Jan van de Craats
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
j.vandecraats@uva.nl

Henk Pijls
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
h.g.j.pijls@uva.nl

Onderzoek

De kromme gevormd door de toppen van de parabolen door drie gegeven punten

Door drie gegeven punten in het reële vlak, niet op één lijn, gaan oneindig veel parabolen, elk met een eigen asrichting. Jos de Wit, een vroegere collega van Jan van de Craats op de KMA in Breda, vroeg zich af wat de kromme is die gevormd wordt door de toppen van die parabolen. Henk Pijls en Jan van de Craats zochten het uit.

Voor Jos de Wit

Wat is de kromme die gevormd wordt door de toppen van de parabolen door drie gegeven punten in het reële vlak? We zullen laten zien dat het een algebraïsche kromme is van graad 7 met drie asymptoten. Die asymptoten zijn evenwijdig aan de zijden van de driehoek die gevormd wordt door de gegeven punten, en elke asymptoot verdeelt de andere twee driehoekszijden in de verhouding $3{:}1$ (zie de Figuren 1 en 2).

Ter oriëntatie bekijken we eerst een bijzonder geval voor de ligging van de drie gegeven punten — we zullen ze verder de *basispunten* noemen — omdat daarbij de berekeningen overzichtelijk en eenvoudig zijn. Stel dat $(0,0)$, $(1,0)$ en $(0,1)$ de basispunten zijn. Men verifieert gemakkelijk dat de volgende vergelijking, met t als parameter, de *parabolenbundel* beschrijft door die basispunten:

$$(x+ty)^2-x-t^2y=0. \tag{1}$$

Voor elke keuze van t definieert (1) namelijk een kegelsnede die door die basispunten gaat. Voor een vast gekozen t ongelijk aan 0 of 1 heeft de kegelsnede precies één punt gemeen met elke lijn $x+ty=c$, en dat is alleen mogelijk als de kegelsnede een parabool is. De asrichting van de parabool is dan evenwijdig aan de lijn $x+ty=0$. Voor $t=0$ ontaardt de parabool in het lijnenpaar $x^2-x=0$, voor $t=1$ in het lijnenpaar $(x+y)^2-(x+y)=0$ en voor $t=\infty$ (dat wil zeggen $1/t=0$; deel vergelijking (1) door t^2) in het lijnenpaar $y^2-y=0$ Omgekeerd maakt ook elke parabool door de drie basispunten deel uit van die parabolenbundel.

In de top van een niet-ontaarde parabool staat de raaklijn loodrecht op de as. De top $(x(t),y(t))$ van een niet-ontaarde parabool uit de bundel kan daarom als volgt worden berekend. Definieer

$$F(x,y)=(x+ty)^2-x-t^2y.$$

De gradiënt $\nabla F=(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y})$ in een punt (x,y) van de parabool $F(x,y)=0$ staat loodrecht op de raaklijn, dus in de top is de gradiënt een vector die evenwijdig is aan de asrichting. Aangezien

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=2(x+ty)-1$$

en

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=2t(x+ty)-t^2$$

geldt in de top $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y):\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=(-t):1$, dus

$$2(x+ty)-1=-t(2t(x+ty)-t^2)$$

hetgeen kan worden vereenvoudigd tot

$$x+ty=\frac{1+t^3}{2(1+t^2)}. \tag{2}$$

Schrijf vergelijking (1) van de parabool als

$$(x+ty)^2-(x+ty)-(t^2-t)y=0.$$

Substitutie van (2) geeft dan een vergelijking waaruit y als functie van t kan worden opgelost, en vervolgens kan, weer met behulp van (2), ook x als functie van t worden gevonden. Het resultaat is dat voor de top $(x(t),y(t))$ van de parabool geldt dat

$$x(t)=\frac{P(t)}{Q(t)},\qquad y(t)=\frac{R(t)}{Q(t)}, \tag{3}$$

waarbij

$$\begin{aligned}P(t)&=t(t^3+1)(t^3+2t-1),\\Q(t)&=4t(t-1)(t^2+1)^2,\\R(t)&=(t^3+1)(t^3-2t^2-1).\end{aligned}$$

De kromme Γ die gevormd wordt door alle toppen uit de genoemde parabolenbundel heeft dus de rationale parametrisatie (3). Snijden van Γ met een willekeurige lijn $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ geeft de vergelijking

$$\alpha P(t)+\beta R(t)+\gamma Q(t)=0.$$

Voor $\alpha\neq 0$ is dit een vergelijking van graad 7 en voor $\alpha=0$ van graad 6.

In het algemeen is een *algebraïsche kromme* in het vlak de nulpuntenverzameling van een polynoomvergelijking in x en y. Omdat bewezen kan worden dat elke kromme met een rationale parametrisatie een algebraïsche kromme is (zie later voor een toelichting in dit bijzondere geval), volgt hieruit dat Γ een algebraïsche kromme is van graad 7.

De asymptoten

De parametrisatie (3) stelt ons in staat Γ te tekenen (zie Figuur 1) en enige meetkundige eigenschappen van Γ af te leiden. Allereerst geldt voor $t=0$ dat $P(0)=Q(0)=0$ en $R(0)=-1$, maar

$$\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{t\to 0}\frac{P(t)}{Q(t)} = \frac{1}{4},$$
$$\lim_{t\to 0} |\, y(t)\,| = \infty,$$

dus de lijn $x=\frac{1}{4}$ is een verticale asymptoot van Γ, behorende bij $t\to 0$. Verder geldt voor $t\to\pm\infty$,

$$\lim_{t\to\pm\infty} |\, x(t)\,| = \infty,$$
$$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim_{t\to\pm\infty}\frac{R(t)}{Q(t)} = \frac{1}{4},$$

dus de lijn $y=\frac{1}{4}$ is een horizontale asymptoot van Γ.

Voor t ongelijk aan 0 of 1 geldt

$$\begin{aligned} x(t)+y(t) &= (x(t)+ty(t))-(t-1)y(t) \\ &= \frac{1+t^3}{2(1+t^2)} - \frac{R(t)}{4t(t^2+1)^2} \end{aligned} \qquad (4)$$

zodat, wegens $R(1)=-4$,

$$\lim_{t\to 1}(x(t)+y(t)) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Er geldt bovendien dat $\lim_{t\to 1}|\,x(t)\,| = \lim_{t\to 1}|\,y(t)\,| = \infty$, dus de lijn $x+y=\frac{3}{4}$ is een asymptoot van Γ voor $t\to 1$.

De parameterwaarde $t=-1$ geeft de oorsprong als punt van Γ. Het unieke reële nulpunt t_0 van t^3-2t^2-1 geeft een tweede snijpunt van Γ met de lijn $y=0$. Vergelijking (4) geeft dan, wegens $R(t_0)=0$ en $t_0^3=2t_0^2+1$,

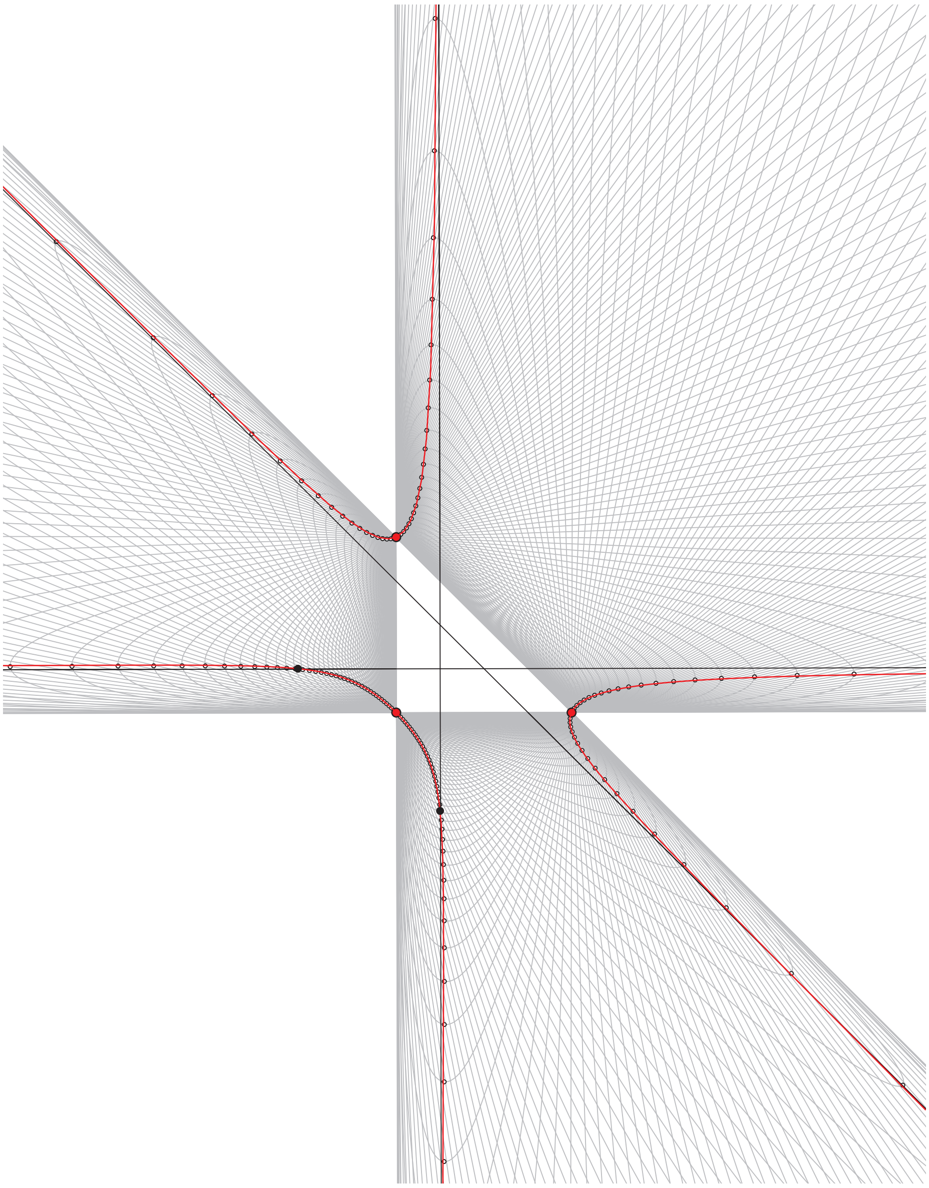
$$x(t_0)+y(t_0) = \frac{1+t_0^3}{2(1+t_0^2)} = \frac{1+2t_0^2+1}{2(1+t_0^2)} = 1,$$

dus dat snijpunt ligt ook op $x+y=1$, met andere woorden, het is het punt $(1,0)$. Op grond van symmetrie ligt dus ook $(0,1)$ op Γ, dus Γ gaat door alle drie de basispunten van de parabolenbundel.

De snijpunten van Γ met de asymptoot $x=\frac{1}{4}$ voldoen aan $4P(t)=Q(t)$ (zie (3)), dus, na deling door $4t$,

$$(t^3+1)(t^3+2t-1) = (t-1)(1+t^2)^2.$$

Deze vergelijking heeft twee reële wortels, namelijk $t=0$ (het punt op oneindig van de asymptoot) en $t\approx -0{,}329693$. De bijbehorende y-waarde is $y\approx -0{,}560576$. Evenzo heeft Γ precies één eindig reëel snijpunt met de asymptoot $y=\frac{1}{4}$. De bijbehorende x-waarde is $x\approx -0{,}560576$. Een soortgelijke berekening laat zien dat Γ geen eindige reële snijpunten heeft met de asymptoot $x+y=\frac{3}{4}$ (zie ook Figuur 1).



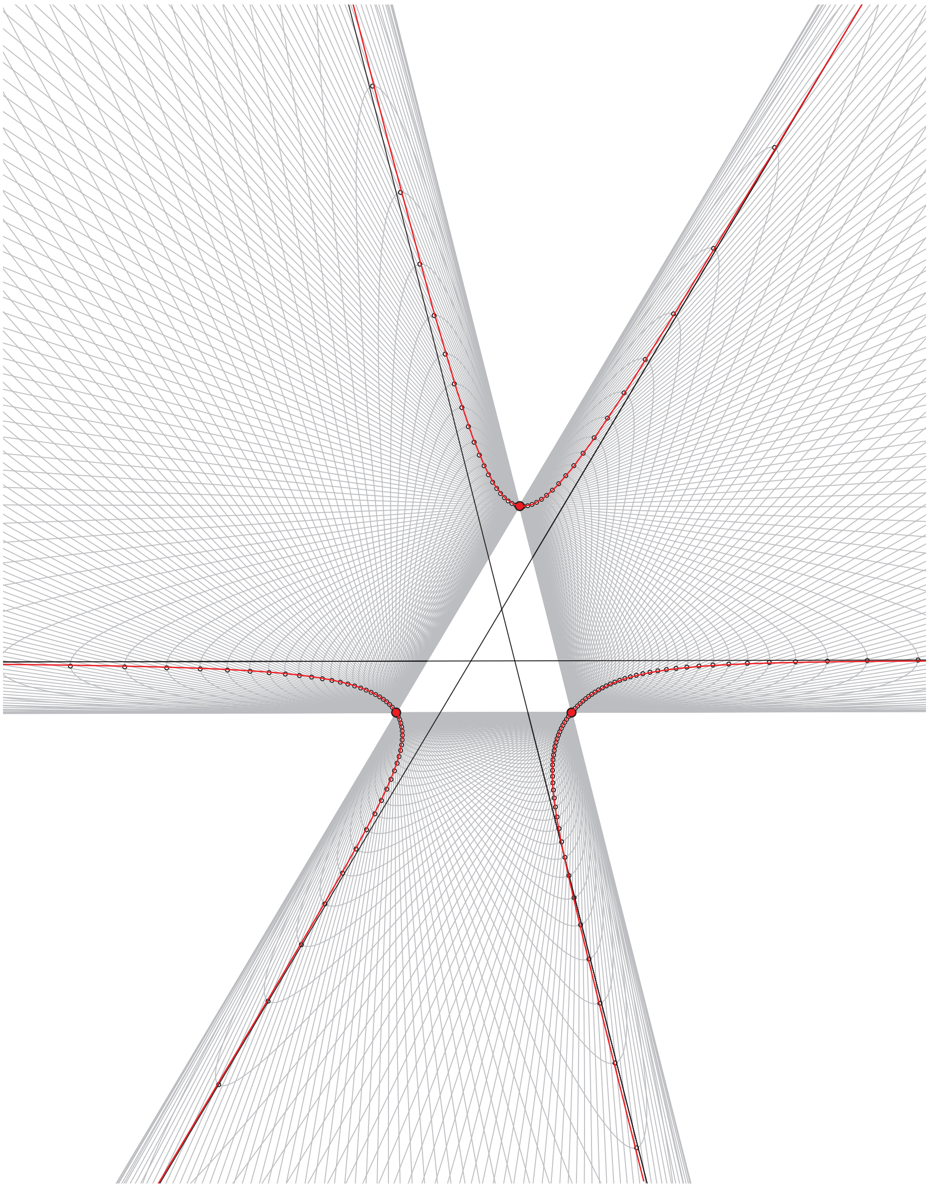
Figuur 1 Een collectie van parabolen door de basispunten $(0,0)$, $(1,0)$ en $(0,1)$. De toppen van de parabolen zijn gemarkeerd, evenals de drie asymptoten van de toppenkromme Γ. Ook Γ zelf is getekend (in rood). Twee van de drie asymptoten snijden Γ. Die snijpunten zijn gemarkeerd.

Γ is een algebraïsche kromme

Rest nog het bewijs dat Γ een algebraïsche kromme is. Schrijf hiertoe de rationale parametrisatie (3) als

$$P(t)-xQ(t)=0,$$
$$R(t)-yQ(t)=0.$$

Uitwerken van de haakjes geeft in de linkerleden polynomen in t met constanten of lineaire uitdrukkingen in x respectievelijk y als coëfficiënten. Bij elk punt (x_0,y_0) van Γ hoort een t_0 zó, dat na substitutie van t_0, x_0 en y_0 aan de beide vergelijkingen voldaan is. Dat betekent dat de beide polynomen in t voor het paar (x_0,y_0) deelbaar zijn door een factor $t-t_0$. Nodig en voldoende opdat twee polynomen een niet-constante gemeenschappelijke factor hebben, is dat hun *resultante* nul is (zie bijvoorbeeld Van der Waerden [2, p. 103 e.v.], of zoek op Wikipedia onder *resultant polynomial*). De resultante van de beide genoemde polynomen kan geschreven worden als een determinant waarvan de elementen coëfficiënten van de polynomen zijn, dat wil dus zeggen getallen of lineaire uitdrukkingen in x of y. Die determinant geeft, na ont-



Figuur 2 Een collectie van parabolen door de drie vaste punten $(-1,0)$, $(1,0)$ en (a,b) waarin $a \approx 0{,}4091$ en $b \approx 2{,}354$. De toppen zijn gemarkeerd en de drie asymptoten zijn getekend. Ook de kromme Γ is getekend (in rood).

wikkeling, een polynoom $H(x,y)$ in x en y, en de vergelijking $H(x,y)=0$ is een polynoomvergelijking in x en y van Γ. Inderdaad is Γ dus een algebraïsche kromme.

Het algemene geval

In het algemene geval van drie willekeurige basispunten, geen drie op één lijn, kunnen we het coördinatenstelsel zo kiezen dat de basispunten gegeven worden door $(-1,0)$, $(1,0)$ en (a,b) met $b \neq 0$ (met deze keuze behouden de formules veel symmetrie).

Men verifieert gemakkelijk dat de parabolenbundel door die basispunten gegeven wordt door de vergelijking

$$(bx+(t-a)y)^2-(t^2-1)by=b^2 \qquad (5)$$

met t als parameter. Voor $t=-1$ ontaardt de parabool in het lijnenpaar

$$(bx-(1+a)y)^2=b^2,$$

dat wil zeggen in de lijn door $(-1,0)$ en (a,b) en de daaraan evenwijdige lijn door $(1,0)$. De parameterwaarde $t=1$ geeft het lijnenpaar

$$(bx+(1-a)y)^2=b^2,$$

dat wil zeggen de lijn door $(1,0)$ en (a,b) en de daaraan evenwijdige lijn door $(-1,0)$, en $t=\infty$ geeft het lijnenpaar $y^2-by=0$ (deel (5) door t^2 en laat $1/t \to 0$).

De asrichting van een niet-ontaarde parabool uit de bundel is evenwijdig aan de lijn $bx+(t-a)y=0$. In de top (x,y) van de parabool staat de raaklijn loodrecht op de asrichting. Via de gradiënt van het linkerlid van (5) leidt dit tot de volgende vergelijking waaraan alle toppen (x,y) met hun bijbehorende parameterwaarde t moeten voldoen:

$$\begin{aligned}&-b[2b(bx+(t-a)y)]\\ &\quad=(t-a)\big[2(t-a)(bx+(t-a)y)-(t^2-1)b\big].\end{aligned}$$

Deze vergelijking kan worden herschreven als

$$bx+(t-a)y=b\frac{(t-a)(t^2-1)}{2(b^2+(t-a)^2)}=bA(t) \qquad (6)$$

waarin

$$A(t)=\frac{(t-a)(t^2-1)}{2(b^2+(t-a)^2)}.$$

Merk op dat $A(t)$ voor alle reële t gedefinieerd is en dat $A(1)=A(-1)=0$.

Een algebraïsche kromme van graad 7

De toppenkromme, dat wil zeggen de kromme van de toppen van alle parabolen uit de parabolenbundel (5), noemen we weer Γ. Via substitutie van (6) in de vergelijking (5) van de parabool kunnen we de y-coördinaat van zo'n top $(x(t),y(t))$ als functie van t schrijven:

$$y(t)=\frac{b}{(t^2-1)}(A(t)^2-1). \qquad (7)$$

Met behulp van (6) vinden we vervolgens ook $x(t)$ als functie van t:

$$\begin{aligned}x(t)&=A(t)-\frac{t-a}{b}y(t)\\ &=A(t)-\frac{t-a}{t^2-1}(A(t)^2-1). \qquad (8)\end{aligned}$$

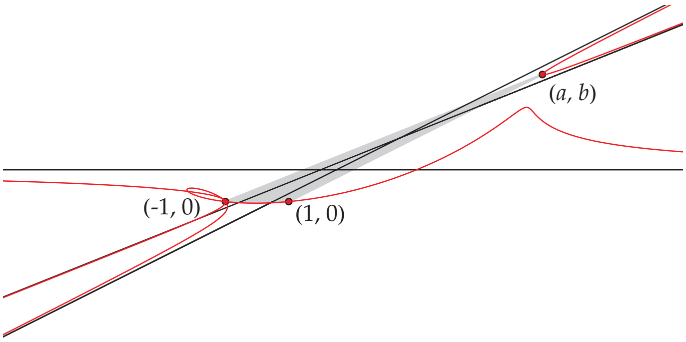
De vergelijkingen (7) en (8) geven na uitwerking een rationale parametrisatie van Γ van de vorm

$$x(t)=\frac{P(t)}{Q(t)}, \qquad y(t)=\frac{R(t)}{Q(t)},$$

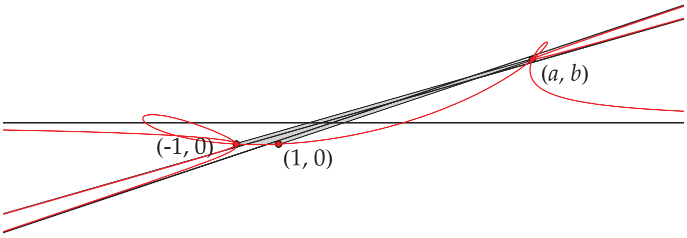
waarin $P(t)$, $Q(t)$ en $R(t)$ polynomen zijn in t, respectievelijk van de graad 7, 6 en 6, namelijk

$$\begin{aligned}P(t)&=t^7+\text{lagere-ordetermen}, &(9)\\ Q(t)&=4(t^2-1)(b^2+(t-a)^2)^2\\ &=4t^6+\text{lagere-ordetermen}, &(10)\\ R(t)&=bt^6+\text{lagere-ordetermen}. &(11)\end{aligned}$$

Net als in het eerder behandelde bijzondere geval volgt hieruit dat Γ een algebraïsche kromme is. Snijden van Γ met een willekeurige lijn $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ geeft een polynoomvergelijking van graad 7 als $\alpha \neq 0$ en van graad 6 als $\alpha=0$ en dus is Γ een algebraïsche kromme van graad 7.



Figuur 3 De zevendegraads kromme Γ met basispunten $(-1,0)$, $(1,0)$ en (a,b) en de drie asymptoten voor $a=9$ en $b=4$. De basispuntendriehoek is grijs gekleurd.



Figuur 4 De zevendegraads kromme Γ met basispunten $(-1,0)$, $(1,0)$ en (a,b) en de drie asymptoten voor $a=13$ en $b=4$.

De asymptoten van de toppenkromme

We bepalen nu de asymptoten van Γ. Ze zullen optreden voor $t\to\infty$ en voor $t\to\pm 1$ omdat in die gevallen de parabool ontaardt in een lijnenpaar.

Uit (11) en (10) volgt

$$\lim_{t\to\pm\infty} y(t)=\frac{b}{4},$$

dus de lijn $y=\frac{b}{4}$ is een horizontale asymptoot van Γ (merk hierbij op dat $\lim_{t\to\pm\infty}|x(t)|=\infty$). Die asymptoot is evenwijdig aan de lijn $y=0$ door de basispunten $(-1,0)$ en $(1,0)$, en ze verdeelt de beide andere zijden van de basispuntendriehoek in de verhouding $3{:}1$.

Voor $t\neq\pm 1$ geldt

$$\begin{aligned} &bx(t)+(1-a)\,y(t)\\ &\quad=bx(t)+(t-a)\,y(t)-(t-1)\,y(t)\\ &\quad=bA(t)-\frac{b}{t+1}(A(t)^2-1)\end{aligned}$$

en dus geldt $\lim_{t\to 1}(bx(t)+(1-a)\,y(t))=\frac{b}{2}$ wegens $A(1)=0$. Omdat $\lim_{t\to 1}|x(t)|=\infty$ volgt hieruit dat de lijn $bx+(1-a)\,y=\frac{1}{2}b$ een asymptoot is van Γ voor $t\to 1$. Deze asymptoot is evenwijdig aan de lijn $bx+(1-a)\,y=b$ door de basispunten $(1,0)$ en (a,b) en ze verdeelt de andere zijden van de basispuntendriehoek in de verhouding $3{:}1$.

Evenzo geldt voor $t\neq\pm 1$ dat

$$\begin{aligned} &bx(t)-(1+a)\,y(t)\\ &\quad=bx(t)+(t-a)\,y(t)-(t+1)\,y(t)\\ &\quad=bA(t)-\frac{b}{t-1}(A(t)^2-1)\end{aligned}$$

en dus geldt $\lim_{t\to -1}(bx(t)-(1+a)\,y(t))=-\frac{b}{2}$ wegens $A(-1)=0$. Omdat $\lim_{t\to -1}|x(t)|=\infty$ volgt hieruit dat de lijn $bx-(1-a)\,y=-\frac{1}{2}b$ een asymptoot is van Γ voor $t\to -1$. Deze asymptoot is evenwijdig aan de lijn $bx-(1+a)\,y=-b$ door de basispunten $(-1,0)$ en (a,b) en ze verdeelt de andere zijden van de basispuntendriehoek in de verhouding $3{:}1$.

Γ gaat door de drie basispunten

We laten nu zien dat Γ door de drie basispunten $(-1,0)$, $(1,0)$ en (a,b) van de parabolenbundel gaat.

Laat t_1 een reële oplossing zijn van $A(t)=-1$, dat wil zeggen van de derdegraadsvergelijking

$$(t-a)\,(t^2-1)+2(b^2+(t-a)^2)=0. \tag{12}$$

Dan geldt $y(t_1)=0$ wegens (7) en $x(t_1)=-1$ wegens (8) dus Γ gaat door het basispunt $(-1,0)$.

Evenzo, laat t_2 een reële oplossing zijn van $A(t)=1$, dat wil zeggen van de derdegraadsvergelijking

$$(t-a)\,(t^2-1)-2(b^2+(t-a)^2)=0. \tag{13}$$

Dan geldt $y(t_2)=0$ wegens (7) en $x(t_2)=1$ wegens (8), dus Γ gaat door het basispunt $(1,0)$.

Laat t_3 een reële oplossing zijn van $A(t)=t$, dat wil zeggen van de derdegraadsvergelijking

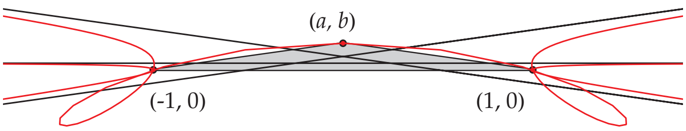
$$(t-a)\,(t^2-1)-2t(b^2+(t-a)^2)=0. \tag{14}$$

Dan geldt $y(t_3)=b$ wegens (7) en $x(t_3)=a$ wegens (8), dus Γ gaat door het basispunt (a,b). Zie Figuur 2 voor een illustratie van het voorgaande.

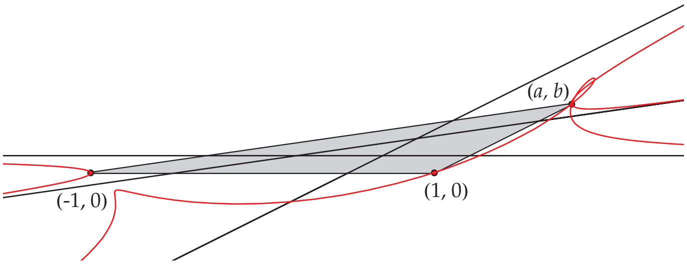
Voorbeelden van lussen in Γ

De vergelijkingen $A(t)=-1$, $A(t)=1$ en $A(t)=t$, dat wil zeggen (12), (13) en (14), bepalen het gedrag van Γ in de drie basispunten. Het zijn alle drie derdegraadsvergelijkingen, dus ze hebben elk minstens één reële oplossing. In de situatie van Figuur 1 en Figuur 2 zijn alle andere oplossingen niet-reëel, maar voor andere keuzes van a en b hoeft dit niet het geval te zijn. In Figuur 3, met $a=9$ en $b=4$, is er één tak van Γ die niet alleen door $(1,0)$ gaat, maar ook door $(-1,0)$. Γ maakt daar een lus, en Γ gaat dus drie maal door dat basispunt.

In Figuur 4, met $a=13$ en $b=4$, gaat diezelfde tak van Γ ook met een lus door het derde basispunt (a,b). Merk op dat er in dit geval rechten zijn die Γ in 7 verschillende reële punten snijden. Dat laatste is



Figuur 5 De zevendegraads kromme Γ met basispunten $(-1,0)$, $(1,0)$ en (a,b) en de drie asymptoten voor $a=0$ en $b=0{,}14$.



Figuur 6 De zevendegraads kromme Γ met basispunten $(-1,0)$, $(1,0)$ en (a,b) en de drie asymptoten voor $a=1{,}8$ en $b=0{,}4$.

ook het geval in Figuur 5, waarin $a=0$ en $b=0{,}14$ gekozen is, en waarin er lussen zijn in de basispunten $(-1{,}0)$ en $(1{,}0)$ maar niet in het basispunt $(a{,}b)$. In Figuur 6, waarin we $a=1{,}4$ en $b=0{,}4$ hebben gekozen, is er alleen een lus in het basispunt $(a{,}b)$.

Criteria voor lussen in de toppenkromme
Het is welbekend dat een derdegraadsvergelijking

$$t^3-3c_1t^2+3c_2t-c_3=0$$

met reële coëfficiënten c_1,c_2,c_3 drie verschillende reële wortels t_1,t_2,t_3 heeft dan en slechts dan als de *discriminant*

$$\begin{aligned} D &= (c_3-c_1c_2)^2-4(c_2-c_1^2)(c_1c_3-c_2^2) \\ &= -\frac{1}{27}(t_1-t_2)^2(t_2-t_3)^2(t_3-t_1)^2 \end{aligned}$$

negatief is (zie bijvoorbeeld de presentatieslides [1]).

De derdegraadsvergelijking (12), dat wil zeggen $A(t)=-1$, bepaalt het gedrag van Γ in het basispunt $(-1{,}0)$. Laat $D_1(a,b)$ de bijbehorende discriminant zijn. De derdegraadsvergelijking (13), dat wil zeggen $A(t)=1$, bepaalt het gedrag van Γ in het basispunt $(1{,}0)$. Laat $D_2(a,b)$ de bijbehorende discriminant zijn. De derdegraadsvergelijking (14), dat wil zeggen $A(t)=t$, bepaalt het gedrag van Γ in het basispunt (a,b). Laat $D_3(a,b)$ de bijbehorende discriminant zijn. De ongelijkheden $D_1(a,b)<0$, $D_2(a,b)<0$ en $D_3(a,b)<0$ definiëren gebieden in het ab-vlak waarvoor Γ een lus maakt in respectievelijk de basispunten $(-1{,}0)$, $(1{,}0)$ en (a,b). Ze kunnen bijvoorbeeld met behulp van computeralgebra worden geplot. Op die manier hebben we de (a,b)-combinaties gevonden voor Figuur 3, 4, 5 en 6.

In ten hoogste twee basispunten een lus
Figuur 4 en 5 laten zien dat het mogelijk is dat de toppenkromme Γ tegelijkertijd een lus bezit in twee van de drie basispunten. We zullen nu bewijzen dat Γ niet in alle drie de basispunten een lus kan hebben.

Een lus in het basispunt (a,b) met $b\neq 0$ treedt op dan en slechts dan als vergelijking (14) drie verschillende reële wortels heeft. Schrijf de vergelijking als

$$(t-a)(t^2-2at+1)+2b^2t=0. \quad (15)$$

Definieer

$$f(t)=(t-a)(t^2-2at+1)+2b^2t.$$

De afgeleide is

$$f'(t)=3t^2-6at+(1+2a^2+2b^2)$$

met $12(a^2-1)-24b^2$ als discriminant. Voor $-1<a<1$ is de discriminant negatief, dus dan is $f'(t)>0$ voor alle t en bijgevolg is f dan een stijgende functie. Vergelijking (15) heeft voor $-1<a<1$ dus altijd precies één oplossing. Dat betekent dat er voor $-1<a<1$ *geen* lus in het basispunt (a,b) kan zijn.

We tonen nu aan dat er voor $a\geq 1$ en $b\neq 0$ geen lus in het basispunt $(1{,}0)$ kan optreden. Zo'n lus treedt op dan en slechts dan als vergelijking (13) drie verschillende reële wortels heeft. Schrijf die vergelijking als

$$(t-a)(t^2-2t+(2a-1))=2b^2. \quad (16)$$

Definieer

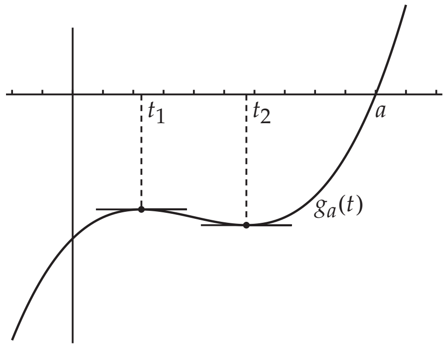
$$g_a(t)=(t-a)(t^2-2t+(2a-1)).$$

De afgeleide is

$$g_a'(t)=3t^2-(4+2a)t+(4a-1)$$

met $4(a-1)(a-7)$ als discriminant. Voor $1<a<7$ is de discriminant negatief dus dan geldt $g_a'(t)>0$ voor alle t. Bijgevolg is $g_a(t)$ dan een stijgende functie en heeft vergelijking (16) precies één oplossing. Dit geldt ook voor $a=1$ want $g_1(t)=(t-1)^3$. Dat alles betekent dat er voor $1\leq a<7$ *geen* lus is in het basispunt $(1{,}0)$.

Voor $a\geq 7$ is de situatie als volgt. Door $g_a(t)$ te schrijven in de vorm $g_a(t)=(t-a)((t-1)^2+(2a-2))$ zien we dat $t=a$ dan het enige nulpunt van $g_a(t)$ is. Dan geldt $g_a(t)<0$ voor $t<a$ en $g_a(t)>0$ voor $t>a$, dus voor alle oplossingen van (16) moet $t>a$ gelden. De nulpunten van



Figuur 7 De grafiek van $g_a(t)$ voor $a=10$.

de afgeleide $g_a'(t)$ zijn

$$t_{1,2}=\frac{1}{3}\left(2+a\pm\sqrt{(a-1)(a-7)}\right)$$

en een eenvoudige berekening toont dat t_1 en t_2 beide kleiner dan a zijn als $a\geq 7$. Voor $a\geq 7$ en $t\geq a$ is $g_a{}'(t)$ dus positief, en bijgevolg is $g_a(t)$ daar een stijgende functie, zodat vergelijking (16) precies één oplossing heeft. Zie Figuur 7.

Conclusie: voor $a\geq 1$ heeft (16) precies één oplossing, en dan treedt er dus geen lus op in het basispunt $(1{,}0)$. Op grond van symmetrie treedt er dan voor $a\leq -1$ geen lus op in het basispunt $(-1{,}0)$.

Combinatie van de bovenstaande resultaten leert dat er geen toppenkromme Γ bestaat met een lus in elk van de drie basispunten.

Naschrift
Met het bovenstaande is de vraag van Jos de Wit naar de kromme die gevormd wordt door de toppen van de parabolen door drie gegeven punten beantwoord. Voor ons was het verrassend om te ontdekken hoe zo'n op het eerste gezicht eenvoudige vraag tot zulke mooie en betrekkelijk gecompliceerde wiskunde kan leiden. Er blijven natuurlijk nog wel vervolgvragen over, bijvoorbeeld naar voorwaarden waaronder de asymptoten reële snijpunten hebben met de kromme. Of de vraag naar eventueel aanwezige reële dubbelpunten van de kromme buiten de basispunten (zie voor voorbeelden hiervan Figuur 3, 4, 5 en 6).

Voor een verwante, maar veel eenvoudiger te beantwoorden vraag, zie het artikel 'Parabolenparade' van Jos de Wit en Jan van de Craats in *Euclides* [3].

Referenties
1 Jan van de Craats, De meetkunde van de derdegraadsvergelijking, presentatieslides van een lezing op 22 februari 2007, https://staff.fnwi.uva.nl/j.vandecraats/CubicScreen.pdf.
2 B.L. van der Waerden, *Algebra I*, Springer, 1971
3 Jos de Wit en Jan van de Craats, Parabolenparade, *Euclides* 93(1), (september 2017), 19–20, zie ook https://staff.fnwi.uva.nl/j.vandecraats/DeWitdvC.pdf.