Genererende functies en Laplace transformaties
Auteur: Prof. dr. ir. O.J. Boxma (TU Eindhoven)

Genererende functies

We bespreken kort de belangrijkste eigenschappen van genererende functies, en bespreken daarna haar tegenhanger: de Laplace transformatie van een continue (kansverdeling van een) stochastische variabele.
Zij X een discrete s.v. met kansverdeling $p_n = P(X = n)$, $n = 0, 1, \ldots$; $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$. De GF van (de kansverdeling van) X wordt gegeven door

$$P(z) := E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \qquad |z| \leq 1. \tag{1}$$

Merk op dat $P(0) = p_0$ and $P(1) = 1$.
Voorbeeld 1: Poisson. Als $p_n = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$, $n = 0, 1, \ldots$, dan is $P(z) = \mathrm{e}^{-\lambda(1-z)}$.
Voorbeeld 2: Geometrisch. Als $p_n = (1 - \rho)\rho^n$, $n = 0, 1, \ldots$, dan is $P(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$.
Een genererende functie is op unieke wijze gekoppeld aan een kansverdeling; dus als je van een functie weet dat het de GF van een kansverdeling is, dan bepaalt die GF de kansverdeling op unieke wijze. Het berekenen van de kansverdeling uit de GF heet inversie. Inversie van de genererende functie, teneinde de bijbehorende kansverdeling te vinden, kan formeel via $p_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} P(z)|_{z=0}$. Andere methode: via een zg. contourintegraalformule. Dat vergt echter onderdelen van de analyse (Cauchy integratie) die te ver voeren voor dit college.

Voordelen van het gebruik van genererende functies in de kansrekening zijn o.a.:

- Momenten volgen relatief makkelijk uit de GF. I.h.b. is $EX = \frac{d}{dz} P(z)|_{z=1}$, en $E[X(X-1)\ldots(X-n+1)] = \frac{d^n}{dz^n} P(z)|_{z=1}$.
- De GF van de som van een aantal onafhankelijke s.v. is het product van de GF's van die s.v.: als $X_1, \ldots, X_k$ onafhankelijk zijn, dan is

$$E[z^{X_1+\ldots+X_k}] = E[z^{X_1} \cdot \cdots \cdot z^{X_k}] = E[z^{X_1}] \cdot \cdots \cdot E[z^{X_k}]. \tag{2}$$

  Zo is bijvoorbeeld snel te bewijzen dat de som van een aantal onafhankelijke, Poisson verdeelde, s.v. weer Poisson verdeeld is, met als parameter de som van de individuele parameters.

- De GF nemen is soms erg nuttig in het oplossen van (i.h.b. lineaire) differentievergelijkingen. Zulke vergelijkingen treden dikwijls op in de kansrekening.

Laplace transformaties

Zij Y een continue, niet-negatieve s.v. met verdeling $F(\cdot)$ en dichtheid $f(\cdot)$. De Laplace transformatie (LT) van (de kansdichtheid van) Y wordt gegeven door

$$\phi(s) := E[\mathrm{e}^{-sY}] = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{Re}\ s \geq 0. \tag{3}$$

Soms bestaat de dichtheid niet overal. Denk aan de kansverdeling van de wachttijd van een klant bij een kassa: daar is een positieve kans op wachttijd 0, dus de kansverdeling heeft een sprong in 0. In dat geval werkt men met de Laplace-Stieltjes transformatie (LST) van (de kansverdeling van) Y, die gebruik maakt van Lebesgue-Stieltjes integratie:

$$\phi(s) := E[\mathrm{e}^{-sY}] = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}F(t), \qquad \mathrm{Re}\ s \geq 0. \tag{4}$$

Merk op dat $\phi(0) = 1$, en dat $|\phi(s)| \leq \int_{t=0}^{\infty} |\mathrm{e}^{-st}| f(t)\mathrm{d}t \leq \int_{t=0}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.
Voorbeeld 3: Exponentieel. Als $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$, $t > 0$, dan is $\phi(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$.
Een L(S)T is op unieke wijze gekoppeld aan een kansverdeling; dus als je van een functie weet dat het de L(S)T van een kansverdeling is, dan bepaalt die L(S)T de kansverdeling op unieke wijze. Het berekenen van de kansverdeling uit de L(S)T heet inversie. Inversie van de L(S)T, teneinde de bijbehorende kansverdeling te vinden, kan via een zg. contour-integraalformule.

Voordelen van het gebruik van Laplace transformaties in de kansrekening zijn o.a.:

- Momenten volgen relatief makkelijk uit de LT. I.h.b. is $EY = -\frac{d}{ds}\phi(s)|_{s=0}$, en $E[Y^n] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\phi(s)|_{s=0}$.
- De LT van de som van een aantal onafhankelijke s.v. is het product van de LT's van die s.v.: als $Y_1, \ldots, Y_k$ onafhankelijk zijn, dan is

$$E[\mathrm{e}^{-s(Y_1 + \cdots + Y_k)}] = E[\mathrm{e}^{-sY_1} \cdot \cdots \cdot \mathrm{e}^{-sY_k}] = E[\mathrm{e}^{-sY_1}] \cdot \cdots \cdot E[\mathrm{e}^{-sY_k}]. \tag{5}$$

- De LT nemen is soms erg nuttig in het oplossen van (i.h.b. lineaire) differentiaalvergelijkingen. Zulke vergelijkingen treden dikwijls op in de kansrekening. In het college zullen we een voorbeeld zien bij Markovprocessen in continue tijd.

Terug naar het voorbeeld van de exponentiële verdeling. Stel dat $Y_1, \ldots, Y_k$ i.i.d. zijn, en $Y_i \sim \exp(\lambda)$. Dan is de LT van $V := \sum_{i=1}^{k} Y_i$ gegeven door

$$E[\mathrm{e}^{-sV}] = E[\mathrm{e}^{-s(Y_1 + \ldots + Y_k)}] = (\frac{\lambda}{\lambda + s})^k. \tag{6}$$

De bijbehorende dichtheid van V, $f(v)$, wordt gegeven door:

$$f(v) = \lambda^k \frac{v^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda v}, \qquad v > 0. \tag{7}$$

Deze dichtheid heet de Erlang(k, λ) dichtheid; we zeggen dat V een Erlang verdeling heeft met parameters k en λ. Merk op dat $k = 1$ inderdaad de exponentiële dichtheid geeft, en ga na dat

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sv} \lambda^k \frac{v^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda v} \mathrm{d}v = 1. \tag{8}$$

Probeer dit bijvoorbeeld na te gaan via partiële integratie, of door de uitdrukking in het linkerlid te herschrijven tot

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sv} \lambda^k \frac{v^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda v} \mathrm{d}v = (\frac{\lambda}{\lambda + s})^k \int_0^\infty (\lambda + s)^k \frac{v^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{e}^{-(\lambda+s)v} \mathrm{d}v. \tag{9}$$

Merk vervolgens op dat die laatste integraal gelijk aan 1 moet zijn, omdat hier een Erlang($k, s + \lambda$) dichtheid wordt geintegreerd van 0 tot ∞.
Door differentiatie, of door de interpretatie van V als som van k onafhankelijke exp(λ) s.v., volgt snel dat

$$EV = \frac{k}{\lambda}, \quad E[V^2] = \frac{k(k+1)}{\lambda^2}, \quad Var(V) = kVar(Y_1) = \frac{k}{\lambda^2}. \tag{10}$$

GF en LT werken niet alleen goed bij sommen van onafhankelijke s.v., maar ook bij een *stochastische som* van onafhankelijke s.v. Zij $Y_1, Y_2, \ldots$ niet-negatieve i.i.d. s.v. met LT $\phi(\cdot)$ en zij N een niet-negatieve geheeltallige s.v., onafhankelijk van $Y_1, Y_2, \ldots$, met GF $G(\cdot)$. Zij $Z := \sum_{i=1}^N Y_i$. Dan geldt:

$$E[\mathrm{e}^{-sZ}] = \sum_{n=0}^\infty P(N = n) E[\mathrm{e}^{-s \sum_{i=1}^N Y_i} | N = n] = \sum_{n=0}^\infty P(N = n) \phi(s)^n = G(\phi(s)), \quad \mathrm{Re}\ s \geq 0. \tag{11}$$

Merk op dat $|\phi(s)| \leq 1$ voor Re $s \geq 0$, zodat $G(\phi(s))$ gedefinieerd is voor Re $s \geq 0$.

Bovenstaande formule stelt ons, via differentiatie naar s, in staat te verifiëren dat

$$EZ = ENEY_1, \quad Var(Z) = Var(N)(EY_1)^2 + ENVar(Y_1). \tag{12}$$

Voorbeeld. Stel dat $Y_i \sim \exp(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots$, en dat $N \sim geom(\rho)$. Ga m.b.v. Formule (11) na dat $Z \sim \exp(\lambda(1 - \rho))$. We zien niet alleen onmiddellijk dat $EZ = ENEY_1$, maar ook dat Z geheugenloos is. Waarom is de geheugenloosheid van Z logisch?

Tot slot bespreken we de nuttige
Convergentiestelling van Feller voor LST.
Zij $F_n(\cdot)$ een rij kansverdelingen van niet-negatieve s.v., $n = 1, 2, \cdots$. Als, $\forall s > 0$,

$$\phi_n(s) = \int_{0-}^\infty \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}F_n(t) \to_{n \to \infty} \phi(s), \tag{13}$$

dan is $\phi(s)$ de LST van een kansverdeling $F(\cdot)$, en $F_n(t) \to F(t)$ in elk continuiteitspunt van $F(\cdot)$.

Voorbeeld 4. Zij $F_n(\cdot)$ een Erlang$(n, n\lambda)$ verdeling, $n = 1, 2, \cdots$. Dan nadert $\phi_n(s) = (\frac{n\lambda}{n\lambda+s})^n$ naar $\phi(s) = \mathrm{e}^{-s/\lambda}$. Ga na dat $\mathrm{e}^{-s/\lambda}$ de LST is van de gedegenereerde s.v. die een constante, $\frac{1}{\lambda}$, is. Merk ook op dat de verwachting en variantie van een Erlang$(n, n\lambda)$ verdeelde s.v. respectievelijk gelijk zijn aan $\frac{1}{\lambda}$ en $\frac{1}{n\lambda^2}$, en dat die variantie naar 0 gaat voor $n \to \infty$.

Opmerking. Een LT is te zien als een kans. Immers, als S exponentieel verdeeld is met parameter s, dan is

$$E[\mathrm{e}^{-sY}] = P(Y < S). \tag{14}$$

I.h.b. is de eigenschap in (5) als volgt in te zien:

$$\begin{aligned} E[\mathrm{e}^{-s(Y_1+\ldots+Y_k)}] &= P(Y_1 + \ldots + Y_k < S) = P(Y_1 < S)P(Y_2 + \ldots + Y_k < S) = \ldots \\ &= \prod_{i=1}^{k} P(Y_i < S) = \prod_{i=1}^{k} E[\mathrm{e}^{-sY_i}]. \end{aligned} \tag{15}$$

Hierbij wordt de geheugenloosheid van S gebruikt; na Y_1 is S nog als nieuw.