

# Domeinbeschrijving rekenen

*Discussiestuk ten dienste van de Expertgroep*

*Doorlopende Leerlijnen Rekenen en Taal*

auteur: Jan van de Craats \*

11 december 2007

## Inleiding

Dit document bevat een beschrijving van het **domein rekenen** in het primair en voortgezet onderwijs in termen van van kennis- en vaardigheidsdoelen. Aan de hand hiervan zal ik in hoofdstuk 8 globaal de door mij voor dit domein gewenste referentieniveaus aangeven. Voor een nadere uitwerking en een definitieve vaststelling van die niveaus verwijs ik naar het rapport van de Expertgroep dat in januari 2008 zal worden gepubliceerd.

In het primair onderwijs wordt gerekend met *natuurlijke getallen*, *kommagetallen* en *breuken*. Natuurlijke getallen zijn getallen waarmee je *aantallen* kunt weergeven: 5 vingers aan je hand, 12 appels op een schaal, 60 minuten in een uur, 16 miljoen Nederlanders, 0 euro in je portemonnee. Kommagetallen (decimale breuken, decimaalgetallen) zijn getallen zoals 354,27 en 0,067. Je gebruikt ze bijvoorbeeld bij het rekenen met euro's, bij schaalverdelingen, bij het bepalen van maten en gewichten of bij het rekenen met verhoudingen en procenten. Breuken zijn getallen zoals  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{5}{8}$ ,  $\frac{15}{29}$  en  $\frac{14}{5}$ . In het voortgezet onderwijs wordt, afhankelijk van het onderwijstype, ook gerekend met *negatieve getallen*, *machten* en *wortels*.

Met nadruk wordt gesteld dat het in dit document *uitsluitend* gaat om het domein rekenen in strikte zin. De niet onder dit domein vallende onderdelen van de wiskunde (bijvoorbeeld algebra, meetkunde, tabellen, functies en grafieken, irrationaliteit van wortels) worden hierin niet behandeld.

---

\*Prof.dr. J. van de Craats is lid van de Expertgroep, hoogleraar Wiskunde en Maatschappij aan de Universiteit van Amsterdam en hoogleraar Wiskunde, in het bijzonder Wiskunde-onderwijs, aan de Open Universiteit. E-mail [craats@science.uva.nl](mailto:craats@science.uva.nl), homepage [www.science.uva.nl/~craats](http://www.science.uva.nl/~craats).

# 1 Rekenen met natuurlijke getallen

Leerlingen kennen de manier waarop ons decimale positiestelsel is opgebouwd. Zij kennen de betekenis van cijfers en hun plaats in getallen. Zo weten zij dat  $6498 = 6 \times 1000 + 4 \times 100 + 9 \times 10 + 8$ . Zij weten dat op die manier met behulp van slechts tien cijfers (namelijk 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9) elk natuurlijk getal kan worden weergegeven.

## 1.1 Hoofdrekenen

Leerlingen kunnen vlot en zonder enige aarzeling de volgende berekeningen uit het hoofd uitvoeren:

- a. Twee getallen van één cijfer bij elkaar optellen.  
*Voorbeelden:*  $3 + 5 = 8$ ,  $7 + 9 = 16$ ,  $2 + 8 = 10$ .
- b. Een getal van één cijfer optellen bij een getal van twee cijfers.  
*Voorbeelden:*  $23 + 5 = 28$ ,  $77 + 9 = 86$ ,  $52 + 8 = 60$ .
- c. Twee getallen kleiner dan twintig van elkaar aftrekken (het kleinste van het grootste).  
*Voorbeelden:*  $8 - 5 = 3$ ,  $19 - 12 = 7$ ,  $17 - 9 = 8$ ,  $12 - 7 = 5$ .
- d. Twee getallen die elk bestaan uit één cijfer gevolgd door een aantal nullen, bij elkaar optellen.  
*Voorbeelden:*  $30 + 50 = 80$ ,  $7000 + 9000 = 16000$ ,  $200 + 80 = 280$ ,  $9000 + 30 = 9030$ .
- e. Twee getallen van één cijfer met elkaar vermenigvuldigen.  
*Voorbeelden:*  $3 \times 5 = 15$ ,  $7 \times 9 = 63$ ,  $2 \times 8 = 16$ .
- f. Een getal vermenigvuldigen met 10, 100, 1000, enzovoort.  
*Voorbeelden:*  $345 \times 10 = 3450$ ,  $52 \times 100 = 5200$ ,  $979 \times 1000 = 979000$ .
- g. Twee getallen die elk bestaan uit één cijfer gevolgd door een aantal nullen, met elkaar vermenigvuldigen.  
*Voorbeelden:*  $30 \times 50 = 1500$ ,  $7000 \times 9 = 63000$ ,  $200 \times 80 = 16000$ ,  $400 \times 300 = 120000$ .
- h. Een getal dat eindigt op een nul delen door 10, een getal dat eindigt op twee nullen delen door 100, enzovoort.  
*Voorbeelden:*  $560 : 10 = 56$ ,  $36000 : 100 = 360$ ,  $606000 : 1000 = 606$ .
- i. Een deling, al dan niet met rest, uitvoeren als de deler een getal van één cijfer is, en het deeltal kleiner is dan tien maal de deler.  
*Voorbeelden:*  $56 : 7 = 8$ ,  $36 : 9 = 4$ ,  $66 : 7 = 9 \text{ rest } 3$ ,  $77 : 9 = 8 \text{ rest } 5$ .

## 1.2 Rekenen met pen en papier

Leerlingen kunnen met pen en papier de volgende rekenbewerkingen vlot uitvoeren.

- a. Optellen van twee of meer getallen (optellen onder elkaar).
- b. Aftrekken van een getal van een groter getal (aftrekken onder elkaar).
- c. Vermenigvuldigen van twee getallen (vermenigvuldigen onder elkaar).

- d. Delen met rest (staartdeling of een gelijkwaardige procedure).

## 2 Rekenen met kommagetallen

Leerlingen kennen de betekenis van kommagetallen en hun plaats op de getallenlijn. Ze kennen kommagetallen in tal van praktijksituaties, bijvoorbeeld bij het rekenen met geldbedragen of bij het gebruik van schaalverdelingen op linialen en andere meetinstrumenten.

### 2.1 Hoofdrekenen

Leerlingen kunnen vlot en zonder aarzelen de volgende rekenbewerkingen uit het hoofd uitvoeren.

- a. Een kommagetal vermenigvuldigen met 10, 100, 1000 enzovoort.
- b. Een kommagetal delen door 10, 100, 1000 enzovoort.
- c. Procenten omzetten in kommagetallen en omgekeerd.  
*Voorbeeld:*  $15\% = 0,15$ ,  $0,2\% = 0,002$ ,  $235\% = 2,35$ .
- d. Een kommagetal afronden op een gegeven aantal decimalen (plaatsen achter de komma).

### 2.2 Rekenen met pen en papier

Leerlingen kunnen met pen en papier de volgende rekenbewerkingen vlot uitvoeren.

- a. Optellen van twee of meer kommagetallen (optellen onder elkaar).
- b. Aftrekken van een kommagetal van een groter kommagetal (aftrekken onder elkaar).
- c. Vermenigvuldigen van twee kommagetallen (vermenigvuldigen onder elkaar).
- d. Het omzetten van een deling met kommagetallen in een deling waarbij de deler een natuurlijk getal is, vervolgens de deling uitvoeren, en ten slotte, indien gevraagd, het quotiënt afronden op een gegeven aantal decimalen.  
*Voorbeeld:*  $1,452 : 0,17 = 145,2 : 17$ . Dit levert na uitvoering van de deling en afronden op twee decimalen als uitkomst 8,54.

### 2.3 Toepassingen

Leerlingen kunnen rekenen met kommagetallen in de volgende toepassingen (contexten).

- a. Rekenen met geldbedragen.
- b. Rekenen met verhoudingen en procenten.

- c. Rekenen in het metrieke stelsel voor lengte, oppervlakte (van rechthoeken), inhoud (van rechthoekige blokken) en gewicht.
- d. Rekenen met tijd (uren, minuten, seconden) en snelheid (kilometers per uur en meters per seconde).
- e. Omrekenen van meters per seconde naar kilometers per uur en omgekeerd.
- f. Omrekenen van valuta, bijvoorbeeld euro's naar dollars, bij een gegeven wisselkoers.

Bij al deze toepassingen kunnen leerlingen contextopgaven in rekenopgaven vertalen, oplossen en de uitkomsten in termen van de context interpreteren. Zij kunnen de berekeningen in eenvoudige gevallen met de hand (pen en papier) uitvoeren. Bij lastiger opgaven kunnen zij een rekenmachine gebruiken. In dat geval kunnen zij vooraf met pen en papier of uit het hoofd een schatting maken van de uitkomst.

### 3 Rekenen met breuken

Leerlingen kunnen breuken visualiseren door middel van bijvoorbeeld pizza-diagrammen (taartdiagrammen). Daarnaast kunnen zij ook de plaats van een breuk aangeven op de getallenlijn. Zij kennen de betekenis van termen als teller, noemer en breukstreep. Naast de meest gebruikelijke notatie van een breuk met de horizontale breukstreep (zoals  $\frac{3}{4}$ ) kennen zij ook de notatie met een schuine breukstreep (zoals  $3/4$ ).

#### 3.1 Rekenen met pen en papier

Leerlingen kunnen met pen en papier de volgende rekenbewerkingen voor breuken vlot uitvoeren.

- a. Een geheel getal als breuk schrijven (noemer 1).
- b. Een kommagetal als breuk schrijven (noemer 10, 100, ...).
- c. Een breuk vereenvoudigen (teller en noemer delen door een gemeenschappelijke deler).
- d. Twee breuken onder één noemer brengen (gelijknamig maken).
- e. Twee breuken na gelijknamig maken bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken.
- f. Twee breuken met elkaar vermenigvuldigen.
- g. Een breuk delen door een breuk.
- h. Een breuk met een teller die groter is dan de noemer, schrijven als 'gemengde breuk'. *Voorbeeld:*  $\frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$ . Dit komt neer op delen met rest van de teller door de noemer:  $14 : 5 = 2 \text{ rest } 4$ , dus  $\frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$ .
- i. Een 'gemengde breuk' schrijven als gewone breuk.

*Opmerking:* vooral bij vermenigvuldigen en delen, maar vaak ook bij aftrekken, zijn gemengde breuken onhandig. Het zal daarom vaak beter zijn om bij berekeningen gemengde breuken eerst om te zetten in gewone breuken.

## 3.2 Toepassingen

Ook breuken worden in toepassingen veel gebruikt, bijvoorbeeld bij het rekenen met verhoudingen en procenten.

- Leerlingen kennen *uit het hoofd* het verband tussen breuken met noemer 2, 3, 4, 5 en 10 en het bijbehorende percentage, bijvoorbeeld:  $\frac{1}{2} = 50\%$ ,  $\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\%$ ,  $\frac{3}{4} = 75\%$ ,  $\frac{2}{5} = 40\%$ .
- Leerlingen kunnen met behulp van een rekenmachine een breuk omzetten in een (afgerond) kommagetal.
- Leerlingen kunnen breuken en kommagetallen gebruiken bij het rekenen in contexten met verhoudingen en procenten.

## 4 Rekenen met negatieve getallen

Leerlingen kennen het gebruik van negatieve getallen in praktijksituaties zoals temperatuurschalen of saldi van een bankrekening.

- Leerlingen kennen de ‘uitgebreide getallenlijn’ waarop positieve getallen, negatieve getallen en het getal 0 hun plaats hebben.
- Leerlingen beheersen de rekenregels voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met positieve en negatieve getallen. In het bijzonder weten zij dat bij vermenigvuldigen met  $-1$  het teken van een getal omkapt (van plus naar min of van min naar plus).

## 5 Machten

### 5.1 Machten van tien en de wetenschappelijke notatie

- Leerlingen kennen de betekenis van notaties als  $10^2 = 100$ ,  $10^5 = 100\,000$ ,  $10^{-1} = 0,1$ ,  $10^{-4} = 0,0001$ , dat wil zeggen machten van 10 met een positieve of negatieve gehele exponent.
- Leerlingen zijn vertrouwd met de ‘wetenschappelijke notatie’ die onder andere op rekenmachines wordt gebruikt en waarbij een kommagetal wordt aangegeven als product van een getal tussen 0,1 en 1 en een macht van 10.

*Voorbeelden:*  $475,23 = 0,47523 \times 10^3$  en  $0,003256 = 0,3256 \times 10^{-2}$ . De laatste vormen wordt ook vaak genoteerd als  $0,47523 E 3$ , respectievelijk  $0,3256 E - 2$ . (De  $E$  is hier de eerste letter van ‘exponent’.)

### 5.2 Machten en rekenregels voor machten

- Leerlingen kennen de betekenis van machten met een willekeurig positief grondtal en een positieve of negatieve gehele exponent.  
*Voorbeelden:*  $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ ,  $3^{-4} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{81}$ .

- b. Leerlingen kennen de regels voor vermenigvuldigen en delen van machten met hetzelfde grondtal.

## 6 Ontbinden in factoren, priemgetallen

Leerlingen weten wat een priemgetal is.

- a. Leerlingen kunnen met pen en papier natuurlijke getallen kleiner dan 1000 in priemfactoren ontbinden.
- b. Leerlingen kunnen de grootste gemeenschappelijke deler (ggd) van twee natuurlijke getallen berekenen met behulp van de priemontbinding van die getallen.
- c. Leerlingen kunnen het kleinste gemeenschappelijke veelvoud (kgv) van twee getallen berekenen met behulp van de priemontbinding van die getallen.
- d. De leerlingen kennen de deelbaarheidskenmerken voor deelbaarheid van een natuurlijk getal door 2, 3, 4, 5 en 9.

## 7 Wortels

### 7.1 Vierkantswortels

- a. Leerlingen kennen de betekenis van (vierkants)wortels van natuurlijke getallen.
- b. Leerlingen kunnen zulke wortels in standaardvorm brengen, bijvoorbeeld  $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ .
- c. Leerlingen kennen de betekenis van (vierkants)wortels van positieve breuken.
- d. Leerlingen kunnen zulke wortels in standaardvorm brengen, bijvoorbeeld  $\sqrt{\frac{7}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{35}$ .
- e. Leerlingen kunnen (benaderingen van) wortels berekenen met behulp van een rekenmachine.
- f. Leerlingen kunnen wortels schrijven als machten met  $\frac{1}{2}$  als exponent. *Voorbeeld:*  $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ .
- g. Leerlingen kennen de rekenregels voor wortels en kunnen die toepassen.

### 7.2 Hogeremachtswortels

- a. Leerlingen kennen de betekenis van hogeremachtswortels van natuurlijke getallen en breuken.
- b. Leerlingen kunnen zulke wortels schrijven als machten met een breuk als exponent. *Voorbeeld:*  $\sqrt[3]{15} = 15^{\frac{1}{3}}$ .

- c. Leerlingen kunnen (benaderingen van) zulke wortels berekenen met behulp van een rekenmachine.
- d. Leerlingen kennen de rekenregels voor hogere machtswortels en kunnen die toepassen.

## 8 Referentieniveaus en kwaliteiten

In het rapport van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen worden drie referentieniveaus onderscheiden: *referentieniveau 1* aan het einde van groep 8 van de basisschool (leeftijdindicatie: 12 jaar), *referentieniveau 2* aan het einde van het vmbo, respectievelijk het einde van de onderbouw (eind klas 3) van havo of vwo (leeftijdindicatie: 15 – 16 jaar), en *referentieniveau 3* aan het einde van het mbo, respectievelijk havo of vwo (leeftijdindicatie: 18 – 20 jaar). Elk van de drie niveaus heeft twee kwaliteiten: een *fundamentele kwaliteit* en een *streefkwaliteit*. In het rapport wordt de kwaliteitsonderscheiding beschreven en aan de hand van voorbeeldopgaven nader vastgelegd. De opsomming hieronder verwijst naar de hoofdstuk- en paragraafnummers van de vorige bladzijden.

Nogmaals wordt benadrukt dat het hier uitsluitend gaat om het domein rekenen in strikte zin. Andere onderdelen van de wiskunde, bijvoorbeeld algebra, meetkunde, tabellen, functies en grafieken, irrationaliteit, worden hier buiten beschouwing gelaten.

### 8.1 Referentieniveau 1 (12 jaar)

Het onderscheid tussen fundamentele kwaliteit (1F) en streefkwaliteit (1S) ligt op dit referentieniveau niet in de inhoud, doch slechts in de beheersing van de genoemde vaardigheden. Dit onderscheid wordt in het rapport van de Expertgroep uitgewerkt, onder andere met behulp van voorbeeldopgaven.

1. Rekenen met natuurlijke getallen: volledig
2. Rekenen met kommagetallen: volledig
3. Rekenen met breuken: volledig

### 8.2 Referentieniveau 2 (15-16 jaar)

Fundamentele kwaliteit 2F

1. Rekenen met natuurlijke getallen: volledig
2. Rekenen met kommagetallen: volledig
3. Rekenen met breuken: volledig
4. Rekenen met negatieve getallen: volledig
5. Machten: 5.1

Streefkwaliteit 2S

1. Rekenen met natuurlijke getallen: volledig
2. Rekenen met kommagetallen: volledig

3. Rekenen met breuken: volledig
4. Rekenen met negatieve getallen: volledig
5. Machten: volledig
6. Ontbinden in factoren, priemgetallen: volledig
7. Wortels: volledig

### **8.3 Referentieniveau 3 (18-20 jaar)**

De fundamentele kwaliteit en de streefkwaliteiten  $3F$  en  $3S$  zijn voor het domein rekenen inhoudelijk grotendeels gelijk aan de respectievelijke fundamentele en streefkwaliteiten  $2F$  en  $2S$  van referentieniveau 2. Met andere woorden, voor het domein rekenen behoeven die kwaliteiten slechts te worden onderhouden; uitbreiding is niet nodig.