

WolframAlpha gratis op internet

Jan van de Craats

Nog steeds worden leerlingen op havo en vwo verplicht om voor de wiskundelessen een grafische rekenmachine aan te schaffen. Zo'n apparaat is duur, zeer beperkt in zijn mogelijkheden en verre van gebruiksvriendelijk. Buiten havo en vwo worden grafische rekenmachines nergens gebruikt.

Wordt het niet tijd om de grafische rekenmachine de deur uit te doen en over te stappen op gratis software die op het internet beschikbaar is? Software waarvoor je alleen maar een browser nodig hebt, die echt gebruiksvriendelijk is, en die resultaten geeft die ook op het punt van lay-out, typografie en grafische mogelijkheden superieur zijn? Surf naar

<http://www.wolframalpha.com>

en betreed de wereld van *WolframAlpha*.

1 Wat is WolframAlpha?

WolframAlpha (WA) is een zoekmachine die onder meer een interactief wiskundepakket bevat. Hoewel dat laatste gebaseerd is op het computeralgebrapakket *Mathematica*, is er geen verplichte, grammaticaal correcte manier om vragen in te voeren: WA preciseert zelf de vraagstelling, en doet dat meestal prima. Ook is er een uitgebreide lijst van voorbeelden beschikbaar op allerlei gebieden, ook de wiskunde: Klik in het startvenster onder de commandoregel op *Examples*, klik door naar *Mathematics* of klik door naar een van de wiskundige deelgebieden, bijvoorbeeld *Numbers*, *Plotting* of *Calculus*.

Ook op het gebied van de kansrekening en de statistiek kent WA een uitgebreid repertoire aan bruikbare commando's. Zie voor voorbeelden hiervan weer de knop *Examples* en klik door naar de rubriek *Statistics & Data Analysis*.

De mogelijkheden van WA zijn indrukwekkend. Een nadeel is misschien dat je soms meer resultaten krijgt dan alleen het gewenste resultaat. Maar het grote voordeel is dat iedereen er direct mee aan de slag kan en dat de site naar alle waarschijnlijkheid alleen maar beter zal worden. Voor slechts een paar euro kun je WA ook als *app* op je telefoon downloaden.

2 Wiskundevoorbeelden in WolframAlpha

Hieronder geef ik voor *Basisboek wiskunde*¹ per hoofdstuk voorbeelden van WA commando's die je kunt gebruiken. Kopieer zo'n commando in de commandoregel in WA en klik op het gelijktteken. Je zult zien dat WA dan antwoorden geeft, vaak in meerdere vormen en varianten. Soms is er ook de mogelijkheid om tussenresultaten te tonen (met de knop *show steps*). Opvallend is de hoge kwaliteit van de output van WA, zowel in typografisch opzicht (professionele lay-out) als in grafisch opzicht (fraaie grafieken).

WA geeft je veel mogelijkheden om zelf verder te experimenteren, bijvoorbeeld door commando's te variëren en aan te vullen. Bedenk echter dat je door op knoppen te drukken en een machine het werk te laten doen, zelf geen wiskunde leert. Gebruik WA dus in de eerste plaats als aanvulling bij de theorie en als inspiratiebron.

1: Rekenen met gehele getallen

Staartdelen:	<code>78620 / 307</code>
Ontbinden in priemfactoren:	<code>factor 2012</code>
Vind alle delers:	<code>factor 2012</code>
Grootste gemene deler:	<code>gcd(1024, 8640)</code>
Kleinste gemene veelvoud:	<code>lcm(1024, 8640)</code>

Bij de staartdeling (toegankelijk via *show steps*) valt op dat de "Amerikaanse" notatie, waarbij het quotient *boven* het deeltal wordt opgebouwd met de juiste cijfers op de juiste plaats, duidelijker is dan de Nederlandse notatie. Ook is de kans op fouten daarbij kleiner.

2: Rekenen met breuken

Optellen en aftrekken:	<code>(2/45) + (4/21)</code>
Vermenigvuldigen:	<code>(8/9) * (3/4)</code>
Delen:	<code>(6/5) / (10/9)</code>

3: Machten en wortels

(Vierkants)wortels:	<code>sqrt(675)</code>
Hogeremachtswortels:	<code>675^(1/3)</code>

¹Jan van de Craats en Rob Bosch: Basisboek wiskunde, 2e editie, Pearson, 2009

4: Rekenen met letters

Haakjes uitwerken: `expand(3a(a+5)^2)`
Buiten haakjes brengen: `factor(3a^3b^2+ 6a^2b)`

5: Merkwaardige producten

Haakjes uitwerken: `expand((11a+2)^2)`
Buiten haakjes brengen: `factor(a^4 - 81b^4c^4)`

6: Breuken met letters

Onder één noemer brengen: `simplify((1/(a-3))+1/(a+3))`
Vereenvoudigen: `simplify((4a-2)/(2a^2-a))`

7: Faculteiten en binomiaalcoëfficiënten

Binomiaalcoëfficiënten: `binomial(7,4)`
Sigma-notatie: `sum(binomial(8,k), k=0..8)`
Sigma-notatie: `sum(j + 1/j, j=1..3)`

8: Rijen en limieten

Rekenkundige rij: `table 3+5n, for n=3 to 12`
Som rekenkundige rij: `sum(100k+10, k=-2..22)`
Meetkundige rij: `table 3^n, for n = 0 to 10`
Som eindige meetkundige rij: `sum(7 (1/10^k), k=0..10)`
Som oneindige meetkundige rij: `sum(7 (1/10^k), k=0..infinity)`
Limieten: `lim (n+1)/n as n -> infinity`
Limieten: `lim (n^3)/(3^n) as n -> infinity`
Limieten: `lim (n!)/(n^n) as n -> infinity`

9: Eerstegraadsvergelijkingen

Eerstegraadsvergelijking: $4x + 12 = 9 + 2x$
Eerstegraadsongelijkheid: $4x + 12 < 9 + 2x$
Eerstegraadsongelijkheden: $-6 < -4x + 2 \leq 4$
Gecompleceerdere vergelijkingen: $(x+2)^2 = 4x^2$

10: Tweedegraadsvergelijkingen

Tweedegraadsvergelijking: $3x^2 + 5x + 1 = 0$

11: Stelsels eerstegraadsvergelijkingen

(2 × 2)-stelsel: solve $2x - 4y = 3$, $4x - 2y = 3$

(3 × 3)-stelsel: solve $2x - 4y + z = 3$, $3x - 2y - 4z = 5$, $x + y + 2z = 2$

12: Lijnen in het vlak

Lijn: $3x + 7y = 2$

Halfvlak: $3x + 7y < 2$

Lijn door twee punten: line through (1,2) and (3,5)

13: Afstanden en hoeken

Afstand van twee punten: distance between (1,2) and (3,5)

Inproduct: $(1,2) \cdot (-3,1)$

Hoek tussen vectoren: $\text{vectorangle}((1,2), (3,7))$

14: Cirkels

Cirkel: circle center (2,1) radius 4

Snijpunten van cirkel en lijn: solve $x^2 + y^2 = 4x + 5$, $x + y = 1$

Snijpunten van twee cirkels: solve $x^2 + y^2 = 4x - 2y + 3$, $x^2 + y^2 = 9$

15: Meetkunde in de ruimte

Afstand van twee punten: distance between (1,2,0) and (3,5,-1)

Inproduct: $(1,2,0) \cdot (-3,5,-1)$

Hoek tussen vectoren: $\text{vectorangle}((1,2,0), (-3,5,-1))$

Bol: sphere center (2,1,-3) radius 4

16: Functies en grafieken

Lineaire functie:	<code>plot 3x - 2</code>
Tweedegraadsfunctie:	<code>plot x^2 + 3x - 2</code>
Twee grafieken:	<code>plot x^2 + 3x - 2, 4x + 1 from x = -5 to 5</code> <i>(met gespecificeerd domein)</i>
Gebroken lineaire functie:	<code>plot (2x - 1) / (3x + 2)</code>
Wortelfunctie:	<code>real plot sqrt(1-x)</code>
Wortelfunctie:	<code>real plot (2x+3)^(1/3)</code>
Absolute-waardefunctie:	<code>plot 3x - 2 </code>
Polynoomfunctie:	<code>plot x^5 - 5 x^3 - x^2 + 4x + 2</code>
Factorstelling:	<code>(x^3 + 1) / (x+1)</code>
Delen van polynomen:	<code>(x^3 + 1) / (x+2)</code> <i>(Kijk onder de plot naar <i>quotient and remainder</i> en druk op <i>show steps</i> om de staartdeling te zien.)</i>
Rationale functie:	<code>plot (x^3 + 1) / (x^3 - 4x) from x = -3 to 3</code>

De specificatie `real plot` bij de wortelfuncties voorkomt dat er ook grafieken verschijnen die kennis van complexe getallen en complexe functies veronderstellen. Voor n -demachtswortels worden dan echter alleen de niet-negatieve waarden gegeven, ook als n oneven is.

17: Goniometrie

Radialen naar graden:	<code>convert (5/6)pi to degrees</code>
Graden naar radialen:	<code>convert 135 degrees to radians</code>
Goniometrische functies:	<code>tan (5/6)pi</code>
Goniometrische functies:	<code>sin (150 deg)</code>
Inverse gon. functies:	<code>arctan (-1)</code>
Inverse gon. functies:	<code>arccos (sqrt(3)/2)</code>
Grafiek:	<code>plot tan (5x)</code>
Grafiek:	<code>plot sin (pi x)</code>
Grafiek:	<code>real plot arccos (5/3 x)</code>
Limiet:	<code>lim (1 - cos x)/x^2, as x to 0</code>
Limiet:	<code>lim x sin (1/x), as x to infinity</code>
Limiet:	<code>lim (arctan(x-1))/(x-1), as x to 1</code>

18: Exponentiële functies en logaritmen

Grafiek: `plot (2/3)^(2x+2), from x = -1 to 5`
Grafiek: `plot log_2(x), from x = 0 to 8`
Grafiek: `plot log_(10)(|x+1|), from x = -4 to 4`
Grafiek: `plot e^(-2x+1), from x = -1 to 1`
Grafiek: `plot ln|2-x|, from x = -4 to 4`
Grafiek: `plot sinh x`
Grafiek: `plot ln(|x-1|/|x+1|)`
Limiet: `lim ((3^x - 1)/x) as x -> 0`
Limiet: `lim (ln(1-x)/x) as x -> 0`

Let op: onder `log` verstaat WA als regel de *natuurlijke logaritme*. Als je een logaritme met een ander grondtal bedoelt, moet je dat grondtal als een subscript noteren: `log_2(x)` geeft de logaritme met grondtal 2, dus ${}^2\log(x)$.

19: Geparametriseerde krommen

Vlakke kromme: `parametric plot (cos 3t, sin 4t)`
Poolcoördinaten: `polar plot r = cos (5phi)`

20: Differentiëren

Afgeleide functie: `d/dx (x^5 - 4x^2)`
Afgeleide functie: `d/dx ((sin x)/(1 + cos x))`
Afgeleide functie: `d/dx (3^x)`
Afgeleide functie: `d/dx (x ln(x))`
Hogere afgeleide functie: `d^2/dx^2 (x ln(x))`
Hogere afgeleide functie: `d^5/dx^5 (cos (3x))`

Met *show steps* kun je tussenstappen laten zien.

21: Differentialen en integralen

Bepaalde integraal: `int_0^2 (x^4 + 3x - 5) dx`
Onbepaalde integraal: `int (x^4 + 3x - 5) dx`

Met *show steps* kun je tussenstappen laten zien.

22: Integratietechnieken

Bepaalde integraal: $\int_1^e (\ln x) / x \, dx$
Bepaalde integraal: $\int_0^{\pi} (\sin x) / (2 + \cos x) \, dx$
Bepaalde integraal: $\int_0^1 (x \arctan x) \, dx$
Oneigenlijke integraal: $\int_0^{\infty} e^{-x} \, dx$
Oneigenlijke integraal: $\int_0^1 1/\sqrt{x} \, dx$
Oneigenlijke integraal: $\int_0^{\infty} (\sin t)/t \, dt$

23: Toepassingen

Exponentiële groei: $dy/dt = 5y$
Exponentiële groei: $dy/dt = 5y, y(0) = 3$
Logistische groei: $dy/dt = 5y(1-y)$
Logistische groei: $dy/dt = 5y(1-y), y(0) = 0.5$

3 Voorbeelden van het gebruik van WolframAlpha bij statistiek en kansrekening.

Simulatie van 100 worpen met een zuivere dobbelsteen:

```
100 random integers between 1 and 6
```

Simulatie van 100 worpen met een zuivere munt:

```
100 random integers between 0 and 1
```

Opmerking: hiermee kun je het verrassende resultaat demonstreren dat bij het herhaald werpen van een zuivere munt onvermijdelijk af en toe onverwacht lange reeksen van hetzij alleen kop hetzij alleen munt zullen optreden. Bij 100 keer werpen is de kans op een run van lengte vijf of meer gelijk aan 97% en de kans op een run van lengte 6 of meer gelijk aan 80%.

100 random reële getallen tussen 0 en 1:

```
100 random numbers between 0 and 1
```

Kans op 12 keer kop en 8 keer munt bij 20 worpen met een zuivere munt:

```
probability 12 heads 8 tails
```

Kansen bij het gooien met 5 zuivere dobbelstenen (denk aan poker of Yahtzee):

```
5 dice
```

Kans op een uitkomst tussen 28 en 35 bij het gooien met 8 zuivere dobbelstenen:

total of 8 dice between 28 and 35

Kans dat er in een groep van 23 personen twee op dezelfde dag jarig zijn:
birthday problem 23 people

De binomiale verdeling

Binomiale verdeling:

binomial distribution

Binomiale verdeling, $n = 15$, $p = 0.3$:

binomial distribution, $n = 15$, $p = 0.3$

Scroll in het antwoordscherm naar *Random sample from the distribution* om een random steekproef uit deze verdeling te zien. Klik (desgewenst meermalen) op de knop *larger sample* om grotere steekproeven te zien.

Binomiale verdeling, $n = 15$, $p = 0.3$, $P(X \geq 5)$:

binomial distribution, $n = 15$, $p = 0.3$, $P(X \geq 5)$

Binomiale verdeling, $n = 15$, $p = 0.3$, $P(X = 6)$:

binomial distribution, $n = 15$, $p = 0.3$, $P(X = 6)$

Binomiale verdeling, $n = 15$, $p = 0.3$. Kleinste waarde van k voor het aantal successen zodat geldt dat $P(X \leq k) \geq 0.7$:

binomial distribution, $n = 15$, $p = 0.3$, 70 percentile

De geometrische verdeling

Geometrische verdeling:

geometric distribution

Dit is de kansverdeling van de kansvariabele X die in een rij uitvoeringen van een Bernoulli-experiment met succeskans p het nummer van het experiment met het eerste succes aangeeft.

Geometrische verdeling, succeskans $p = 0.3$:

geometric distribution, $p = 0.3$

Scroll in het antwoordscherm naar *Random sample from the distribution* om een random steekproef uit deze verdeling te zien. Klik (desgewenst meermalen) op de knop *larger sample* om grotere steekproeven te zien.

Geometrische verdeling, $p = 0.3$, $P(X \geq 5)$:

geometric distribution, $p = 0.3$, $P(X \geq 5)$

Geometrische verdeling, $p = 0.2$, $P(X = 6)$:

geometric distribution, $p = 0.2$, $P(X = 6)$

Geometrische verdeling, $p = 0.3$. Kleinste waarde van k zodat $P(X \leq k) \geq 0.7$:

geometric distribution, $p = 0.3$, 70 percentile

De hypergeometrische verdeling

Hypergeometrische verdeling:

hypergeometric distribution

De kansverdeling van het aantal rode ballen in een steekproef van 3 trekkingen zonder terugleggen uit een vaas met 10 ballen waarvan er 8 rood zijn:

hypergeometric distribution, $N=10$, $m=8$, $n=3$

De kans op 4 rode ballen bij 7 trekkingen zonder terugleggen uit een vaas met 20 ballen waarvan er 8 rood zijn:

hypergeometric distribution, $N=20$, $m=8$, $n=7$, $P(X = 4)$

Kansverdeling X van het aantal rode ballen in een steekproef van 20 trekkingen zonder terugleggen uit een vaas met 80 ballen waarvan er 30 rood zijn. Kleinste waarde van k waarvoor $P(X \leq k) \geq 0.7$:

hypergeometric distribution, $N=80$, $m=30$, $n=20$, 70 percentile

De Poissonverdeling

Poissonverdeling:

Poisson distribution

Poissonverdeling, $\mu = 3.3$:

Poisson distribution, $\mu = 3.3$

Scroll in het antwoordscherm naar *Random sample from the distribution* om een random steekproef uit deze verdeling te zien. Klik (desgewenst meermalen) op de knop *larger sample* om grotere steekproeven te zien.

Poissonverdeling, $\mu = 3.3$, $P(X \geq 3)$:

Poisson distribution, $\mu = 3.3$, $P(X \geq 3)$

Poissonverdeling, $\mu = 3.3$, $P(X = 4)$:

Poisson distribution, $\mu = 3.3$, $P(X = 4)$

Poissonverdeling, $\mu = 3.3$. Kleinste waarde van k voor het aantal successen zodat geldt $P(X \leq k) \geq 0.7$:

Poisson distribution, $\mu = 3.3$, 70 percentile

De negatief-exponentiële verdeling

Negatief-exponentiële verdeling:

exponential distribution

Negatief-exponentiële verdeling, $\lambda = 3$:

exponential distribution, $\lambda = 3$

Scroll in het antwoordscherm naar *Random sample from the distribution* om een random steekproef uit deze verdeling te zien. Klik (desgewenst meermalen) op de knop *larger sample* om grotere steekproeven te zien.

Negatief-exponentiële verdeling, $\lambda = 3$, $P(X > 0.5)$:

exponential distribution, $\lambda = 3$, $P(X > 0.5)$

Negatief-exponentiële verdeling, $\lambda = 3$, $P(0.2 < X < 0.8)$:

exponential distribution, $\lambda = 3$, $P(0.2 < X < 0.8)$

Negatief-exponentiële verdeling, $\lambda = 3$. De x waarvoor geldt $P(X \leq x) = 0.7$:

exponential distribution, $\lambda = 3$, 70 percentile

De normale verdeling

Normale verdeling:

normal distribution

Normale verdeling, gemiddelde 5, standaardafwijking 2:

normal distribution, mean 5, sd 2

Scroll in het antwoordscherm naar *Random sample from the distribution* om een random steekproef uit deze verdeling te zien. Klik (desgewenst meermalen) op de knop *larger sample* om grotere steekproeven te zien.

Kans op een waarde kleiner dan of gelijk aan 4 bij een normaal verdeelde kansvariabele met gemiddelde 5 en standaardafwijking 2:

normal distribution, mean 5, sd 2, $P(X \leq 4)$

Kans op een waarde tussen 1 en 6 bij een normaal verdeelde kansvariabele met gemiddelde 5 en standaardafwijking 2:

normal distribution, mean 5, sd 2, $P(1 < X < 6)$

Normale verdeling, gemiddelde 6, standaardafwijking 3. De x waarvoor geldt $P(X \leq x) = 0.7$:

normal distribution, mean 6, sd 3, 70 percentile