Jan van de Craats
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
j.vandecraats@uva.nl

Onderzoek

Feuerbach met complexe getallen

Het is welbekend dat voor elke driehoek de middens van de drie zijden, de voetpunten van de drie hoogtelijnen en de middens van de verbindingslijnstukken van het hoogtepunt met de drie hoekpunten op één cirkel liggen, de zogenaamde negenpuntscirkel. In 1822 bewees Karl Wilhelm Feuerbach dat deze cirkel raakt aan de ingeschreven en de drie aangeschreven cirkels van de driehoek. Een bijzonder elegant bewijs hiervan met behulp van complexe getallen is te vinden in het boek *Inversive Geometry* uit 1933 van Frank Morley en zijn zoon Frank Vigor Morley. In dit artikel geeft Jan van de Craats een bewijs dat op hun ideeën gebaseerd is. Frank Morley senior is overigens vooral bekend geworden doordat hij rond 1900 de naar hem genoemde *trisectricestelling* vond: in een driehoek snijden bepaalde trisectrices elkaar paarsgewijs in de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.

Eerst laat ik met behulp van complexe getallen zien dat de negen genoemde bijzondere punten van een driehoek inderdaad op één cirkel liggen.

De negenpuntscirkel
Laat gegeven zijn een driehoek met hoekpunten z_1 , z_2 en z_3, en neem aan dat de omgeschreven cirkel ervan samenvalt met de eenheidscirkel in het complexe vlak. Het middelpunt van de omgeschreven cirkel is dus het complexe getal 0. Definieer

$$h = z_1 + z_2 + z_3,$$
$$n = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3),$$
$$c = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3).$$

Deze punten liggen met 0 op één lijn, de zogenaamde *rechte van Euler*, en wel zodanig dat de punten c en n het lijnstuk $0h$ verdelen in de verhouding $2:1:3$. Verder gelden de volgende drie stellingen:

1. c is het zwaartepunt van de driehoek en c verdeelt elke zwaartelijn in de verhouding $2:1$.
2. h is het hoogtepunt van de driehoek.
3. n is het middelpunt van de negenpuntscirkel, de cirkel die gaat door de middens van de zijden, de voetpunten van de hoogtelijnen en de middens van de lijnstukken die de hoekpunten verbinden met het hoogtepunt.

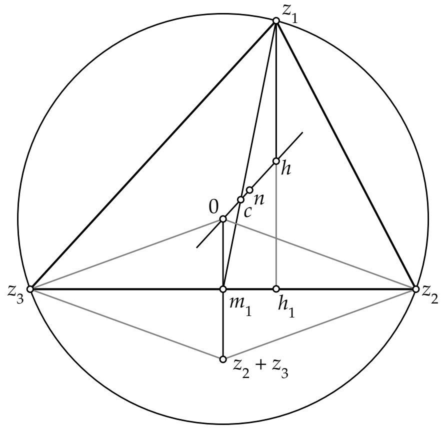
Bewijs: 1. Zie Figuur 1. Omdat

$$c = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) = \frac{1}{3}z_1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(z_2 + z_3)\right)$$

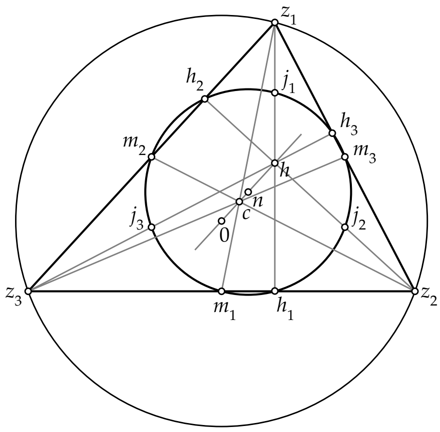
ligt c op de zwaartelijn van z_1 naar het midden $m_1 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3)$ van zijde z_2z_3, en verdeelt c die zwaartelijn in de verhouding $2:1$. Evenzo voor de andere zwaartelijnen.

2. Zie Figuur 1. Uit $h - z_1 = z_2 + z_3$ volgt dat de vector van z_1 naar h loodrecht staat op de zijde z_2z_3. Het punt h ligt dus op de hoogtelijn uit z_1, en evenzo op de hoogtelijnen uit z_2 en z_3.

3. Zie Figuur 2. De puntvermenigvuldiging vanuit c met een factor $-\frac{1}{2}$ voert de hoekpunten van de driehoek over in de middens m_1, m_2 en m_3 van de zijden, en de eenheidscirkel in de cirkel met middelpunt n en straal $\frac{1}{2}$.



Figuur 1 De rechte van Euler.



Figuur 2 De negenpuntscirkel en de rechte van Euler.

De puntvermenigvuldiging vanuit h met een factor $\frac{1}{2}$ voert de hoekpunten van de driehoek over in de aangegeven punten j_1, j_2 en j_3 en de eenheidscirkel weer in de cirkel met middelpunt n en straal $\frac{1}{2}$.

De opeenvolging van de puntvermenigvuldiging vanuit h met een factor 2 en de puntvermenigvuldiging met factor $-\frac{1}{2}$ vanuit c is een puntvermenigvuldiging met factor -1, en dus een puntspiegeling. Het punt n gaat daarbij via 0 in zichzelf over, dus n is het centrum van die puntspiegeling. Verder gaat elk punt j_i via z_i over in m_i. De punten j_i en m_i zijn dus diametrale punten op de negenpuntscirkel, en bijgevolg liggen ook de voetpunten h_i op die cirkel (stelling van Thales).

De stelling van Feuerbach

Voor het bewijs van de stelling van Feuerbach neem ik niet de omgeschreven cirkel van de driehoek als eenheidscirkel in het complexe vlak, maar een van de in- en aangeschreven cirkels. De (eventueel verlengde) zijden van de driehoek zijn nu dus raaklijnen aan de eenheidscirkel.

In het bewijs reserveer ik de letter d (van 'draaiing') voor complexe getallen op de eenheidscirkel. Er geldt dus altijd $d\overline{d} = 1$ oftewel $\overline{d} = 1/d$. Laat $z_1z_2z_3$ een driehoek zijn die de eenheidscirkel als ingeschreven of aangeschreven cirkel heeft. De raakpunten op de eenheidscirkel noem ik d_1, d_2 en d_3, met d_1 op z_2z_3, enzovoorts. Verdere notaties:

$$\begin{aligned} s_1 &= d_1 + d_2 + d_3 s_2, \\ s_2 &= d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_1 s_3, \\ s_3 &= d_1 d_2 d_3. \end{aligned}$$

Merk op dat $\overline{s_1} = s_2/s_3$ en $s_3\overline{s_3} = 1$. Het getal s_3 ligt dus ook op de eenheidscirkel. Zonder beperking van de algemeenheid stel ik

$$s_3 = 1$$

(deel anders alle d_i door eenzelfde derdemachtswortel uit s_3). Dan geldt dus $\overline{s_1} = s_2$ en $\overline{s_2} = s_1$.

Als z een punt is op een raaklijn aan de eenheidscirkel met raakpunt d, dan zijn de driehoeken $z0d$ en $z(2d)d$ elkaars spiegelbeeld in de raaklijn (zie Figuur 3), dus dan is

$$\frac{z-0}{d-0} = \overline{\left(\frac{z-2d}{d-2d}\right)} = \frac{\overline{z}-2\overline{d}}{-\overline{d}},$$

oftewel

$$z + d^2\overline{z} = 2d.$$

Het hoekpunt z_1 van de driehoek ligt op de zijden met raakpunten d_2 en d_3 (zie Figuur 4), dus

$$z_1 + d_2^2\overline{z_1} = 2d_2 \quad \text{en} \quad z_1 + d_3^2\overline{z_1} = 2d_3.$$

Aftrekken en delen door $d_2 - d_3$ geeft $(d_2 + d_3)\overline{z_1} = 2$ dus

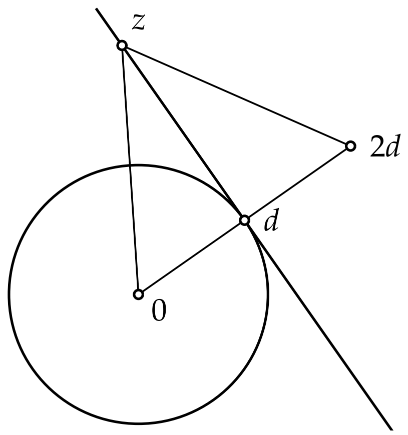
$$\overline{z_1} = \frac{2}{d_2 + d_3} \quad \text{zodat} \quad z_1 = \frac{2d_2d_3}{d_2 + d_3},$$

en analoog voor z_2 en z_3. Het midden $m_1 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3)$ van zijde z_2z_3 voldoet dus aan

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{d_1d_3}{d_1+d_3} + \frac{d_2d_1}{d_2+d_1} = \frac{d_1(s_2+d_2d_3)}{(d_1+d_3)(d_1+d_2)} \\ &= \frac{(s_2+d_2d_3)(d_1d_2+d_1d_3)}{(d_1+d_3)(d_1+d_2)(d_2+d_3)} \\ &= \frac{(s_2+d_2d_3)(s_2-d_2d_3)}{(s_1-d_2)(s_1-d_3)(s_1-d_1)} \\ &= \frac{s_2^2-(d_2d_3)^2}{s_1s_2-s_3} = \frac{\overline{s_1}^2-\overline{d_1}^2}{s_1\overline{s_1}-1} \end{aligned}$$

(hierbij is in de laatste stap gebruikt dat $s_3 = 1$ en $\overline{s_1} = s_2$). Evenzo geldt

$$m_2 = \frac{\overline{s_1}^2-\overline{d_2}^2}{s_1\overline{s_1}-1} \quad \text{en} \quad m_3 = \frac{\overline{s_1}^2-\overline{d_3}^2}{s_1\overline{s_1}-1}.$$



Figuur 3 De raaklijn aan de eenheidscirkel in d.

Als d de eenheidscirkel doorloopt, dan doorloopt

$$z = \frac{1}{s_1\overline{s_1}-1}(\overline{s_1}^2 - d)$$

een cirkel met middelpunt

$$n = \frac{\overline{s_1}^2}{s_1\overline{s_1}-1}.$$

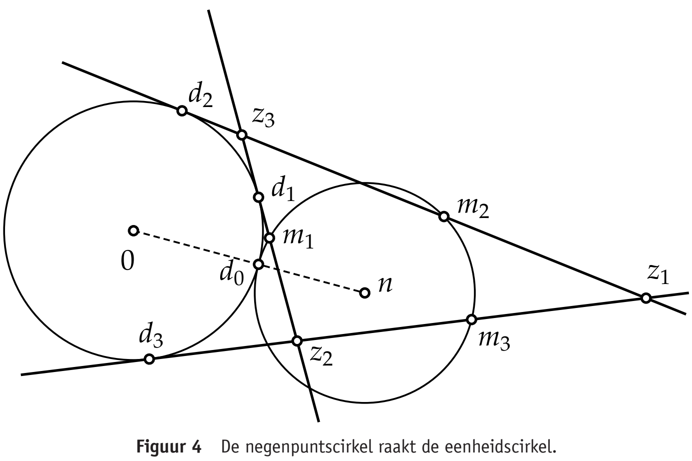
Voor $d = \overline{d_1}^2$, $d = \overline{d_3}^2$ geeft dit respectievelijk m_1, m_2 en m_3. Het is dus de negenpuntscirkel van driehoek $z_1z_2z_3$. Kies nu $d = d_0 = \overline{s_1}/s_1$ (dit is een punt op de eenheidscirkel), dan blijkt dit punt ook op de negenpuntscirkel te liggen want

$$\frac{1}{s_1\overline{s_1}-1}\left(\overline{s_1}^2 - \frac{\overline{s_1}}{s_1}\right) = \frac{\overline{s_1}(s_1\overline{s_1}-1)}{(s_1\overline{s_1}-1)s_1} = \frac{\overline{s_1}}{s_1} = d_0.$$

Bovendien geldt

$$d_0 = \frac{\overline{s_1}}{s_1} = \frac{\overline{s_1}^2}{s_1\overline{s_1}} = \frac{s_1\overline{s_1}-1}{s_1\overline{s_1}}n.$$

d_0 is dus een *reëel* veelvoud van n, met andere woorden, n, d_0 en 0 liggen op één lijn. Dat betekent dat de negenpuntscirkel en de eenheidscirkel elkaar in d_0 raken (zie Figuur 4). Hiermee is bewezen:

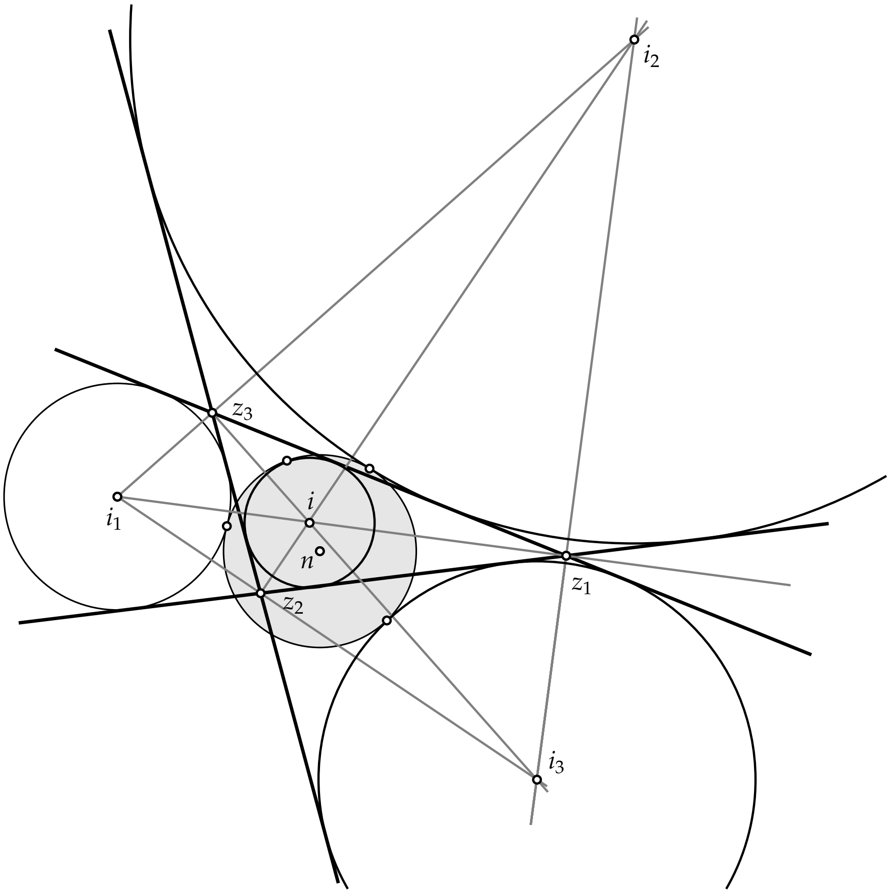


Figuur 4 De negenpuntscirkel raakt de eenheidscirkel.

Stelling (K.W. Feuerbach). *De negenpuntscirkel van een driehoek raakt de ingeschreven cirkel en de drie aangeschreven cirkels.*

In Figuur 5 zijn de middelpunten van de in- en aangeschreven cirkels aangegeven met i, i_1, i_2 en i_3. Ze liggen op de binnen- en buitenbissectrices van driehoek $z_1z_2z_3$. Omdat de binnenbisectrice en de buitenbissetrice van een hoek elkaar loodrecht snijden, vormen i, i_1, i_2 en i_3 een *orthogonaal viertal*, dat wil zeggen dat elk punt het hoogtepunt is van de driehoek van de andere drie. De verbindingslijnen van het middelpunt n van de negenpuntscirkel met die vier punten gaan door de raakpunten van de negenpuntscirkel met de ingeschreven en aangeschreven cirkels (zie ook Figuur 4). Daarmee is, dankzij Feuerbach, het aantal bijzondere punten op de negenpuntscirkel van een driehoek toegenomen van negen naar dertien!

Opmerking: Het bewijs van vader en zoon Morley staat op bladzijde 191 van hun boek *Inversive Geometry* uit 1933, dat onlangs opnieuw uitgebracht is in de serie Dover Books on Mathematics. Morley's stelling over trisectrices wordt daarin behandeld op bladzijde 244.



Figuur 5 De stelling van Feuerbach.