Stichting Goed Rekenonderwijs[1]

Een voorstel voor een alternatieve kennisbasis rekenen en wiskunde voor de pabo

7 december 2009

'Teachers cannot be expected to teach what they do not know'

National Mathematics Advisory Panel
US Department of Education, March 2008

Achtergrond

Op 7 december 2009 heeft de HBO-raad een *Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo* gepresenteerd. Deze kennisbasis is opgesteld door een team van vijf auteurs uit de projecten ELWIeR en PANAMA.[2] Het document heeft onder meer tot doel de vereiste kennis voor rekenen en wiskunde aan het eind van de pabo-opleiding vast te leggen. De opdrachtgever en subsidieverstrekker van het kennisbasisproject was het ministerie van OCW; penvoerder, en dus verantwoordelijk voor de uitvoering, was de HBO-raad. Uitgangspunt bij de constructie van de verschillende kennisbases voor de lerarenopleidingen vormt de nota *Krachtig meesterschap – Kwaliteitsagenda voor het opleiden van leraren 2008-2011* (OCW 2008) van staatssecretaris Marja van Bijsterveldt van OCW.

De *Stichting Goed Rekenonderwijs* heeft fundamentele bezwaren tegen de inhoud van de gepresenteerde kennisbasis rekenen-wiskunde. Voorbijgaand aan de aanbevelingen van de *commissie Dijsselbloem*, die onder meer behelzen dat er in het onderwijs een duidelijke scheiding behoort te zijn tussen het *'wat'*, de objectieve, feitelijke inhoud van de leerstof, en het *'hoe'*, de subjectieve, didactische manier waarop onderwijsgevenden hun kennis op leerlingen en studenten overbrengen (waarbij de rol van de overheid zich dient te beperken tot het *'wat'*), hebben de opstellers van deze kennisbasis een document geproduceerd waarin geen sprake is van een dergelijke scheiding. Het zicht op de *inhoud* van het vak rekenen en wiskunde op de pabo wordt grotendeels verduisterd door een overvloed aan didactische aanwijzingen en standpunten die allemaal een onmiskenbare signatuur hebben, namelijk die van het 'realistische reken- en wiskundeonderwijs', een didactische ideologie waarvan de uitgangspunten in het document in extenso beschreven worden.

[1] `http://www.goedrekenonderwijs.nl/`
[2] zie `http://www.kennisbasispabo.nl/`

Door deze aanpak heeft de kennisbasis eerder het karakter gekregen van een didactisch handboek realistisch rekenen voor de basisschool, dan van een objectieve beschrijving van de kennis en vaardigheden waarover pabo-studenten aan het einde van hun opleiding moeten beschikken.[3] Aldus schiet het document ernstig tekort in het realiseren van zijn primaire doelstelling: het op een heldere en objectief toetsbare wijze vastleggen van de kennis op het gebied van rekenen en wiskunde die tijdens de pabo-opleiding verworven moet worden.

In overeenstemming met haar doelstellingen heeft de *Stichting Goed Rekenonderwijs* een schets voor een alternatieve kennisbasis rekenen en wiskunde voor de pabo opgesteld die zij hierbij presenteert. In dit document wordt een inhoudelijke beschrijving gegeven van een onderwijsprogramma rekenen en wiskunde zoals dat in de visie van de stichting voor de pabo's landelijk zou moeten worden ingevoerd. Aansluitend op deze alternatieve kennisbasis kunnen zonder enig probleem gezamenlijke eindtermen en eindtoetsen/examens voor alle pabo's worden ontwikkeld. Met instemming constateert de stichting dat de nota *Krachtig meesterschap* ervanuit gaat dat er centrale eindexamens rekenen en wiskunde komen voor de pabo. Daarbij acht de stichting het van groot belang dat er bij de rekenexamens geen rekenmachine wordt toegestaan omdat anders de voor toekomstige basisschooldocenten vereiste rekenvaardigheid niet kan worden getoetst.

De hierna gepresenteerde schets heeft de volgende opbouw. In hoofdstuk 1 wordt een globale karakterisering van de gewenste kennisbasis gegeven. Hoofdstuk 2 geeft een gedetailleerde presentatie van de techniek van het rekenen. In hoofdstuk 3 worden de twaalf standaardprocedures voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van gehele getallen, kommagetallen en breuken gegeven en hoofdstuk 4 bevat voorbeelden van toetsopgaven.

[3]Een goed voorbeeld van een uitgebreide studie over het reken- en wiskundeonderwijs voor de leeftijdsgroep van 4 tot 16 jaar die zich in de eerste plaats richt op het *'wat'*, is het in maart 2008 door het U.S. Department of Education gepubliceerde rapport *Foundations for Success – The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Dit rapport bevat ook uitspraken en aanbevelingen die betrekking hebben op een 'kennisbasis rekenen en wiskunde' voor toekomstige leerkrachten aan deze groep leerlingen (pp. xx-xxi, pp. 35-44).

Schets voor een kennisbasis voor rekenen en wiskunde op de pabo

1 De kennisbasis in hoofdlijnen

Van toekomstige basisschooldocenten mag verwacht worden dat zij in het vakgebied rekenen en wiskunde ruim boven de stof staan die zij op de basisschool moeten onderwijzen. Zij zullen immers te maken krijgen met leerlingen met uiteenlopende capaciteiten: zowel leerlingen die later kunnen doorstromen naar de verschillende soorten vmbo als leerlingen die naar havo of vwo kunnen gaan. Goed onderwijs dient de ambitie te hebben uit alle leerlingen het maximaal bereikbare te halen en leerkrachten moeten daartoe de ambitie, de kennis, de vaardigheden en de mogelijkheden hebben.

1.1 Globale domeinbeschrijvingen

Voor de rekenbewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met gehele getallen, kommagetallen en breuken moeten pabo-gediplomeerden de twaalf altijd werkende *standaardrekenprocedures* volledig beheersen. Zij dienen te *weten* dat deze procedures altijd het goede antwoord geven, wat ook de grootte van de getallen is waarop ze worden toegepast, en ook te *begrijpen* waarom dit zo is.

Deze universele rekenprocedures vormen de basis voor de algebra in het voortgezet onderwijs. Het is alleen al daarom van groot belang dat ze reeds op de basisschool behandeld worden. Daarnaast verschaffen ze leerlingen ook *zelfvertrouwen*: wie deze procedures beheerst, beseft dat hij of zij hiermee in principe *elke* rekenopgave kan oplossen.

Op het gebied van *meten* dienen pabo-gediplomeerden het metrieke stelsel voor lengtematen, oppervlaktematen, inhoudsmaten (ook voor vloestoffen) en gewichten volledig te beheersen. Ook tijdmeting (zowel analoog als digitaal) mag voor hen geen geheimen hebben. Berekeningen met *verhoudingen* en *procenten* moeten zij vlot kunnen uitvoeren. Het beheersen van deze stof is onder meer noodzakelijk voor alle basisschoolleerlingen die vervolgopleidingen in de techniek en de zorg gaan volgen.

Op het gebied van de *meetkunde* moeten pabo-gediplomeerden leerlingen kunnen laten werken met vlakke en ruimtelijke voorwerpen en vormen, bouwplaten en uitslagen van veelvlakken, kijklijnen en eigenschappen van afbeeldingen en foto's van ruimtelijke objecten en situaties. Op het gebied van *gegevensverwerking* moeten zij leerlingen kunnen laten werken met tabellen en grafieken.

Bij al deze onderdelen is het noodzakelijk dat pabo-gediplomeerden globaal op de hoogte zijn van de manier waarop de leerstof van de bassischool in het vervolgonderwijs (vmbo, onderbouw havo en onderbouw vwo) gebruikt wordt, onder meer in de zorg, de techniek, de algebra en de meetkunde. In dit verband is het gewenst dat op de pabo ook gelegenheid is voor wiskundige verdieping, met name op het gebied van achtergronden van het rekenen, ook met andere getalstelsels, het rekenen met wortels, rationale en irrationale getallen, elementaire algebra en elementaire meetkunde. Bij vlakke meetkunde kan daarbij worden gedacht aan de stelling van Pythagoras (ook in verband met wortels), symmetrie, schaling en gelijkvormigheid, bij ruimtemeetkunde aan eigenschappen van bollen, cilinders, kubussen en andere veelvlakken en de invloed van schaling op de inhoud.

1.2 Vakdidactische kennis en vaardigheden

Pabo-gediplomeerden dienen een grondige kennis te bezitten van alle op de markt zijnde reken- en wiskundemethodes voor de basisschool. Al het materiaal (boekjes, werkboekjes, aanvullend materiaal) moet bestudeerd worden. Verschillen tussen de methodes moeten door de studenten in kaart gebracht worden. Dit zou heel goed in projectvorm, in kleine groepen samenwerkende studenten, kunnen worden gerealiseerd, maar het is aan de pabo's zelf om hieraan inhoud te geven.

Pabo-gediplomeerden dienen kennis te bezitten van de verschijnselen dyslexie en dyscalculie en de wijze waarop deze handicaps gediagnosticeerd worden. Zij nemen ook kennis van de manieren waarop kinderen met problemen op dit vlak kunnen worden gefaciliteerd.

Het is van belang dat studenten tijdens hun studie herhaaldelijk de opdracht krijgen zelf aantrekkelijke reken- en wiskundecontexten uit de dagelijkse praktijk in lesmateriaal, opdrachten en opgaven voor leerlingen te vertalen.

1.3 Tussentoetsen en eindtoets

Thans moeten alle pabostudenten aan het begin van hun studie via de computer een rekentoets afleggen. De opgaven van die toets worden uit een beperkte toetsbank getrokken en zijn geheim. De *Stichting Goed Rekenonderwijs* acht dit een ongewenste situatie. In plaats daarvan stelt zij een regeling voor waarbij iedere student die formeel toegang tot de pabo heeft ook zonder meer tot de opleiding wordt toegelaten, maar waarbij er in het eerste jaar een intensieve cursus rekentechniek wordt gegeven met een afsluitende toets. De opgaven daarvan worden gekozen uit een beperkte set contextloze rekenopgaven. De getallen in die opgaven worden bij elk examen *random* door de computer gegenereerd. Studenten kunnen zo vaak oefenen als ze willen. Het niet slagen voor deze toets kan een bindend negatief studieadvies tot gevolg hebben. Ook de rekentoetsen in de latere jaren en de afsluitende rekentoets aan het einde van de studie kunnen op deze manier worden ingericht.

2 Kennis van de techniek van het rekenen

Dit hoofdstuk bevat een gedetailleerde beschrijving van de rekentechniek die pabostudenten al in het begin van hun studie moeten leren beheersen. Het is in deze schets opgenomen omdat er juist op het punt van de rekentechniek in de huidige situatie de meeste problemen zijn. Met nadruk wordt gesteld dat de rekenonderdelen die in dit hoofdstuk worden geschetst een *minimumprogramma* vormen. Verdieping in de vorm van kennis van wortelvormen, irrationale getallen, oneindig voortlopende decimale ontwikkelingen en elementaire algebra is zeer gewenst. Maar het op orde brengen van de basisvaardigheden in de eerste twee jaren van de pabo-opleiding dient de hoogste prioriteit te hebben. Dit moet gebeurd zijn voordat studenten aan stages op basisscholen beginnen.

2.1 Soorten getallen

In het basisonderwijs wordt gerekend met *natuurlijke getallen*, *kommagetallen* en *breuken*. Natuurlijke getallen zijn getallen waarmee je *aantallen* kunt weergeven: 5 vingers aan je hand, 12 appels op een schaal, 60 minuten in een uur, 16 miljoen Nederlanders, 0 euro in je portemonnee. Kommagetallen (decimale breuken, decimaalgetallen) zijn getallen zoals 354,27 en 0,067. Je gebruikt ze bijvoorbeeld bij het rekenen met euro's, bij schaalverdelingen, bij het bepalen van maten en gewichten of bij het rekenen met verhoudingen en procenten. Breuken zijn getallen zoals $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{15}{29}$ en $\frac{14}{5}$. In het voortgezet onderwijs wordt, afhankelijk van het onderwijstype, ook gerekend met *negatieve getallen*, *machten* en *wortels*.

2.2 Rekenen met natuurlijke getallen

Studenten kennen de manier waarop ons decimale positiestelsel is opgebouwd. Zij kennen de betekenis van cijfers en hun plaats in getallen. Zo weten zij dat $6498 = 6 \times 1000 + 4 \times 100 + 9 \times 10 + 8$. Zij weten dat op die manier met behulp van slechts tien cijfers (namelijk 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9) elk natuurlijk getal kan worden weergegeven.

Hoofdrekenen

Studenten kunnen vlot en zonder enige aarzeling de volgende berekeningen uit het hoofd uitvoeren:

1. Twee getallen van één cijfer bij elkaar optellen.
   Voorbeelden: $3 + 5 = 8$, $7 + 9 = 16$, $2 + 8 = 10$.
2. Een getal van één cijfer optellen bij een getal van twee cijfers.
   Voorbeelden: $23 + 5 = 28$, $77 + 9 = 86$, $52 + 8 = 60$.
3. Twee getallen kleiner dan twintig van elkaar aftrekken (het kleinste van het grootste).
   Voorbeelden: $8 - 5 = 3$, $19 - 12 = 7$, $17 - 9 = 8$, $12 - 7 = 5$.
4. Twee getallen die elk bestaan uit één cijfer gevolgd door een aantal nullen, bij elkaar optellen.
   Voorbeelden: $30 + 50 = 80$, $7000 + 9000 = 16000$, $200 + 80 = 280$, $9000 + 30 = 9030$.
5. Twee getallen van één cijfer met elkaar vermenigvuldigen.
   Voorbeelden: $3 \times 5 = 15$, $7 \times 9 = 63$, $2 \times 8 = 16$.
6. Een getal vermenigvuldigen met 10, 100, 1000, enzovoort.
   Voorbeelden: $345 \times 10 = 3450$, $52 \times 100 = 5200$, $979 \times 1000 = 979000$.
7. Twee getallen die elk bestaan uit één cijfer gevolgd door een aantal nullen, met elkaar vermenigvuldigen.
   Voorbeelden: $30 \times 50 = 1500$, $7000 \times 9 = 63000$, $200 \times 80 = 16000$, $400 \times 300 = 120000$.
8. Een getal dat eindigt op een nul delen door 10, een getal dat eindigt op twee nullen delen door 100, enzovoort.
   Voorbeelden: $560 : 10 = 56$, $36000 : 100 = 360$, $606000 : 1000 = 606$.
9. Een deling, al dan niet met rest, uitvoeren als de deler een getal van één cijfer is, en het deeltal kleiner is dan tien maal de deler.
   Voorbeelden: $56 : 7 = 8$, $36 : 9 = 4$, $66 : 7 = 9$ *rest* 3, $77 : 9 = 8$ *rest* 5.

Rekenen met pen en papier

Studenten kunnen met pen en papier de volgende rekenbewerkingen vlot uitvoeren.

1. Optellen van twee of meer getallen (optellen onder elkaar).
2. Aftrekken van een getal van een groter getal (aftrekken onder elkaar).
3. Vermenigvuldigen van twee getallen (vermenigvuldigen onder elkaar).
4. Delen met rest (staartdeling).

Voorrangsregels

Studenten kennen de thans algemeen gebruikelijke voorrangsregels voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen: optellen en aftrekken worden uitgevoerd in de volgorde waarin ze voorkomen (van links naar rechts), vermenigvuldigen en delen worden uitgevoerd in de volgorde waarin ze voorkomen (van links naar rechts), vermenigvuldigen en delen gaan vóór optellen en aftrekken. Zij weten hoe ze door het gebruik van haakjes de volgorde van de bewerkingen kunnen wijzigen.

2.3 Rekenen met kommagetallen

Studenten kennen de betekenis van kommagetallen en hun plaats op de getallenlijn. Ze kennen kommagetallen in tal van praktijksituaties, bijvoorbeeld bij het rekenen met geldbedragen of bij het gebruik van schaalverdelingen op linialen en andere meetinstumenten.

Hoofdrekenen

Studenten kunnen vlot en zonder aarzelen de volgende rekenbewerkingen uit het hoofd uitvoeren.

1. Een kommagetal vermenigvuldigen met 10, 100, 1000 enzovoort.
2. Een kommagetal delen door 10, 100, 1000 enzovoort.
3. Procenten omzetten in kommagetallen en omgekeerd.
   Voorbeeld: 15% = 0,15, 0,2% = 0,002, 235% = 2,35.
4. Een kommagetal afronden op een gegeven aantal decimalen (plaatsen achter de komma).

Rekenen met pen en papier

Studenten kunnen met pen en papier de volgende rekenbewerkingen vlot uitvoeren.

1. Optellen van twee of meer kommagetallen (optellen onder elkaar).
2. Aftrekken van een kommagetal van een groter kommagetal (aftrekken onder elkaar).
3. Vermenigvuldigen van twee kommagetallen (vermenigvuldigen onder elkaar).
4. Het omzetten van een deling met kommagetallen in een deling waarbij de deler een natuurlijk getal is, vervolgens de deling uitvoeren, en ten

slotte, indien gevraagd, het quotiënt afronden op een gegeven aantal decimalen.
Voorbeeld: 1,452 : 0,17 = 145,2 : 17. Dit levert na uitvoering van de deling en afronden op twee decimalen als uitkomst 8,54.

Toepassingen

Studenten kunnen rekenen met kommagetallen in de volgende toepassingen (contexten).

1. Rekenen met geldbedragen.
2. Rekenen met verhoudingen en procenten.
3. Rekenen in het metrieke stelsel met maten voor lengte, oppervlakte (van rechthoeken), inhoud (van rechthoekige blokken), gewicht en met inhoudsmaten voor vloeistoffen.
4. Rekenen met tijd (uren, minuten, seconden) en snelheid (kilometers per uur en meters per seconde).
5. Omrekenen van meters per seconde naar kilometers per uur en omgekeerd.
6. Omrekenen van valuta, bijvoorbeeld euro's naar dollars, bij een gegeven wisselkoers.

Bij al deze toepassingen kunnen studenten contextopgaven in rekenopgaven vertalen, oplossen en de uitkomsten in termen van de context interpreteren. Zij kunnen de berekeningen met de hand (pen en papier) uitvoeren. Bij zeer arbeidsintensieve berekeningen mogen zij, indien dit is aangegeven in de vraagstelling, volstaan met een schatting van de uitkomst.

2.4 Rekenen met breuken

Studenten kunnen breuken visualiseren, bijvoorbeeld door middel van pizzadiagrammen (taartdiagrammen). Daarnaast kunnen zij ook de plaats van een breuk aangeven op de getallenlijn. Zij kennen de betekenis van termen als teller, noemer en breukstreep. Naast de meest gebruikelijke notatie van een breuk met de horizontale breukstreep (zoals $\frac{3}{4}$) kennen zij ook de notatie met een schuine breukstreep (zoals $3/4$).

Rekenen met pen en papier

Studenten kunnen met pen en papier de volgende rekenbewerkingen voor breuken vlot uitvoeren.

1. Een geheel getal als breuk schrijven (noemer 1).
2. Een kommagetal als breuk schrijven (noemer 10, 100, ...).
3. Een breuk vereenvoudigen (teller en noemer delen door een gemeenschappelijke deler). Door herhaald vereenvoudigen kunnen zij een breuk schrijven in een vorm die niet verder te vereenvoudigen is.
4. Twee breuken onder één noemer brengen (gelijknamig maken).
5. Twee breuken bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken.
6. Twee breuken met elkaar vermenigvuldigen.
7. Een breuk delen door een breuk.
8. Een breuk met een teller die groter is dan de noemer, schrijven als 'gemengde breuk'. *Voorbeeld:* $\frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$. Dit komt neer op delen met rest van de teller door de noemer: $14 \;:\; 5 = 2$ *rest* 4, dus $\frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$.
9. Een 'gemengde breuk' schrijven als gewone breuk.
10. Een breuk schrijven als een kommagetal, exact indien mogelijk, of anders afgerond op een gegeven aantal decimalen.
    Voorbeelden: $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{3}{4} = 0{,}75$, $\frac{1}{3} \approx 0{,}3333$, $\frac{2}{3} \approx 0{,}6667$ (het teken '$\approx$', uitgesproken als 'is ongeveer gelijk aan' betekent in dit verband dat de uitkomst is afgerond).

Toepassingen

Ook breuken worden in toepassingen veel gebruikt, bijvoorbeeld bij het rekenen met verhoudingen en procenten.

1. Studenten kennen *uit het hoofd* het verband tussen breuken met noemer 2, 3, 4, 5 en 10 en het bijbehorende percentage, bijvoorbeeld: $\frac{1}{2} = 50\,\%$, $\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\,\%$, $\frac{3}{4} = 75\,\%$, $\frac{2}{5} = 40\,\%$.
2. Studenten kunnen breuken en kommagetallen gebruiken bij het rekenen in contexten met verhoudingen en procenten.

2.5 Rekenen met negatieve getallen

Studenten kennen het gebruik van negatieve getallen in praktijksituaties zoals temperatuurschalen of saldi van een bankrekening.

1. Studenten kennen de 'uitgebreide getallenlijn' waarop positieve getallen, negatieve getallen en het getal 0 hun plaats hebben.
2. Studenten beheersen de rekenregels voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met positieve en negatieve gehele getallen, kommagetallen en breuken. In het bijzonder weten zij dat bij vermenigvuldigen met -1 het teken van een getal omklapt (van plus naar min of van min naar plus).

2.6 Machten

Machten van tien en de wetenschappelijke notatie

1. Studenten kennen de betekenis van notaties als $10^2 = 100$, $10^5 = 100\,000$, $10^{-1} = 0{,}1$, $10^{-4} = 0{,}0001$, dat wil zeggen machten van 10 met een positieve of negatieve gehele exponent.
2. Studenten zijn vertrouwd met de 'wetenschappelijke notatie' die onder andere op rekenmachines wordt gebruikt en waarbij een positief kommagetal wordt aangegeven als product van een getal tussen 1 en 10 en een macht van 10.
   Voorbeelden: $475{,}23 = 4{,}7523 \times 10^2$ en $0{,}003256 = 3{,}256 \times 10^{-3}$.
   De laatste vormen wordt ook vaak genoteerd als $4{,}7523\,E\,2$, respectievelijk $3{,}256\,E\ -3$. (De E is hier de eerste letter van 'exponent'.)

Machten en rekenregels voor machten

1. Studenten kennen de betekenis van machten met een willekeurig positief grondtal en een positieve of negatieve gehele exponent.
   Voorbeelden: $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$, $3^{-4} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{81}$.
2. Studenten kennen de regels voor vermenigvuldigen en delen van machten met hetzelfde grondtal.

2.7 Ontbinden in factoren, priemgetallen

Studenten weten wat een priemgetal is.

1. Studenten kunnen met pen en papier natuurlijke getallen kleiner dan 1000 in priemfactoren ontbinden.
2. Studenten kunnen de grootste gemeenschappelijke deler (ggd) en het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van twee of meer natuurlijke getallen berekenen met behulp van de priemontbinding van die getallen.
3. Studenten kennen de deelbaarheidskenmerken voor deelbaarheid van een natuurlijk getal door 2, 3, 4, 5 en 9.

3 De twaalf standaardrekenprocedures

In dit hoofdstuk worden de twaalf standaardrekenprocedures voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van positieve gehele getallen, kommagetallen en breuken aan de hand van voorbeelden toegelicht. De meeste voorbeelden zijn met opzet zo gekozen dat hoofdrekenen praktisch onmogelijk is terwijl studenten die de procedures beheersen de berekeningen met pen en papier vlot en in korte tijd kunnen uitvoeren. Ook wordt beschreven hoe je je resultaten gemakkelijk kunt controleren.

Uiteraard is het van belang dat pabostudenten niet alleen weten *hoe* deze procedures werken en dat ze ook *altijd* werken, maar ook dat ze begrijpen *waarom* ze altijd werken.

In sommige schoolmethodes worden ook andere rekenprocedures gebruikt als didactische voorbereiding op de standaardprocedures voor optellen, aftrekken en vermenigvuldigen: het zogenaamde *kolomsgewijze* rekenen. Deze procedures zijn alleen doenlijk voor het rekenen met kleine getallen. Pabostudenten dienen er in hun studie kennis van te nemen. In deze schets worden ze echter niet beschreven; wie de standaardprocedures kent, zal met kolomsgewijs rekenen geen moeite hebben.

Iets dergelijks geldt ook voor de in sommige schoolboeken beschreven *hapmethodes* voor delen met rest. Ze kunnen als didactische voorbereiding voor de staartdeling worden gezien. Welbeschouwd is de staartdeling de 'meest verkorte en meest efficiënte' hapmethode. Omdat de staartdeling in veel rekenmethodes voor de basisschool weer behandeld wordt, moeten pabostudenten die ook beheersen. En wie de staartdeling beheerst, heeft met de andere hapmethodes geen moeite.

Het is goed om in dit verband nog iets te zeggen over de rol van de rekenmachine en ICT-middelen in het basisonderwijs en op de pabo. Die bieden veel mogelijkheden om het onderwijs te verrijken, maar tegelijkertijd moet ervoor gewaakt worden dat het aanleren van pen-en-papiermethodes er niet door wordt verdrongen. Hierboven is al gezegd hoe belangrijk het zélf kunnen rekenen voor leerlingen is als voorbereiding voor het vervolgonderwijs (techniek, zorg, algebra) en de beroepspraktijk. Daarnaast moet ook het zelfvertrouwen worden benadrukt dat leerlingen krijgen als ze de techniek van het rekenen onder de knie hebben. Om deze redenen is het van groot belang dat pabostudenten *zonder* rekenmachine goed leren rekenen.

3.1 Optellen

Optellen van natuurlijke getallen onder elkaar:

$$\begin{array}{r} 348 \\ 10282 \\ 33264 \\ 78695 \\ 81410 \\ 579 \\ 53186 \\ \hline 257764 \end{array}\ +$$

Controle: ook van beneden naar boven optellen.

Optellen van kommagetallen onder elkaar:

$$\begin{array}{r@{,}l} 3 & 48 \\ 1028 & 2 \\ 33 & 264 \\ 78 & 695 \\ 814 & 10 \\ 5 & 79 \\ 531 & 86 \\ \hline 2495 & 389 \end{array}\ +$$

Zorg dat de komma's recht onder elkaar staan! *Controle:* ook van beneden naar boven optellen.

Optellen van breuken: eerst gelijknamig maken, dan tellers optellen.

$$\frac{2}{9} + \frac{14}{15} = \frac{10}{45} + \frac{42}{45} = \frac{52}{45}$$

Bij het gelijknamig maken neem je bij voorkeur het kleinste gemeenschappelijke veelvoud (kgv) van de noemers. Hier dus $\text{kgv}(9, 15) = 45$. Soms kun je de uitkomst nog vereenvoudigen. Bij meer dan twee breuken neem je ook het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van alle noemers. Voorbeeld:

$$\frac{6}{7} + \frac{3}{14} + \frac{12}{5} + \frac{3}{10} = \frac{60}{70} + \frac{15}{70} + \frac{168}{70} + \frac{21}{70} = \frac{264}{70} = \frac{132}{35}$$

3.2 Aftrekken

Aftrekken van twee natuurlijke getallen onder elkaar:

$$\begin{array}{r} 81410 \\ 53186 \\ \hline 28224 \end{array}\ -$$

Controle: van beneden naar boven optellen.

Aftrekken van twee kommagetallen onder elkaar:

$$\begin{array}{r@{,}l} 1028 & 2\color{gray}{00} \\ 78 & 695 \\ \hline 949 & 505 \end{array}\ -$$

Zorg dat de komma's recht onder elkaar staan en voeg eventueel na de komma extra nullen toe (hier grijs gemaakt). *Controle:* van beneden naar boven optellen.

Aftrekken van twee breuken: eerst gelijknamig maken, dan tellers aftrekken.

$$\frac{32}{9} - \frac{14}{15} = \frac{160}{45} - \frac{42}{45} = \frac{118}{45}$$

Bij het gelijknamig maken neem je het kgv van de noemers. Hier neem je dus $\text{kgv}(9, 15) = 45$. Soms kun je de uitkomst nog vereenvoudigen.

3.3 Vermenigvuldigen

Vermenigvuldigen van twee natuurlijke getallen onder elkaar:

$$\begin{array}{rl} 3178 & \\ 4912 & \\ \hline 6356 & \times \\ 3178{\color{gray}0} & \\ 28602{\color{gray}00} & \\ 12712{\color{gray}000} & \\ \hline 15610336 & + \end{array}$$

Let op de slotnullen (hier grijs gemaakt). Ervaren rekenaars laten die weg.

Vermenigvuldigen van twee kommagetallen onder elkaar:

$$\begin{array}{rl} 349{,}823 & \\ 2{,}47 & \\ \hline 2448761 & \times \\ 1399292{\color{gray}0} & \\ 699646{\color{gray}00} & \\ \hline 864{,}06281 & + \end{array}$$

Je voert de tussenberekeningen *zonder komma's* uit, en zet de komma vervolgens in het eindresultaat op de juiste plaats: het aantal decimalen na de komma in het product is de *som* van de aantallen decimalen na de komma in de getallen die je met elkaar vermenigvuldigt. Hier hebben die getallen 3 en 2 decimalen, dus het product heeft $3 + 2 = 5$ decimalen na de komma.

Vermenigvuldigen van breuken: het product is een breuk met als teller het product van de tellers en als noemer het product van de noemers. Soms kun je gemeenschappelijke factoren al direct wegdelen:

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4} = \frac{5 \times \cancel{3}^1}{\cancel{6}_2 \times 4} = \frac{5 \times 1}{2 \times 4} = \frac{5}{8}$$

3.4 Delen

Delen met rest kun je met een staartdeling doen:

$$
\begin{array}{l}
37 \big/ \ \underline{83}218 \ \big\backslash 2 \\
\quad\ \ \underline{74} \\
\quad\ \ \ \ 9
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
37 \big/ \ \underline{832}18 \ \big\backslash 22 \\
\quad\ \ \underline{74} \\
\quad\ \ \ \ 92 \\
\quad\ \ \ \ \underline{74} \\
\quad\ \ \ \ 18
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
37 \big/ \ \underline{8321}8 \ \big\backslash 224 \\
\quad\ \ \underline{74} \\
\quad\ \ \ \ 92 \\
\quad\ \ \ \ \underline{74} \\
\quad\ \ \ \ 181 \\
\quad\ \ \ \ \underline{148} \\
\quad\ \ \ \ \ \ 33
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
37 \big/ \ \underline{83218} \ \big\backslash 2249 \\
\quad\ \ \underline{74} \\
\quad\ \ \ \ 92 \\
\quad\ \ \ \ \underline{74} \\
\quad\ \ \ \ 181 \\
\quad\ \ \ \ \underline{148} \\
\quad\ \ \ \ \ \ 338 \\
\quad\ \ \ \ \ \ \underline{333} \\
\quad\ \ \ \ \ \ \ \ \ 5
\end{array}
$$

Deze staartdeling laat zien dat $83218 : 37 = 2249$ *rest* 5. Als de rest 0 is, zegt men dat de deling *opgaat*. Het getal 83218 heet het *deeltal*, het getal 37 heet de *deler*, het getal 2249 heet het *quotiënt*, het getal 5 heet de *rest*.

Controle: via de vermenigvuldiging $37 \times 2249 + 5 = 83218$.

Als een deling niet opgaat, kun je met een *voortgezette staartdeling* het quotiënt zo nauwkeurig benaderen als je wilt met een kommagetal. De voortgezette staartdeling werkt ook bij het delen met kommagetallen. Het is handig om er dan eerst voor te zorgen dat de deler geen kommagetal is door deler en deeltal zo nodig met een geschikte macht van 10 te vermenigvuldigen.

Een verwante toepassing van de voortgezette staartdeling is het omzetten van een breuk in een (benaderend) kommagetal. Hieronder staat de voortgezette staartdeling waarmee je uitrekent dat $\frac{13}{7} \approx 1{,}85714$ (afgerond op vijf decimalen).

$$
\begin{array}{l}
7 \big/ \ 13{,}00000 \ \big\backslash 1{,}85714 \\
\quad \underline{\ \ 7} \\
\quad\ \ 60 \\
\quad\ \ \underline{56} \\
\quad\ \ \ \ 40 \\
\quad\ \ \ \ \underline{35} \\
\quad\ \ \ \ \ \ 50 \\
\quad\ \ \ \ \ \ \underline{49} \\
\quad\ \ \ \ \ \ \ \ 10 \\
\quad\ \ \ \ \ \ \ \ \underline{\ \ 7} \\
\quad\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 30 \\
\quad\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{28} \\
\quad\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 2
\end{array}
$$

Delen door een breuk is vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk:

$$\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{5}{6} \times \frac{4}{3} = \frac{5 \times 4}{6 \times 3} = \frac{5 \times \cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3} \times 3} = \frac{5 \times 2}{3 \times 3} = \frac{10}{9}$$

Ook hier is weer handig om (indien mogelijk) gemeenschappelijke factoren in de teller en de noemer eerst tegen elkaar weg te delen.

4 Voorbeelden van toetsopgaven

De beheersing door de studenten van de techniek van het rekenen kan worden getoetst door middel van standaardopgaven waarin de specifieke getallen *at random* door de computer kunnen worden gegenereerd, zodat de student tijdens de voorbereiding op de toets zelfstandig kan oefenen zo veel als hij of zij wil. In dit hoofdstuk geven we per onderwerp voorbeelden van zulke toetsopgaven. Met opzet zijn de opgaven zo gekozen dat hoofdrekenen bij de meeste opgaven praktisch onmogelijk is, terwijl de berekening met pen en papier weinig tijd kost voor wie de techniek beheerst. Het spreekt vanzelf dat alle opgaven zonder rekenmachine moeten worden gemaakt.

4.1 Natuurlijke getallen

$$\begin{array}{r} 320 \\ 52843 \\ 35294 \\ 59989 \\ \hline \end{array} \; + \qquad\qquad \begin{array}{r} 46848 \\ 282 \\ 67367 \\ 5348 \\ \hline \end{array} \; +$$

$$\begin{array}{r} 3059014 \\ 1926735 \\ \hline \end{array} \; - \qquad\qquad \begin{array}{r} 4003378 \\ 3225799 \\ \hline \end{array} \; -$$

$$\begin{array}{r} 35802 \\ 8835 \\ \hline \end{array} \; \times \qquad\qquad \begin{array}{r} 57483 \\ 14009 \\ \hline \end{array} \; \times$$

Voer met behulp van een staartdeling de volgende delingen met rest uit:

$$568396 : 743 = \qquad\qquad 800543 : 514 =$$

4.2 Kommagetallen

Bereken via optellen onder elkaar: $436{,}826 + 12{,}9035 + 3{,}516 + 98{,}9 =$

Bereken via aftrekken onder elkaar: $4864{,}76 - 1277{,}9651 =$

Bereken via vermenigvuldigen onder elkaar: $12{,}904 \times 3{,}36 =$

Bereken het quotiënt van de deling $35 : 1{,}3$ via een voortgezette staartdeling op vijf decimalen afgerond.

Vul in:

1.	5,03 hm	=	dm
2.	87 km^2	=	m^2
3.	321 mm^3	=	cm^3
4.	0,45 m^3	=	cc
5.	87,9 dm^3	=	hl
6.	4,08 hg	=	dg
7.	21 m/s	=	km/u

Bereken 14% van € 25,50, afgerond op eurocent.

Je krijgt iets dat normaal 350 euro kost voor 310 euro. Hoeveel procent korting krijg je dan? Rond af op gehele procenten.

De prijs van een artikel is in het afgelopen jaar met 10% gestegen. Het kost nu € 66,55. Hoeveel kostte het een jaar geleden?

Een klas telt 20 meisjes en 15 jongens. Hoeveel procent meisjes en hoeveel procent jongens is dat? Rond af op gehele procenten.

4.3 Breuken

Geef de antwoorden van de volgende opgaven als een onvereenvoudigbare gewone breuk.

$\frac{16}{27} + \frac{23}{15} =$

$\frac{12}{21} - \frac{3}{10} =$

$\frac{9}{32} + \frac{25}{6} - \frac{5}{24} =$

$\frac{14}{27} \times \frac{45}{21} =$

$\frac{36}{25} : \frac{72}{55} =$

$\dfrac{\frac{2}{7} + \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}} =$

Schrijf de volgende kommagetallen als een onvereenvoudigbare gewone breuk.

32,75   0,075

12,9   1,035

Benader de volgende breuken als een kommagetal, afgerond op 5 decimalen.

$\frac{9}{13}$ $\frac{17}{19}$

4.4 Negatieve getallen

Geef alle uitkomsten als een geheel getal of een onvereenvoudigbare breuk.

$\frac{4}{15} - \frac{12}{5} =$ $\frac{13}{7} + \frac{5}{4} - \frac{28}{3} =$

$\frac{15}{7} \times (-\frac{8}{3}) \times \frac{20}{11} =$ $\frac{7}{17} \times 4 \times (-9) : \frac{5}{6} =$

$4 \times (-9) : \frac{5}{6} =$ $-\frac{3}{5} \times (-\frac{7}{3}) \times (-\frac{9}{5}) =$

Bereken met gebruikmaking van de voorrangsregels:

$43 - 12 + 27 \times 3 - 6 \times 11 =$

$7 \times (-5) + 9 \times 6 - 13 \times 7 + 43 =$

Bereken als kommagetal afgerond op 5 decimalen:

$4 \times (-3{,}24) : (-7{,}1) =$

4.5 Machten

Schrijf in de wetenschappelijke notatie met vijf decimalen achter de komma:

1200   32,222

0,023   6832,9

$\frac{9}{11}$ $-\frac{11}{70}$

$\frac{700}{13}$ $-\frac{211}{43}$

Schrijf als geheel getal of als onvereenvoudigbare breuk:

$4^{-3} \times 4^{7}$

$7^{4}\ :\ 7^{6}$

$5^{3} \times 2^{-7}$

$10^{4}\ :\ 5^{6}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{5}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\ :\ \left(\frac{4}{5}\right)^{3}$

$\left(2^{-3}\right)^{3}$

$\left(25^{-8}\right)^{0}$

4.6 Ontbinden in factoren en priemgetallen

Bereken de ggd en het kgv van:

57 en 95

25 en 120

68, 51 en 85

24, 66 en 42

Vereenvoudig de volgende breuken:

$\frac{512}{440}$

$\frac{729}{135}$

Bereken de ontbinding in priemgetallen van:

178200

13068

Literatuur:

Krachtig meesterschap, Kwaliteitsagenda voor het opleiden van leraren, 2008-2011, Den Haag: ministerie van OCW, 2008.
`http://www.minocw.nl/documenten/kwaliteitsagenda_leraren.pdf`.

Foundations for success, The Final report of the National Mathematics Advisory Panel, U.S. Department of Education, March 2008.
`http://www.ed.gov/mathpanel`.