Huiswerk Besliskunde A (2016) - Week 1

De deadline van deze huiswerkset is vrijdag 23 September 2016. Het huiswerk mag handgeschreven ingeleverd worden, maar we accepteren alleen *individuele* submissies. U kunt uw uitwerkingen tijdens het college inleveren. Als dit niet lukt, stuurt u dan tijdig uw uitwerkingen via e-mail naar zowel mjhvdbergh 'at' gmail.com als maykestraatman 'at' gmail.com.

Indien u dit vak doet voor 6 EC maakt u de eerste vier opgaven van deze huiswerkset. Indien u dit vak doet voor 10 EC maakt u ook de resterende opgaven.

Vragen over het huiswerk of de stof kunnen gesteld worden aan Mark van den Bergh en Mayke Straatman tijdens de spreekuren of via e-mail (zie mail-adressen hierboven). In uitzonderlijke gevallen kunnen vragen ook bij het college aan de docent worden gesteld.

Opgaven voor 6 EC (4 in totaal)

Opgave 1 Maak Opgave 1.3 uit het dictaat (bladzijde 37).

Opgave 2 Maak Opgave 1.11 uit het dictaat.

Opgave 3 Beschouw de Markov-keten $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en de volgende overgangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Bereken op digitale wijze (dat wil zeggen met behulp van een mathematisch softwarepakket, calculator, Wolfram Alpha of iets dergelijks) numeriek de matrix $P^{(9)}$. Wat valt u op? Verklaar uw bevindingen in maximaal vijf zinnen (minder wordt toegejuicht!).
- Bereken eveneens $P^{(10)}$, en vergelijk deze met $P^{(9)}$. Verklaar de verschillen en de overeenkomsten tussen deze twee matrices in maximaal vijf zinnen.

Opgave 4 Beschouw de Markov-keten $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ met toestandsruimte $S = \{1, 2\}$ en de volgende overgangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

- Bepaal de eigenwaarden ζ_1 en ζ_2 van P.
- Bepaal de bijbehorende twee linker eigenvectoren ν_1 en ν_2.

Laat $\mu^{(n)}$ een twee-dimensionale vector zijn, waarvan het i-de element gelijk is aan $\mathbb{P}(X_n = i)$. We nemen aan dat op tijdstip 0 de keten zich in toestand 1 bevindt. Met andere woorden, $\mu^{(0)} = (\mathbb{P}(X_0 = 1), \mathbb{P}(X_0 = 2)) = (1, 0)$.

- Beredeneer waarom geldt dat $\mu^{(n)} = \mu^{(0)} P^{(n)}$.

- Druk $\mu^{(0)}$ uit in de basis van de twee eigenvectoren. Met andere woorden, bepaal de constanten c_1 en c_2 in de uitdrukking $\mu^{(0)} = c_1\nu_1 + c_2\nu_2$.
- Beredeneer waarom geldt dat $\mu^{(n)} = c_1\zeta_1^n\nu_1 + c_2\zeta_2^n\nu_2$.
- Gebruik alle voorgaande antwoorden om te laten zien dat $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n$. Leid ook een expressie af voor $\mathbb{P}(X_n = 2)$.
- Bereken de vector $\lim_{n\to\infty} \mu^{(n)}$.

Opgaven voor 10 EC (7 in totaal)

Opgaven 1-4 Zie hierboven.

Opgave 5
Een machine wordt wekelijks geïnspecteerd en hierbij wordt de staat van de machine bekeken. Een machine kan als *nieuw, goed, redelijk* en *slecht* worden beoordeeld. Een nieuwe machine is na een week met kans 0.7 nog steeds nieuw, met kans 0.2 goed en met kans 0.1 redelijk. Een goede machine is na een week met kans 0.6 nog steeds goed, met kans 0.2 redelijk en met kans 0.2 slecht. Een redelijke machine is na een week met kans 0.5 nog steeds redelijk en met kans 0.5 slecht. Een slechte machine wordt gerepareerd. De reparatie duurt een week, en na de reparatie is de machine weer als nieuw.

Formuleer een Markov keten die de toestand van de machine beschrijft, en geef de overgangskansen. Geef ook de geassocieerde gewogen gerichte digraaf bij deze Markov keten.

Opgave 6 Maak Opgave 1.1 uit het dictaat.

Opgave 7 Laat $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ een tijd-homogene discrete Markov keten zijn met toestandsruimte $S = \{1, 2, \ldots, N\}$. Laat verder $N_j(n)$ het aantal keren zijn dat de Markov-keten toestand j bezoekt in de tijdspanne $\{0, \ldots, n\}$ voor $n \geq 0$. Met andere woorden, $N_j(n) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i=j\}}$. Verder, laat $M(n)$ een $N \times N$-matrix zijn, met elementen $(M(n))_{i,j} = \mathbb{E}[N_j(n) \mid X_0 = i]$.

- Bewijs dat geldt dat $M(n) = \sum_{i=0}^{n} P^i$, waarbij P de een-staps overgangsmatrix is van de Markov keten $\{X_t, t \geq 0\}$.
- Beschouw opgave 1 (ofwel Opgave 1.3 uit het dictaat) en neem aan dat $N = 3$ en $X_0 = 2$. Bereken $\mathbb{P}(X_2 = i)$ voor alle $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ door gebruik te maken van de Chapman-Kolmogorov vergelijkingen (in matrix-vorm).
- Bereken met behulp van de net bewezen stelling de verwachte hoeveelheid tijd in het tijdvak [2,5) dat er zich 3 witte ballen in de eerste vaas bevinden.