

Contexten en eindexamens

Jan van de Craats*

2 april 2007

In haar *Standpunt ten aanzien van de wiskundevoorstellen havo en vwo voor 2007 en later* [1] pleit de resonansgroep wiskunde voor splitsing van het centrale schriftelijke eindexamen (CE) voor alle wiskundevakken van havo en vwo in twee delen: een deel zonder hulpmiddelen (grafische rekenmachine en formulekaart) en een deel met hulpmiddelen. Daarnaast doet de resonansgroep de aanbeveling de rol van contexten in het wiskundeonderwijs te heroverwegen. In dit artikel zal ik nader ingaan op enige achtergronden van deze voorstellen. De bijlage op bladzijde 10 bevat een chronologisch overzicht van de recente ontwikkelingen met betrekking tot de examenprogramma's.

Contexten in het wiskundeonderwijs

Over de rol van contexten in het wiskundeonderwijs bestaan verschillende opvattingen. Consensus is er echter over het feit dat contexten een belangrijke rol kunnen spelen bij de introductie van nieuwe begrippen. Denk bijvoorbeeld aan goniometrische functies, e-machten en logaritmen. Of aan kansrekening en statistiek. Verder zijn alle betrokkenen het erover eens dat contexten bij speciale projecten inspirerend en motiverend kunnen werken, bijvoorbeeld bij praktische opdrachten en profielwerkstukken.

In zulke gevallen kan ook uitgebreid aandacht worden besteed aan kritische modelvorming, dat wil zeggen aan de vertaling van de context naar een wiskundig model en een discussie van de validiteit van die modelkeuze. Dit is van groot belang bij vrijwel alle toepassingen van de wiskunde. Ook bij het nieuwe verdiepingsvak wiskunde D voor havo en vwo zullen juist dit soort aspecten aan de orde kunnen komen.

Contexten, met aandacht voor de bijbehorende wiskundige modelvorming, vormen zo inderdaad een verrijking van het wiskundeonderwijs. Ze vereisen echter vaak een grote inzet van docenten en leerlingen en kosten dan ook veel tijd. Als je zulke contexten serieus aanpakt, zul je er namelijk terdege in moeten verdiepen.

Maar er is ook een ander gebruik van contexten in het wiskundeonderwijs, en daarop is de laatste tijd steeds meer kritiek te horen. Niet alleen in publicaties van de resonansgroep wiskunde, maar bijvoorbeeld ook in het visiedocu-

*De auteur is voorzitter van de resonansgroep wiskunde. Dit artikel is op persoonlijke titel geschreven. Het is de uitwerking van zijn voordracht tijdens de Eindconferentie op 15 februari 2007 aan de Universiteit Twente van het MathMatch-project (zie ook [6]).

ment 'Rijk aan betekenis' [2] van de commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (cTWO). Die kritiek richt zich op gekunstelde contexten waarin formules ongemotiveerd uit de lucht komen vallen en waarin het verhaal alleen maar een aanleiding is om wat te rekenen of wat met formules te stoeien. Wie de huidige schoolboeken inkijkt of recente eindexamenopgaven raadpleegt, komt er tientallen voorbeelden van tegen.

Zulke contexten zijn naar mijn stellige overtuiging schadelijk en contraproductief. Ze geven namelijk een volstrekt verkeerd beeld van de manier waarop wiskunde in de beroepspraktijk, in het onderzoek en in het vervolgonderwijs wordt gebruikt. Bovendien frustreren ze het ontwikkelen van een kritische houding met betrekking tot wiskundige modelvorming. Je moet immers meestal de gegeven context kritiekloos aanvaarden omdat je anders de som niet kunt maken.

Contexten in examenopgaven

Elke docent weet hoe belangrijk de rol van het centraal schriftelijk eindexamen (CE) voor het wiskundeonderwijs is. Het visiedocument [2] van cTWO onderstreept dit: *Het CE is in Nederland in de praktijk een richtinggevende standaard voor het niveau van het schoolexamen en het onderwijs als geheel – scholen richten zich met het schoolexamen immers veelal op het CE. Daarmee bepaalt het voor een belangrijk deel de invulling van de eindtermen.* Als je dus veranderingen in het wiskundeonderwijs aan wilt brengen, kun je niet om de rol van de eindexamens heen.

En dat veranderingen noodzakelijk zijn, met name bij de havo- en vwo-vakken wiskunde A en wiskunde B, staat buiten kijf. Er is de afgelopen tien jaar namelijk een aansluitingsprobleem ontstaan van voortgezet onderwijs naar hoger onderwijs. Aankomende studenten vertonen een ernstig gebrek aan rekenvaardigheid, formulevaardigheid en kennis van elementaire functies. Het is niet toevallig dat het ontstaan van die aansluitingsproblematiek samenvalt met de introductie van de grafische rekenmachine (GR) en de formulekaart als toegestane hulpmiddelen bij het eindexamen. Ik zal dat illustreren aan de hand van enige vwo-eindexamenopgaven van vorig jaar.

Maar voordat ik aan die voorbeelden begin, wil ik een belangrijke opmerking maken. Niets is gemakkelijker dan het bekritisieren van eindexamenopgaven. De vele eisen waaraan zulke opgaven moeten voldoen, leggen de samenstellers ervan enorme beperkingen op. Prachtige ideeën worden in de loop van het constructieproces niet zelden steeds verder uitgehold omdat er bij zo'n examen absoluut geen ongelukken mogen gebeuren. Het examen moet maakbaar zijn en voldoen aan de verwachtingen die leerlingen en leraren hebben.

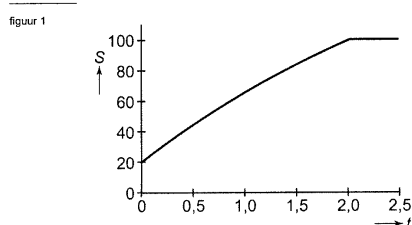
Juist omdat ik zelf jarenlang voorzitter geweest ben van de sectie wiskunde van de CEVO, weet ik hoe zorgvuldig de examenprocedures worden doorlopen en met hoeveel inzet en deskundigheid de constructiegroepen tewerkgaan. De opmerkingen over examenopgaven hieronder zijn daarom niet bedoeld als kritiek op de ontwerpers of de CEVO. Ze willen slechts de mechanismen blootleggen die resulteren in het feit dat veel studenten het hbo of de universiteit binnengaan met een voldoende examencijfer voor wiskunde, maar niettemin toch niet beschikken over de wiskundige vaardigheden die voor het

vervolgonderwijs noodzakelijk zijn. Dat wordt duidelijk uit de resultaten van diagnostische instaptoetsen wiskunde die het hoger onderwijs afneemt en die volledig betrekking hebben op officieel vastgestelde havo- of vwo-stof. Intensieve bijspijkercurricula zijn het gevolg. In het artikel [6] van André Heck en Nellie Verhoef over het MathMatch-project van de Digitale Universiteit wordt van al deze bijspijkeractiviteiten een uitgebreid overzicht gegeven.

■ Sauna

Om 15.00 uur wordt het verwarmingselement van een sauna aangezet. Vanaf dat moment wordt de sauna opgewarmd. Dan geldt: $S(t) = 200 - 180 \cdot e^{-0,29t}$. Hierin is S de temperatuur in de sauna in graden Celsius en t de tijd in uren vanaf 15.00 uur.

De thermostaat van de sauna is ingesteld op 100 °C. Zodra die temperatuur bereikt is, wordt het opwarmen gestopt. Vanaf dat moment wordt de temperatuur constant gehouden. In figuur 1 staat de grafiek van S .



- 4p 1 Bereken hoe laat het opwarmen wordt gestopt. Geef het tijdstip in minuten nauwkeurig.
- 4p 2 Bereken met behulp van differentiëren de snelheid waarmee de temperatuur in de sauna toeneemt om 16.00 uur. Geef je antwoord in tienden van graden Celsius per minuut.
- Om bij een ingestelde temperatuur van de thermostaat uit te rekenen hoe lang de sauna nodig heeft om deze temperatuur te bereiken, kun je een formule gebruiken die t uitdrukt in S .
- 4p 3 Druk t uit in S .

Figuur 1: Een examenopgave vwo wiskunde B, 2006.

Een examenopgave vwo wiskunde B

Figuur 1 laat de gemeenschappelijke eerste opgave zien van de vwo-examens wiskunde B1 en wiskunde B12 van 2006 (eerste tijdvak, zie [4]). Het is een typisch voorbeeld van een opgave waarin noch de context (een sauna, in dit geval), noch de modelvorming een wezenlijke rol spelen. De context fungeert slechts als ruis.

De wiskundige kern van de opgave ligt besloten in de formule $S(t) = 200 - 180 \cdot e^{-0,29t}$. In vraag 1 moeten de kandidaten de vergelijking $S(t) = 100$ oplossen met behulp van de grafische rekenmachine (GR). In vraag 2 gaat het om de berekening van $S'(100)$. De benodigde formule voor de afgeleide van de e-macht en de kettingregel staan op de formulekaart en de rest gaat met de GR. In vraag 3 moet t als functie van S worden geschreven. De essentiële formule

hierbij: uit $e^A = B$ volgt $A = \ln B$, is weer te vinden op de formulekaart.

Dit is de enige opgave in het examen waarbij de voor het vervolgonderwijs zo belangrijke e-machten en logaritmen een rol spelen. Hun kenmerkende eigenschappen worden niet getoetst: GR en formulekaart doen al het werk. Wat het gevolg daarvan is, laat een opgave zien uit de instaptoets van de drie technische universiteiten die dezelfde kandidaten drie maanden later voorgezet kregen als ze aan een technische studie begonnen. Gebruik van GR en formulekaart waren daarbij niet toegestaan.

Die toets bestond uit 22 korte meerkeuzevragen. In Figuur 2 staat opgave 9. De percentages en het commentaar zijn van de Universiteit Twente (zie ook [3]). Slechts 35 procent kon deze opgave de baas. Niet minder dan 39 procent denkt dat $\frac{1}{2} \ln 16 = \ln 8$. Verder denkt 21 procent dat $\ln 16 = (\ln 4)^2$ en naar wat de overige 5 procent heeft gedacht, kan men slechts gissen. Duidelijk is wel dat 65 procent van de populatie geen flauw idee heeft van de eigenschappen van logaritmen. En dat voor studenten aan een TU, met vrijwel allemaal wiskunde B12 in hun pakket!

<p>9. De oplossing van de vergelijking $e^{2x} = 16$ is</p> <p>A. $\ln(4)$ B. $\ln(8)$ C. $\frac{(\ln(4))^2}{2}$ D. $\ln(64)$</p>	<p>A. 35% B. 39% C. 21% D. 5%</p> <p><i>E-machten en logaritmen worden traditioneel slecht gemaakt, ook met formulekaart.</i></p>
	<p>Antwoord: A</p>

Figuur 2: Een opgave uit de instaptoets 2006 van de drie technische universiteiten.

Het is natuurlijk maar één voorbeeld, maar de andere 21 vragen geven hetzelfde beeld: een volstrekt gebrek aan de wiskundige vaardigheden die voor een technische studie noodzakelijk zijn. Instaptoetsen aan andere universiteiten bij de bètarichtingen vertonen soortgelijke resultaten. Ook bij de overgang van havo wiskunde B naar de exacte hbo-richtingen zijn er zulke ernstige aansluitingsproblemen, en ook daar kunnen de aard van de eindexamenopgaven en de rol daarbij van GR en formulekaart als belangrijkste oorzaak worden aangemerkt.

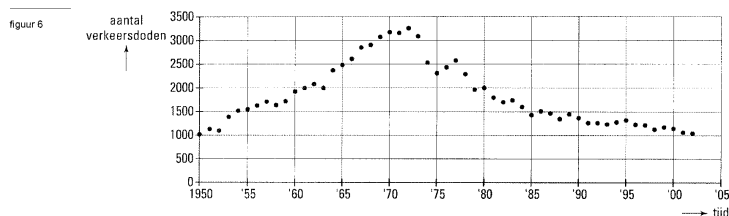
Examenopgaven vwo wiskunde A

Het vak wiskunde A bereidt voor op opleidingen in de economische en de (para-)medische sector (wiskunde A havo) respectievelijk universitaire studies met een sociaal, economisch, bedrijfskundig of medisch-biologisch karakter (wiskunde A vwo). Ook daarbij zijn er ernstige aansluitingsproblemen, die in alle opzichten vergelijkbaar zijn met de aansluitingsproblemen van wiskunde B. Ook daar is er een grote discrepantie tussen de officiële examenstof, die ook in het vervolgonderwijs gebruikt wordt, en de wiskundige vaardigheden

die de aankomende studenten daadwerkelijk beheersen, vooral op het gebied van de analyse. En ook daar kunnen de aard van de examenopgaven en de rol van de GR en de formulekaart als de belangrijkste oorzaken van dit aansluitingsprobleem worden aangemerkt.

Meer nog dan bij wiskunde B worden de examenopgaven bij wiskunde A door contexten gedomineerd. Het Visiedocument [2] van cTWO zegt daarover: *In de examens wiskunde A bestaat er een traditie van opgaven waarin de context essentieel is voor de vraag: de context is feitelijk de vraag. De commissie beschouwt dit als een goede situatie (...).* De vervolgoopleidingen, met name de universitaire studierichtingen economie en bedrijfskunde, gezamenlijk goed voor duizenden eerstejaarsstudenten per jaar, denken hier echter heel anders over, zoals ik nog zal laten zien!

In figuur 6 zie je een grafiek van het aantal verkeersdoden voor de jaren 1950 tot en met 2002.



In figuur 6 is te zien dat het aantal verkeersdoden het grootst was in 1972. Toen waren er 3264 verkeersdoden. Door een actief beleid inzake verkeersveiligheid is sinds die tijd het aantal verkeersdoden afgenomen tot 1066 in het jaar 2002. Weliswaar steeg het aantal verkeersdoden in sommige jaren, maar toch is er een duidelijke dalende trend waarneembaar in de periode 1972-2002. We kunnen deze trend beschrijven met een model waarbij het aantal verkeersdoden exponentieel afneemt van 3264 in 1972 tot 1066 in 2002. Volgens dit model zou het aantal verkeersdoden tussen 1972 en 2002 jaarlijks met een vast percentage dalen.

4p 18 □ Bereken dit percentage.

Het verloop van het aantal verkeersdoden, zoals je dat ziet in figuur 6, kan bij benadering worden beschreven met de volgende formule:

$$N = 0,8 + \frac{t+2}{10 + (0,04t)^{6,8}}$$

In deze formule is N het aantal verkeersdoden per jaar in duizendtallen en t is de tijd in jaren vanaf 1950, dus $t = 0$ in 1950.

Deze formule is slechts een model dat hoort bij figuur 6. Daarom komt de grafiek die hoort bij de formule niet precies overeen met de grafiek uit figuur 6. Een belangrijk verschil is bijvoorbeeld dat volgens de formule de piek in het aantal verkeersdoden niet in 1972 plaatsvond, maar in een ander jaar.

3p 19 □ Onderzoek in welk jaar de piek plaatsvond volgens bovenstaande formule.

Figuur 3: Vragen uit het examen vwo wiskunde A12, 2006.

Maar eerst geef ik weer enige voorbeelden om te illustreren wat er getoetst wordt en hoe er wordt getoetst. Deze voorbeelden zijn ontleend aan het eerste tijdvak van het examen vwo wiskunde A12 van 2006. Ze illustreren ieder op hun manier ook de bezwaren die ik hierboven geformuleerd heb tegen het gebruik van contexten in examenvraagstukken: gekunstelde vragen, formules die uit de lucht komen vallen en geen aandacht voor kritische modelvorming. Het zijn zulke examenvragen waartegen de resonansgroep in haar *Standpunt* [1] bezwaar maakt: *De resonansgroep is van oordeel dat examenopgaven alleen in een context geplaatst mogen worden wanneer die context bestand is tegen een kritische*

analyse en wanneer de vraagstelling in de opgave uitmondt in het oplossen van zinnige problemen met daartoe geëigende wiskundige hulpmiddelen. Zij ziet liever contextloze opgaven dan opgaven waarin niet aan deze voorwaarden is voldaan.

Figuur 3 geeft twee vragen uit een grote opgave over verkeersslachtoffers in Nederland. De grafiek laat het jaarlijkse aantal verkeersdoden zien in de periode van 1950 tot 2002. Zo op het oog is er tot het begin van de jaren 70 een vrijwel lineaire toename terwijl er daarna ('door een actief beleid inzake verkeersveiligheid') een dalende trend is waar te nemen. Vraag 18 heeft betrekking op die tweede periode. Als model wordt exponentiële daling verordonneerd, en de kandidaten wordt gevraagd het jaarlijkse dalingspercentage volgens dit model te berekenen, uitgaande van 3264 doden in 1972 en 1066 doden in 2002. Dit is een vraag waar de kandidaten goed op zijn voorbereid, en met behulp van de GR is het antwoord snel gevonden (zie Figuur 4).

- Maximumscore 4**
- 18 □ • De groeifactor per 30 jaar is $\frac{1066}{3264}$ ($\approx 0,3266$)
- De groeifactor per jaar is $\left(\frac{1066}{3264}\right)^{\frac{1}{30}}$
 - De groeifactor is (ongeveer) 0,963
 - Dat is een jaarlijkse afname met 3,7% (of 4%)
- of
- het opstellen van de vergelijking $3264 \cdot g^{30} = 1066$
 - beschrijven hoe met de GR deze vergelijking kan worden opgelost
 - De groeifactor g is (ongeveer) 0,963
 - Dat is een jaarlijkse afname met 3,7% (of 4%)
- Maximumscore 3**
- 19 □ • het gebruik van een geschikte optie van de GR om de waarde van t van de piek te berekenen
- De piek treedt op bij $t = 27$
 - Dat is in het jaar 1977

Figuur 4: Uit het correctievoorschrift bij de vragen van figuur 3.

Toch wringt er iets, zoals uit de inleidende tekst bij de volgende opgave ook al blijkt: als er werkelijk sprake is van exponentiële afname, gaat het aantal verkeersslachtoffers op den duur naar nul, en dat is niet erg realistisch. Het model wordt daarom bijgesteld. Voor de hand ligt om een constante bij de exponentiële daling op te tellen zodat er een functie van de vorm $A \cdot g^t + B$ ontstaat. De constanten kun je vervolgens zo kiezen dat de data in de periode 1972–2002 er zo goed mogelijk bij passen.

In plaats daarvan toveren de examenmakers een totaal andere functie uit de hoge hoed die pretendeert het hele traject vanaf 1950 te beschrijven. Wat voor een indruk moeten leerlingen krijgen van een dergelijke wijze van modelvorming, waarbij twee duidelijk gescheiden trajecten tot één functievoorschrift worden verenigd?

Ook van de bijbehorende vraag 19 is de realiteitswaarde vrijwel nihil. Men zou er nog vrede mee kunnen hebben als ermee getoetst zou worden of leerlingen enig begrip hebben van de manier waarop in de wiskunde een maximum wordt bepaald met behulp van de afgeleide, maar ook daarvan is geen sprake. Blijkens het correctievoorschrift wordt al het werk gedaan door de GR.

Voor alle duidelijkheid herhaal ik weer mijn opmerkingen van hierboven: deze kritiek is niet bedoeld om de examenmakers in een kwaad daglicht te stellen: het examen voldoet ongetwijfeld volledig aan de verwachtingen van leraren en leerlingen, maar vanuit een hoger standpunt bekeken stel ik de vraag aan de orde of zulke examenvragen goed voorbereiden op de wiskunde die in de vervolgoopleidingen wordt gebruikt.

Een roofdier van soort C is in totaal 1 uur onderweg. Voor deze roofdieren is de opbrengstfunctie gegeven door de formule:

$$r = 4\sqrt{t-1} \text{ als } t > 1 \text{ (voor het eerste uur geldt: } r = 0)$$

Hierin is t de tijd in uren en r de hoeveelheid gevonden voedsel in ee.

Deze opbrengstfunctie r heeft voor $t > 1$ de volgende twee eigenschappen:

- een langere tijd levert altijd een hogere opbrengst op;
 - de toename van de opbrengst wordt steeds geringer naarmate t groter wordt.
- Deze twee eigenschappen zijn zichtbaar in de grafiek van r , maar ze kunnen ook worden verklaard aan de hand van de grafiek van de afgeleide van r .

- sp 11 □ Schets de grafiek van de afgeleide van r en verklaar de beide eigenschappen aan de hand van deze grafiek.

Figuur 5: Een andere vraag uit het examen vwo wiskunde A12, 2006.

Dat haast al het wiskundige werk in het wiskunde A examen aan de GR kan worden gedelegeerd, blijkt ook uit een andere vraag uit hetzelfde examen (zie figuur 5). Het gaat hierbij om een prooi-roofdiervraagstuk waarvoor een wortelfunctie als model wordt geponeerd. Gevraagd wordt de afgeleide te schetsen en aan de hand daarvan twee kwalitatieve uitspraken toe te lichten. Uit het correctievoorschrift blijkt dat vaardigheid in het differentiëren voor het beantwoorden van deze vraag niet nodig is: je kunt de GR de grafiek van de afgeleide laten tekenen.

$$11 \square \bullet r = 4(t-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\bullet r' = \frac{2}{\sqrt{t-1}} \text{ (of } r' = 2 \cdot (t-1)^{-\frac{1}{2}})$$

• een schets van de grafiek van r'

• 1e eigenschap: r' is overal positief, dus moet r overal stijgen

• 2e eigenschap: de grafiek van r' is overal dalend, dus de toename van de opbrengst is steeds geringer

of

• de GR instellen op het tekenen van de grafiek van r'

• een schets van de grafiek van r'

• 1e eigenschap: r' is overal positief, dus moet r overal stijgen

• 2e eigenschap: de grafiek van r' is overal dalend, dus de toename van de opbrengst is steeds geringer

Figuur 6: Uit het correctievoorschrift bij vraag 11.

Ik merk nog op dat dit de enige vraag in het gehele examen is waarbij differentiëren ter sprake komt. Het voorstel van de PEP-commissie vwo-wiskunde A om de rekenregels voor differentiëren niet meer te toetsen in het centraal schriftelijk eindexamen lijkt dus een bevestiging te zijn van een bestaande praktijk. Op advies van de resonansgroep heeft minister Van der Hoeven dit voorstel in haar besluiten van 14 december 2006 echter afgewezen: de rekenregels blijven examenstof en zullen in de toekomst dus weer worden geëxamineerd (zie

bijvoorbeeld de homepage van de resonansgroep [1] voor de besluiten van de minister).

Welke wiskunde willen de universitaire opleidingen economie en bedrijfskunde?

Drs. Herman ten Napel, lid van de resonansgroep wiskunde en als docent wiskunde verbonden aan de faculteit economie en bedrijfskunde van de Universiteit van Amsterdam, organiseert jaarlijks een bijeenkomst van wiskundedocenten aan universitaire opleidingen economie, econometrie en bedrijfskunde. Op 29 juni 2005 heeft hij namens die opleidingen een brief aan de CEVO verstuurd over de aansluitingsproblematiek wiskunde, en op 2 december 2005 een brief aan (toenmalig) staatssecretaris Rutte over hetzelfde onderwerp. De opleidingen klagen daarin over de discrepantie tussen het officiële examenprogramma vwo wiskunde A en de wiskundige vaardigheden die aankomende studenten met dat diploma op zak daadwerkelijk bezitten: *Het manipuleren met wat meer ingewikkelde algebraïsche formules, (wortels, breuken, haakjes, exponenten e.d.) ontbreekt vrijwel volledig. Het differentiëren van functies beperkt zich tot de meest eenvoudige machtsfuncties, terwijl de wat verdergaande differentieer-regels (productregel, kettingregel) nooit aan bod komen. Dit heeft tot gevolg dat er op sommige scholen zelfs een neiging bestaat om de hele differentiaalrekening maar over te slaan, want "daar wordt toch (vrijwel) niets over gevraagd".*

In het kader van zijn lidmaatschap van de resonansgroep heeft Ten Napel zijn destijds opgestelde lijst van gewenste wiskundige onderwerpen (die allemaal ook tot de officiële examenstof vwo wiskunde A behoren) aan de wiskundedocenten van de faculteiten economie en bedrijfskunde van Groningen, Rotterdam, Amsterdam (VU en UVA), Wageningen, Maastricht, Tilburg en Utrecht ter goedkeuring voorgelegd. De aldus geaccordeerde lijst is beschikbaar op zijn homepage (toegankelijk via de site van de resonansgroep [1]). Waar het om gaat zijn zaken als rekenvaardigheid, formulevaardigheid, kennis van elementaire functies en differentiaalrekening. Niet de stof die thans in wiskunde A wordt geëxamineerd, maar de traditionele wiskundige vaardigheden. Die worden vervolgens in voortgezette wiskundevakken bij de economie- en bedrijfskundestudie gebruikt voor onderwerpen als integraalrekening, functies van meer variabelen, partiële afgeleiden, convexiteit, gradiënt *et cetera*.

Een signaal dat de nijpende situatie bij de economie en de bedrijfskunde onderstreept, verscheen op 20 januari jl. in een artikel in NRC Handelsblad over de prestaties van Nederlandse eerstejaarsstudenten aan de Universiteit van Maastricht in vergelijking met die van hun Duitse medestudenten. Een uitgebreider artikel hierover van de hand van Dirk Tempelaar is verschenen in het maartnummer 2007 van Nieuw Archief voor Wiskunde ([5]).

Wat er thans aan veel economie-faculteiten gebeurt, is een stoomcursus van 7 tot 8 weken waarin de gehele analyse-stof van het vwo in hoog tempo, en zonder enige aandacht voor contexten, wordt herhaald, te beginnen met haakjes uitwerken, en eindigend met de rekenregels voor differentiëren. Natuurlijk is het niet eenvoudig voor de studenten om zich de stof in zo'n tempo eigen te maken, maar ze moeten wel, want daarna wordt erop voortgebouwd, en in sommige gevallen (bijvoorbeeld aan de UVA) volgt een negatief bindend stu-

dieadvies als ze het bijbehorende tentamen niet halen.

Veel leraren zeggen dat dit volstrekt onterecht is: volgens hen moeten de faculteiten aansluiten op de schoolstof en niet omgekeerd. Maar waarom eigenlijk? Waar staan de letters vwo ook al weer voor? En laat men zich ook goed realiseren dat de leerlingen opgaven als die van de eindexamens en de schoolboeken nooit in hun studie tegen zullen komen. Daar is het vak zelf de context. De wiskunde is een van de instrumenten die ze gewoon moeten kunnen gebruiken, net als Engels of Nederlands.

Denk overigens niet dat de inhoud van de wiskundevakken aan de opleidingen economie en bedrijfskunde vooral bepaald wordt door hobby's van de daar aangestelde wiskundedocenten. Elk uur voor een steunvak als wiskunde moet binnen de faculteit voortdurend inhoudelijk verantwoord worden: als iets niet gebruikt wordt in het hoofdvak, wordt het onmiddellijk geschrapt want overal heersen urenkortingen en overal staan hoofdvakdocenten klaar om overschietende uren over te nemen. Hetzelfde geldt ook voor alle andere universitaire en hbo-richtingen waar wiskunde als steunvak wordt gegeven.

Een andere tegenwerping die soms gemaakt wordt, is dat economie en bedrijfskunde niet de enige studies zijn waarop wiskunde A voorbereidt. Inderdaad, maar in studentenaantallen uitgedrukt gaat het hier wel om duizenden eerstejaarsstudenten per jaar. Aan de UVA bijvoorbeeld zijn er zo'n 500 eerstejaarsstudenten, meer dan 300 ervan volgen bijspijkeronderwijs wiskunde (zie [6]). Het vwo-vak wiskunde A heeft, ook in de plannen van cTWO, de opdracht leerlingen voor deze studies een goede basis te verschaffen. Op papier is dit in orde gezien de exameneisen, maar in de praktijk worden die niet gerealiseerd.

De splitsing van de eindexamens

Uit het bovenstaande zal duidelijk zijn geworden dat de huidige examenpraktijk, met daarbij het onbeperkt gebruik van grafische rekenmachine en formulekaart het aanleren en onderhouden van rekenvaardigheden, formulevaardigheden, kennis van functies en calculus belemmert, en in de praktijk zelfs vrijwel helemaal verhindert, zowel voor wiskunde A als voor wiskunde B, en zowel voor havo als voor vwo. Want ook al heb ik korthedshalve mijn voorbeelden uit vwo-examens gehaald, voor de havo geldt precies hetzelfde.

De resonansgroep heeft zich hierover gebogen, en zich afgevraagd of het introduceren van parameters in de examenopgaven soelaas zou kunnen bieden. De huidige grafische rekenmachines kunnen daarmee niet overweg, en zo zouden formulevaardigheden toch getoetst kunnen worden. Maar in de eerste plaats staat de techniek niet stil: binnen korte tijd zullen grafische rekenmachines met computeralgebra gemeengoed zijn, en het is erg kunstmatig om die dan te blijven verbieden. Veel beter is het, en dat is ook de keuze van de resonansgroep, om een deel van de examens zonder GR en formulekaart af te nemen. Dat geeft een duidelijk signaal aan het onderwijs, en het zal naar verwachting ook de instaptoetsen en bijspijkerkursussen overbodig maken. Natuurlijk moet over de precieze realisatie hiervan uitgebreid overleg gepleegd worden zodat leerlingen en leraren niet voor verrassingen worden geplaatst. Overleg hierover zal op korte termijn plaatsvinden. In haar besluiten van 14 december

2006 naar aanleiding van het standpunt van de resonansgroep schrijft minister Maria van der Hoeven: *Over die suggestie [nl. om de examens te splitsen – JvdC] zal de CEVO een nader oordeel geven, na overleg met betrokken vakdeskundigen, toetsdeskundigen en leraren/schoolleiders. Ook de resonansgroep realiseert zich, dat het hier alleen al om redenen van organisatie en belasting niet gaat om een eenvoudige zaak.*

Dankbetuiging: Graag dank ik Nan van Geloven en Wim Caspers voor hun commentaar op een eerdere versie van dit artikel.

Noten:

[1] Standpunt van de Resonansgroep wiskunde t.a.v. de wiskundevoorstellen havo en vwo voor 2007 en later. Zie www.resonansgroepwiskunde.nl

[2] Rijk aan betekenis – Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs, Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs (cTWO). Zie www.fi.uu.nl/ctwo/

[3] Instaptoetsen van de drie Technische Universiteiten en van de Universiteit van Amsterdam zijn beschikbaar op de website van het MathMatch-project van de Digitale Universiteit: <http://www.mathmatch.nl/onderwerpen.diag.php>

[4] De havo- en vwo-examens zijn o.a. te vinden op de volgende website: <http://www.eindexamens.leidenuniv.nl/>

[5] Dirk Tempelaar, *Onderwijzen of bijspijkeren?* Nieuw Archief voor Wiskunde, vijfde serie, deel 8, nummer 1, maart 2007, 55–59

[6] André Heck, Nellie Verhoef, *MathMatch: aansluitingsmodule voor wiskunde*, Euclides 82, maart 2007, p. 187-190

Bijlage: kort chronologisch overzicht van gebeurtenissen

- Begin 2006: Actie LieveMaria, debat Tweede Kamer.
- 31 januari 2006: Brief minister OCW aan Tweede Kamer over wiskunde in Tweede Fase.
- 14 februari 2006: Tweede Kamer aanvaardt unaniem de voorstellen van de minister.
- 14 februari 2006: Tweede Kamer aanvaardt unaniem een motie die vraagt om instelling van een resonansgroep wiskunde met als taak de voorstellen van de Vernieuwingscommissie wiskunde (cTWO, cie. Siersma) te beoordelen op hun doorstroomrelevantie.
- 23 augustus 2006: Installatie resonansgroep wiskunde.
- Augustus 2006: Tweede Kamer vraagt de resonansgroep ook commentaar te geven op de voorgestelde profielaanpassingen wiskunde voor de Tweede Fase op de korte termijn.
- September 2006: cTWO publiceert het concept-visiedocument 'Rijk aan betekenis'.

- Begin november 2006: Resonansgroep publiceert haar *Standpunt* t.a.v. de korte-termijnproblematiek.
- Begin november 2006: Resonansgroep publiceert een reactie op het concept-visiedocument cTWO.
- 14 december 2006: Minister publiceert haar besluiten met betrekking tot de profielaanpassingen.
- 7 februari 2007: cTWO publiceert definitieve versie visiedocument.