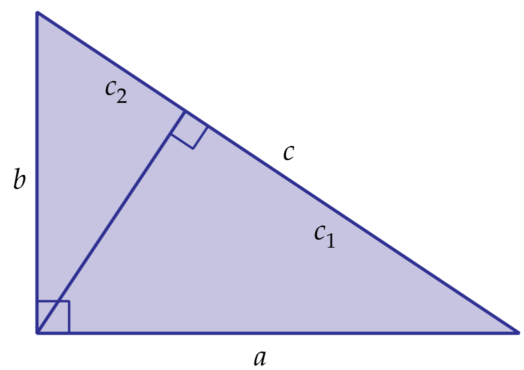
Pythagoras met cosinussen

Jan van de Craats

Zonder twijfel is de stelling van Pythagoras de bekendste stelling uit de meetkunde. Velen zullen zich zonder moeite de magische formule $a^2 + b^2 = c^2$ herinneren. Misschien weten ze ook nog dat het gaat over rechthoekige driehoeken met rechthoekszijden van lengte a en b en een hypotenusa (schuine zijde) van lengte c.

Twee mooie bewijzen

Het aantal bewijzen van de stelling is legio. Een van de eenvoudigste maakt gebruik van de hoogtelijn op de hypotenusa (zie figuur 1). Die verdeelt de driehoek in twee kleinere driehoeken, die beide gelijkvormig zijn met de oorspronkelijke driehoek. Daaruit volgt enerzijds dat $c_1/a = a/c$, dus $a^2 = c_1 c$, en anderzijds dat $c_2/b = b/c$, dus $b^2 = c_2 c$. Optellen geeft $a^2 + b^2 = (c_1 + c_2)c = c^2$, klaar.

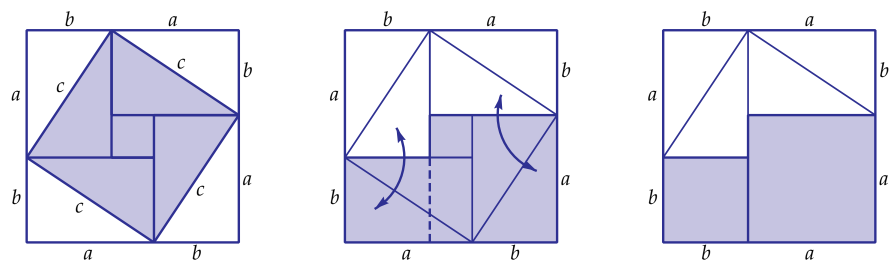


Figuur 1. De hoogtelijn op de hypotenusa.

Bij dit bewijs spelen vierkanten geen rol. Dat is anders bij de meeste 'legpuzzelbewijzen', waarbij wordt aangetoond dat een vierkant met zijde c opgeknipt kan worden in twee vierkanten met zijden a en b. Mijn favoriete legpuzzelbewijs staat in figuur 2: Het is een bewijs zonder woorden: kijken naar de opeenvolging van plaatjes volstaat. Bovendien kun je er ook nog illustraties in zien van de volgende algebraïsche identiteiten (voor positieve a en b):

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$



Figuur 2. Een legpuzzelbewijs.

Rechthoekige boldriehoeken

Wanneer een bewijs van de stelling van Pythagoras ter sprake komt, kan ik het meestal niet laten om te vragen wat er daarbij mis gaat als je het toepast op het boloppervlak. Daarop heb je immers ook driehoeken, gevormd door bogen van grote cirkels, en die kunnen elkaar ook onder een rechte hoek snijden. Er bestaan dus ook rechthoekige driehoeken op de bol, maar de stelling van Pythagoras in de bekende vorm $a^2 + b^2 = c^2$ geldt zeker niet. Neem maar het bijzondere geval van een boldriehoek die een volledig octant beslaat: die heeft drie zijden van gelijke lengte (en drie rechte hoeken).

Wat er in het bovengenoemde hoogtelijnbewijs misgaat, is dat de hoogtelijn op de hypotenusa een rechthoekige boldriehoek *niet* in twee deeldriehoeken verdeelt die met de oorspronkelijke driehoek gelijkvormig zijn. En de legpuzzelbewijzen lopen allemaal spaak omdat je op de bol geen vierkanten hebt: er bestaan daar überhaupt geen vierhoeken met vier rechte hoeken.

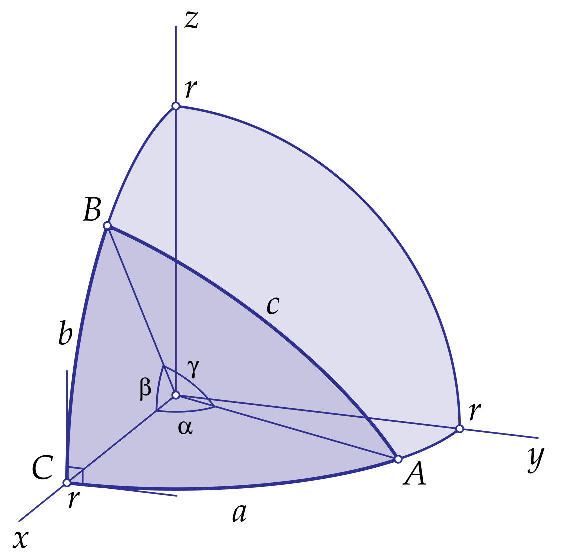
Toch geldt er wel degelijk een soort stelling van Pythagoras op de bol, en die heeft een verrassend eenvoudige vorm, namelijk

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$$

waarbij de betekenis van de hoeken α, β en γ uit figuur 3 kan worden afgelezen. Driehoek ABC is een rechthoekige driehoek op de bol met een rechte hoek in C. De straal van de bol heb ik r genoemd, en de zijden van de driehoek zijn bogen van grote cirkels die vanuit het middelpunt van de bol gezien, hoeken α, β en γ opspannen.

Als die hoeken in radialen worden gemeten, hebben de cirkelbogen (de zijden van de driehoek) lengte $a = \alpha r$, $b = \beta r$ en $c = \gamma r$ dus in termen van de zijdelengten kan de stelling van Pythagoras op de bol ook geformuleerd worden als

$$\cos(c/r) = \cos(a/r)\,\cos(b/r)$$



Figuur 3. Pythagoras op de bol: $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

Vectoren en inproduct

Een bewijs van de stelling van Pythagoras op de bol gaat het gemakkelijkst met behulp van vectoren en het inwendig product (inproduct). Het inproduct van twee vectoren **p** en **q** kan meetkundig worden gedefinieerd als

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{p}||\mathbf{q}|\cos\varphi$$

waarin φ de hoek is tussen **p** en **q**. Het is niet moeilijk om aan te tonen dat het inproduct, uitgedrukt in coördinaten ten opzichte van een orthonormale basis, gelijk is aan

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$$

Zie nu weer figuur 3. Neem daarin het middelpunt van de bol als de oorsprong O, leg de positieve x-as door C, en kies de punten A en B respectievelijk in het xy-vlak en het xz-vlak. Dan geldt $A = (r\cos\alpha, r\sin\alpha, 0)$, $B = (r\cos\beta, 0, r\sin\beta)$ en $C = (r, 0, 0)$. De beide vectoren OA en OB hebben lengte r en hun ingesloten hoek is γ. Hun inproduct is dus gelijk aan $r^2\cos\gamma$. Maar in coördinaten uitgedrukt is hun inproduct gelijk aan $r^2\cos\alpha\cos\beta$. Gelijkstellen van de beide uitdrukkingen en delen door r^2 voltooit het bewijs.

Het is leerzaam om zelf bijzondere gevallen te bekijken. Klopt de stelling bijvoorbeeld als $\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$? Hoe zit het als de rechthoekige boldriehoek ABC gelijkbenig is, dus als $a = b$ of als $a = c$? En kunnen die cosinussen ook negatief worden? Wat is er dan aan de hand?

Kleine driehoeken

Als de afmetingen van een rechthoekige boldriehoek klein zijn ten opzichte van de straal r van de bol, is de boldriehoek vrijwel vlak, dus dan zal praktisch gesproken de gewone stelling van Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ gelden. Dit kun je afleiden uit de formule

$$\cos(c/r) = \cos(a/r)\,\cos(b/r)$$

als je bij gelijk blijvende a en b de straal r naar oneindig stuurt.

Noem hiertoe $t = 1/r$ want het nemen van een limiet is makkelijker als de variabele naar 0 gaat. Herschrijf de stelling nu met behulp van de dubbelehoekformule $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ tot

$$1 - 2\sin^2(ct/2) = (1 - 2\sin^2(at/2))(1 - 2\sin^2(bt/2))$$

Haakjes uitwerken en vereenvoudigen geeft

$$\sin^2(ct/2) = \sin^2(at/2) + \sin^2(bt/2) - 2\sin^2(at/2)\sin^2(bt/2)$$

Nu zie je al wat er gebeurt als je t naar 0 stuurt: de derde term in het rechter lid gaat veel sneller naar 0 dan de eerste twee, en in de andere termen zie je de gewone stelling van Pythagoras al opdoemen. Slim herschrijven neemt elke twijfel weg:

$$\begin{aligned} c^2\left(\frac{\sin(ct/2)}{ct/2}\right)^2 &= a^2\left(\frac{\sin(at/2)}{at/2}\right)^2 + b^2\left(\frac{\sin(bt/2)}{bt/2}\right)^2 \\ &\quad -2\sin^2(at/2)\,b^2\left(\frac{\sin(bt/2)}{bt/2}\right)^2 \end{aligned}$$

en als t naar 0 gaat (dus r naar oneindig) levert de standaardlimiet

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

inderdaad de vlakke stelling van Pythagoras op.