we alle vier onderdelen.
Gebruik hierbij de volgende gegevens:
(1) de tijd voordat een onderdeel kapot gaat heeft een uniforme verdeling op $[1000, 2000]$ (de eenheid van tijd is 1 uur);
(2) als één onderdeel vervangen moet worden is de machine een uur uitgeschakeld; als alle onderdelen vervangen worden twee uur;
(3) ieder uur dat de machine is uitgeschakeld betekent een verlies van 100 euro;
(4) vervanging van een onderdeel kost 20 euro;
(5) als aslecte getallen uit $[0, 1]$ kunnen worden genomen:
0.096, 0.569, 0.665, 0.764, 0.842, 0.492, 0.224, 0.950, 0.610, 0.145, 0.484, 0.552, 0.350, 0.590, 0.430, 0.041, 0.802, 0.471, 0.255, 0.799, 0.695, 0.422, 0.400, 0.542 en 0.368.
Startend met vier nieuwe onderdelen, simuleer beide strategieën gedurende 5.000 uur.

**Opgave 6.7**

De acceptatie-verwerping methode voor een stochastische continue variabele $X$ met dichtheid $f(x)$ m.b.v. een andere continue stochastische variabele $Y$ met dichtheid $g(x)$ gaat als volgt:
1. Bepaal $c$ zódat $\frac{f(x)}{g(x)} \leq c$ voor alle $x$.
2. Genereer een trekking van $Y$, zeg $y$.
3. Genereer een random $u \in [0, 1]$.
4. Als $u \leq \frac{f(y)}{c \cdot g(y)}$: accepteer $x = y$ als trekking voor $X$.
Anders: ga naar stap 2.
a. Bewijs dat bovenstaand algoritme een aselecte trekking uit de kansverdeling van $X$ geeft.
b. Zij $f(x) = \begin{cases} 20x(1-x)^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$ en beschouw de methode met $Y$ homogeen op $[0, 1]$.
(1) Bepaal de kleinste $c$ in stap 1.
(2) Geef de speciale versie van het algoritme die bij dit voorbeeld en deze $c$ hoort.

# Hoofdstuk 7

# DYNAMISCHE PROGRAMMERING

## 7.1 Inleiding

Dynamische programmering is een techniek die vaak met succes toegepast kan worden bij problemen die zich 'in de tijd' afspelen, d.w.z. die een dynamisch karakter hebben. Een algemene karakteristiek van dynamische programmering is dat voor oplossen van het probleem een *recursieve formulering* wordt opgesteld. We hebben dit reeds gezien bij de Bellman-vergelijkingen voor het kortste pad probleem [1] en bij het knapzakprobleem (zie dictaat Besliskunde 3). Het vinden van een dergelijke recursieve formulering vereist een zeker inzicht in het gestelde probleem en een zekere vaardigheid om de recursie op te stellen. Vaak betreft het ook het kunstmatig aanbrengen van een dynamisch karakter in een op het eerste gezicht niet-dynamisch probleem. Door een aantal voorbeelden uit te werken zullen we dit inzicht en deze vaardigheid verder ontwikkelen.

**Voorbeeld 7.1**

De Flying Doctors beschikt over vijf medische teams die uitgezonden kunnen worden naar drie Derde Wereld landen. De organisatie beoogt de totale effectiviteit van deze vijf teams te optimaliseren, waarbij voor deze effectiviteit de toename van de totale leeftijd, d.w.z. de gemiddelde leeftijd maal het aantal inwoners, wordt genomen. De effectiviteit van de verschillende toewijzingen volgt uit onderstaande tabel.

| | effectiviteit in 1000-tallen | | |
|---|---|---|---|
| aantal teams | land 1 | land 2 | land 3 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 45 | 20 | 50 |
| 2 | 70 | 45 | 70 |
| 3 | 90 | 75 | 80 |
| 4 | 105 | 110 | 100 |
| 5 | 120 | 150 | 130 |

[1] Zie Besliskunde 1

**Voorbeeld 7.2**

Een ruimtevaartorganisatie bereidt een ruimtevlucht voor. Er zijn drie basis-bemanningen die ieder eventueel uitgebreid kunnen worden met top-astronauten. Er zijn twee top-astronauten beschikbaar. De kans dat een vlucht met een bepaalde bemanning mislukt is af te leiden uit de volgende tabel.

| aantal toegevoegde | kans op een mislukking | | |
|---|---|---|---|
| top-astronauten | team 1 | team 2 | team 3 |
| 0 | 0.40 | 0.60 | 0.80 |
| 1 | 0.20 | 0.40 | 0.50 |
| 2 | 0.15 | 0.20 | 0.30 |

De ruimtevlucht is een succes als minstens één team zijn doel bereikt. Als alleen de drie basis-bemanningen worden uitgezonden dan is de kans op succes $1 - (0.40 \times 0.60 \times 0.80) = 0.808$. Aan welke basis-bemanningen kunnen de twee top-astronauten het beste worden toegevoegd om de kans op succes te maximaliseren?

**Voorbeeld 7.3**

Een beleggingsmaatschappij wil 10 miljoen euro gaan investeren in drie grote lange-termijn projecten. Daarnaast heeft de maatschappij de mogelijkheid om korte termijn investeringen te doen (project 4). Gegevens over kosten en rendement van deze investeringen volgen uit onderstaande tabel (de bedragen zijn in miljoenen euro's).

| investerings- | project 1 | | project 2 | | project 3 | | project 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| niveau | kosten | opbrengst | kosten | opbrengst | kosten | opbrengst | kosten | opbrengst |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | | | | | | | 1 | 2 |
| 2 | | | | | | | 2 | 4 |
| 3 | 3 | 8 | | | | | 3 | 6 |
| 4 | | | 4 | 9 | | | 4 | 8 |
| 5 | 5 | 13 | 5 | 13 | | | 5 | 10 |
| 6 | | | | | 6 | 17 | 6 | 12 |
| 7 | 7 | 18 | | | 7 | 18 | 7 | 14 |
| 8 | 8 | 19 | 8 | 18 | 8 | 21 | 8 | 16 |
| 9 | 9 | 21 | 9 | 19 | 9 | 22 | 9 | 18 |
| 10 | | | 10 | 23 | 10 | 24 | 10 | 20 |

Welk investeringsprogramma levert de hoogste winst (d.w.z. opbrengst - kosten) op?

**Voorbeeld 7.4**
Een bedrijf moet één exemplaar van een bepaald product maken met een uitzonderlijke hoge kwaliteit. Daartoe worden productieruns gedraaid. Na afloop van een productierun kan worden gecontroleerd of de run een exemplaar van de gewenste kwaliteit heeft opgeleverd.
De bedrijfsleider schat de kans dat een willekeurig exemplaar uit een productierun de gewenste kwaliteit oplevert op 50%. Als hij besluit om in een productierun $n$ exemplaren te maken zijn de kosten van deze productierun $300 + 100n$ euro. Er kunnen maximaal 3 runs worden gedraaid. Als na afloop van de derde run nog geen exemplaar van de gewenste kwaliteit is geproduceerd zijn er boetekosten van 1600 euro.
Welke productiestrategie minimaliseert de totale verwachte kosten?

**Voorbeeld 7.5**
Iemand speelt een spel waarbij hij zijn inzet òfwel kwijtraakt òfwel verdubbelt. De kans op kwijtraken is $\frac{1}{3}$ en op verdubbelen $\frac{2}{3}$. Hij start met 3 fiches, speelt 3 keer en wil uitkomen op 5 fiches. Welke strategie maximaliseert de kans om op 5 fiches uit te komen?

## 7.2 Terminologie

Problemen die met dynamische programmering opgelost kunnen worden hebben een aantal gemeenschappelijke eigenschappen. Deze worden hieronder besproken.

*Meerstapsbeslissingen*
Bij dynamische programmering wordt in een bepaald tijdsbestek sequentieel een aantal beslissingen genomen. Aldus wordt het probleem opgesplitst in een aantal stappen en per stap wordt een beslissing genomen.
*Toestanden*
In iedere stap bevindt het systeem zich in een bepaalde toestand. Deze toestanden moeten vooraf worden gedefinieerd. Daarbij is het aan te bevelen om de toestanden zo te definiëren dat slechts die informatie wordt opgenomen die relevant is voor het probleem en de te nemen beslissing.
*Toestandsovergangen*
Het gevolg van een beslissing in een bepaalde stap is onder andere dat het systeem zich bij de volgende stap van het beslissingstraject in een, in principe andere, toestand zal bevinden. Deze toestandsovergangen moeten bekend zijn.
*Optimaliteitsprincipe*
Gegeven de huidige toestand is een optimale strategie voor de resterende stappen onafhankelijk van de beslissingen die in het verleden zijn genomen. Met andere woorden: gegeven de toestand waarin men verkeert, kan men op ieder beslissingstijdstip doen alsof het beslissingsproces juist op dat moment begint.

*Recursiviteit*
Zij $s_n$ de toestand bij de $n$-de stap, en laat $X(s_n)$ de mogelijke beslissingen in deze toestand op dit tijdstip zijn. Dan kan een optimale beslissing (verondersteld is dat het om het minimaliseren van kosten gaat; maximaliseren gaat analoog) worden gevonden door het volgende éénstapsbeslissingsprobleem op te lossen:

$$f_n(s_n) = \min_{x_n \in X(s_n)} \{r(s_n, x_n) + f_{n+1}(s_{n+1})\},$$

waarbij $r(s_n, x_n)$ de kosten in de $n$-de stap zijn, gegeven toestand $s_n$ en beslissing $x_n$, $s_{n+1}$ de toestand in stap $n+1$ waarin het systeem vanuit toestand $s_n$ door beslissing $x_n$ overgaat en $f_{n+1}(s_{n+1})$ de optimale kosten vanaf stap $n+1$ zijn, gegeven toestand $s_{n+1}$ op dat moment.

Bij een $N$-stapsbeslissingsprobleem, uitgaande van begintoestand $s_1$, gaan we als volgt te werk.

**Algoritme 7.1** *Dynamische programmering*

1. Bereken $f_N(s_N)$ voor alle mogelijke toestanden $s_N$ met bijbehorende beslissingen $x_N^*(s_N)$.
2. Voor $n = N-1, N-2, \dots, 1$ doe:

   Bereken voor alle mogelijke toestanden $s_n$:

   $f_n(s_n) = \min_{x_n \in X(s_n)} \{r(s_n, x_n) + f_{n+1}(s_{n+1})\}$, met bijbehorende optimale beslissing $x_n^*(s_n) = \arg\min_{x_n \in X(s_n)} \{r(s_n, x_n) + f_{n+1}(s_{n+1})\}$.
3. Voor $n = 1, 2, \dots, N$:

   Neem de optimale beslissing $x_n^* = x_n^*(s_n)$ en bepaal $s_{n+1}$ m.b.v. $s_n$ en $x_n^*$.
4. De optimale strategie is $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)$ met totale minimale kosten $f_1(s_1)$.

We zullen deze aanpak nader uitwerken voor de in de inleiding gegeven vijf voorbeelden. We maken daarbij onderscheid tussen *deterministische* en *stochastische* modellen. Een model heet deterministisch als de toestand $s_{n+1}$, gegeven toestand $s_n$ en beslissing $x_n$, ondubbelzinnig (deterministisch) vastligt; als $s_{n+1}$ d.m.v. een kansverdeling, die in het algemeen afhankelijk is van $s_n$ en $x_n$, wordt bepaald, dan spreken we van stochastische dynamische programmering.

## 7.3 Deterministische dynamische programmering

**Voorbeeld 7.1 (vervolg)**
Zij $x_n$ het aantal teams dat aan land $n$ wordt toegekend en $p_n(x_n)$ de effectiviteit als $x_n$ teams aan land $n$ worden toegekend ($n = 1, 2, 3$).
Het probleem kan dan worden geformuleerd als het volgende optimaliseringsprobleem:

$$\max\{\sum_{n=1}^{3} p_n(x_n) \mid \sum_{n=1}^{3} x_n \leq 5;\ x_n \geq 0 \text{ en geheel}, 1 \leq n \leq 3\}..$$

De karakteristieken van dit probleem zijn:

a. Het aantal stappen is 3, waarbij in stap $n$ wordt bepaald hoeveel aan land $n$ wordt toegekend.

b. De toestandsverz. is in iedere stap $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, waarbij toestand $s_n$ in stap $n$ het aantal teams is dat nog moet worden toegewezen; $s_1 = 5$.

c. Toestandsovergangen: $s_{n+1} = s_n - x_n$ als in toestand $s_n$ beslissing $x_n$ wordt genomen.

d. Het optimaliseringsprobleem in stap $n$ luidt:

$f_3(s_3) = \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} \; p_3(x_3), \; s_3 = 0, 1, 2, 3, 4, 5;$

$f_n(s_n) = \max_{0 \leq x_n \leq s_n} \{p_n(x_n) + f_{n+1}(s_n - x_n)\}, \; s_n = 0, 1, 2, 3, 4, 5; n = 2, 1.$

Hieronder volgen de berekeningen.

$n = 3 : f_3(s_3) = \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} \; p_3(x_3) = p_3(s_3)$ en $x_3^*(s_3) = s_3, \; 0 \leq s_3 \leq 5.$

$n = 2 : f_2(s_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{p_2(x_2) + f_3(s_2 - x_2)\} = \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{p_2(x_2) + p_3(s_2 - x_2)\}, 0 \leq s_2 \leq 5.$

| | $x_2$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $f_2(s_2)$ | $x_2^*(s_2)$ |
| 0 | 0 | | | | | | 0 | 0 |
| 1 | 50 | 20 | | | | | 50 | 0 |
| 2 | 70 | 70 | 45 | | | | 70 | 0 |
| 3 | 80 | 90 | 95 | 75 | | | 95 | 2 |
| 4 | 100 | 100 | 115 | 125 | 110 | | 125 | 3 |
| 5 | 130 | 120 | 125 | 145 | 160 | 150 | 160 | 4 |

$n = 1 : f_1(5) = \max_{0 \leq x_1 \leq 5} \{p_1(x_1) + f_2(5 - x_1)\}.$

| | $x_1$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $f_1(s_1)$ | $x_1^*(s_1)$ |
| 5 | 160 | 170 | 165 | 160 | 155 | 120 | 170 | 1 |

De optimale oplossing is dus:

$s_1 = 5 \;\rightarrow\; x_1^* = 1 \;\rightarrow\; s_2 = 4 \;\rightarrow\; x_2^* = 3 \;\rightarrow\; s_3 = 1 \;\rightarrow\; x_3^* = 1$ en heeft waarde 170.

**Voorbeeld 7.2 (vervolg)**

Zij $x_n$ het aantal top-astronauten dat aan team $n$ wordt toegewezen en zij $p_n(x_n)$ de kans op mislukking van team $n$ als $x_n$ top-astronauten aan team $n$ worden toegewezen ($n = 1, 2, 3$).

Omdat kans op succes = 1 - kans op mislukking van alle 3 teams, kan het probleem worden geformuleerd als:

$$\min\{p_1(x_1) \cdot p_2(x_2) \cdot p_3(x_3) \mid \sum_{n=1}^{3} x_n = 2; \; x_n \geq 0 \text{ en geheel}, \; 1 \leq n \leq 3\}.$$

De karakteristieken van dit probleem zijn:

a. Het aantal stappen is 3, waarbij in stap $n$ wordt bepaald hoeveel aan topastronauten aan team $n$ worden toegekend.

b. De toestandsverz. is in iedere stap $\{0, 1, 2\}$, waarbij toestand $s_n$ in stap $n$ het aantal topastronauten is dat nog moet worden toegewezen; $s_1 = 2$.

c. Toestandsovergangen: $s_{n+1} = s_n - x_n$ als in toestand $s_n$ beslissing $x_n$ wordt genomen.

d. Het optimaliseringsprobleem in stap $n$ luidt:

$f_3(s_3) = \min_{0 \leq x_3 \leq s_3} \; p_3(x_3), \; s_3 = 0, 1, 2;$

$f_n(s_n) = \min_{0 \leq x_n \leq s_n} \{p_n(x_n) \cdot f_{n+1}(s_n - x_n)\}, \; s_n = 0, 1, 2; n = 2, 1.$

De berekeningen zijn in dit geval:

$n = 3 : f_3(s_3) = \min_{0 \leq x_3 \leq s_3} \; p_3(x_3) = p_3(s_3)$ en $x_3^*(s_3) = s_3, \; 0 \leq s_3 \leq 2.$

$n = 2 : f_2(s_2) = \min_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{p_2(x_2) \cdot f_3(s_2 - x_2)\} = min_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{p_2(x_2) \cdot p_3(s_2 - x_2)\}, 0 \leq s_2 \leq 2.$

| | $x_2$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_2$ | 0 | 1 | 2 | $f_2(s_2)$ | $x_2^*(s_2)$ |
| 0 | 0.48 | | | 0.48 | 0 |
| 1 | 0.30 | 0.32 | | 0.30 | 0 |
| 2 | 0.18 | 0.20 | 0.16 | 0.16 | 2 |

$n = 1 : f_1(2) = min_{0 \leq x_1 \leq 2} \{p_1(x_1) \cdot f_2(2 - x_1)\}.$

| | $x_1$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | 1 | 2 | $f_1(s_1)$ | $x_1^*(s_1)$ |
| 2 | 0.064 | 0.060 | 0.072 | 0.060 | 1 |

De optimale oplossing is dus:

$s_1 = 2 \;\rightarrow\; x_1^* = 1 \;\rightarrow\; s_2 = 1 \;\rightarrow\; x_2^* = 0 \;\rightarrow\; s_3 = 1 \;\rightarrow\; x_3^* = 1$ en heeft waarde 0.060.

De kans op succes onder de optimale strategie is dus 94%.

**Voorbeeld 7.3 (vervolg)**

Zij $x_n$ het bedrag dat aan project $n$ wordt toegewezen en zij $w_n(x_n)$ de opbrengst bij toekenning $x_n$ aan project $n, \; n = 1, 2, 3, 4$.

Analoog aan de vorige voorbeelden krijgen we de volgende berekeningen.

$n = 4 : f_4(s_4) = \max_{0 \leq x_4 \leq s_4} \; w_4(x_4) = p_4(s_4)$ en $x_4^*(s_4) = s_4, \; 0 \leq s_4 \leq 10.$

$n = 3 : f_3(s_3) = \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} \{w_3(x_3) + w_4(s_3 - x_3) \mid x_3 \in \{0, 6, 7, 8, 9, 10\}\}, 0 \leq s_3 \leq 10.$

| | $x_3$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_3$ | 0 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $f_3(s_3)$ | $x_3^*(s_3)$ |
| 0 | 0 | | | | | | 0 | 0 |
| 1 | 2 | | | | | | 2 | 0 |
| 2 | 4 | | | | | | 4 | 0 |
| 3 | 6 | | | | | | 6 | 0 |
| 4 | 8 | | | | | | 8 | 0 |
| 5 | 10 | | | | | | 10 | 0 |
| 6 | 12 | 17 | | | | | 17 | 6 |
| 7 | 14 | 19 | 18 | | | | 19 | 6 |
| 8 | 16 | 21 | 20 | 21 | | | 21 | 6 |
| 9 | 18 | 23 | 22 | 23 | 22 | | 23 | 6 |
| 10 | 20 | 25 | 24 | 25 | 24 | 24 | 25 | 6 |

$n = 2 : f_2(s_2) = max_{0 \le x_2 \le s_2}\{w_2(x_2) + f_3(s_2 - x_2) \mid x_2 \in \{0, 4, 5, 8, 9, 10\}\}, 0 \le s_2 \le 10.$

| | $x_2$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_2$ | 0 | 4 | 5 | 8 | 9 | 10 | $f_2(s_2)$ | $x_2^*(s_2)$ |
| 0 | 0 | | | | | | 0 | 0 |
| 1 | 2 | | | | | | 2 | 0 |
| 2 | 4 | | | | | | 4 | 0 |
| 3 | 6 | | | | | | 6 | 0 |
| 4 | 8 | 9 | | | | | 9 | 4 |
| 5 | 10 | 11 | 13 | | | | 13 | 5 |
| 6 | 17 | 13 | 15 | | | | 17 | 0 |
| 7 | 19 | 15 | 17 | | | | 19 | 0 |
| 8 | 21 | 17 | 19 | 18 | | | 21 | 0 |
| 9 | 23 | 19 | 21 | 20 | 19 | | 23 | 0 |
| 10 | 25 | 26 | 23 | 22 | 21 | 23 | 26 | 4 |

$n = 1 : f_1(10) = \min_{0 \le x_1 \le 2}\{w_1(x_1) + f_2(10 - x_1) \mid x_1 \in \{0, 3, 5, 7, 8, 9\}\}.$

| | $x_1$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | 3 | 5 | 7 | 8 | 9 | $f_1(s_1)$ | $x_1^*(s_1)$ |
| 10 | 26 | 27 | 26 | 24 | 23 | 23 | 27 | 3 |

De optimale oplossing is dus:
$s_1 = 10 \ \rightarrow \ x_1^* = 3 \ \rightarrow \ s_2 = 7 \ \rightarrow \ x_2^* = 0 \ \rightarrow \ s_3 = 7 \ \rightarrow \ x_3^* = 6 \ \rightarrow \ s_4 = 1 \ \rightarrow \ x_4^* = 1$ en heeft waarde 27.

**Vraag 7.1**

Een student heeft 7 weken de tijd voordat de tentamens in 4 vakken beginnen en wil deze tijd zo efficiënt mogelijk besteden. Hij wil aan ieder vak 1, 2, 3 of 4 weken besteden en de keuze zó maken dat de som van de te verwachten tentamencijfers zo hoog mogelijk is. Het verband tussen het aantal weken besteed aan een vak en het te verwachten cijfer staat in onderstaande tabel.

| aantal | verwachting van het cijfer | | | |
|---|---|---|---|---|
| studieweken | vak 1 | vak 2 | vak 3 | vak 4 |
| 1 | 3 | 5 | 2 | 6 |
| 2 | 5 | 5 | 4 | 7 |
| 3 | 6 | 6 | 7 | 9 |
| 4 | 7 | 9 | 8 | 9 |

Hoe zal de student deze 7 weken indelen?

## 7.4 Stochastische dynamische programmering

Het enige verschil met de vorige paragraaf is dat in plaats van kosten (of opbrengsten) het nu gaat om verwachte kosten (of opbrengsten).

**Voorbeeld 7.4 (vervolg)**
Zij $x_n$ het aantal exemplaren in run $n$, $n = 1, 2, 3$. Als toestanden nemen we twee mogelijkheden: een exemplaar van de gewenste kwaliteit is reeds wel ($s = 0$) of reeds niet ($s = 1$) geproduceerd. Als $s = 0$, dan hoeft er niet meer te worden geproduceerd ; als $s = 1$ en in run $n$ worden $x_n$ exemplaren gemaakt, dan is de volgende toestand weer $s = 1$ met kans $(\frac{1}{2})^{x_n}$. Laat

$$\begin{aligned}
p_n(x_n) &= \begin{cases} 0 & \text{als } x_n = 0 \\ 300 + 100x_n & \text{als } x_n \geq 1 \end{cases} \\
f_n(1) &= \text{minimale verwachte kosten vanaf run } n \text{ in toestand 1.} \\
&= \min_{x_n \geq 0}\{p_n(x_n) + (\tfrac{1}{2})^{x_n} f_{n+1}(1)\},\ n = 1, 2, 3. \\
f_4(1) &= 1600.
\end{aligned}$$

$n = 3 : f_3(1) = \min_{x_3 \geq 0}\{p_3(x_3) + (\frac{1}{2})^{x_3} \cdot 1600\}$.

| $x_3$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $f_3(1)$ | $x_3^*(1)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1600 | 1200 | 900 | 800 | 800 | 850 | 925 | 800 | 3 |

$n = 2 : f_2(1) = \min_{x_2 \geq 0}\{p_2(x_2) + (\frac{1}{2})^{x_2} \cdot f_3(1)\}$.

| $x_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $f_2(1)$ | $x_2^*(1)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 800 | 800 | 700 | 700 | 750 | 825 | 700 | 2 |

$n = 1 : f_1(1) = \min_{x_1 \geq 0}\{p_1(x_1) + (\frac{1}{2})^{x_1} \cdot f_2(1)\}$.

| $x_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_1(1)$ | $x_1^*(1)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 700 | 750 | 675 | 687,50 | 743,75 | 675 | 2 |

De optimale oplossing is dus: $x_1^* = 2,\ x_2^* = 2,\ x_3^* = 3$ met verwachte kosten 675.

**Voorbeeld 7.5 (vervolg)**
Zij $x_n$ het aantal fiches dat bij spel $n$ wordt ingezet. Als toestand $s_n$ nemen we het aantal fiches bij het begin van spel $n$. Laat $f_n(s_n)$ de maximale kans om op 5 fiches uit te komen als we $s_n$ fiches hebben bij het begin van spel $n$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} f_n(s_n) &= \max_{\{x_n \mid x_n \le \min\{s_n, 5-s_n\}\}}\{\tfrac{1}{3} f_{n+1}(s_n - x_n) + \tfrac{2}{3} f_{n+1}(s_n + x_n)\},\ n = 3,2,1;\ 0 \le s_n \le 5. \\ f_4(s_n) &= \begin{cases} 1 & \text{als } s_4 = 5 \\ 0 & \text{als } s_4 \ne 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Dit resulteert in de volgende berekeningen:

$n = 3$:

| | $x_3$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_3$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_3(s_3)$ | $x_3^*(s_3)$ |
| 0 | 0 | | | | | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | | | | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | | | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{2}{3}$ | | | $\frac{2}{3}$ | 2 |
| 4 | 0 | $\frac{2}{3}$ | | | | $\frac{2}{3}$ | 1 |
| 5 | 1 | | | | | 1 | 0 |

$n = 2$:

| | $x_2$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_2(s_2)$ | $x_2^*(s_2)$ |
| 0 | 0 | | | | | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | | | | 0 | 0 |
| 2 | 0 | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | | | $\frac{4}{9}$ | 1 |
| 3 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | | | $\frac{2}{3}$ | 0 |
| 4 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{8}{9}$ | | | | $\frac{8}{9}$ | 1 |
| 5 | 1 | | | | | 1 | 0 |

$n = 1$:

| | $x_1$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | 1 | 2 | $f_1(s_1)$ | $x_1^*(s_1)$ |
| 3 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{20}{27}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{20}{27}$ | 1 |

De optimale strategie is als volgt. Begin met inzet 1. Veronderstel dat dit spel wordt gewonnen, zodat de speler in het bezit is van 4 fiches. Zet nu 1 fiche in, zodat daarna òfwel 5 fiches (kans $\frac{2}{3}$) òfwel 3 fiches in bezit zijn; in het laatste geval 2 fiches inzetten, zodat dan met kans $\frac{2}{9}$ alsnog 5 fiches worden bereikt. Na de eerste keer winst wordt dus met kans $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$ het doel bereikt. Als de eerste keer wordt verloren (dus 2 fiches over), dan moet vervolgens twee keer worden gewonnen; zet eerst 1 fiche in en daarna 2, dus winstkans $\frac{4}{9}$. De kans om met deze strategie het doel te bereiken is dus $\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{27}$.

**Vraag 7.2** Beschouw de volgende modificatie van Voorbeeld 7.4: de kans dat een exemplaar de gewenste kwaliteit heeft is $\frac{2}{3}$ en er kunnen maximaal 2 runs worden uitgevoerd. Welke productiestrategie is optimaal en hoe groot is daarbij de kans op een goed exemplaar?

**Vraag 7.3** Neem aan dat in Voorbeeld 7.5 gestart wordt met 2 fiches en dat 5 keer mag worden gespeeld. Hoe groot is de kans om op 5 fiches uit te kunnen komen?

## 7.5 Opgaven

**Opgave 7.1** Beschouw een electronisch systeem bestaande uit 4 componenten, die ieder moeten functioneren wil het systeem kunnen werken.
De betrouwbaarheid van het systeem kan worden vergroot door in een of meer componenten parallel eenheden te schakelen. De volgende tabel geeft de betrouwbaarheid van een dergelijke constructie.

| aantal parallel eenheden | kans op goed functioneren | | | |
|---|---|---|---|---|
| | component 1 | component 2 | component 3 | component 4 |
| 1 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.5 |
| 2 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.7 |
| 3 | 0.8 | 0.8 | 0.9 | 0.9 |

De kosten om parallel-eenheden te plaatsen staan hieronder:

| aantal parallel eenheden | installatiekosten in euro's | | | |
|---|---|---|---|---|
| | component 1 | component 2 | component 3 | component 4 |
| 1 | 100 | 200 | 100 | 200 |
| 2 | 200 | 400 | 300 | 300 |
| 3 | 300 | 500 | 400 | 400 |

Er is 1.000 euro beschikbaar. Hoeveel parallel-eenheden worden in iedere component geplaatst om de betrouwbaarheid van het systeem te maximaliseren (zonder parallel-eenheid is de betrouwbaarheid van een component 0.4) en hoe groot is de maximale betrouwbaarheid?

**Opgave 7.2** Een bedrijf heeft twee electrische ingenieurs (EI's), twee mechanische ingenieurs (MI's) en een onbeperkt aantal monteurs (M's). Het bedrijf heeft 4 werkzaamheden uit te voeren: $A, B, C$ en $D$. In de volgende tabel staan voor iedere ploeg die een karwei kan uitvoeren wat de kosten ervan zijn.

| Karwei | M's | 1 MI | 2 MI's | 1 EI | 2 EI's | 1 MI en 1 EI |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 50 | 49 | 90 | 47 | 51 | 15 |
| B | 200 | 73 | 15 | 100 | 27 | 20 |
| C | 60 | 52 | 24 | 78 | 84 | 100 |
| D | 56 | 22 | 57 | 56 | 80 | 67 |

Iedere persoon kan bij hoogstens één werkzaamheid worden ingeschakeld.
Welke planning geeft voor het bedrijf de minste kosten?

**Opgave 7.3** Een reisbureau heeft voor een periode van 6 jaar een hotel gepacht in een wintersportcentrum. Met de plaatselijke kolenhandelaar is een contract afgesloten waarin wordt bepaald dat hij elk jaar een vaste hoeveelheid brandstof zal leveren tegen betaling van 30.000 euro per jaar. Verder is overeengekomen dat het reisbureau, in geval van ontevredenheid over de leveranties, aan het eind van elk jaar het contract éénzijdig mag opzeggen.
De kolenhandelaar heeft 3 soorten kolen. Levert de kolenhandelaar gedurende een jaar kolensoort $i$, dan is zijn winst $a_i$ en de kans op opzegging van het contract $p_i,\ i = 1, 2, 3$.
De kolenhandelaar vraagt zich af welke kolensoorten hij de komende 6 jaar zal leveren om zijn verwachte winst te maximaliseren. Overige gegevens:
$a_1 = 4.350,\ a_2 = 7.900,\ a_3 = 10.500;\ p_1 = 0.2,\ p_2 = 0.4,\ p_3 = 0.6.$

**Opgave 7.4** Een stad verwacht de komende 10 jaar een jaarlijkse groei van de vraag naar electriciteit. Deze verwachte groei is als volgt.

| Jaar | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Groei | 2 | 3 | 1 | 5 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Om aan de stijgende vraag te kunnen voldoen moet de installatie worden uitgebreid. Dit kan jaarlijks gebeuren tot maximaal 5 eenheden tegen de volgende kosten (in miljoen euro's):

| Uitbreiding | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Kosten | 20 | 38 | 55 | 70 | 80 |

Deze uitbreiding moet zó worden gepland dat steeds aan de vraag voldaan kan worden en dat de bijbehorende kosten over de periode van 10 jaar zo laag mogelijk zijn. Bij deze kosten moet een jaarlijkse rente van 10% worden verdisconteerd. Welke planning is optimaal?

**Opgave 7.5 (Groepsjagen door de Serengeti Leeuw)** Leeuwinnen jagen in groepen, in tegenstelling tot de meeste andere grote katachtigen. Blijkens waarnemingen jagen de leeuwinnen meestal in groepen van twee, maar grotere groepen van zelfs meer dan 6 leeuwinnen komen ook voor. Dit zou indiceren dat hun overlevingskans maximaal is bij groepsgrootte twee.
Kan dit via een Wiskundig model ook begrepen worden? Waarnemingen hebben de volgende gegevens opgeleverd voor het jagen op één van de geliefde prooidieren, namelijk zebra's. Zebra's hebben ongeveer 164 kg eetbare massa. Een volwassen leeuwin heeft 6 kg voedsel nodig per dag, en een maaginhoud van 30 kg. Elke jacht kost 1/2 kg aan energie. Een gevangen prooi wordt gelijkelijk over alle jagers verdeeld. Alles was diezelfde dag niet door de leeuwinnen wordt opgegeten, wordt door aaseters verschalkt.
De kans om een zebra te vangen hangt van het aantal jagers af. De getallen staan in onderstaande tabel.

| Groepsgrootte $n$ | Succeskans $p(n)$ |
|---|---|
| 1 | 0,15 |
| 2 | 0,33 |
| 3 | 0,37 |
| 4 | 0,40 |
| 5 | 0,42 |
| $\geq 6$ | 0,43 |

Ga ervan uit dat leeuwinnen elke dag hooguit één keer op jacht gaan. Elke dag staat een leeuwin voor de keuze of ze op jacht zal gaan, en zo ja, met hoeveel andere leeuwinnen zij op jacht zal gaan. Gevraagd is nu welke achtereenvolgende groepsgrootten de 30-daagse overlevingskans maximaliseren. Daartoe moet je de volgende vragen beantwoorden.

**a)** Modelleer dit probleem als een dynamisch programmeringsprobleem.

**b)** Programmeer dit in Matlab (of een equivalent pakket) en los het op. Als begintoestand mag je aannemen dat een leeuwin een maaginhoud van 5 kg, 10 kg, 20 kg, of 30 kg heeft. Geef de optimale strategie in tabelvorm, en de bijbehorende overlevingskans op dag 1. Hierbij moet je verzameling mogelijke toestanden beperken tot een eindige collectie. Motiveer je keuze.

**c)** Er zal blijken dat groepsgrootte 2 niet optimaal is. Verder analyse lijkt te suggereren dat het te maken heeft met het feit dat de hele roedel een gelijk aandeel in de prooi krijgt en niet alleen de jagers. Stel een roedel bevat 2 tot 12 leeuwinnen. Beargumenteer waarom het in dit geval gunstiger is om in groepjes van twee te gaan jagen.

**Opgave 7.6 Knapzakprobleem**

Gegeven zijn $n$ objecten $\{1, \dots, n\}$, met volumes $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ en waardes $\{w_1, \dots, w_n\}$. Gevraagd is een deelverzameling van de objecten met een totaal volume van *maximaal* $\phi$, die de totale waarde van de gekozen voorwerpen maximaliseert. Dit is een zogenaamd knapzakprobleem, dat met behulp van dynamisch programmeren kan worden opgelost.

De formulering als een DP-probleem zullen we bespreken aan de hand van het volgende voorbeeld:

| Voorwerp | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Volume | 5 | 1 | 3 | 2 | 6 |
| Waarde | 3 | 5 | 6 | 4 | 14 |

Het totaal beschikbare volume is $\phi = 6$. De optimale oplossing zie je natuurlijk direct.

**a)** Wat is de optimale oplossing?

Voor een systematische benadering, laat $W(i, j)$ de maximale waarde zijn, die verkregen kan worden door een knapzak met volume $j$ te vullen met een deelverzameling van de objecten $\{1, \dots, i\}$ (minder dan $j$ mag dus ook), voor $j = 0, 1, \dots, \phi$, $i = 1, \dots, n$. In het voorbeeld geldt $W(i, 0) = 0$, $i = 1, \dots, 5$, $W(1, 1) = 0 = W(1, 2) = \dots = W(1, 4)$,

$W(1,5) = 3 = W(1,6) = W(1,7)$, etc. Leid een recursieve relatie af voor $W(i,j)$ in termen van $W(i-1,l)$, $l \le j$.

**b)** Formuleer het algemene probleem als een DP probleem, met horizon $n$ en $V_n(j) = W(0,j) = 0$, $j = 0,1,\ldots,n$.

**c)** Bereken met behulp van het DP-algoritme de te kiezen objecten in het voorbeeld. Wat is de maximale waarde van de mee te nemen objecten?

**d)** Hoe verandert het algoritme als je meerdere (ongelimiteerd aantal) objecten van eenzelfde type mag kiezen?

# Bijlage A

# OPLOSSING VAN DE VRAGEN

## A.1 Hoofdstuk 5

**Vraag 5.1**

Veronderstel dat elke klant 1 euro betaalt voor iedere tijdseenheid die de klant in het systeem verblijft en nog niet geholpen wordt. De systeembeheerder ontvangt dan op de lange duur $L_q$ euro per tijdseenheid. Anderzijds is het gemiddelde bedrag dat een klant betaalt op de lange duur $W_q$ euro en per tijdseenheid komen gemiddeld $\lambda$ klanten binnen. Als de klanten bij binnenkomst moeten betalen, dan ontvangt de systeembeheerder gemiddeld dus $\lambda W_q$ euro per tijdseenheid. Hieruit volgt dat $L_q = \lambda W_q$.

**Vraag 5.2**

$L = \sum_n nP_n = 2.7;\ L_q = \sum_{n \geq s+1} (n-s)P_n = 0.95;\ \rho = \frac{L-L_q}{s} = 0.875.$

**Vraag 5.3**

Het model is een geboorte-sterfte proces met $\lambda_0 = 3,\ \lambda_1 = 3 \times \frac{2}{3} = 2,\ \lambda_2 = 3 \times \frac{1}{3},\ \lambda_n = 0,\ n \geq 3;$ $\mu_n = 2$ voor $n \geq 0$, zodat $C_0 = 1,\ C_1 = \frac{3}{2},\ C_2 = \frac{3}{2},\ C_3 = \frac{3}{4}$ en $C_n = 0$ voor $n \geq 4$.

$P_0 = \{1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\}^{-1} = \frac{4}{19} \ \rightarrow\ P_1 = \frac{6}{19},\ P_2 = \frac{6}{19},\ P_3 = \frac{3}{19}.$

De kans dat een klant weggaat is: $\frac{1}{3} \times P_1 + \frac{2}{3} \times P_2 + P_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{19} + \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{19} + \frac{3}{19} = \frac{9}{19}$. Omdat er per uur gemiddeld 3 klanten aankomen is het verlies per uur $3 \times \frac{9}{19} \times 20 = \frac{540}{19} \approx 28.42$ euro.

**Vraag 5.4**

Neem als tijdseenheid 1 minuut. Dan is $\lambda = \frac{3}{2}$ en $\mu = 2$.

De eerste eis luidt: $W_q \leq 1$ en de tweede eis is: $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \geq 0.9$.

Het eerste model is een $M/M/1$-wachrij met $\rho = \frac{3}{4}$, waarvoor geldt: $W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{3}{2}$.

Er is dus niet aan de eerste eis voldaan.

Beschouw vervolgens het $M/M/2$-model. Hierin is $\rho = \frac{3}{8}$.

$$\begin{aligned} P_0 &= \left\{1 + \frac{3}{4} + \frac{(3/4)^2}{2!} \cdot \frac{1}{5/8}\right\}^{-1} = \frac{5}{11}. \\ L_q &= \frac{(3/4)^2}{2!} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{1}{(5/8)^2} = \frac{27}{220}. \\ W_q &= \frac{L_q}{\lambda} = \frac{9}{110}. \end{aligned}$$

Aan de eerste voorwaarde is dus voldaan.

$P_0 = \frac{5}{11} \approx 0.45;\ P_1 = \frac{3}{4} \cdot P_0 \approx 0.34;\ P_2 = \frac{3}{8} \cdot P_1 \approx 0.12;\ P_3 = \frac{3}{8} \cdot P_2 \approx 0.05;\ P_4 = \frac{3}{8} \cdot P_3 \approx 0.02.$

$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \approx 0.97.$

Aan de tweede voorwaarde is ook voldaan.

Tenslotte beschouwen we het $M/M/2;\ FIFO/N/\infty$-model met $N = 4$.

$P_0 = \left\{1 + \frac{3}{4} + \frac{(3/4)^2}{2!} \cdot \{1 + \frac{3}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^2\right\}^{-1} \approx 0.46.$

$P_1 = \frac{3}{4} \cdot P_0 \approx 0.34;\ P_2 = \frac{3}{8} \cdot P_1 \approx 0.12;\ P_3 = \frac{3}{8} \cdot P_2 \approx 0.05;\ P_4 = \frac{3}{8} \cdot P_3 \approx 0.02$. $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \approx 0.99$. Twee loketten zijn dus voldoende (dit was ook in te zien via het vorige model: omdat nu de toestandsruimte beperkt is, is $P_0$ groter en daarom ook de andere $P_n$-waarden).

**Vraag 5.5**

Het oorspronkelijke model is een $M/M/1$-model. Neem als tijdseenheid 1 uur, dan is $\lambda = 9$ en $\mu = 10$, zodat $\rho = \frac{9}{10}$.

Voor dit model is $L = \frac{\rho}{1-\rho} = 9$ en $W = \frac{L}{\lambda} = 1$ uur.

a. In dit model is $\mu = 15$, zodat $\rho = \frac{9}{15} = 0.4$. Nu geldt: $L = \frac{\rho}{1-\rho} = 1.5$ en $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{6}$ uur, d.w.z. 10 minuten.

b. Dit is een $M/M/2$-model en $\rho = \frac{9}{20} = 0.45$. $L_q = \frac{(9/10)^2}{2!} \cdot \frac{0.45}{0.55^2} \cdot \{1 + 0.9 + \frac{0.9^2}{2!} \cdot \frac{1}{0.55}\}^{-1} = 0.23$. $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0.025$; $W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.125$, d.w.z. ongeveer 7.5 minuten.

c. Dit komt neer op twee $M/M/1$-wachtrij met $\lambda = 4.5$ en $\mu = 10$, zodat $\rho = 0.45$.

Er geldt: $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{9}{11}$ en $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2}{11}$ uur, d.w.z. 11 minuten.

**Vraag 5.6**

Dit is een $M/M/s;FIFO/N/N$-model met $\lambda_n = (N-n)\lambda,\ 0 \leq n \leq N$ en $\mu_n = \begin{cases} n\mu \text{ voor } 1 \leq n \leq s-1; \\ s\mu \text{ voor } s \leq n \leq N. \end{cases}$

De balansvergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned} (N\lambda)P_0 &= \mu P_1 \\ (N-n)\lambda P_n + n\mu P_n &= (N-n+1)\lambda P_{n-1} + (n+1)\mu P_{n+1},\ 1 \leq n \leq s-1 \\ (N-n)\lambda P_n + s\mu P_n &= (N-n+1)\lambda P_{n-1} + s\mu P_{n+1},\ s \leq n \leq N-1 \\ \lambda P_{N-1} &= s\mu P_N \end{aligned}$$

Als $N = 3,\ s = 2,\ \lambda = 1$ en $\mu = 2$, dan geeft dit: $\lambda_0 = 3,\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \mu_1 = 2,\ \mu_2 = 4,\ \mu_3 = 4$.

$C_0 = 1,\ C_1 = \frac{3}{2},\ C_2 = \frac{3}{4},\ C_3 = \frac{3}{16} \ \rightarrow\ P_0 = \{1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{16}\}^{-1} = \frac{16}{55}$.

De kans dat het werk volledig stil ligt is $P_3 = C_3 P_0 = \frac{3}{55}$.

**Vraag 5.7**

a. Als $z_i$ een meervoudig nulpunt is, dan is $\frac{d}{dz}\{1 - \rho \cdot \frac{z+z^2+\cdots+z^k}{k}\}_{z=z_i} = 0$, d.w.z.

$1 + 2z_i + 3z_i^2 + \cdots + kz_i^{k-1} = 0$. Vermenigvuldig met $(1-z_i)$: $1 + z_i + z_i^2 + \cdots + z_i^{k-1} - kz_i^k = 0$,

ofwel $1 + z_i + z_i^2 + \cdots + z_i^{k-1} = kz_i^k$, wat voor $|z_i| > 1$ onmogelijk is omdat

$|1 + z_i + z_i^2 + \cdots + z_i^{k-1}| \leq 1 + |z_i| + |z_i^2| + \cdots + |z_i^{k-1}| \leq 1 + (k-1)|z_i^k| < k|z_i^k|$.

b. Het is voldoende om aan te tonen dat $\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)\sum_{i=1}^k \frac{A_i}{(1-z/z_i)} = 1$,

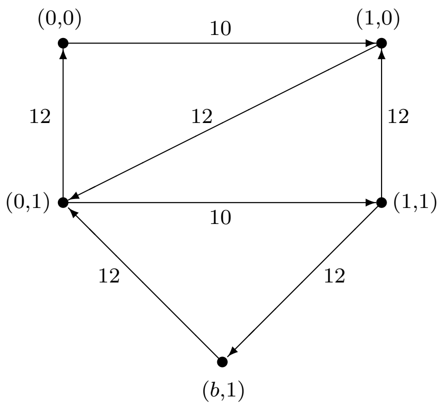
d.w.z. $\sum_{i=1}^k A_i \prod_{j \neq i}(1 - z/z_j) - 1 = 0$, ofwel $g(z) = \sum_{i=1}^k \frac{\prod_{j\neq i}(1-z/z_j)}{\prod_{j\neq i}(1-z_i/z_j)} - 1 = 0$ voor alle $z$.

$g(z) = 0$ voor alle $z_i,\ 1 \leq i \leq k$, want $\frac{\prod_{j\neq i}(1-z/z_j)}{\prod_{j\neq i}(1-z_i/z_j)} = \begin{cases} 0 & \text{voor } z = z_j,\ j \neq i \\ 1 & \text{voor } z = z_i \end{cases}$

De functie $g(z)$ is een polynoom van de graad hoogstens $k-1$ met $k$ nulpunten, dus deze is identiek aan de nulfunctie.

**Vraag 5.8**

We nemen de volgende toestandsverz. $S = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (b,1)\}$, waarbij $(i,j)$ betekent dat in station 1 $i$ klanten en in station $j$ klanten zijn en met toestand $(b,1)$ wordt bedoeld dat de klant in station 1 klaar is met zijn bediening en wacht om in station 2 te worden toegelaten. Omdat de resterende bedieningsduur bij station 2 in dat geval exponentieel is, is dit proces een continue Markov keten. Hieronder staat een plaatje van deze keten met de bijbehorende overgangen en snelheden.




a. De evenwichtsvergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned}
12P_{01} &= 10P_{00} \\
12P_{11} + 10P_{00} &= 12P_{10} \\
12P_{10} + 12P_{b1} &= 12P_{01} + 10P_{01} \\
10P_{01} &= 12P_{11} + 12P_{11} \\
12P_{11} &= 12P_{b1}
\end{aligned}$$

De oplossing van dit stelsel is:

$P_{00} = \frac{72}{267},\ P_{01} = \frac{60}{267},\ P_{10} = \frac{85}{267},\ P_{11} = \frac{25}{267},\ P_{b1} = \frac{25}{267}$.

b. De kans dat een aankomende klant het systeem niet binnenkomt is $P_{10} + P_{11} + P_{b1} = \frac{135}{267} = \frac{45}{89}$.

c. Het verwachte aantal klanten $L$ in het systeem is $P_{10} + P_{10} + 2P_{11} + 2P_{b1} = \frac{245}{267}$.

d. De kans dat een aankomende klant het systeem binnenkomt is $1 - \frac{45}{89} = \frac{44}{89}$, zodat de effectieve aankomstsnelheid $\overline{\lambda} = \frac{44}{89} \times 10 = \frac{440}{89}$. Hieruit volgt: $W = \frac{L}{\overline{\lambda}} = \frac{49}{264}$.

**Vraag 5.9**

Het stelsel (5.7.2) is: $\begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 10 + \frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_3 \\ \lambda_3 = 15 + \frac{1}{3}\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$ waaruit volgt dat $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 40$ en $\lambda_3 = \frac{170}{3}$.

$L = \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2} + \frac{\lambda_3}{\mu_3 - \lambda_3} = \frac{5}{10-5} + \frac{40}{50-40} + \frac{170/3}{100-170/3} = 1 + 4 + \frac{17}{13} = 6\frac{4}{13}$.

$W = \frac{L}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{82/13}{30} = \frac{41}{165}$.

## A.2 Hoofdstuk 6

### Vraag 6.1

$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i\overline{X}_n + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \overline{X}_n^2$.

Omdat $X_i \in \{0,1\}$ is $X_i^2 = X_i$ voor alle $i$ en omdat $\sum_{i=1}^n X_i = n\overline{X}_n$, geeft dit:

$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{2n}{n-1}\overline{X}_n^2 + \frac{n}{n-1}\overline{X}_n^2 = \frac{n}{n-1}\overline{X}_n - \frac{n}{n-1}\overline{X}_n^2 = \frac{n}{n-1}\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)$.

### Vraag 6.2

Zij $x_i =$ het verwachte aantal worpen voordat het spel uit is als $|M-K| = i,\ i = 0,1,2$.
Dan geldt:
$x_0 = 1 + x_1$
$x_1 = 1 + \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_2$
$x_2 = 1 + \frac{1}{2}x_1$
Dit stelsel heeft een unieke oplossing: $x_0 = 9,\ x_1 = 8,\ x_2 = 5$.

### Vraag 6.3

$\mathbb{E}\{T_n\} = n\cdot\mathbb{E}\{U_1\} = n\cdot\int_0^1 x\,dx = n\cdot\frac{1}{2} = \frac{n}{2}$.
$\mathsf{var}\{T_n\} = n\cdot\mathsf{var}\{U_1\} = n\big\{\,\mathbb{E}\{U_1^2\} - \{\mathbb{E}\{U_1\}\}^2\big\} = n\big\{\int_0^1 x^2\,dx - \frac{1}{4}\big\} = n\cdot\{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\} = \frac{n}{12}$.

### Vraag 6.4

a. $F(x) = \int_0^x 2y\,dy = x^2 \;\rightarrow\; u = x^2 \;\rightarrow\; x = \sqrt{u}$.

b. $F(x) = \int_{10}^{30} \frac{1}{20}\,dy = \frac{1}{20}(x-10) \;\rightarrow\; u = \frac{1}{20}(x-10) \;\rightarrow\; x = 10 + 20u$.

### Vraag 6.5

$x = \mu + \sigma\cdot\{\sum_{i=0}^{12} u_i - 6\} = 20 + 6\cdot\{7.186 - 6\} = 27.116$.

### Vraag 6.6

a. Dit is een $M/M/1$-wachtrij met $\lambda = 0.2,\ \mu = 0.25$, dus $\rho = 0.2/0.25 = 0.8$.

$L = \frac{\rho}{1-\rho} = 4,\ W = L/\lambda = 20,\ W_q = W - 1/\mu = 16$ en $L = \lambda W_q = 3.2$.

b. Voor de trekking van de tussentijden en de bedieningsduren nemen we:

$-\frac{1}{\lambda}\,ln\,u = -5\,ln\,u$ resp. $-\frac{1}{\mu}\,ln\,u = -4\,ln\,u$.

Dit geeft de volgende uitkomsten:

| klant | aselect getal | tussen-tijd | aselect getal | bedie-ningsduur | klant | aselect getal | tussen-tijd | aselect getal | bedie-ningsduur |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.09656 | 11.69 | 0.96657 | 0.14 | 7 | 0.60857 | 2.48 | 0.73479 | 1.23 |
| 2 | 0.64842 | 2.17 | 0.49222 | 2.84 | 8 | 0.33581 | 5.46 | 0.17360 | 7.00 |
| 3 | 0.49506 | 3.52 | 0.10145 | 9.15 | 9 | 0.30406 | 5.95 | 0.05842 | 11.36 |
| 4 | 0.48555 | 3.61 | 0.23505 | 5.79 | 10 | 0.72044 | 1.64 | 0.90764 | 0.39 |
| 5 | 0.90430 | 0.50 | 0.04180 | 12.70 | 11 | 0.07202 | 13.15 | 0.96341 | 0.15 |
| 6 | 0.24712 | 6.90 | 0.55799 | 2.33 | 12 | 0.23699 | 7.20 | 0.76172 | 1.09 |

In onderstaande tabel staat de simulatie uitgewerkt:

| tijdstip | gebeur-tenis | aantal in systeem | aantal in wachtrij | volgende aankomst | volgend vertrek |
|---|---|---|---|---|---|
| 00.00 | | 0 | 0 | 11.69 (1) | |
| 11.69 | A1 | 1 | 0 | 13.86 (2) | 11.83 (1) |
| 11.83 | V1 | 0 | 0 | | |
| 13.86 | A2 | 1 | 0 | 17.78 (3) | 16.70 (2) |
| 16.70 | V2 | 0 | 0 | | |
| 17.78 | A3 | 1 | 0 | 21.39 (4) | 26.93 (3) |
| 21.39 | A4 | 2 | 1 | 21.89 (5) | |
| 21.89 | A5 | 3 | 2 | 28.79 (6) | |
| 26.93 | V3 | 2 | 1 | | 32.72 (4) |
| 28.79 | A6 | 3 | 2 | 31.27 (7) | |
| 31.27 | A7 | 4 | 3 | 36.73 (8) | |
| 32.72 | V4 | 3 | 2 | | 45.42 (5) |
| 36.73 | A8 | 4 | 3 | 42.68 (9) | |
| 42.68 | A9 | 5 | 4 | 44.32 (10) | |
| 44.32 | A10 | 6 | 5 | 57.47 (11) | |
| 45.42 | V5 | 5 | 4 | | 47.75 (6) |
| 47.75 | V6 | 4 | 3 | | 48.98 (7) |
| 48.98 | V7 | 3 | 2 | | 55.98 (8) |
| 55.98 | V8 | 2 | 1 | | 67.34 (9) |
| 57.47 | A11 | 3 | 2 | 64.67 (12) | |
| 60.00 | | | | | |

In de intervallen $0.00 - 11.69$, $11.83 - 13.86$ en $16.70 - 17.78$ is de bediende vrij, dus $\rho = 1 - \frac{14.8}{60} = 0.75$.

$$\begin{aligned} 60L \;=\; & (11.83 - 11.69) \cdot 1 + (16.70 - 13.86) \cdot 1 + (21.39 - 17.78) \cdot 1 + (21.89 - 21.39) \cdot 2 + \\ & (26.93 - 21.89) \cdot 3 + (28.79 - 26.93) \cdot 2 + (31.27 - 28.79) \cdot 3 + (32.72 - 31.27) \cdot 4 + \\ & (36.73 - 32.72) \cdot 3 + (42.68 - 36.73) \cdot 4 + (44.32 - 42.68) \cdot 5 + (45.42 - 44.32) \cdot 6 + \\ & (47.75 - 45.42) \cdot 5 + (48.98 - 47.75) \cdot 4 + (55.98 - 48.98) \cdot 3 + (57.47 - 55.98) \cdot 2 + \\ & (60.00 - 57.47) \cdot 3 = 136.48. \end{aligned}$$

Hieruit volgt: $L = 136.48/60 = 2.27$.

$$\begin{aligned} 60L_q &= (21.89-21.39)\cdot 1 + (26.93-21.89)\cdot 2 + (28.79-26.93)\cdot 1 + (31.27-28.79)\cdot 2 + \\ & (32.72-31.27)\cdot 3 + (36.73-32.72)\cdot 2 + (42.68-36.73)\cdot 3 + (44.32-42.68)\cdot 4 + \\ & (45.42-44.32)\cdot 5 + (47.75-45.42)\cdot 4 + (48.98-47.75)\cdot 3 + (55.98-48.98)\cdot 2 + \\ & (57.47-55.98)\cdot 1 + (60.00-57.47)\cdot 2 = 93.24. \end{aligned}$$

Hieruit volgt: $L_q = 93.24/60 = 1.55$.

De volgende tabel geeft de gegevens voor $W$ en $W_q$:

| klant | tijd in systeem | tijd in wachtrij | klant | tijd in systeem | tijd in wachtrij |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.14 | 0.00 | 5 | 24.03 | 10.83 |
| 2 | 2.84 | 0.00 | 6 | 18.96 | 16.63 |
| 3 | 9.15 | 0.00 | 7 | 17.71 | 16.48 |
| 4 | 11.33 | 5.54 | 8 | 19.25 | 12.25 |

$W = \frac{1}{8}\{0.14 + 2.84 + 9.15 + 11.33 + 24.03 + 18.96 + 17.71 + 19.25\} = 12.93$.

$W_q = \frac{1}{8}\{0 + 0 + 0 + 5.54 + 10.83 + 16.63 + 16.48 + 12.25\} = 7.72$.

## TABEL I: KANSEN STANDAARD NORMALE VERDELING

In onderstaande tabel staan de getallen $\mathbb{P}[0 \leq \underline{z} \leq z]$ voor $z = 0.00, 0.01, \ldots, 3.09$.

Voorbeeld: $\mathbb{P}[0 \leq \underline{z} \leq 1.56] = 0.4406$ (zie de rij van 1.5 en de kolom van .06).

| $z$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .0000 | .0040 | .0080 | .0120 | .0160 | .0199 | .0239 | .0279 | .0319 | .0359 |
| 0.1 | .0398 | .0438 | .0478 | .0517 | .0557 | .0596 | .0636 | .0675 | .0714 | .0753 |
| 0.2 | .0793 | .0832 | .0871 | .0910 | .0948 | .0987 | .1026 | .1064 | .1103 | .1141 |
| 0.3 | .1179 | .1217 | .1255 | .1293 | .1331 | .1368 | .1406 | .1443 | .1480 | .1517 |
| 0.4 | .1554 | .1591 | .1628 | .1664 | .1700 | .1736 | .1772 | .1808 | .1844 | .1879 |
| 0.5 | .1915 | .1950 | .1985 | .2019 | .2054 | .2088 | .2123 | .2157 | .2190 | .2224 |
| 0.6 | .2257 | .2291 | .2324 | .2375 | .2389 | .2422 | .2454 | .2486 | .2517 | .2549 |
| 0.7 | .2580 | .2611 | .2642 | .2673 | .2704 | .2734 | .2764 | .2794 | .2823 | .2852 |
| 0.8 | .2881 | .2910 | .2939 | .2967 | .2995 | .3023 | .3051 | .3078 | .3106 | .3133 |
| 0.9 | .3159 | .3186 | .3212 | .3238 | .3264 | .3289 | .3315 | .3340 | .3365 | .3389 |
| 1.0 | .3413 | .3438 | .3461 | .3485 | .3508 | .3531 | .3554 | .3577 | .3599 | .3621 |
| 1.1 | .3643 | .3665 | .3686 | .3708 | .3729 | .3749 | .3770 | .3790 | .3810 | .3830 |
| 1.2 | .3849 | .3869 | .3888 | .3907 | .3925 | .3944 | .3962 | .3980 | .3997 | .4015 |
| 1.3 | .4032 | .4049 | .4066 | .4082 | .4099 | .4115 | .4131 | .4147 | .4162 | .4177 |
| 1.4 | .4191 | .4207 | .4222 | .4236 | .4251 | .4265 | .4279 | .4292 | .4306 | .4319 |
| 1.5 | .4332 | .4345 | .4357 | .4370 | .4382 | .4394 | .4406 | .4418 | .4429 | .4441 |
| 1.6 | .4452 | .4463 | .4474 | .4484 | .4495 | .4505 | .4515 | .4525 | .4535 | .4545 |
| 1.7 | .4554 | .4564 | .4573 | .4582 | .4591 | .4599 | .4608 | .4616 | .4625 | .4633 |
| 1.8 | .4641 | .4649 | .4656 | .4664 | .4671 | .4678 | .4686 | .4693 | .4699 | .4706 |
| 1.9 | .4713 | .4719 | .4726 | .4732 | .4738 | .4744 | .4750 | .4756 | .4761 | .4767 |
| 2.0 | .4772 | .4778 | .4783 | .4788 | .4793 | .4798 | .4805 | .4808 | .4812 | .4817 |
| 2.1 | .4821 | .4826 | .4830 | .4834 | .4838 | .4842 | .4846 | .4850 | .4854 | .4857 |
| 2.2 | .4861 | .4864 | .4868 | .4871 | .4875 | .4878 | .4881 | .4884 | .4887 | .4890 |
| 2.3 | .4893 | .4896 | .4898 | .4901 | .4904 | .4906 | .4909 | .4911 | .4913 | .4916 |
| 2.4 | .4918 | .4920 | .4922 | .4925 | .4927 | .4929 | .4931 | .4932 | .4934 | .4936 |
| 2.5 | .4938 | .4940 | .4941 | .4943 | .4945 | .4946 | .4948 | .4949 | .4951 | .4952 |
| 2.6 | .4953 | .4955 | .4956 | .4957 | .4959 | .4960 | .4961 | .4962 | .4963 | .4964 |
| 2.7 | .4965 | .4966 | .4967 | .4968 | .4969 | .4970 | .4971 | .4872 | .4973 | .4974 |
| 2.8 | .4974 | .4975 | .4976 | .4977 | .4977 | .4978 | .4979 | .4979 | .4980 | .4981 |
| 2.9 | .4981 | .4982 | .4982 | .4983 | .4984 | .4984 | .4985 | .4985 | .4986 | .4986 |
| 3.0 | .4987 | .4987 | .4987 | .4988 | .4988 | .4989 | .4989 | .4989 | .4990 | .4990 |

**TABEL II: OVERSCHRIJDINGSKANSEN VAN DE STUDENT-VERDELING**

Laat $Z(n)$ een Student-verdeling hebben met $n$ vrijheidsgraden.
In deze tabel staat $t_\alpha(n)$, waarbij $\mathbb{P}[Z(n) \geq t_\alpha(n)] = \alpha$ voor $\alpha = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01$ en $0.005$, en voor $n = 1, 2, \ldots, 30, 40, 60$ en $\infty$.
Voorbeeld: $t_{0.025}(14) = 2.145$, want $\mathbb{P}[Z(14) \geq 2.145] = 0.025$ (rij $n = 14$ en kolom $\alpha = 0.025$).

| | .1 | .05 | .025 | .01 | .005 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 |
| 2 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | 1.415 | 1.895 | 2.363 | 2.998 | 3.499 |
| 8 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 |
| 9 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 |
| 10 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | 1.363 | 1.797 | 2.201 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 |
| 13 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 |
| 14 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 |
| 15 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 |
| 16 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 |
| 17 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 |
| 18 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 |
| 19 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 |
| 23 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 |
| 26 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 |
| 27 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 |
| 28 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 |
| 29 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 |
| 30 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 |
| 40 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 |
| 60 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 |
| $\infty$ | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 |

**TABEL III: OVERSCHRIJDINGSKANSEN VAN DE CHI-KWADRAAT-VERDELING**

Laat $Z(n)$ een Chi-kwadraat-verdeling hebben met $n$ vrijheidsgraden.
In deze tabel staat $\chi^2_\alpha(n)$, waarbij $\mathbb{P}[Z(n) \geq \chi^2_\alpha(n)] = \alpha$ voor $\alpha = 0.990, 0.975, 0.950, 0.900, 0.500, 0.100, 0.050, 0.025$ en $0.010$, en voor $n = 1, 2, \ldots, 30, 40, 60$ en $80$.
Voorbeeld: $\chi^2_{0.025}(14) = 26.119$, want $\mathbb{P}[Z(14) \geq 26.119] = 0.025$ (rij $n = 14$ en kolom $\alpha = 0.025$).

| | .990 | .975 | .950 | .900 | .500 | 0.100 | 0.050 | 0.025 | 0.010 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.000 | 0.000 | 0.004 | 0.016 | 0.455 | 2.706 | 3.844 | 5.023 | 6.635 |
| 2 | 0.020 | 0.051 | 0.103 | 0.211 | 1.386 | 4.605 | 5.991 | 7.378 | 9.210 |
| 3 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 2.366 | 6.251 | 7.815 | 9.348 | 11.345 |
| 4 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 1.064 | 3.357 | 7.779 | 9.488 | 11.143 | 13.277 |
| 5 | 0.554 | 0.831 | 1.145 | 1.610 | 4.351 | 9.236 | 11.071 | 12.833 | 15.086 |
| 6 | 0.872 | 1.237 | 1.635 | 2.204 | 5.348 | 10.645 | 12.592 | 14.449 | 16.812 |
| 7 | 1.239 | 1.690 | 2.167 | 2.833 | 6.346 | 12.017 | 14.067 | 16.013 | 18.475 |
| 8 | 1.647 | 2.180 | 2.733 | 3.490 | 7.344 | 13.362 | 15.508 | 17.535 | 20.090 |
| 9 | 2.088 | 2.700 | 3.325 | 4.168 | 8.343 | 14.684 | 16.919 | 19.023 | 21.666 |
| 10 | 2.558 | 3.247 | 3.940 | 4.865 | 9.342 | 15.987 | 18.307 | 20.483 | 23.209 |
| 11 | 3.053 | 3.816 | 4.575 | 5.578 | 10.341 | 17.275 | 19.675 | 21.920 | 24.725 |
| 12 | 3.571 | 4.408 | 5.226 | 6.304 | 11.340 | 18.549 | 21.026 | 23.337 | 26.217 |
| 13 | 4.107 | 5.009 | 5.892 | 7.042 | 12.340 | 19.812 | 22.362 | 24.736 | 27.688 |
| 14 | 4.660 | 5.629 | 6.571 | 7.790 | 13.340 | 21.064 | 23.645 | 26.119 | 29.141 |
| 15 | 5.229 | 6.262 | 7.261 | 8.547 | 14.339 | 22.307 | 24.996 | 27.488 | 30.578 |
| 16 | 5.812 | 6.908 | 7.962 | 9.312 | 15.339 | 23.542 | 26.296 | 28.845 | 32.000 |
| 17 | 6.408 | 7.564 | 8.672 | 10.085 | 16.338 | 24.769 | 27.587 | 30.191 | 33.409 |
| 18 | 7.015 | 8.231 | 9.390 | 10.865 | 17.388 | 25.989 | 28.869 | 31.526 | 34.409 |
| 19 | 7.623 | 8.907 | 10.117 | 11.651 | 18.338 | 27.204 | 30.143 | 32.852 | 36.191 |
| 20 | 8.260 | 9.591 | 10.851 | 12.443 | 19.337 | 28.412 | 31.410 | 34.170 | 37.566 |
| 21 | 8.897 | 10.282 | 11.591 | 13.240 | 20.337 | 29.615 | 32.671 | 35.479 | 38.932 |
| 22 | 9.542 | 10.982 | 12.338 | 14.042 | 21.337 | 30.813 | 33.924 | 36.781 | 40.289 |
| 23 | 10.196 | 11.689 | 13.091 | 14.848 | 22.377 | 32.007 | 35.173 | 38.076 | 41.638 |
| 24 | 10.856 | 12.401 | 13.848 | 15.659 | 23.337 | 33.196 | 36.415 | 39.364 | 42.980 |
| 25 | 11.524 | 13.120 | 14.611 | 16.473 | 24.377 | 34.382 | 37.653 | 40.647 | 44.314 |
| 26 | 12.198 | 13.844 | 15.379 | 17.292 | 25.336 | 35.563 | 38.885 | 41.923 | 45.642 |
| 27 | 12.879 | 14.573 | 16.151 | 18.114 | 26.336 | 36.741 | 40.113 | 43.194 | 46.963 |
| 28 | 13.565 | 15.308 | 16.928 | 18.939 | 27.336 | 37.916 | 41.337 | 44.461 | 48.278 |
| 29 | 14.266 | 16.047 | 17.708 | 19.768 | 28.336 | 39.088 | 42.557 | 45.722 | 49.588 |
| 30 | 14.954 | 16.791 | 18.493 | 20.599 | 29.336 | 40.256 | 43.773 | 46.979 | 50.899 |
| 40 | 22.164 | 24.433 | 26.509 | 29.051 | 39.335 | 51.805 | 55.759 | 59.342 | 63.691 |
| 60 | 37.485 | 40.482 | 43.188 | 46.459 | 59.335 | 74.397 | 79.082 | 83.298 | 88.379 |
| 80 | 53.540 | 57.153 | 60.392 | 64.278 | 79.334 | 96.578 | 101.879 | 106.629 | 112.329 |

**TABEL IV: ASELECTE GETALLEN VAN 5 CIJFERS**

In onderstaande tabel staan 200 aselecte getallen van 5 cijfers (lees ze regel voor regel).

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 09656 | 96657 | 64842 | 49222 | 49506 | 10145 | 48555 | 23505 | 90430 | 04180 |
| 24712 | 55799 | 60857 | 73479 | 33581 | 17360 | 30406 | 05842 | 72044 | 90764 |
| 07202 | 96341 | 23699 | 76171 | 79126 | 04512 | 15426 | 15980 | 88898 | 06358 |
| 84575 | 46820 | 54083 | 43918 | 46989 | 05379 | 70682 | 43081 | 66171 | 38942 |
| 38144 | 87037 | 46626 | 70529 | 27918 | 34191 | 98668 | 33482 | 43998 | 75733 |
| 48048 | 56349 | 01986 | 29814 | 69800 | 91609 | 65374 | 22928 | 09704 | 59343 |
| 41936 | 58566 | 31276 | 19952 | 01352 | 18834 | 99596 | 09302 | 20087 | 19063 |
| 73391 | 9406 | 03822 | 81845 | 76158 | 41352 | 40596 | 14325 | 27020 | 17546 |
| 57580 | 08954 | 73554 | 28698 | 29022 | 11568 | 35668 | 59906 | 39557 | 27217 |
| 92646 | 41113 | 91411 | 52615 | 69302 | 86419 | 61224 | 41936 | 56939 | 27816 |
| 07118 | 12707 | 35622 | 81485 | 73354 | 49800 | 05648 | 60805 | 28898 | 60933 |
| 57842 | 57831 | 24130 | 75408 | 83784 | 64307 | 91620 | 40810 | 06539 | 70387 |
| 65078 | 44981 | 81009 | 33697 | 98324 | 46928 | 34198 | 96032 | 98426 | 77488 |
| 04294 | 96120 | 67629 | 55265 | 26248 | 40602 | 25566 | 12520 | 89785 | 93932 |
| 48381 | 06807 | 43775 | 09708 | 73199 | 53406 | 02910 | 83292 | 59249 | 18597 |
| 00459 | 62045 | 19249 | 67095 | 22752 | 24636 | 16965 | 91836 | 00582 | 46721 |
| 38824 | 81681 | 33323 | 64086 | 55970 | 04849 | 24819 | 20749 | 51711 | 86173 |
| 91465 | 22232 | 02907 | 01050 | 07121 | 53536 | 71070 | 26916 | 47620 | 01619 |
| 50874 | 00807 | 77751 | 73952 | 03073 | 69063 | 16894 | 85570 | 81746 | 07568 |
| 266644 | 75871 | 15618 | 50310 | 72610 | 66205 | 82640 | 88205 | 73453 | 90232 |

## TABEL V: ASELECTE TREKKINGEN UIT DE NORMALE VERDELING

In onderstaande tabel staan 240 aselecte trekkingen uit de standaard normale verdeling, afgerond op 4 cijfers na de komma (lees de getallen regel voor regel).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -0.3817 | 1.7309 | 0.1020 | 0.1781 | -2.1976 | 0.2756 | 0.8807 | -0.0815 |
| 0.9479 | 0.8028 | -1.4627 | -0.0787 | 0.9825 | -0.9018 | 0.1992 | 1.2393 |
| -0.8749 | -0.6252 | -0.1124 | 0.5100 | 0.3425 | -2.5194 | 0.7917 | -0.6435 |
| -0.8305 | 0.5140 | 1.0899 | 1.1004 | -0.3905 | -0.0751 | 0.2134 | 0.2637 |
| 0.0484 | 0.4427 | 0.7435 | 0.1946 | 1.1059 | -0.7671 | 1.6726 | -2.3685 |
| 1.9877 | -0.3445 | 0.2755 | 0.3305 | -1.2995 | 0.5384 | 0.8722 | -1.0991 |
| 0.5924 | -1.0997 | -0.8110 | 1.5247 | 0.6916 | -0.2860 | -0.0646 | 0.9836 |
| -0.8654 | 0.2936 | -0.6669 | -2.7949 | 1.2422 | 3.2860 | 1.8091 | -0.1199 |
| -0.9951 | -1.2879 | 1.2767 | -0.5209 | -0.4755 | -0.4369 | 1.7016 | -0.8645 |
| -0.5770 | 0.6983 | 0.9749 | 1.9517 | 0.5771 | -0.8968 | 1.0238 | -1.8262 |
| -2.2935 | -0.2379 | 0.4626 | -0.5964 | -0.8931 | 0.7290 | -1.7184 | -0.8512 |
| -1.0430 | -0.5693 | 0.7397 | 0.0578 | -0.8564 | 0.0379 | 1.1788 | -1.5122 |
| -1.2791 | 0.3306 | 0.9229 | 0.5169 | 0.2863 | -0.2170 | 0.7516 | -0.6194 |
| 0.7882 | -1.8403 | 1.1957 | -0.0081 | -0.3016 | 0.2164 | -0.9733 | -1.2938 |
| -1.1274 | -0.8729 | 0.6601 | -1.2445 | 1.2535 | 0.1542 | 0.3109 | -0.2190 |
| 1.0996 | -0.4117 | -0.3625 | -0.9987 | -1.0937 | 0.6487 | 2.0155 | 0.2707 |
| 1.5944 | -0.9749 | -0.0864 | -0.9278 | -0.3483 | -1.1420 | 0.0262 | 1.7378 |
| -0.0644 | 1.4343 | 0.9960 | 0.3269 | 0.2443 | 0.5603 | 1.9258 | 0.5536 |
| -1.0949 | 0.6032 | -1.4501 | 0.4264 | -0.6752 | 0.0338 | -0.4326 | -1.0698 |
| -1.6900 | 0.3524 | 0.5440 | -0.4991 | -0.2465 | 2.2318 | -1.3405 | -0.5392 |
| 1.6935 | 1.1556 | 0.2844 | 0.3268 | 0.1115 | -0.8292 | 1.0769 | -1.4394 |
| 0.4225 | -0.1589 | 0.2875 | 0.1739 | 0.3121 | -0.4311 | 0.3326 | -0.0997 |
| 0.1986 | 0.1609 | 0.4360 | 1.2305 | 0.3443 | 1.5596 | 0.3378 | -1.7689 |
| 2.3660 | -0.5133 | -0.6426 | 0.3270 | -0.6778 | 0.7603 | 0.5787 | 0.4870 |
| 0.4032 | 0.6988 | -0.3843 | 0.2841 | 1.5372 | -0.6841 | 0.7115 | -0.7106 |
| 0.7738 | 0.5707 | -0.0395 | 0.3851 | -0.1621 | -1.9569 | 1.6740 | 0.8431 |
| 1.2604 | -0.6320 | 0.9049 | -1.3804 | 0.7392 | 0.6756 | -0.4579 | -1.3956 |
| 0.3706 | -1.0403 | 0.8779 | -0.4107 | -0.4386 | 1.7108 | -0.4503 | -0.6238 |
| 0.5754 | 1.6640 | 0.0940 | 0.2241 | -0.4473 | 0.6381 | 0.7867 | -2.5127 |
| -0.3218 | 2.3873 | -0.6108 | 1.1309 | 1.8718 | 0.8949 | 0.0993 | -0.4548 |

## A.3 Hoofdstuk 7

**Vraag 7.1**

Zij $x_n$ het aantal dagen dat aan vak $n$ wordt besteed, $p_n(x_n)$ de schatting van het cijfer als $x_n$ dagen aan vak $n$ wordt besteed en $s$ het aantal dagen dat nog gestudeerd kan worden. Laat $f_n(s)$ de hoogst mogelijke som van de te verwachten tentamencijfers van de vakken $n, n+1, \ldots, 4$ zijn als er nog $s$ dagen gestudeerd kan worden. Dan is de recursie:

$$f_n(s) = \max\{p_n(x_n) + f_{n+1}(s - x_n) \mid 1 \leq x_n \leq \min(s, 4);\ s - x_n \geq 4 - n\}.$$

$n = 4:$

$f_4(s) = \max\{p_4(x_4) \mid 1 \leq x_4 \leq \min(s, 4)\}.$

| $s$ | $f_4(s)$ | $x_4^*$ |
|---|---|---|
| 1 | 6 | 1 |
| 2 | 7 | 2 |
| 3 | 9 | 3 |
| 4 | 9 | 4 |

$n = 3:$

$f_3(s) = \max\{p_3(x_3) + f_4(s - x_3)\},$

met $1 \leq x_3 \leq \min(s, 4);\ s - x_3 \geq 1\}.$

| | $x_3$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_3(s)$ | $x_3^*(s)$ |
| 2 | 8 | | | | 8 | 1 |
| 3 | 9 | 10 | | | 10 | 2 |
| 4 | 11 | 11 | 13 | | 13 | 3 |
| 5 | 11 | 11 | 14 | 14 | 14 | 3 |

$n = 2:$

$f_2(s) = \max\{p_2(x_2) + f_3(s - x_2)\},$

met $1 \leq x_2 \leq \min(s, 4);\ s - x_2 \geq 2\}.$

| | $x_2$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_2(s)$ | $x_2^*(s)$ |
| 3 | 13 | | | | 13 | 1 |
| 4 | 15 | 13 | | | 15 | 1 |
| 5 | 18 | 15 | 14 | | 18 | 1 |
| 6 | 19 | 18 | 16 | 17 | 19 | 1 |

$n = 1:$

$f_1(s) = \max\{p_1(x_1) + f_2(s - x_1)\},$

met $1 \leq x_1 \leq \min(s, 4);\ s - x_1 \geq 3\}.$

| | $x_1$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_1(s)$ | $x_1^*(s)$ |
| 7 | 22 | 23 | 21 | 20 | 23 | 2 |

De optimale oplossing is:

$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$ en $x_4 = 1$ met 23 als som van de te verwachten cijfers.

**Vraag 7.2**

Analoog aan Voorbeeld 7.4 krijgen we:

$$f_n(1) = \min_{x_n \geq 0}\{p_n(x_n) + (\tfrac{1}{3})^{x_n} f_{n+1}(1)\},\ n = 2, 1 \text{ met } f_3(1) = 1600.$$

$n = 2 : f_2(1) = \min_{x_2 \geq 0}\{p_2(x_2) + (\tfrac{1}{3})^{x_2} \cdot 1600\}.$

| $x_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_2(1)$ | $x_2^*(1)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1600 | 933 | 677 | 759 | 820 | 677 | 2 |

$n = 1 : f_1(1) = \min_{x_1 \geq 0}\{p_1(x_1) + (\tfrac{1}{3})^{x_1} \cdot f_2(1)\}.$

| $x_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_1(1)$ | $x_1^*(1)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 677 | 626 | 575 | 625 | 708 | 575 | 2 |

De optimale oplossing is dus: $x_1^* = 2$ en $x_2^* = 2$ met verwachte kosten 575 (de getallen zijn afgerond op gehele getallen). De kans op een goed exemplaar is $1 - \{\frac{1}{3}\}^4 = \frac{80}{81}$.

**Vraag 7.3**

Analoog aan Voorbeeld 7.5 krijgen we:

$$f_n(s) = max_{0 \leq x_n \leq s;\ x_n \leq 5-s} \{\tfrac{1}{3} f_{n+1}(s - x_n) + \tfrac{2}{3} f_{n+1}(s + x_n)\},\ 1 \leq n \leq 5 \text{ met } f_6(s) = \begin{cases} 1 & \text{als } s = 5 \\ 0 & \text{als } s \neq 5 \end{cases}$$

$n = 5:$

| $s$ | $f_5(s)$ | $x_5^*$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 |
| 3 | $\frac{2}{3}$ | 2 |
| 4 | $\frac{2}{3}$ | 1 |
| 5 | 1 | 0 |

$n = 4:$

| | $x_4$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_4(s)$ | $x_4^*(s)$ |
| 0 | 0 | | | | | 0 | 0 |
| 1 | 0 | | | | | 0 | 0 |
| 2 | 0 | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | | | $\frac{4}{9}$ | 1 |
| 3 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | | $\frac{2}{3}$ | 0 |
| 4 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{8}{9}$ | 1 |
| 5 | 1 | | | | | 1 | 0 |

$n = 3:$

| | $x_3$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_3(s)$ | $x_3^*(s)$ |
| 0 | 0 | | | | | 0 | 0 |
| 1 | 0 | $\frac{8}{27}$ | | | | $\frac{8}{27}$ | 1 |
| 2 | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{16}{27}$ | | | $\frac{16}{27}$ | 2 |
| 3 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{20}{27}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | | $\frac{20}{27}$ | 1 |
| 4 | $\frac{8}{9}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{22}{27}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{8}{9}$ | 0 |
| 5 | 1 | | | | | 1 | 0 |

$n = 2:$

| | $x_2$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_2(s)$ | $x_2^*(s)$ |
| 0 | 0 | | | | | 0 | 0 |
| 1 | $\frac{8}{27}$ | $\frac{32}{81}$ | | | | $\frac{32}{81}$ | 1 |
| 2 | $\frac{16}{27}$ | $\frac{16}{27}$ | $\frac{16}{27}$ | | | $\frac{16}{27}$ | 0 |
| 3 | $\frac{20}{27}$ | $\frac{64}{81}$ | $\frac{62}{81}$ | $\frac{2}{3}$ | | $\frac{64}{81}$ | 1 |
| 4 | $\frac{8}{9}$ | $\frac{74}{81}$ | $\frac{70}{81}$ | $\frac{62}{81}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{74}{81}$ | 1 |
| 5 | 1 | | | | | 1 | 0 |

$n = 1:$

| | $x_1$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_1(s)$ | $x_1^*(s)$ |
| 2 | $\frac{16}{27}$ | $\frac{160}{243}$ | $\frac{124}{243}$ | | | $\frac{160}{243}$ | 1 |

De kans om op 5 fiches uit te komen is dus $\frac{160}{243} \approx 0.658$. De optimale strategie is als volgt:
Zet eerst tweemaal 1 fiche in (als je tweemaal verliest is het spel uit). Bij 2x winst, dan zet je in derde ronde niets in, bij 1x winst in derde ronde inzet 2 (als je dan verliest is het spel uit). Na drie rondes heb je dan 4 fiches (of het spel is uit). In de vierde ronde zet je 1 fiche in: bij winst, dan ben je klaar en bij verlies zet je in de laatste ronde 2 in.

## Bijlage B

# Index

# Index