

Hoofdrekenen als struikelblok

Jan van de Craats*

18 oktober 2007

Op de basisschool neemt hoofdrekenen tegenwoordig een belangrijke plaats in. Daarbij gaat het vooral om sommen waarbij de manier waarop je ze uit moet rekenen, afhangt van de speciale getallen in de opgave. Geen algemene oplossingsregels dus, maar recepten die alleen in bijzondere gevallen werken. 'Handig rekenen' wordt dit genoemd. Er wordt veel tijd aan besteed omdat dit het begrip en het inzicht bij leerlingen zou bevorderen.

Aan de hand van voorbeeldopgaven zal ik laten zien wat dit 'handige rekenen' in de praktijk betekent. Zo zie je wat voor rekensommen leerlingen uit het hoofd moeten kunnen maken en welke oplossingsrecepten ze daarbij moeten gebruiken. Ik haal die opgaven en die recepten uit de rapportage van de Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau (PPON) die in 2004 door het Cito is gehouden onder leerlingen van jaargroep 8 van de basisschool.

Hoofdrekenopgaven uit het PPON-onderzoek

In 2004 heeft het Cito in opdracht van het ministerie van OCW voor de vierde maal een periodieke peiling van het onderwijsniveau voor het vak rekenen en wiskunde op de basisschool uitgevoerd. Belangrijk onderdeel hiervan was een uitgebreide toets die in mei 2004 is afgenomen bij een grote steekproef van leerlingen van jaargroep 8. Het onderzoek betrof 22 onderwerpen verdeeld over drie domeinen: *I. Getallen en bewerkingen*, *II. Verhoudingen, breuken en procenten* en *III. Meten, meetkunde, tijd en geld*. Deze verdeling sluit nauw aan bij de bestaande onderwijspraktijk en de inhoud van het thans op de basisschool gebruikte onderwijsmateriaal. Ook de aard van de opgaven sluit hierbij aan. In 2005 heeft het Cito over dit onderzoek gerapporteerd [1]; het rapport kan op de website van het Cito worden ingezien en gedownload. In dat rapport staan, behalve een volledige beschrijving van de onderzoeksopzet en -resultaten, ook bij elk onderwerp een serie voorbeeldopgaven met bij elke opgave een analyse van de toetsresultaten.

Vijf van de tweeëntwintig onderwerpen uit het PPON-onderzoek hebben betrekking op hoofdrekenen. De leerlingen moesten ze uit het hoofd uitrekenen, dus zonder gebruik te maken van 'uitrekenpapier' en zonder tussenuitkomsten te noteren. Bij twee van de vijf onderwerpen ging het om een *rekendictee*

*Prof.dr. J. van de Craats is hoogleraar Wiskunde en Maatschappij aan de Universiteit van Amsterdam en hoogleraar Wiskunde, in het bijzonder Wiskunde-onderwijs, aan de Open Universiteit.

waarbij de leerlingen het antwoord op elke opgave binnen zeven seconden moesten geven. Bij de andere drie onderwerpen was die tijdsbeperking er niet.

De voorbeeldopgaven van de beide *rekendictees* staan op de bladzijden 58 en 64 van het PPON-rapport, die van het *hoofdrekenen zonder tijdslimiet* op de bladzijden 70 – 71 (optellen en aftrekken), 78 – 79 (vermenigvuldigen en delen) en 86 – 87 (schattend rekenen). De opgaven van die laatste drie onderwerpen zijn vrijwel allemaal ingebed in een ‘realistische’ context. Om de lezer snel een idee te geven van de aard en omvang van het hoofdrekenen in het moderne rekenonderwijs, geef ik hieronder de opgaven van de bladzijden 70 – 71 (optellen en aftrekken) en 78 – 79 (vermenigvuldigen en delen) allemaal in een uitgekleden vorm, dus zonder context. De oorspronkelijke opgaven, waarbij dus in veel gevallen een vertaalslag aan het eigenlijke rekenen vooraf gaat, kan de lezer in het PPON-rapport vinden.

Hoofdrekenen: optellen en aftrekken

1. $63 + 78 + 37 =$
2. $847 + 98 =$
3. $€ 4,00 - € 0,62 =$
4. $285 - 178 =$
5. $€ 22,25 + € 8,45 + € 7,75 =$
6. $8003 - 5 =$
7. $€ 0,95 + € 2,05 + € 2,34 + € 1,66 =$
8. $50 - 7,50 =$
9. $1697 + 59 =$
10. $1600 - 1475 =$
11. $2,75 - 0,5 =$
12. $5,85 + 4,2 =$
13. $€ 0,99 + € 1,99 + € 0,99 + € 1,99 + € 1,99 =$
14. $55\,000 - 28\,500 =$
15. $0,75 + 7,5 =$
16. $€ 115,45 - € 75,50 =$
17. $11,46 + 0,6 =$
18. $250\,000 - 189\,500 =$

In de inleidende tekst (p. 69) somt het PPON-rapport de volgende ‘oplossingsprocedures’ op. Voor optellen:

- het verwisselen of hergroeperen: $483 + 59 + 17 = 483 + 17 + 59 = 500 + 59 = 559$;
- het splitsen en rekenen via een rond getal: $8,96 + 0,16 = 8,96 \dots 9 \dots 9,12$;
- het vervangen van de oorspronkelijke getallen door één van de getallen te vergroten en het andere getal in dezelfde mate te verkleinen of omgekeerd: $194 + 210 = 200 + 204 = 404$;

- het vervangen van één of meer van de getallen en daarvoor achteraf compenseren: $99 + 99$ als $100 + 100 - 2$.

Voor aftrekken vermeldt het PPON-rapport zes procedures:

- hergroeperen;
- splitsen en rekenen via een rond getal;
- het vergroten of verkleinen van beide getallen in gelijke mate;
- het vervangen van één getal door een rond getal en daarvoor achteraf compenseren;
- aanvullen;
- het in één keer aftrekken van twee of meer getallen.

Hoofdrekenen: vermenigvuldigen en delen

1. $4 \times \text{€} 6,25 =$
2. $\frac{1}{2} \times 158 =$
3. Hoe vaak gaat 50 in 463?
4. $40 \times 12 =$
5. $4 \times 0,75 =$
6. $175 : 5 =$
7. $\text{€} 95,- : 5 =$
8. $80 \times \text{€} 2,50 =$
9. Hoe vaak gaat $\text{€} 0,34$ in $\text{€} 1,70$?
10. $200 \times \text{€} 1,75 =$
11. Hoe vaak gaat $\text{€} 0,48$ in $\text{€} 5,00$?
12. $6 \times \text{€} 6,98 =$
13. $25 : 4 =$
14. $\text{€} 5,10 : 3 =$
15. $\text{€} 8,00 : 5 =$
16. $250 \times 4 \times \text{€} 0,75 =$
17. $500 \times \text{€} 49,- =$
18. $8 \times 1,5 \times 12,5 =$

In de inleidende tekst (p. 77) somt het PPON-rapport de volgende ‘oplossingsprocedures’ op. Voor vermenigvuldigen:

- verwisselen of hergroeperen: $4 \times 7 \times 25 = 4 \times 25 \times 7$;
- splitsen: $7 \times 23 = 7 \times 20 + 7 \times 3$
- veranderen van één van de getallen in een rond getal en daarvoor een correctie toepassen: $8 \times 98 = 8 \times 100 - 8 \times 2$;
- vervangen van de opgave door een opgave met dezelfde uitkomst, door één van de factoren te vermenigvuldigen met een getal en de andere factor door datzelfde getal te delen: $18 \times 3,5 = 9 \times 7$;

Bij delen noemt het PPON-rapport de volgende procedures

- splitsen van het deeltal: $1608 : 8$ als $1600 : 8$ en $8 : 8$;
- veranderen van één van de getallen in een rond getal en daarvoor een correctie toepassen: $1592 : 8 = 1600 : 8$ minus $8 : 8$;
- vervangen van de opgave door een opgave met dezelfde uitkomst, door beide getallen met eenzelfde getal te vermenigvuldigen of door eenzelfde getal te delen: $22,5 : 2,5 = 45 : 5$;
- afronden van de uitkomst. Bij die opgaven moet de leerling uit de context afleiden welke betekenis aan de rest moet worden toegekend en of naar boven of naar beneden moet worden afgerond.

Handig?

Het is duidelijk dat kleine veranderingen in de opgaven ze in veel gevallen te moeilijk maken voor hoofdrekenen op school. De maakbaarheid hangt bijna altijd af van de speciaal gekozen getallen. Bij elke som is er wel een 'handige truc' waarmee je hem snel uit je hoofd op kunt lossen. Maar juist door de grote nadruk op dit soort hoofdrekenen krijgen leerlingen gemakkelijk de indruk dat er in het algemeen ook voor elke rekensom zo'n 'handige truc' moet bestaan.

Die indruk wordt verder gevoed door de opgaven in het PPON-onderzoek, de schooltoetsen en de Cito-toets. Want ook daar zijn bijna alle opgaven wel op een 'handige manier' uit te rekenen. Het gevolg is dat als leerlingen er niet direct in slagen om zo'n truc te vinden, ze al gauw de moed opgeven. Of ze komen in tijdnood. Let wel, het gaat hier om niet minder dan achttien verschillende recepten voor 'handig rekenen'. Misschien is de lijst zelfs niet volledig, en worden er in de schoolboeken nog meer van zulke rekenrecepten behandeld.

Hoe dan ook, de beginnende rekenaars moeten niet alleen al deze trucs leren, ze moeten ook nog leren in welke gevallen ze kunnen worden toegepast. Realiseren de ontwerpers van het 'handige rekenen' zich hoeveel tijd en inspanning dit kost? En is het vreemd dat matige en zwakke rekenaars door de bomen het bos dan niet meer zien?

Liever op papier

Als een persoonlijke opmerking wil ik daar graag aan toevoegen dat het bij veel van de hierboven gegeven opgaven niet in me op zou komen ze uit het hoofd te berekenen. Met pen en papier doe ik het sneller en gegarandeerd zonder fouten, want hoofdrekenen is nooit mijn sterke kant geweest. Het heeft bij mij ook nooit het inzicht bevorderd.

Maar afgezien daarvan, ik zou beginners, of ze nu sterk, matig of zwak zijn, zulke opgaven nooit uit het hoofd laten uitrekenen. Waar is dat goed voor? Leer ze stap voor stap de traditionele rekenrecepten met pen en papier. *Juist* met pen en papier, omdat je dan minder fouten maakt. Zo kun je jezelf namelijk makkelijk controleren omdat je alles volledig uitschrijft. In mijn lange ervaring met wiskundeonderwijs heb ik de studenten altijd gedwongen alles op te schrijven, net zolang totdat ze een vaardigheid volledig onder de knie hebben.

Wat alle leerlingen echt aan hoofdrekenen moeten beheersen, heb ik in [2] opgesomd. Hieronder herhaal ik die lijst. Dat, en niet meer, is noodzakelijk om vlot te kunnen rekenen. Met pen en papier, wel te verstaan. Ik acht de huidige cultus van hoofdrekenen, compleet met alle ad-hoc trucjes die men onder de noemer ‘handig rekenen’ rangschikt, uitermate schadelijk voor het rekenonderwijs. De tijd en moeite die eraan besteed wordt, gaat ten koste van het aanleren van de traditionele universele rekenrecepten, die dan ook in veel gevallen op school niet meer voldoende behandeld en geoefend worden. Nog erger is, dat dit ‘handige rekenen’ voor de matige en zwakke rekenaars zonder meer rampzalig is, zie hierover mijn artikel *Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen* [3] en de bloemlezing van de reacties hierop die ik op mijn homepage heb gepubliceerd.

Parate kennis

Om met pen en papier te kunnen rekenen is het nodig dat je vlot en zonder enige aarzeling de volgende berekeningen uit het hoofd kunt uitvoeren. Je moet ze gewoon paraat hebben. Een kwestie van oefenen dus, net zo lang totdat je ze kunt dromen. Het is maar een klein rijtje:

1. Twee getallen van één cijfer bij elkaar optellen.
Voorbeelden: $3 + 5 = 8$, $7 + 9 = 16$, $2 + 8 = 10$.
2. Een getal van één cijfer optellen bij een getal van twee cijfers.
Voorbeelden: $23 + 5 = 28$, $77 + 9 = 86$, $52 + 8 = 60$.
3. Twee getallen kleiner dan twintig van elkaar aftrekken (het kleinste van het grootste).
Voorbeelden: $8 - 5 = 3$, $19 - 12 = 7$, $17 - 9 = 8$, $12 - 7 = 5$.
4. Twee getallen die elk bestaan uit één cijfer gevolgd door een aantal nullen, bij elkaar optellen.
Voorbeelden: $30 + 50 = 80$, $7000 + 9000 = 16000$, $200 + 80 = 280$, $9000 + 30 = 9030$.
5. Twee getallen van één cijfer met elkaar vermenigvuldigen.
Voorbeelden: $3 \times 5 = 15$, $7 \times 9 = 63$, $2 \times 8 = 16$.
6. Een getal vermenigvuldigen met 10, 100, 1000, enzovoort.
Voorbeelden: $345 \times 10 = 3450$, $52 \times 100 = 5200$, $979 \times 1000 = 979000$.
7. Twee getallen die elk bestaan uit één cijfer gevolgd door een aantal nullen, met elkaar vermenigvuldigen.
Voorbeelden: $30 \times 50 = 1500$, $7000 \times 9 = 63000$, $200 \times 80 = 16000$, $400 \times 300 = 120000$.
8. Een getal dat eindigt op een nul delen door 10, een getal dat eindigt op twee nullen delen door 100, enzovoort.
Voorbeelden: $560 : 10 = 56$, $36000 : 100 = 360$, $606000 : 1000 = 606$.
9. Een deling, al dan niet met rest, uitvoeren als de deler een getal van één cijfer is, en het deeltal kleiner is dan tien maal de deler.
Voorbeelden: $56 : 7 = 8$, $36 : 9 = 4$, $66 : 7 = 9 \text{ rest } 3$, $77 : 9 = 8 \text{ rest } 5$.

Bij optellen onder elkaar gebruik je 1, 2 en 4, bij aftrekken onder elkaar 3, bij vermenigvuldigen onder elkaar 1, 2, 5, 6 en 7 en bij staartdelen 3, 5, 8 en 9. Voor het rekenen met kommagetallen komen daar dan nog bij:

10. Een kommagetal vermenigvuldigen met 10, 100, 1000 enzovoort.
11. Een kommagetal delen door 10, 100, 1000 enzovoort.
12. Procenten omzetten in kommagetallen en omgekeerd.
Voorbeeld: $15\% = 0,15$, $0,2\% = 0,002$, $235\% = 2,35$.
13. Een kommagetal afronden op een gegeven aantal decimalen (plaatsen achter de komma).

Ook voor schattend rekenen zijn de bovenstaande hoofdrekenregels voldoende. Maar ook daar geldt: wat is er tegen om de berekening op te schrijven? Waarom mag je niet op een kladje werken? Waarom zou dat uit het hoofd moeten? Begrijp me goed: natuurlijk is er niets op tegen dat leerlingen met een rekenknobbel snel van alles uit het hoofd gaan doen. Of laten zien hoe ze op een handige manier sneller tot het goede antwoord zijn gekomen. Maar leer ze eerst de algemene recepten. En vergis je niet: leerlingen vinden het prachtig als ze zien dat die ook in eenvoudige gevallen, waar ze misschien het antwoord direct al zien, tot het juiste antwoord leiden. Dat geeft vertrouwen en voldoening: *Zie je, het werkt écht altijd! Is dat niet schitterend?*

Referenties:

1. Jan Jansen, Frank van der Schoot, Bas Hemker, met een bijdrage van Cornelis M. van Putten, *Balans [32] van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4, Uitkomsten van de vierde peiling in 2004*, Cito, 2005.
2. Jan van de Craats, *Rekenvaardigheden op de basisschool*, discussiestuk ten dienste van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen rekenen en Taal, augustus 2007.
3. Jan van de Craats, *Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen*, Nieuw Archief voor Wiskunde, vijfde serie, jaargang 8, nr. 2, juni 2007, 132-136.

Het PPON-rapport kan worden gedownload vanaf de website van het Cito:

http://www.citogroep.nl/share/PPON/Cito_pponbalans_32.pdf.

Het discussiestuk [2] en het artikel [3] kunnen worden gedownload vanaf mijn homepage: <http://www.science.uva.nl/~craats>.