Huiswerk Besliskunde A (2016) - Week 4

De deadline van deze huiswerkset is vrijdag 21 oktober 2016. Het huiswerk mag handgeschreven ingeleverd worden, maar we accepteren alleen *individuele* submissies. U kunt uw uitwerkingen tijdens het college inleveren. Als dit niet lukt, stuurt u dan tijdig uw uitwerkingen via e-mail naar zowel mjhvdbergh 'at' gmail.com als maykestraatman 'at' gmail.com.

Opgaven voor 6 EC (4 in totaal)

Opgave 1 Laat X een binomiaal verdeelde stochast zijn met parameters n en p.

a) Bepaal de genererende functie (GF) behorend bij X.

b) Maak gebruik van uw antwoord bij a) om uitdrukkingen voor $\mathbb{E}[X]$ en $\mathbb{E}[X(X-1)]$ te bepalen.

c) Gebruik uw antwoord bij b) om de variantie van X te bepalen.

Opgave 2 Laat W een exponentieel verdeelde stochast zijn met parameter λ. Herinnert u zich dat de Laplace-Stieltjes transformatie (LST) behorend bij W wordt gegeven door $\mathbb{E}[e^{-sW}] = \frac{\lambda}{\lambda+s}$ voor $s \in \{c \in \mathbb{C} : \Re(c) \geq 0\}$.

a) Laat X een niet-negatieve continue stochast zijn waarvoor geldt dat $\mathbb{E}[e^{-sX}] = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_i+s}$ met $\lambda_i > 0$ voor $i = 1, \ldots, n$. Karakteriseer de stochast X. U kunt volstaan met een **korte** toelichting.

b) Laat Y een niet-negatieve continue stochast zijn waarvoor geldt dat $\mathbb{E}[e^{-sY}] = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i+s}$ met $\lambda_i, p_i > 0$ voor $i = 1, \ldots, n$ en $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Karakteriseer de stochast Y. U kunt volstaan met een **korte** toelichting.

   Hint: beredeneer dat als $\mathbb{E}[e^{-sC}] = p\mathbb{E}[e^{-sA}] + (1-p)\mathbb{E}[e^{-sB}]$ voor niet-negatieve continue stochasten A, B, C en $0 \leq p \leq 1$, dat dan geldt dat $\mathbb{P}(C \leq x) = p\mathbb{P}(A \leq x) + (1-p)\mathbb{P}(B \leq x)$.

Opgave 3 Laat $X_1, X_2, \ldots$ onafhankelijke niet-negatieve stochasten zijn, ieder met LST $\tilde{X}(s)$, en laat, onafhankelijk hiervan, N een niet-negatieve geheeltallige stochast zijn met GF $\tilde{N}(z)$. Definieer vervolgens $Z := \sum_{i=1}^{N} X_i$, en laat $\tilde{Z}(s)$ de LST zijn van (de verdelingsfunctie van) Z. Tijdens het college hebben we reeds gezien dat

$$\tilde{Z}(s) = \tilde{N}(\tilde{X}(s)).$$

a) Gebruik deze vergelijking om aan te tonen dat $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1]$.

b) Geef **kort en bondig** aan hoe u expressies zou kunnen verkrijgen voor $\mathbb{E}[Z^2]$ en $\mathbb{E}[Z^3]$ in termen van de momenten van N en X_1. U hoeft deze expressies niet daadwerkelijk af te leiden.

Opgave 4

Laat $\delta > 1$ gegeven zijn, en laat $C_1, C_2, \ldots$ i.i.d. exponentieel verdeelde stochasten zijn met parameter δ. Laat D een stochast zijn die exponentieel verdeeld is met parameter $\delta - 1$ en onafhankelijk is van $C_1, C_2, \ldots$. Bovendien, laat, voor elke $t > 0$, J_t een Poisson verdeelde stochast met parameter t representeren die onafhankelijk is van D en $C_1, C_2, \ldots$.

a) De stochast J_D is Poisson verdeeld met een parameter die zelf stochastisch is en verdeeld is als D. Laat zien dat de GF $\tilde{J}_D(z)$ behorend bij J_D gegeven is door $\tilde{J}_D(z) = \frac{\delta-1}{\delta-z}$.

Hint: conditioneer op de eventualiteit $D = t$ om een uitdrukking voor de GF behorend bij J_D te verkrijgen in termen van de GF behorend bij J_t (waarbij t deterministisch is) en de dichtheidsfunctie van D.

b) Zij $S = \sum_{i=1}^{J_D+1} C_i$. Laat zien dat S exponentieel verdeeld is met parameter $\delta - 1$, door gebruik te maken van de machinerie van GF's en LST's, en uw antwoord bij a).

Opgaven voor 10 EC (6 in totaal)

Opgaven 1-4 Zie hierboven.

Opgave 5 Laat X_n een Erlang$(n, n\lambda)$ verdeelde stochast zijn met verdelingsfunctie $F_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \ldots$. Laat X een gedegenereerde stochast zijn, die eigenlijk de constante $\frac{1}{\lambda}$ is. Met andere woorden: $\mathbb{P}(X = \frac{1}{\lambda}) = 1$.

a) Geef de LST's van X_n voor $n = 1, 2, \ldots$ en de LST van X.

b) Laat met behulp van de convergentiestelling van Feller zien dat $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ voor $x \geq 0$.

Opgave 6 Tijdens het college hebben we ons beperkt tot LST's van niet-negatieve stochastische variabelen. Echter, voor een stochast X met een dichtheidsfunctie $f_X(t)$ voor $-\infty < t < \infty$ wordt de LST gegeven door

$$\tilde{X}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f_X(t) dt.$$

a) Stel dat X standaard-normaal verdeeld is. Laat zien dat $\tilde{X}(s) = e^{s^2/2}$ in dat geval.

De convergentiestelling van Feller geldt ook voor dit ruimer gedefinieerde geval. Met andere woorden, als de LST's $\tilde{X}_n(s)$ van (de verdelingsfuncties van) een rij continue stochasten $X_1, X_2, \ldots$ (met kansmassa op $(-\infty, \infty)$) convergeert naar een functie $\tilde{X}(s)$ als $n \to \infty$, dan convergeren de verdelingsfuncties $F_{X_n}(t)$ naar een verdelingsfunctie $F_X(t)$ van een bijbehorende stochast X, en is $\tilde{X}(s)$ bovendien de LST van $F_X(t)$.

Met deze convergentiestelling gaan we een (zwakke vorm van) de centrale limietstelling bewijzen. Laat $X_1, X_2, \ldots$ een reeks i.i.d. verdeelde stochasten zijn met verwachting μ, variantie σ^2 en LST $\tilde{X}(s)$. Definieer $S_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, met LST $\tilde{S}_N(s) = \mathbb{E}[e^{-sS_n}]$. Dan zegt de te bewijzen stelling dat

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \leq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2} dx.$$

In woorden: de verdelingsfunctie van S_n convergeert naar die van een standaard-normale verdeling als $n \to \infty$.

b) In het geval dat $\mu = 0$ en $\sigma^2 = 1$, laat zien dat $\tilde{S}_n(s) = (1 - \frac{s\mathbb{E}[X]}{\sqrt{n}} + \frac{s^2\mathbb{E}[X^2]}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n\sqrt{n}}))^n$, waarbij $\mathcal{O}(\frac{1}{n\sqrt{n}})$ duidt op een functie $g(n)$ waarvoor geldt dat $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{1/n\sqrt{n}} = c$ voor een zekere constante c.

c) Gegeven uw antwoorden op a) en b), bewijs de bovenstaande (zwakke) vorm van de centrale limietstelling voor het geval $\mu = 0$ en $\sigma^2 = 1$ door gebruik te maken van de convergentiestelling van Feller.

d) Generaliseer het bewijs gegeven bij c) voor algemene $\mu > 0$ en $\sigma > 0$.