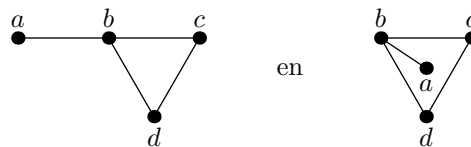


Grafen

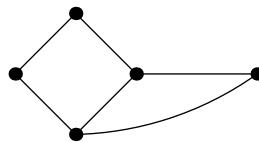
Opmerking vooraf: let op, de terminologie is in elk boek weer anders!

1. Inleiding

- Een (ongerichte) **graaf** (graph) $G = (V, E)$ bestaat uit een eindige, niet-lege verzameling V van **punten** (vertices), ook *knopen* geheten en een verzameling E van *ongeordende paren* $\{a, b\}$ met a en b uit V . De elementen uit E heten **kanten** of *lijnen* (edges) van de graaf. Ongeordend betekent dat $\{a, b\}$ en $\{b, a\}$ hetzelfde zijn. Naast deze abstracte definitie is het handig en overzichtelijk om er plaatjes bij te tekenen. Bijvoorbeeld een plaatje in het platte vlak. De punten van de graaf corresponderen met punten in het vlak en de kanten met verbindingskrommen tussen die punten. Men kan (verschillende) plaatjes tekenen van een graaf:



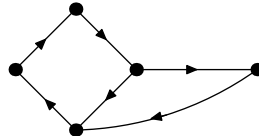
Een voorbeeld van een graaf bestaat uit een systeem van woonplaatsen en tweerichtingswegen tussen de plaatsen:



Andere voorbeelden zijn stambomen en competitieschema's voor sportwedstrijden.

Opgave 1. Ga na dat $|E| \leq \frac{|V| \cdot (|V|-1)}{2}$.

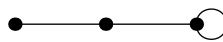
Men kan ook *gerichte* grafen bestuderen, dan bestaat E uit *geordende paren* (a, b) met a en b uit V . Denk aan een systeem van eenrichtingswegen tussen dorpen:



Ook is het mogelijk multigrafen, gericht of ongericht, te bestuderen, dan zijn er meerdere kanten mogelijk tussen twee punten:

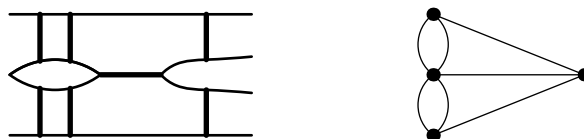


Je kunt in (multi)grafen ook lussen toestaan, dat zijn kanten van een punt naar zichzelf:



Ook is het mogelijk een *gewicht*, dus een getal, aan een kant toe te kennen, bijvoorbeeld bij een systeem van plaatsen en verkeerswegen zou je als gewicht de lengte van elke betreffende weg kunnen nemen. Je spreekt dan over een *gewogen* graaf.

Een voorbeeld van een multigraaf treedt op bij het probleem van de bruggen van Koningsbergen. Dit probleem ziet men als de oorsprong van de graafentheorie (1736). De inwoners van Koningsbergen zochten een wandeling die alle zeven bruggen over de rivier de Pregel precies éénmaal aandeed. In moderne terminologie maakt men hierbij een multigraaf door elk van de oevers en het eiland te representeren door een punt en de bruggen door een kant:

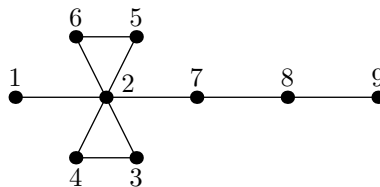


Wij zullen ons meestal tot gewone grafen beperken (dus ongericht, zonder lussen, zonder gewichten).

- Een **wandeling** (walk) van punt x naar punt y in een graaf G ziet er zo uit: $x = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y$ (met $n \geq 1$). Hierbij zijn $\{x_{i-1}, x_i\}$ (met $i = 1, \dots, n$) allemaal kanten van G . We zullen geen onderscheid maken tussen de wandelingen $y = x_n \rightarrow x_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow x_0 = x$ en $x = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y$ (dus de doorlooprichting is niet van belang). De **lengte** van de wandeling is het aantal kanten ervan, dus n . In een wandeling kan een kant en/of een punt meerdere keren voorkomen. Een punt x van G wordt ook wel opgevat als lege wandeling van x naar x (met lengte 0). Als $x = y$ dan heet de wandeling **gesloten**. Een gesloten wandeling van lengte n kan voor elk daarin voorkomend punt z opgevat worden als wandeling bestaande uit n kanten die begint in z en eindigt in z . Als $x \neq y$ dan heet de wandeling **open**.

Als in de wandeling $x = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y$ alle punten verschillend zijn, dan heet de wandeling wel een **pad** (path) en wel van lengte n (≥ 1). Als $x = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1}$ (met $n \geq 3$) een pad is dan heet $x = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \rightarrow x_0$ een **cykel** (cycle) van lengte n (≥ 3). Je zegt ook wel: een cykel is een gesloten wandeling van lengte $n \geq 3$ waarin je bij rondgang in elk van de punten van de betreffende wandeling éénmaal aankomt en vervolgens éénmaal vertrekt. Kortweg: je komt bij rondgang elk punt éénmaal tegen.

In onderstaande figuur zijn bijvoorbeeld te zien:
 de wandeling $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 7$,
 verder het pad $1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9$
 en de cykel $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$.



Opgave 2. Maak een voorbeeld van een graaf van 8 punten met daarin een cykel van lengte 6, een pad van lengte 6 en een wandeling van lengte 6 die geen cykel en geen pad is.

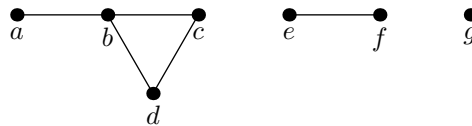
Propositie 1

Als er een wandeling is van a naar een van a verschillend punt b dan is er

ook een pad van a naar b . Zo'n pad krijg je als volgt: als je al lopende over de wandeling een punt tegenkomt waar je al eens geweest bent laat dan het tussenstuk weg. Herhaal dit zonodig.

- Als G een graaf is en a en b punten van G zijn, definieer dan de **afstand** van a tot b gelijk aan $d(a, b) = \infty$ als er géén wandeling is die a en b verbindt. Als er wel zo'n wandeling bestaat, definieer dan de afstand $d(a, b) =$ de lengte van een zo *kort* mogelijke wandeling van a naar b . Merk op: $d(a, a) = 0$ voor elk punt a van G .

Als $d(a, b)$ eindig is voor elk tweetal a en b in G , dan heet G **samenhangend**. Met andere woorden: samenhang van G betekent niets anders dan dat elk tweetal verschillende punten van de graaf door een wandeling verbonden kan worden. Als G niet samenhangend is dan valt G uiteen in samenhangende **componenten** (drie componenten in het onderstaande geval):



Merk op dat in deze graaf $d(a, b) = 1, d(a, c) = 2, d(e, e) = 0, d(a, g) = \infty$.

Opgave 3. Als G samenhangend is, laat zien dat er een wandeling in G is die alle punten aandoet.

Opgave 4. Als de graaf G n punten heeft en als er n componenten zijn, beschrijf dan de graaf G .

- Als $G = (V, E)$ een graaf is en $G_1 = (V_1, E_1)$ is ook een graaf met als extra eigenschap dat $V_1 \subseteq V$ en $E_1 \subseteq E$, dan heet G_1 een **deelgraaf** van G .

Zó kun je bijvoorbeeld deelgrafen maken.

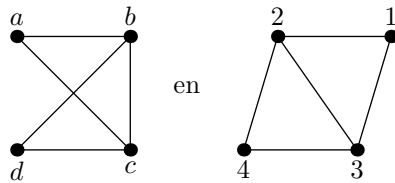
Laat $V_1 \subseteq V$. Neem als E_1 die elementen van E met alleen uiteinden in V_1 . Bijvoorbeeld: laat een punt weg uit G én alle kanten die dat punt als een van de uiteinden heeft.

Een andere manier om een deelgraaf van G te krijgen is om één kant uit $G = (V, E)$ weg te laten (maar geen punten).

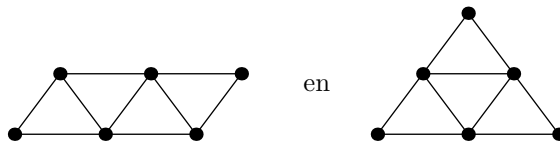
Opgave 5. Geef een voorbeeld van een samenhangende graaf van n punten, zo, dat verwijdering van een willekeurige kant altijd een on samenhangende graaf doet ontstaan.

- De grafen $G_1 = (V_1, E_1)$ en $G_2 = (V_2, E_2)$ heten **isomorf** als er een

bijjectie $f : V_1 \rightarrow V_2$ is, zo, dat $\{a, b\} \in E_1 \iff \{f(a), f(b)\} \in E_2$.
 Met andere woorden: G_2 ontstaat uit G_1 door de elementen van V_1 een nieuwe naam te geven. Het aantal punten van G_1 en G_2 is gelijk evenals het aantal kanten van de twee grafen. Alle graaftheoretische eigenschappen die voor G_1 gelden, gelden ook voor G_2 . We maken in de praktijk dan ook geen verschil tussen zulke grafen. Zie onderstaande figuur voor twee isomorfe grafen:

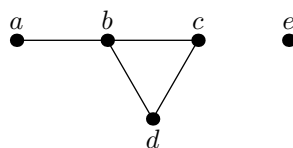


Het isomorfisme wordt gegeven door $a \rightarrow 1, b \rightarrow 2, c \rightarrow 3, d \rightarrow 4$.
 In de volgende figuur zijn er in de ene graaf twee punten waarin twee kanten samenkomen en in de andere drie van zulke punten. De twee grafen zijn dan ook niet isomorf.



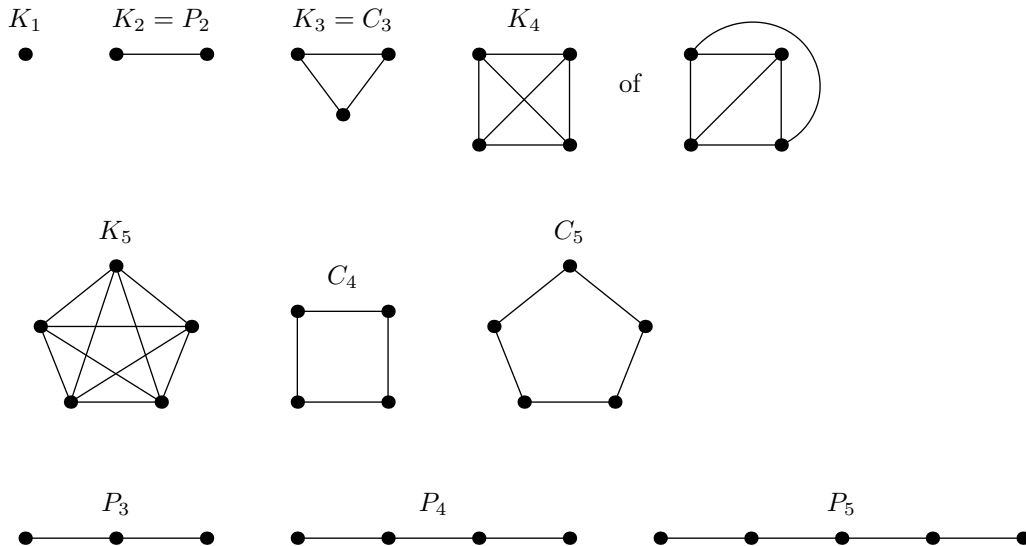
Opgave 6. Bekijk alle grafen met puntenverzameling in het platte vlak. Definieer voor zulke grafen G en H : $G \sim H \iff G$ en H zijn isomorf. Toon aan dat \sim een equivalentierelatie definieert op de verzameling van deze grafen.

- De **graad** van een punt a van een graaf is het aantal kanten met a als een van de uiteinden. De uiteinden van een kant heten **buren** van elkaar. De graad van een punt a is dus het aantal burenen van a . We zullen geen gebruik maken van lussen, maar als je lussen ook toestaat dan draagt een lus van a naar a 2 bij tot de graad van a . Een punt van graad 0, dat punt heeft dus geen burenen, heet **geïsoleerd punt** van de graaf.



De graad van a is 1, van b gelijk aan 3, c en van d hebben graad 2 en de graad van e is 0.

- We vermelden enkele **speciale grafen**. Zie onderstaande figuur.



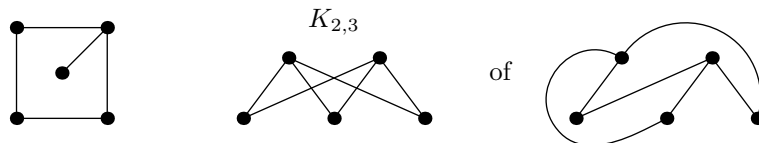
In de **volledige** graaf K_n met $n \geq 1$ punten doen **alle** mogelijke kanten mee (hoeveel zijn dat er?).

De graaf C_n is een cykel bestaande uit $n \geq 3$ punten.

De graaf P_n is een pad bestaande uit $n \geq 2$ punten.

Een graaf $G = (V, E)$ heet **bipartiet** als $V = V_1 \cup V_2$ met $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ en als verder alle kanten uit E de vorm $\{a, b\}$ hebben met een van de twee in V_1 en de ander in V_2 . Zo is bijvoorbeeld de eerste graaf in onderstaande figuur bipartiet. De laatste graaf heet $K_{2,3}$ en wordt **volledig bipartiet** genoemd omdat **alle** mogelijke kanten tussen V_1 en V_2 meedoen. Net zo kun je spreken over de volledig bipartiete grafen $K_{n,m}$.

bipartiete graaf



Opgave 7. Hoeveel (niet-isomorfe) grafen met 3 punten zijn er?

Opgave 8. Teken 8 niet-isomorfe grafen van 4 punten.

Opgave 9. Zijn K_5 en $K_{3,3}$ isomorf? En K_5 en $K_{2,3}$?

Stelling 2

In een graaf $G = (V, E)$ geldt: $\sum_{v \in V} \text{graad}(v) = 2|E|$.

Het bewijs berust op de observatie dat elke kant $\{a, b\}$ eenmaal meetelt in de graad van a en eenmaal in de graad van b en dus samen 2 bijdraagt aan het linkerlid.

Gevolg 3

Het aantal punten met oneven graad in een graaf is even.

Deze theorie van graden geldt ook voor multigrafen. Bij het Koningsberger probleem zijn er drie punten van graad 3 en één van graad 5.

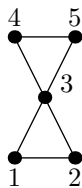
Opgave 10. Is er een graaf met 6 punten met graden 1, 1, 2, 2, 3, 4?

Opgave 11. Als de graaf $G = (V, E)$ minstens twee punten heeft, toon dan aan dat er twee verschillende punten a en b in V bestaan met gelijke graad. Denk aan het pigeon hole principle. Welke mogelijke waarden kan de graad van een punt van de graaf aannemen? Onderscheid daarbij de gevallen: G samenhangend en G niet samenhangend.

2. Eulerwandelingen

- We gaan in deze sectie steeds uit van een graaf G zonder geïsoleerde punten.

We gaan kijken naar Eulerwandelingen in G . Daarin worden *alle* kanten van G *precies éénmaal* aangedaan. Een **gesloten** wandeling in de graaf die alle kanten van G precies éénmaal aandoet noemen we een **Eulertoer**. Ga na dat elk punt minstens één keer aangedaan wordt als je een Eulertoer doorloopt. Daarbij gebruik je het feit dat er geen geïsoleerde punten in G zijn. Een **Eulergraaf** is een graaf waarin een Eulertoer bestaat. In onderstaande graaf is $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ een Eulertoer.



Ook *open* wandelingen die elke kant van de graaf precies éénmaal aandoen kunnen van belang zijn.

Eulerwandelingen spelen een rol bij het op een efficiënte manier sneeuwvrij maken van wegen door een sneeuwplough (zo min mogelijk wegen dubbel doorlopen, liefst geen enkele dubbel) of bij het bezorgen van de post (en dan gaat het om multigrafen omdat er straten zijn die twee keer doorlopen moeten worden door de postbode, aan de oneven en aan de even kant).

Stelling 4

In een graaf $G = (V, E)$ zonder geïsoleerde punten geldt:

G is een Eulergraaf $\iff G$ is samenhangend en elk punt heeft even graad.

Bewijs

\implies Gegeven is dat er een Eulertoer in de graaf bestaat. *We gaan nu deze Eulertoer gebruiken.* De Eulertoer is een gesloten wandeling zo dat alle kanten van de graaf precies éénmaal doorlopen worden. In het bijzonder is dit een gesloten wandeling die alle punten van de graaf minstens eenmaal aandoet. Als a en b twee verschillende punten van G zijn, volg dan de Eulertoer en pak daarvan het stuk tussen a en b . Dat is een wandeling die a en b verbindt. Dus G is samenhangend.

Kies een punt a van de graaf. *We maken nu weer gebruik van de gegeven Eulertoer.* De Eulertoer volgend, beginnend in a , kom je uiteindelijk ook weer in a terug. Dan zie je dat je telkens als je in een punt $v \neq a$ aankomt (via een tot dan toe nog niet doorlopen kant), je niet stopt in v , en er dus ook weer, via een nog niet doorlopen kant, vertrekt. Dit passeren van v kan meer dan eens voorkomen. De graad van v is dus even. In het beginpunt a krijg je als graad: 1 plus een aantal malen 2 plus 1, dus even graad.

\impliedby Gegeven is nu dat G samenhangend is en dat elk punt even graad heeft. *We gaan nu een Eulertoer construeren.* Begin in een punt x te lopen en doorloop steeds kanten waarover je nog niet gelopen hebt. Als je in een punt y aangekomen bent en $y \neq x$ dan kun je verder lopen want de graad van y is even en er dus nog een vrije kant. Je kunt niet door blijven gaan met alleen punten $y \neq x$ want er zijn maar eindig veel kanten. Je komt dus een keer terug in x . Als je alle kanten gehad hebt ben je nu klaar, want dan heb je een gesloten wandeling gemaakt die alle kanten van G éénmaal aandoet.

Stel dat er nog kanten zijn waarover je nog niet gelopen bent. Als al zulke kanten géén uiteinden hebben op de reeds geconstrueerde wandeling dan kun je een willekeurig gekozen punt op de al geconstrueerde wandeling blijkbaar niet verbinden met een punt buiten de wandeling. En dus zou G niet samenhangend zijn. Dat is in tegenspraak met het gegeven. Dus is er een kant $\{y, z\}$ die niet in de al geconstrueerde wandeling zit maar waarvan y wel op die wandeling ligt. Begin nu in y naar z te lopen en vervolg je wandeling op de manier die boven beschreven is, dus steeds kanten doorlopend waarover je nog niet eerder gelopen hebt. Je komt na het doorlopen van een

aantal kanten weer in y terug. Door beide wandelingen te combineren heb je een langere gesloten wandeling gemaakt die alle tot nu toe doorlopen kanten éénmaal aandoet. Etcetera.

Gevolg 5

In een graaf $G = (V, E)$ zonder geïsoleerde punten geldt:

G heeft een open wandeling die alle kanten van G éénmaal aandoet $\iff G$ is samenhangend en G heeft precies twee punten van oneven graad.

Bewijs

\implies De samenhang volgt weer als boven.

Bekijk vervolgens de gegeven open wandeling die alle kanten éénmaal aandoet: $a = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = b$. Deze wandeling volgend zie je dat telkens als je in $v \neq a, v \neq b$ aankomt, je er ook weer vertrekt via een nog niet doorlopen kant. Deze punten hebben dus een even graad. In zowel a als b is de graad $1 +$ een aantal malen 2 , dus oneven graad.

\impliedby Voeg tussen de twee punten a en b van oneven graad een nieuw punt c toe aan de graaf met twee nieuwe kanten $\{a, c\}$ en $\{c, b\}$. Dan heb je een graaf die aan stelling 4 boven voldoet. Er is dus een Eulertoer in die nieuwe grotere graaf. Laat nu daaruit de twee nieuwe kanten weer weg, samen met het punt c , dan heb je de gevraagde wandeling in de oude graaf.

In multigrafen geldt bovenstaande ook. Daarom is het Koningsbergerprobleem (dat vraagt of er wandeling is die alle kanten precies eenmaal aandoet) niet oplosbaar. In de bijbehorende multigraaf zitten namelijk *vier* punten van oneven graad.

Opgave 12. Is er een Eulertoer in K_5 ? Maak er een.

Opgave 13. Is er een Eulertoer in C_5 ? Maak er een.

Opgave 14. Voor welke $n \geq 3$ is er een Eulertoer in K_n ?

Opgave 15. Bekijk alle dominostenen met een ongelijk aantal ogen. Dat zijn er 21, ga na. Kun je deze zó in een ‘kring’ leggen zo dat ‘het klopt’ (dat wil zeggen dat als twee stenen tegen elkaar liggen ze aan de gemeenschappelijke kant hetzelfde aantal ogen hebben).

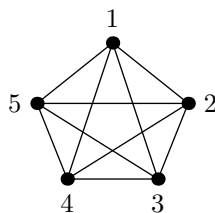
3. Hamiltonwandelingen

- Een **Hamiltoncykel** in een graaf $G = (V, E)$ met $|V| = n \geq 3$ is een gesloten wandeling waarbij je bij rondgang elk punt van G precies éénmaal aandoet, dus een cykel die elk punt van G aandoet. Als G zo'n Hamiltoncy-

kel heeft dan heet G een **Hamiltongraaf**.

Een **Hamiltonpad** in een graaf $G = (V, E)$ met $|V| = n \geq 2$ is een open wandeling die elk punt van G éénmaal aandoet, dus een pad in G dat elk punt van G aandoet.

In onderstaande graaf (welke graaf is dat?) is $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ een Hamiltoncykel en $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ een Hamiltonpad.



Merk op dat als G een Hamiltoncykel heeft, G ook een Hamiltonpad heeft (laat één kant weg). En G is samenhangend als G een Hamiltoncykel/pad heeft.

Hamiltonwandelingen zijn van belang bij het *traveling salesman problem*, waarbij een handelsreiziger alle dorpen moet bezoeken (zo min mogelijk plaatsen dubbel aandoen, liefst geen enkele dubbel). Daarbij zijn vaak afstanden, doorlooptijden of kosten gegeven bij elke verbindingsweg en wordt gevraagd naar de kortste (in kilometers), snelste of goedkoopste Hamiltoncykel.

Stelling 6

Als $G = (V, E)$ een graaf is met $|V| = n \geq 2$ en $\text{graad}(x) + \text{graad}(y) \geq n - 1$ voor alle verschillende punten x en y in G , dan heeft G een Hamiltonpad.

Bewijs

Stel je voor dat G *niet* samenhangend zou zijn, neem dan twee componenten G_1 (met p punten) en G_2 (met q punten) van G . Pak een punt x uit G_1 , dan is $\text{graad}(x) \leq p - 1$. Net zo y uit G_2 en $\text{graad}(y) \leq q - 1$. Dus $\text{graad}(x) + \text{graad}(y) \leq p + q - 2 \leq n - 2$, in strijd met het gegeven. Dus G is samenhangend.

Neem een zo lang mogelijk pad $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$ in G bestaande uit m verschillende punten. Merk op dat m minstens 2 is want een pad van lengte 2 is gemakkelijk te maken: neem maar een kant met zijn twee uiteinden. Als $m = n$ zijn we klaar!

Stel je nu voor dat $m < n$. We gaan laten zien dat dat onmogelijk is.

Stel je voor dat er een punt v is dat buur is van v_1 en nog niet in ons pad voorkomt dan kun je v vóór v_1 plaatsen en je krijgt een langer pad in G . Net zo als v_m een buur heeft die niet al in ons pad voorkomt, dan kun je een

langer pad vinden door dat nieuwe punt achter v_m te plaatsen. Maar ons pad was al maximaal van lengte dus alle buren van v_1 en v_m zijn punten van het pad.

We gaan nu aantonen dat er een cykel door de punten van het pad is (van lengte m).

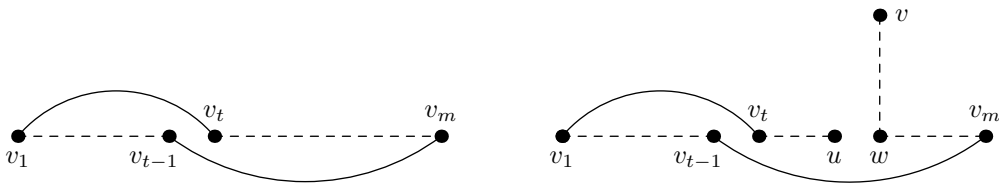
Als v_1 en v_m buren zijn dan is $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m \rightarrow v_1$ een cykel door deze punten.

Als v_1 en v_m geen buren zijn, dan vormen de buren van v_1 een deelverzameling S van $\{v_2, \dots, v_{m-1}\}$. Als $v_t \in S$ en v_m een buur is van v_{t-1} dan is $v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{t-1} \rightarrow v_m \rightarrow v_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow v_t \rightarrow v_1$ een cykel door deze punten (zie de eerste tekening in onderstaande figuur).

Stel je nu voor dat er *niet* zo'n t zou bestaan. Merk op dat de graad van v_1 gelijk is aan $|S|$, en alle 'voorgangers' van de punten uit S , en dat zijn er dus ook $|S|$, zijn dan *geen* buur van v_m . Ook v_m zelf is geen buur van v_m , dus het aantal buren van v_m is $\leq m - |S| - 1$ en de graad van v_m is dus hoogstens $m - |S| - 1$. Maar dan is $\text{graad } v_1 + \text{graad } v_m \leq m - 1 \leq n - 2$ omdat $m < n$, in strijd met het gegeven.

Conclusie: we hebben altijd een cykel geconstrueerd door onze m punten.

Kies nu een punt v buiten de cykel. Omdat G samenhangend is kunnen we een pad maken dat v verbindt met een punt w van de cykel (zodanig dat w het enige punt op het pad is dat ook op de cykel ligt). Verwijder nu de kant $\{u, w\}$, waarbij u een van de twee buren is van w in onze cykel, en er ontstaat een langer pad dan het eerder gevonden pad, in strijd met de maximaliteit van de lengte van het pad boven (zie de tweede tekening in de figuur).



Gevolg 7

Als $G = (V, E)$ een graaf is met $|V| = n \geq 2$ en $\text{graad}(v) \geq \frac{n-1}{2}$ voor alle v in G , dan heeft G een Hamiltonpad.

Stelling 8

Als $G = (V, E)$ een graaf is met $|V| = n \geq 3$ en $\text{graad}(x) + \text{graad}(y) \geq n$ voor alle verschillende punten x en y in G , dan is G een Hamiltongraaf.

Bewijs

Aan de voorwaarden van de stelling boven is voldaan en er is dus een Hamiltonpad $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$ in de graaf.

Als boven maar met de volgende aanpassing toon je aan dat er een cykel

door deze punten gaat.

Als v_1 en v_n buren zijn dan is $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow v_n \rightarrow v_1$ een Hamiltoncykel voor G .

Als v_1 en v_n geen buren zijn, dan vormen de buren van v_1 een deelverzameling S van $\{v_2, \dots, v_{n-1}\}$. Als $v_t \in S$ en v_n een buur is van v_{t-1} dan is $v_1 \rightarrow \cdots \rightarrow v_{t-1} \rightarrow v_n \rightarrow v_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow v_t \rightarrow v_1$ een Hamiltoncykel voor G door deze punten. Als er niet zo'n t zou bestaan dan is de graad van v_1 gelijk aan $|S|$, en graad van v_n hoogstens $n - |S| - 1$. Maar dan is $\text{graad } v_1 + \text{graad } v_n \leq n - 1$, in strijd met het gegeven.

Gevolg 9

Als $G = (V, E)$ een graaf is met $|V| = n \geq 3$ en $\text{graad}(v) \geq \frac{n}{2}$ voor alle v in G , dan is G een Hamiltongraaf.

Opgave 16. Merk op: een Hamiltoncykel doorloopt elke kant van de graaf hoogstens één keer, een Eulertoer doet elk punt minstens één keer aan.

Opgave 17. Toon aan dat er $\frac{(n-1)!}{2}$ Hamiltoncyclen zijn in K_n (als $n \geq 3$).

Opgave 18. Als $n \neq m$, dan is $K_{n,m}$ geen Hamiltongraaf. Toon dat aan.

Opgave 19. Geef voorbeelden van samenhangende grafen die wel/niet een Hamiltongraaf en wel/niet een Eulergraaf zijn.

Opgave 20. In een gezelschap van 10 personen kent ieder minstens 5 anderen uit de groep. Is er een tafelschikking aan een ronde tafel mogelijk waarbij ieder naast twee bekenden zit?

4. Planairiteit

Van een graaf kun je plaatjes tekenen in een plat vlak. Zoals we gezien hebben corresponderen de punten van de graaf met punten in het vlak en de kanten met verbindingskrommen tussen die punten. Een graaf G heet **planair** als G getekend kan worden in een plat vlak, *zo dat alle kanten elkaar alleen snijden in punten van G* . Je zegt wel dat je G *ingebed* hebt in het vlak. Zo kun je $K_{2,3}$ tekenen op de tweede manier in de figuur op pagina 6 en daaruit concluderen dat $K_{2,3}$ planair is.

Je kunt je ook afvragen of een graaf ingebed kan worden in \mathbb{R}^3 .

Stelling 10

Van elke graaf G bestaat een plaatje in \mathbb{R}^3 zo, dat alle kanten elkaar alleen snijden in punten van G .

Bewijs

Teken de punten v_1, \dots, v_n op de z -as in de driedimensionale ruimte. Kies voor elke kant $\{a, b\}$ van de graaf een (steeds ander) vlak door de z -as en een halve cirkel in dat vlak van a naar b . Zo krijg je een plaatje van de graaf in \mathbb{R}^3 met de eigenschap dat de kanten elkaar alleen snijden in de punten van de graaf.

Stelling 11

K_5 en $K_{3,3}$ zijn niet planair.

We bewijzen dit later.

Een beroemde stelling van Kuratowski (1930) spreekt uit dat planairiteit van een graaf G equivalent is met het feit dat er ‘geen K_5 of $K_{3,3}$ in G zit’. We gaan niet in op de precieze betekenis van dit statement.

Dat $K_{3,3}$ niet planair is kun je als volgt vertalen.

Gegeven drie huizen en drie aansluitpunten voor gas, water en electriciteit, dan kun je geen leidingen over de grond leggen tussen elk van de huizen en elk van de aansluitpunten (zonder dat een van de buizen over een andere buis kruist) .

Propositie 12

Bekijk een graaf $G = (V, E)$ met $|V| \geq 3$. Als de graad van elk punt van de graaf minstens 2 is, dan bevat G een cykel.

Bewijs

Je gaat een wandeling maken door te starten in zeker (willekeurig gekozen) punt van de graaf en een van de kanten waarop dat punt ligt te doorlopen. Daarna gaat het als volgt verder. Telkens als je aankomt in een punt waar je nog niet eerder geweest bent loop je weer verder over een kant die verschillend is van de kant waarover je in dat punt aangekomen bent (dat kan omdat de graad van dat punt ≥ 2 is). Omdat er maar eindig veel punten in de graaf zijn kom je een keer aan in een punt waar je al geweest bent. Het tussenliggende stuk is een cykel.

Stelling 13 (Euler)

Als de graaf $G = (V, E)$ samenhangend en planair is, en ingebed is in het platte vlak, en $|V| = v$, $|E| = e$, r = het aantal gebieden waarin de graaf het platte vlak verdeelt (inclusief het onbegrensde gebied), dan geldt: $v - e + r = 2$.

Bewijs

Met volledige inductie naar het aantal kanten van de graaf. We gebruiken

hier - en in veel andere bewijzen - de volgende vorm van volledige inductie:

$$\left[P(0) \text{ en } P(1) \text{ en } P(2) \text{ en } \forall n \geq 3 \left[(\forall k < n : P(k)) \implies P(n) \right] \right] \\ \implies \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

Dus eerst de uitspraak voor enkele beginwaarden van n controleren. Dan nagaan dat voor hogere waarden van n de geldigheid van de uitspraak volgt uit de geldigheid van de uitspraak van alle voorgangers van n . Als dat allemaal klopt dan geldt de uitspraak voor elk natuurlijk getal.

Als er meerdere grafen in het spel zijn dan gebruiken we vaak een subscript en geven we met e_G het aantal kanten van graaf G aan. Idem v_G en r_G .

Ga na dat de stelling klopt als $n = e_G = 0, 1, 2$.

Laat G een graaf zijn met $n = e_G \geq 3$. Veronderstel dat de uitspraak waar is voor grafen met minder dan n kanten.

Geval 1. Stel er is een punt x van $G = (V, E)$ met $\text{graad}(x)=1$. Laat H de deelgraaf van G zijn die ontstaan door de kant met uiteinde x en het punt x zelf weg te laten. Dan geldt: $v_H = v_G - 1, e_H = e_G - 1, r_H = r_G$. Omdat het aantal kanten van H minder is dan n volgt uit de inductieveronderstelling

$$v_G - e_G + r_G = (v_H + 1) - (e_H + 1) + r_H = v_H - e_H + r_H = 2.$$

Geval 2. Stel dat er geen punt in G is van graad 1. Omdat G samenhangend is, is de graad van elk punt van G minstens 2. Omdat ook $v_G \geq 3$, bestaat er volgens de propositie hierboven een cykel in G . Neem nu een cykel in G van minimale lengte, dus met zo min mogelijk kanten. Deze cykel omsluit een begrensd gebied. Laat $\{a, b\}$ een kant zijn op de rand van dat begrensd gebied. Laat H de graaf zijn die ontstaat door de kant $\{a, b\}$ te verwijderen uit G (maar de punten a en b niet te verwijderen), dan is $v_H = v_G, e_H = e_G - 1, r_H = r_G - 1$. Het aantal kanten van H is minder dan n . Dus: $v_G - e_G + r_G = v_H - (e_H + 1) + (r_H + 1) = v_H - e_H + r_H = 2$.

Uit het principe van volledige inductie volgt nu dat de stelling waar is.

Gevolg 14

Als G samenhangend en planair is met $e \geq 3$, dan is (als G ingebed is in het platte vlak) $3r \leq 2e$ en $e \leq 3v - 6$.

Bewijs

Stel dus dat G planair is en samenhangend met $e \geq 3$. Als G ingebed is in het platte vlak en dit in twee of meer gebieden verdeelt, dan heeft elk gebied een cykel in zijn rand, dus elk gebied heet minstens drie kanten in zijn rand. Ook als er maar één gebied is, is vanwege $e \geq 3$, het aantal kanten in de rand minstens drie.

Elk gebied heeft dus ≥ 3 kanten nodig als deel van zijn rand. Er zijn dus $\geq 3r$ kanten nodig als randdeel. Nu zijn er e kanten beschikbaar in de graaf

en elk van die kanten komt hoogstens bij twee gebieden voor als randdeel, dus geldt $2e \geq 3r$.

Opgave 21. Bewijs zelf de rest van het gevolg. Laat verder zien dat hieruit volgt dat K_5 niet planair is.

Opgave 22. Leidt af dat $2e \geq 4r$ bij een samenhangende planaire graaf zonder driehoeken erin (als $e \geq 4$). Toon aan dat $e \leq 2v - 4$. Laat zien dat $K_{3,3}$ niet planair is.

Opgave 23. Laat op twee manieren zien dat $K_{4,4}$ niet planair is.

Opgave 24. Laat zien dat de formule van Euler niet altijd geldt als G niet samenhangend is.

Opgave 25. Laat G samenhangend en planair zijn, dan is er minstens één punt in G met graad minder dan 6.

Aanwijzing: stel dat alle graden minstens 6 zijn, dan volgt uit de formule $\sum_{x \in V} \text{graad}(x) = 2|E|$, dat $6v \leq 2e$. Etcetera.

5. Kleuringen

We willen een graaf $G = (V, E)$ kleuren zo, dat wanneer twee punten buren zijn, die twee punten een verschillende kleur hebben. Je spreekt dan van een kleuring van de graaf. Met hoeveel kleuren kan dat? Het minimaal aantal kleuren dat nodig is zullen we $\chi(G)$ noemen. Er is een aantal eenvoudige uitspraken over $\chi(G)$.

Propositie 15

- Ga na dat $\chi(G) = 1 \iff |E| = 0$.
- Ga na dat $\chi(G) \leq 2 \iff G$ is bipartiet.
- Ga na dat $\chi(G) \leq |V|$.
- Ga na dat $\chi(G) = |V| \iff G = K_n$.
- Ga na dat $\binom{\chi(G)}{2} \leq |E|$.

Aanwijzing voor het laatste onderdeel: laat $k = \chi(G)$, kleur de punten van de graaf in de k kleuren en groepeer V in delen V_1, V_2, \dots, V_k , van elk dezelfde kleur. Er is nu voor elke i en j een punt in V_i en een punt in V_j , zodat de twee punten buren zijn. Ga dat na. Maak het bewijs daarna af.

Stelling 16

Voor een graaf $G = (V, E)$ geldt: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, waar $\Delta(G)$ de maximale graad is van punten in V .

Bewijs

Met volledige inductie naar het aantal punten $n = |V|$ van G .

Voor $n = 1$ geldt de stelling. Ga dat na.

Laat nu G een graaf zijn met $n \geq 2$ punten. Veronderstel dat de uitspraak waar is voor grafen met minder dan n punten. Laat $\Delta(G) = p$. Verwijder een punt v en ook alle kanten met uiteinde v . Je houdt een graaf H over met $n - 1$ punten en met $\Delta(H) \leq p$. Je kunt volgens de inductieveronderstelling H kleuren met maximaal $p + 1$ kleuren (dus met $p + 1$ of met minder dan $p + 1$ kleuren). Als je H met hooguit p kleuren kunt kleuren, dan ben je meteen klaar: geef namelijk v een andere kleur, en dan is G gekleurd met hooguit $p + 1$ kleuren. De andere mogelijkheid is dat je $p + 1$ kleuren nodig hebt om H te kleuren, bekijk dan G weer: één van de voor de kleuring van H beschikbare $p + 1$ kleuren is niet nodig bij de kleuring van de buren van v (omdat dat er hooguit p zijn) en kan dus gebruikt worden om v te kleuren. Gevolg: G is gekleurd met maximaal $p + 1$ kleuren.

Uit het principe van volledige inductie volgt nu dat de stelling waar is.

Opgave 26. Als G niet samenhangend is maar uit drie componenten bestaat die met 2, 3, respectievelijk 4 kleuren gekleurd kunnen worden, met hoeveel kleuren kun je G dan kleuren?

Stelling 17

Voor een planaire graaf G geldt $\chi(G) \leq 6$.

Bewijs

Met volledige inductie naar het aantal punten $n = |V|$ van G .

Als $n \leq 6$ dan klopt de uitspraak, kleur elk punt maar verschillend.

Stel nu dat we te maken hebben met een graaf van $n \geq 7$ punten en veronderstel dat de uitspraak waar is voor grafen met minder dan n punten.

Als G niet samenhangend is dan bestaan de componenten van G uit minder dan n punten en volgens de inductieveronderstelling kan elke component met hooguit 6 kleuren gekleurd worden. Dan kan G ook met hooguit 6 kleuren gekleurd worden (zie de opgave boven).

We gaan nu verder met een samenhangende graaf. Er is in ieder geval een punt v met graad ≤ 5 (zie een eerdere opgave). Laat v weg, samen met alle kanten waarvan v uiteinde is. Je houdt een graaf over met $n - 1$ punten. Volgens de inductieveronderstelling kun je als je over 6 kleuren beschikt deze kleinere graaf kleuren met 6 of minder van deze kleuren. Voor de (maximaal) 5 buren van v worden maar hooguit 5 kleuren gebruikt. Er blijft dus zeker één van de 6 kleuren over. Plaats nu v terug en geef dit punt die overblijvende kleur. De oorspronkelijke graaf is nu ook gekleurd worden met maximaal 6 van de beschikbare kleuren.

Uit het principe van volledige inductie volgt nu dat de stelling waar is.

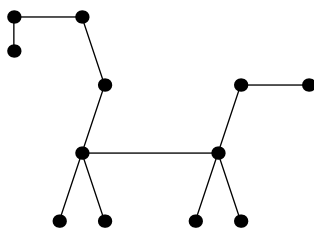
Appel en Haken (1976) bewezen dat voor een planaire graaf G zelfs geldt dat $\chi(G) \leq 4$.

Het vermoeden bestond al heel lang, zo'n anderhalve eeuw, dat dit waar zou zijn, maar het heeft lang geduurd voor daadwerkelijk een bewijs gevonden werd. Een bewijs overigens, waarbij de computer gebruikt moest worden om een aantal ingewikkelde situaties door te rekenen. Een gevolg is dat je elke landkaart kunt kleuren met maximaal 4 kleuren, zo dat landen die een stukje grens gemeenschappelijk hebben verschillend gekleurd zijn.

Opgave 27. In een magazijn moeten de 26 chemicaliën A, B, \dots, Z opgeslagen worden. Stoffen die met elkaar op ongewenste manier reageren mogen niet in dezelfde ruimte opgeborgen worden. Maak een graaf met punten A, B, \dots, Z en kanten tussen de punten als de stoffen ongunstig met elkaar reageren. Ga na dat een kleuring van de graaf helpt bij het opbergen van de stoffen.

6. Bomen

- Een **boom** is een samenhangende graaf $G = (V, E)$ zonder cyclen, zie onderstaande figuur.



Een belangrijke eigenschap van bomen is dat wanneer a en b twee verschillende punten van de boom zijn er een uniek pad is van a naar b .

Want stel dat er twee verschillende paden zouden zijn, dan kun je met behulp daarvan een gesloten wandeling in de graaf maken die een cykel bevat (ga na), in strijd met het feit dat G een boom is.

Stelling 18

De graaf $G = (V, E)$ is een boom \iff de graaf G bevat geen cyclen en $|V| = |E| + 1$.

Bewijs

\implies We bewijzen de gelijkheid met volledige inductie naar $n = |V|$.

Voor $n = 1, 2$ klopt de gelijkheid, ga na.

Als $n \geq 3$, veronderstel dan dat de uitspraak waar is voor grafen met minder dan n punten. Neem een punt a uit G van graad één (dit bestaat op grond van een eerdere propositie) en laat dit weg samen met de kant waarop a ligt. Zo ontstaat de deelgraaf $G' = (V', E')$, ook een boom, met minder dan n punten. Volgens de inductieveronderstelling geldt $|V'| = |E'| + 1$ en dus $|V| = |V'| + 1 = |E'| + 1 + 1 = |E| + 1$.

Uit het principe van volledige inductie volgt nu dat de stelling waar is.

\Leftarrow Stel G is niet samenhangend, dus $G = G_1 \cup \dots \cup G_r$, de componenten van G . Vorm een nieuwe graaf G' door $r - 1$ kanten toe te voegen en wel tussen een punt uit G_{i-1} en een punt uit G_i (voor $i = 2, \dots, r$). Dan is G' wel samenhangend, en heeft geen cycli (omdat G geen cycli bevat), en is dus een boom en er geldt dan: $|V| = |E'| + 1$ maar ook volgens het gegeven $|V| = |E| + 1$, dus $|E'| = |E|$. Er zijn dus geen nieuwe kanten toegevoegd en G is dus samenhangend en dus een boom.

We hebben in het bewijs gebruikt dat een boom $G = (V, E)$ met $|V| \geq 3$ minstens één punt van graad 1 heeft. Maar méér is waar:

Gevolg 19

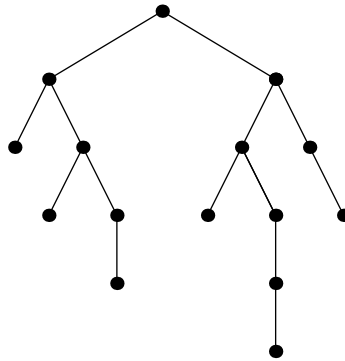
Als $G = (V, E)$ een boom is met $|V| \geq 2$, dan zijn er minstens twee punten van graad 1.

Bewijs

Omdat $|V| = n \geq 2$ komt graad 0 niet voor vanwege de samenhang, dus de graad van elk punt is minstens 1. Verder is volgens de stelling boven $|E| = n - 1$ en dus $2|E| = 2(n - 1) = \sum_{v \in V} \text{graad}(v)$. Daaruit volgt dat niet alle punten van graad ≥ 2 kunnen zijn want de som $\sum_{v \in V} \text{graad}(v)$ zou dan minstens $2n$ zijn. Ook $n - 1$ punten van graad 2 en één punt van graad 1 kan niet want de som $\sum_{v \in V} \text{graad}(v)$ zou dan minstens $2(n - 1) + 1 = 2n - 1$ zijn. Dus zijn er minstens twee punten die niet van graad ≥ 2 zijn. Die zijn dus van graad 1.

Opgave 28. Teken niet-isomorfe bomen met 5 punten.

- Een **gewortelde boom** is een boom met een uitverkoren punt v , de **wortel** van de boom. Men tekent deze meestal als volgt (en houdt daarbij een richting aan, meestal van boven naar onder maar soms ook omgekeerd van onder naar boven of ook van links naar rechts): onder v plaatst men de burens van v , daaronder weer de nieuwe burens van deze punten, etcetera.



Als het (unieke) pad dat v verbindt met punt x lengte n heeft dan behoort x tot niveau n . De maximale lengte van zo'n pad in de boom heet de hoogte (of diepte) van de boom. Dus de wortel vormt niveau 0, de buren ervan niveau 1, etcetera. Men spreekt van kinderen, nakomelingen, (voor)ouders. Als er telkens hooguit 2 kinderen zijn dan heet de gewortelde boom wel **binair**. De punten zonder kinderen heten **bladeren** van de boom. Kanten heten ook wel **takken** van de boom. Merk nog op dat we in *Basiswiskunde* aangetoond hebben dat het aantal punten in een binaire boom van hoogte n maximaal $2^{n+1} - 1$ is.

Opgave 29. Toon aan dat een boom een planaire graaf is.

Opgave 30. Toon aan dat een boom een bipartiete graaf is.

Voorbeelden treft men aan in de indeling van een boek (de wortel) met daarin hoofdstukken, die weer verdeeld zijn in secties, en weer onderverdeeld zijn in paragrafen.

Je kunt ook denken aan de manier waarop de winnaar van een sporttoernooi bepaald wordt: de wortel is de winnaar, de punten van niveau 1 zij de finalisten, die van niveau 2 de halve finalisten, die van niveau 3 de kwartfinalisten, enzovoort. In de eerste ronde, dus in het hoogste niveau kan het voorkomen dat sommige spelers een bye hebben (niet hoeven te spelen bij gebrek aan tegenstanders) en daarom automatisch overgaan naar de volgende ronde.

Een ander voorbeeld is natuurlijk een familiestamboom.

Literatuur

- Grimaldi, *Discrete and combinatorial mathematics*, hoofdstuk 11 en 12.
- Townsend, *Discrete mathematics: applied combinatorics and graph theory*, hoofdstuk 6, 7 en 8.

Versie juli 2007