

## Huiswerk Besliskunde A (2016) - Week 10

De deadline van deze huiswerkset is vrijdag 9 december 2016. Het huiswerk mag handgeschreven ingeleverd worden, maar we accepteren alleen *individuele* submissions. U kunt uw uitwerkingen tijdens het college inleveren. Als dit niet lukt, stuurt u dan tijdig uw uitwerkingen via e-mail naar zowel mjhvdbergh 'at' gmail.com als maykestraatman 'at' gmail.com.

### Opgaven voor 6 EC (3 in totaal)

**Opgave 1** In het college hebben we voor een M/G/1 wachtrijmodel de kansgenererende functie (GF) van de verdeling van het aantal klanten in het systeem op een arbitrair moment in stationariteit, afgeleid:

$$\tilde{L}(z) = \frac{(1 - \rho)\tilde{B}(\lambda(1 - z))(1 - z)}{\tilde{B}(\lambda(1 - z)) - z}.$$

a) Leid hieruit af dat

$$L = \frac{\lambda^2 \mathbb{E}[B^2]}{2(1 - \rho)} + \rho,$$

en geef op basis hiervan ook uitdrukkingen voor  $L_q$ ,  $W$  en  $W_q$ .

- b) Maak, gebruik makende van het antwoord bij a), Opgave 5.12 uit het dictaat, waarbij een negatief exponentiële verdeling op een exponentiële verdeling gedoeld wordt, en  $\tau$  de verwachte bedieningstijd is.
- c) Kunnen uit de GF bij a) ook hogere momenten van de verdeling van het aantal klanten in het systeem op een arbitrair moment in stationariteit afgeleiden worden? Zo ja, hoeveel? Zo nee, waarom niet? Licht uw antwoord kort toe.
- d) Toon aan dat de Laplace-Stieltjes transformatie (LST)  $\tilde{W}(s)$  van de (verdeling van de) verblijftijd van een willekeurige klant in stationariteit voldoet aan de vergelijking

$$\tilde{W}(\lambda(1 - z)) = \tilde{L}(z),$$

indien we te maken hebben met een FIFO bedieningsvolgorde. Dit wordt ook wel de distributionele vorm van de stelling van Little genoemd.

*Hint:*

- \* *Herinnert u zich dat we bij het college gezien hebben dat de verdeling van het aantal klanten in het systeem op een arbitrair moment in stationariteit overeenkomt met de verdeling van het aantal klanten dat een in stationariteit vertrekkende klant achterlaat in het systeem.*
- \* *Beredeneer dat de klanten die een vertrekkende klant achterlaat, precies die klanten zijn die tijdens de verblijftijd van de vertrekkende klant zijn aangekomen.*
- \* *Combineer deze twee zaken om de gevraagde stelling te concluderen.*

- e) Verifieer met het resultaat van c) de stelling van Little zoals we hem in het college gezien hebben:  $L = \lambda W$ .

**Opgave 2** Maak opgave 7.2 uit het dictaat.

**Opgave 3** Maak opgave 7.5 uit het dictaat. U bent vrij in het kiezen van het softwarepakket bij b), maar levert u alstublieft de broncode als bijlage van uw huiswerk in.

## Opgaven voor 10 EC (6 in totaal)

**Opgaven 1-3** Zie hierboven.

**Opgave 4** Beschouw een M/G/1 wachtrij, waarbij de aankomstintensiteit gelijk is aan  $\lambda$ . Laat  $\tilde{B}(s)$  de Laplace-Stieltjes transformatie (LST) representeren van de verdeling van de bedieningsduur  $B$ . Laat vervolgens  $\tilde{\chi}(z)$  de kansgenererende functie zijn van de verdeling van het aantal aankomende klanten tijdens een volledige busy period terwijl deze gaande is (dus de klant die de busy period induceert rekenen we hier niet bij).

a) Toon aan dat geldt dat

$$\tilde{\chi}(z) = \tilde{B}(\lambda(1 - z) + \lambda(1 - \tilde{\chi}(z))).$$

b) Leid uit deze functionaalvergelijking de verwachting en de variantie af van het aantal aankomende klanten tijdens een volledige busy period in termen van momenten van de servicetijdverdeling.

**Opgave 5** Maak Opgave 7.4 uit het dictaat.

**Opgave 6** Maak Opgave 7.6 uit het dictaat.