

Huiswerk Besliskunde A (2016) - Week 6

De deadline van deze huiswerkset is vrijdag 4 november 2016. Het huiswerk mag handgeschreven ingeleverd worden, maar we accepteren alleen *individuele* submissions. U kunt uw uitwerkingen tijdens het college inleveren. Als dit niet lukt, stuurt u dan tijdig uw uitwerkingen via e-mail naar zowel mjhvdbergh 'at' gmail.com als maykestraatman 'at' gmail.com.

Opgaven voor 6 EC (4 in totaal)

Opgave 1 Maak opgave 2.6 uit het dictaat. Realiseert u zich bij het maken van deze opgave dat $\frac{R(t)}{t}$ geschreven kan worden als $\frac{R(t)}{N(t)} \frac{N(t)}{t}$.

Opgave 2 Laat $\{X_n, n \geq 0\}$ een (discrete-tijd) Markov keten zijn met toestandsruimte $S = \{1, 2, \dots, n\}$ en occupatieverdeling $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$. Het is gegeven dat $X_0 = 1$. Laat $S_n = \inf\{j : \sum_{i=0}^{j-1} \mathbb{1}_{\{X_i=1\}} = n\}$ het vroegste tijdstip zijn dat de Markov-keten zich precies n tijdseenheden in toestand 1 heeft opgehouden. Verder is gegeven dat $N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}$.

- Beredeneer dat $\{N(t), t \geq 0\}$ een vernieuwingsproces is.
- Gebruik uw kennis van vernieuwingstheorie nu om aan te tonen dat

$$\pi_1 = \frac{1}{\mu_{11}},$$

waarbij μ_{11} de verwachte terugkeertijd is van de discrete-tijd Markov keten in toestand 1, zoals beschreven in Sectie 1.2.3 van het dictaat.

- Beargumenteer kort waarom hieruit volgt dat geldt $\pi_i = \frac{1}{\mu_{ii}}$.

Opgave 3 Maak opgave 3.2 uit het dictaat.

Opgave 4 Geef van elk van de volgende uitspraken aan of ze waar zijn of niet waar. Beargumenteer bij elke uitspraak **kort** uw antwoord. (Uw antwoord wordt enkel goedgekeurd bij een correcte beargumentatie.)

- Een Poisson proces is zowel een vernieuwingsproces als een Markov proces.
- Een stochastisch proces dat zowel een vernieuwingsproces als een Markov proces is, hoeft geen Poisson proces te zijn.
- Laat $\{X(t), t \geq 0\}$ een Markov proces zijn met een toestandsruimte S , waarbij gegeven is dat $X(0) = i$ voor een bepaalde $i \in S$ en waarbij S_n het tijdstip representeert van de n -de keer na tijdstip 0 dat het Markov proces transitioneert naar toestand i ($S_0 = 0$). Als $N(t) = \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}$, dan is $\{N(t), t \geq 0\}$ een vernieuwingsproces.
- Laat $\{X(t), t \geq 0\}$ een Markov proces zijn met een toestandsruimte S , waarbij gegeven is dat $X(0) = i$ voor een bepaalde $i \in S$. Als $N(t) = \sum_{j=1}^{\lfloor t \rfloor} \mathbb{1}_{\{X(j)=i\}}$, dan is $\{N(t), t \geq 0\}$ een vernieuwingsproces.

Opgaven voor 10 EC (7 in totaal)

Opgaven 1-4 Zie hierboven.

Opgave 5 Maak opgave 2.3 uit het dictaat.

Opgave 6 Maak opgave 2.11 uit het dictaat.

Opgave 7 Maak opgave 3.1 uit het dictaat.