Vlakke meetkunde met coördinaten*

Jan van de Craats

15 november 2005

1 Inleiding

In de Inleiding van zijn boek *De logische grondslagen der Euklidische meetkunde* uit 1937 bracht B.L. van der Waerden [2] de kloof ter sprake die er destijds bestond '... tussen de analytische, projectieve, differentiaal- en hogere meetkunde enerzijds, die de student aan de universiteit leert, en de elementaire, axiomatisch opgebouwde, euklidische meetkunde, die hij als leraar later op school moet onderwijzen.' Met dit boek, de uitwerking van een collegereeks uit 1930/31 aan de Groningse universiteit, wilde Van der Waerden die kloof overbruggen. Hij richtte zich dus tot de universitaire wiskundestudenten die het leraarschap ambieerden, en in die tijd was dat nog de overgrote meerderheid. Maar de situatie is sindsdien ingrijpend veranderd, niet alleen op het gebied van de beroepskeuzemogelijkheden voor wiskundestudenten, maar ook op het vlak van de schoolwiskunde.

Toch is het interessant dat Van der Waerdens citaat duidelijk maakt dat de euclidische, axiomatische behandeling van de vlakke meetkunde ook toen al niet meer behoorde tot de hoofdstroom van de wiskunde, en dat er dus in feite een einde was gekomen aan een tijdperk van meer dan twintig eeuwen waarin deze opbouw als het fundament van de wiskunde zelf was gezien. Een behandeling op school van de grondslagen van de meetkunde volgens de axiomatische methode miste dus ook toen al een groot deel van haar wiskundige bestaansgrond, en dat heeft waarschijnlijk in niet geringe mate bijgedragen

*Dit is een geactualiseerde versie van mijn syllabustekst *De vlakke meetkunde terug op school* voor de CWI-Vacantiecursus 1998 die als thema had: *Meetkunde, oud en nieuw* [3]. Destijds was net besloten vlakke meetkunde op te nemen in het vwo-wiskundeB12 programma. Mijn syllabustekst was een poging om de inhoud van dat vak in een moderne richting om te buigen. Dat is niet gelukt. Ik heb er destijds ook voor gewaarschuwd dat met name de technische universiteiten geen reden zouden zien wiskunde B12 verplicht te stellen als ingangseis wanneer de inhoud ervan voor hen op geen enkele manier als herkenbaar en nuttig zou worden ervaren. Dat is dan ook precies wat er gebeurd is.

aan de teloorgang van de schoolmeetkunde. Een teloorgang die dan ook niet door invloeden van buitenaf, maar vooral vanuit de wiskunde zelf is teweeggebracht.

De argumenten tegen een axiomatische opbouw van de vlakke meetkunde op school zijn nog onverkort geldig. De twee belangrijkste zijn:
1. De axiomatische opbouw plaatst de vlakke meetkunde in een geïsoleerde positie ten opzichte van de rest van de wiskunde en de toepassingen ervan in de techniek, de informatica en de natuurwetenschappen. Zo is er geen natuurlijke band met de analyse, waarin men grafieken tekent in een coördinatenvlak en oppervlakten van vlakdelen berekent met behulp van de integraalrekening. Evenmin liggen er directe verbindingen met de lineaire algebra, de algebraische meetkunde en moderne toepassingen zoals *computer graphics*.
2. Een strikt logische axiomatische opbouw van de stof verloopt uiterst moeizaam; je moet een lange weg vol voetangels en klemmen afleggen, waarbij je in het begin veel energie moet steken in het bewijzen van 'vanzelfsprekende' stellingen. Op school is deze aanpak volstrekt onhaalbaar. Ook vroeger werden daarom allerlei fundamentele kwesties onder het vloerkleed geveegd in de hoop dat de leerlingen er geen kritische vragen over zouden stellen.

1.1 Zijn de axioma's consistent?

Daar komt nog iets bij. Zoals bij elk axiomatisch gedefinieerd systeem in de wiskunde kun je de vraag naar de consistentie van de axioma's niet negeren. Die vraag luidt: is het uitgesloten dat een keten van logische gevolgtrekkingen uit de axioma's tot een tegenspraak leidt? Zo'n vraag wordt in de wiskunde altijd beantwoord door een *model* te geven, dat wil zeggen een bekende wiskundige structuur die aan de axioma's voldoet. Zou het nieuwe axiomastelsel inconsistent zijn, dan zou die structuur ook niet als wiskundig object kunnen bestaan. Consistentie is dus relatief: als je aanneemt dat zo'n bekende structuur op een consistente basis rust, kun je concluderen dat het nieuwe axiomastelsel, waar die bekende structuur een realisering van is, evenmin tot tegenspraken kan leiden. Op deze manier worden nieuwe axiomatische structuren ingepast in het grote bouwwerk van de wiskunde. Het gevoel van zekerheid dat de meeste wiskundigen koesteren, berust daarbij op het besef dat men aan de gehele wiskunde op die manier een gemeenschappelijk fundament kan geven. Zo'n fundament is bijvoorbeeld de verzamelingenleer van Zermelo en Fraenkel.

Bij een axiomatische fundering van de euclidische vlakke meetkunde kun je als model de $\mathbb{R}^2$ nemen, waarbij je dan op de bekende wijze punten, lijnen, afstanden, hoeken, etc., definieert. Daarbij moeten de axioma's zoals Euclides die formuleerde, worden aangevuld op een manier die bijvoorbeeld door Hilbert in zijn *Grundlagen der Geometrie* [1] is aangegeven, of op een daarmee equivalente wijze. Ook het geciteerde boek van Van der Waerden bevat zo'n volledig axiomastelsel. Zowel Hilbert als Van der Waerden sluiten hun opbouw inderdaad af met een beschrijving van $\mathbb{R}^2$ als model om de consistentie van hun axioma's te rechtvaardigen.

1.2 De euclidische ruimte als reële vectorruimte

De axiomatisch gedefinieerde euclidische meetkunde onderscheidt zich van de meeste andere axiomatisch gedefinieerde wiskundige structuren door het feit dat alle modellen ervan equivalent zijn. Precies gezegd: elk model van de euclidische vlakke meetkunde is isomorf met de $\mathbb{R}^2$ die voorzien is van het standaardinproduct. Het is daarom niet van wezenlijk belang op welke wijze je het euclidische vlak definieert, via axioma's of via een aanpak waarbij de $\mathbb{R}^2$ centraal staat. Het uiteindelijke resultaat is hetzelfde, alleen de weg waarlangs het wordt bereikt, verschilt. De keuze die je maakt voor een bepaalde presentatie kan door allerlei motieven worden ingegeven. Je kunt bijvoorbeeld uit historische interesse kiezen voor een axiomatische behandeling, of omdat je de draagwijdte en de onderlinge afhankelijkheid van bepaalde axioma's wilt onderzoeken. Tegen zo'n aanpak op school zijn hierboven echter al doorslaggevende bezwaren aangevoerd.

Bij de 'koninklijke weg' die in de wiskunde thans algemeen gangbaar is, neemt men de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen als uitgangspunt, waarna men een n-dimensionale *euclidische ruimte* definieert als een n-dimensionale reële vectorruimte voorzien van een inwendig product. Omdat bewezen kan worden dat elke n-dimensionale euclidische ruimte isomorf is met $\mathbb{R}^n$ voorzien van het standaardinproduct $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, kun je je bij het in kaart brengen van de euclidische meetkunde tot dit laatste geval beperken. Bij de vlakke euclidische meetkunde is $\mathbb{R}^2$ met het standaardinproduct dan het uitgangspunt. Punten, lijnen, afstanden, hoeken en alle verdere meetkundige begrippen kunnen binnen dit kader netjes worden gedefinieerd.

Hoewel ook een dergelijke opbouw van de euclidische vlakke meetkunde op school misschien niet volledig gerealiseerd kan worden – pas bij een wiskundestudie op de universiteit of de lerarenopleiding kunnen alle details hiervan worden ingevuld – kun je toch een aanpak kiezen die hier goed op voorbereidt. In feite past zo'n benaderingswijze ook uitstekend bij de intuïtieve en aanschouwelijke manier waarop thans in de basisvorming de meetkunde wordt verkend. Daarbij werk je immers ook vrijelijk met coördinaten (meestal gevisualiseerd als ruitjespapier) wanneer dit van pas komt. Wil je in de bovenbouw bij de verdere exploratie van de vlakke meetkunde ook de aspecten redeneren en bewijzen tot hun recht laten komen, dan moet je echter zorgen voor een stevig fundament van intuïtief duidelijke uitgangspunten waarvan de kenner weet dat ze met wat wiskundige techniek volledig te rechtvaardigen zijn. Je zou die uitgangspunten *basisstellingen* kunnen noemen. Ze zullen, anders dan de stellingen die daarna ter sprake komen, op school waarschijnlijk niet worden bewezen. Bij de hieronder gepresenteerde opzet, die gebruik maakt van slechts één basisstelling, hoeft een geïnteresseerde leerling echter niet met een kluitje het riet ingestuurd te worden, want zoals ik zal laten zien is het bewijs van die basisstelling ook voor geïnteresseerde vwo-ers best te volgen.

Voordat ik een schets geef van zo'n behandeling van de vlakke meetkunde in de bovenbouw, wijd ik eerst nog enige woorden aan het spanningsveld tussen de meetkunde en de wereld om ons heen en aan het voortraject, de meetkunde in de onderbouw.

1.3 De meetkunde en de werkelijkheid

De werkelijkheid vormt de inspiratiebron van de wiskunde, ook bij de meetkunde. In reële situaties waarin behoefte bestaat aan het toepassen van de vlakke euclidische meetkunde (uit respect voor Euclides blijf ik deze meetkunde naar hem noemen, ook al kies ik voor een andere opbouw) is er altijd sprake van *punten*, *lijnen* en *afstanden* in een *vlak*. In werkelijkheid zijn dat onvolmaakte objecten en grootheden: een vlak is nooit volmaakt vlak, punten en lijnen hebben altijd een zekere dikte, lijnen zijn nooit volmaakt recht, afstanden zijn nooit volmaakt nauwkeurig te meten.

Zoals dat ook altijd in de fysica gebeurt, gebruik je ook hier een geïdealiseerd model om toch greep op die werkelijkheid te krijgen. In zo'n model hebben punten geen afmetingen, hebben lijnen geen dikte, strekken lijnen zich onbegrensd naar twee kanten uit, hebben lijnstukken een welbepaalde, exacte lengte, geldt de stelling van Pythagoras in rechthoekige driehoeken, enzovoort. En daarin kun je overal waar je maar wilt een *orthonormaal coördinatenstelsel* kiezen, dat wil zeggen een stelsel met onderling loodrechte coördinaatassen met daarop gelijke schaalverdelingen. Die vrije keuze van coördinaten kun je visualiseren door een *transparant* waarop een rechthoekig coördinatenstelsel in de vorm van een assenkruis met een bijbehorend vierkantenrooster is aangebracht, op een willekeurige plaats op het tekenvlak te leggen.

Die keuzevrijheid zal de belangrijkste pijler zijn van de hieronder gepresenteerde opbouw. Daarbij ga ik ervan uit dat leerlingen in lagere klassen al enigszins vertrouwd zijn gemaakt met eenvoudige meetkundige figuren zoals punten, lijnen, cirkels, halve lijnen, hoeken, lijnstukken, evenwijdige lijnen, loodlijnen, gelijkbenige driehoeken, gelijkzijdige driehoeken, rechthoeken, vierkanten, de afstand tussen twee punten en de afstand van een punt tot een lijn. Bij het werken met coördinaten zullen leerlingen ook al hebben kennisgemaakt met de *vergelijkingen* waarmee lijnen en cirkels kunnen worden beschreven.

Daarnaast zullen leerlingen ook al vertrouwd zijn met translaties, lijnspiegelingen en rotaties. Voor de intuïtieve begripsvorming kun je daarbij ook weer gebruik maken van transparanten: je kunt figuren op een transparant kopiëren en met de transparant daadwerkelijk zulke bewegingen uitvoeren; bij lijnspiegelingen moet de transparant dan om de spiegelas worden omgeklapt.

Ook de begrippen congruentie en gelijkvormigheid kunnen met transparanten worden verklaard: twee figuren $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ heten *congruent* als je $\mathcal{F}_1$, gekopieerd op een transparant, zó op $\mathcal{F}_2$ kunt leggen dat het beeld van $\mathcal{F}_1$ volledig met $\mathcal{F}_2$ samenvalt. Daarbij mag je de transparant ook omklappen; in dat geval spreekt men van een *indirecte* of gespiegelde congruentie. Wanneer je de transparant eerst moet vergroten of verkleinen om ervoor te zorgen dat het beeld van $\mathcal{F}_1$ met $\mathcal{F}_2$ samenvalt, is er sprake van *gelijkvormige figuren*. Bij congruente figuren zijn overeenkomstige afstanden en hoeken gelijk, bij gelijkvormige figuren zijn overeenkomstige hoeken gelijk en overeenkomstige *verhoudingen* van afstanden.

2 Toegelaten coördinatenstelsels

In aansluiting op de hierboven beschreven intuïtieve begripsvorming in de meetkunde van de onderbouw ga ik uit van een 'euclidisch vlak', dat wil zeggen een al dan niet door de werkelijkheid geïnspireerd wiskundig model waarin sprake is van 'punten', 'lijnen' en 'afstanden' (tussen puntenparen), en waarin een zekere vrijheid bestaat in het kiezen van orthonormale coördinaten (ook wel cartesische coördinaten genoemd). Hoe ver die vrijheid strekt, zal ik zo dadelijk duidelijk maken, maar eerst leg ik uit wat ik versta onder het kiezen van zo'n coördinatenstelsel.

Definitie 2.1 (toegelaten coördinaten) *Onder het* kiezen van een toegelaten coordinatenstelsel *in een euclidisch vlak versta ik het aanbrengen van een één-aan-één-correspondentie tussen de punten van het vlak en de elementen van* $\mathbb{R}^2$*. Het element* (x, y) *van* $\mathbb{R}^2$ *dat behoort bij het punt* P *heet het* coördinatenpaar*, of kortweg de* coordinaten *van* P*. Daarbij moet voldaan zijn aan de volgende voorwaarden:*

1. *De lijnen van het vlak corresponderen met de deelverzamelingen van de vorm*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$$

waarin $a, b, c \in \mathbb{R}$ *en waarin bovendien* a *en* b *niet beide gelijk aan 0 zijn.*

2. *De afstand* $d(P_1, P_2)$ *tussen twee punten* P_1 *en* P_2 *met coördinaten* (x_1, y_1) *en* (x_2, y_2) *is gelijk aan* $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Dat het überhaupt mogelijk is om in een euclidisch vlak zo'n coördinatenstelsel te kiezen, zou je zelfs op kunnen vatten als de *definitie* van een euclidisch vlak: een wiskundige structuur waarin 'punten', 'lijnen' en 'afstanden' gedefinieerd zijn, heet een *euclidisch vlak* als je daarin zo'n toegelaten coördinatenstelsel kunt kiezen. De $\mathbb{R}^2$ zelf is een voorbeeld van zo'n structuur. Maar deze overwegingen behoeven natuurlijk niet op school verteld te worden. Daar is een euclidisch vlak een idealisatie van het papier waarop de figuren getekend worden. Het kiezen van coördinaten kan, zoals gezegd, geïllustreerd worden door een transparant met daarop een orthonormaal coördinatenrooster over het tekenpapier te leggen. Daarbij mag de transparant ook eerst omgeklapt worden zodat de 'achterkant' boven komt te liggen. Anders gezegd, we laten zowel coördinatenstelsels toe waarbij het draaien rond de oorsprong over 90 graden van de positieve x-as naar de positieve y-as tegen de klok in geschiedt, als coördinatenstelsels waarbij dit met de klok mee gebeurt.

2.1 Isometrische coördinatentransformaties

Direct duidelijk is dat je uit één toegelaten coördinatenstelsel op oneindig veel manieren andere toegelaten stelsels kunt maken. Bijvoorbeeld door een translatie, dat wil zeggen dat je voor vaste p en q nieuwe coördinaten (x', y') definieert door

$$\begin{aligned} x' &= x - p \\ y' &= y - q \end{aligned}$$

Ook dat nieuwe stelsel is een toegelaten coördinatenstelsel. De oorsprong $(x', y') = (0, 0)$ in het nieuwe stelsel had in het oude stelsel de coördinaten $(x, y) = (p, q)$. De lijn die in het oude stelsel als vergelijking

$$ax + by + c = 0$$

had, krijgt nu de vergelijking $a(x' + p) + b(y' + q) + c = 0$, dat wil zeggen

$$ax' + by' + (c + ap + bq) = 0.$$

Dit is inderdaad weer een vergelijking van de vorm die in voorwaarde (1) van definitie 2.1 geëist wordt. Aan de afstand verandert niets, want

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2}.$$

Een ander voorbeeld van zo'n *isometrische coördinatentransformatie*, dat wil zeggen de overgang op een ander toegelaten coördinatenstelsel, is

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y. \end{aligned}$$

Hierbij wordt het coördinatenstelsel als het ware omgeklapt om de y-as. We noemen dit ook wel het *spiegelen* van het coördinatenstelsel in de y-as. Evenzo kan men het stelsel spiegelen in de x-as

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned}$$

of puntspiegelen in de oorsprong:

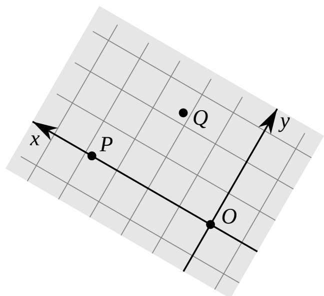
$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y. \end{aligned}$$

Bij die laatste coördinatentransformatie hoef je de transparant niet om te klappen, want puntspiegelen in de oorsprong is hetzelfde als het draaien over een halve slag rond de oorsprong.

Let op: bij isometrische coördinatentransformaties worden de figuren in het vlak zelf niet getransformeerd; slechts hun coördinaten veranderen. Iets beeldender uitgedrukt: slechts de transparant waarop het coördinatenstelsel getekend staat, wordt verplaatst, niet de onderliggende meetkundige figuren. Dat we voor zulke coördinatentransformaties toch ook termen als translatie, rotatie, spiegeling enzovoort gebruiken, zou verwarring kunnen geven als je je hiervan niet bewust bent.

2.2 De basisstelling

De mogelijkheden voor isometrische coördinatentransformaties zijn met het bovenstaande nog lang niet uitgeput: spiegelingen in andere lijnen, rotaties over willekeurige hoeken en combinaties van zulke transformaties kunnen ook gebruikt worden. Alleen worden de vergelijkingen waardoor die transformaties gegeven worden, dan in het algemeen ingewikkelder. Een overzicht van alle mogelijkheden geeft de volgende stelling, die ik vanwege haar fundamentele karakter de *basisstelling* noem.



Figuur 1: *De coördinatenkeuze van de basisstelling.*

Stelling 2.1 (basisstelling) *In een euclidisch vlak kun je bij elk drietal punten O, P en Q die niet op één lijn liggen precies één toegelaten coördinatenstelsel kiezen zo, dat*

1. *het punt O de coördinaten $(0, 0)$ heeft,*

2. *het punt P de coördinaten $(p, 0)$ heeft voor zekere $p > 0$,*

3. *het punt Q de coördinaten (q_1, q_2) heeft voor zekere q_1 en q_2 met $q_2 > 0$.*

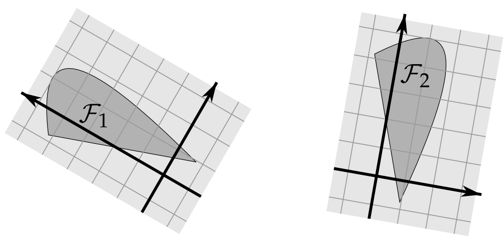
Intuïtief is de geldigheid ervan duidelijk: neem een transparant waarop een orthonormaal coördinatenstelsel getekend is, leg de oorsprong ervan op het punt O en leg de positieve x-as langs de halve lijn OP. Blijkt Q dan in het bovenhalfvlak te liggen, dan is ook aan de derde eis voldaan. Zo niet, klap dan de transparant om de lijn OP om (zie figuur 1). Een bewijs van de basisstelling staat in de appendix op bladzijde 34.

Het grote belang van de basisstelling is dat die je in staat stelt om bij een meetkundig probleem een toegelaten coördinatenstelsel te kiezen dat aansluit op de specifieke situatie.

2.3 Congruente figuren

Hierboven heb ik al uitgelegd hoe de begrippen congruentie en gelijkvormigheid op school met behulp van transparanten duidelijk gemaakt kunnen worden. Je kunt het begrip congruentie ook als volgt in termen van toegelaten coördinatenstelsels beschrijven.

Definitie 2.2 *Twee figuren $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ heten* congruent *wanneer het mogelijk is twee toegelaten coördinatenstelsels te kiezen zo, dat $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ daarin op dezelfde wijze worden beschreven, dat wil zeggen dat er met elk punt P_1 in $\mathcal{F}_1$ een punt P_2 in $\mathcal{F}_2$ correspondeert zo dat de coördinaten van P_1 in het ene stelsel gelijk zijn aan die van P_2 in het andere stelsel (zie figuur 2).*



Figuur 2: *Coördinatenstelsels en congruente figuren.*

2.3.1 Opgaven

Ga er bij de volgende opgaven van uit dat in het euclidische vlak een toegelaten coördinatenstelsel aanwezig is. De coördinaten in dat stelsel worden aangegeven met (x, y).

2.1. Bewijs dat elk van de volgende coördinatentransformaties weer een toegelaten coördinatenstelsel geeft. Beschrijf ook in woorden op welke wijze de transparant met het coördinatenstelsel bij deze coördinatentransformatie moet worden verplaatst.

a. $x' = y, \quad y' = x.$

b. $x' = -y, \quad y' = x.$

c. $x' = 2 - x, \quad y' = y.$

d. $x' = 2 - x, \quad y' = 2 - y.$

e. $x' = x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2}, \quad y' = -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2}.$

2.2. Bewijs dat er door de volgende coördinatentransformaties *geen* toegelaten coördinatenstelsels ontstaan.

a. $x' = x + y, \quad y' = -x + y.$

b. $x' = x + y, \quad y' = y.$

c. $x' = 2x, \quad y' = 2y.$

d. $x' = 2x, \quad y' = \frac{1}{2}y.$

2.3. Laat gegeven zijn een lijn ℓ en een punt P niet op ℓ.

a. Bewijs dat er een toegelaten coördinatenstelsel is waarin ℓ de vergelijking $y = 0$ heeft en P de coördinaten $(0, p)$ voor zekere $p > 0$.

b. Bewijs dat er een toegelaten coördinatenstelsel is waarin P de coördinaten $(0, 0)$ heeft en ℓ gegeven wordt door de vergelijking $y = a$ voor zekere $a > 0$.

c. Bewijs dat er een toegelaten coördinatenstelsel is waarin ℓ de vergelijking $x = 0$ heeft en P de coördinaten $(p, 0)$ voor zekere $p > 0$.

3 Een schets van de opbouw van de vlakke meetkunde

Uitgaande van de basisstelling en het hierboven nader gepreciseerde congruentiebegrip is het eenvoudig om de vlakke meetkunde van de onderbouw ondubbelzinnig te grondvesten. De vrijheid bij het kiezen van een geschikt coordinatenstelsel is daarbij zo'n krachtig hulpmiddel, dat het nauwelijks nodig is methoden uit de vectormeetkunde of de lineaire algebra te hulp te roepen. Zo is het bijvoorbeeld niet nodig om te werken met parametervoorstellingen of inwendige producten; de afstandsdefinitie is eigenlijk het enige dat gebruikt wordt. Je kunt dus heel snel de aanwezige voorkennis recapituleren en nader preciseren, waarna direct nieuwe, onverwachte meetkundige resultaten kunnen worden afgeleid en bewezen. Ik zal nu een dergelijke opbouw schetsen.

3.1 Lijnen

Ook in de hier gekozen opbouw van de meetkunde ontkom ik niet aan een nadere precisering van een aantal 'vanzelfsprekende' begrippen en eigenschappen. Omdat het hierbij gaat om zaken waarmee iedere leerling al op een intuïtieve manier kennis heeft gemaakt, kan ik me beperken tot een beknopte en wiskundig elegante samenvatting. Voor de gevorderde leerling is de belangrijkste boodschap dat het inderdaad mogelijk is om al die begrippen en eigenschappen ondubbelzinnig en logisch sluitend vanuit de basis, dat wil zeggen vanuit de structuur van de reële getallen en de hierboven vermelde basisstelling, op te bouwen.

Stelling 3.1 *Twee verschillende lijnen hebben ten hoogste één gemeenschappelijk punt.*

Bewijs: Als de twee lijnen ℓ_1 en ℓ_2 gegeven worden door de vergelijkingen

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{en} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

dan hebben ze een gemeenschappelijk punt dan en slechts dan als hun vergelijkingen een gemeenschappelijke oplossing (x, y) hebben. Wanneer $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ is, is er precies één snijpunt. Wanneer $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ is er òf geen snijpunt, òf de beide linkerleden zijn op een factor na gelijk. In dat laatste geval vallen de twee lijnen samen. □

Als er inderdaad zo'n *snijpunt* is, spreekt men over *snijdende* lijnen, en anders over *evenwijdige*, of ook wel over *parallelle* lijnen.

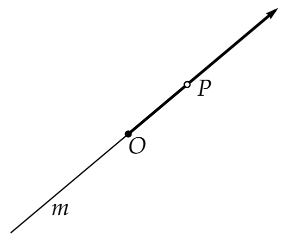
Stelling 3.2 *Door twee verschillende punten gaat precies één lijn.*

Bewijs: Er is hoogstens één zo'n lijn op grond van de vorige stelling. Dat er ook altijd zo'n lijn bestaat, zie je door op te merken dat als de twee punten in een zeker toegelaten coördinatenstelsel gegeven worden door (x_1, y_1), resp. (x_2, y_2), de lijn met vergelijking

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$$

door die punten gaat. □

Een punt O op een lijn m verdeelt die lijn in twee *halve lijnen*, beide met *eindpunt* O. Zo'n halve lijn geven we vaak aan door twee punten ervan te noemen: het eindpunt en een ander punt, in deze volgorde. Zo is in figuur 3 de halve lijn OP met eindpunt O getekend.



Figuur 3: *De halve lijn OP met eindpunt O.*

Twee verschillende punten O en P bepalen een *lijnstuk* OP, bestaande uit alle punten Q die zowel op de halve lijn OP als op de halve lijn PO liggen. De punten O en P heten de *eindpunten* van het lijnstuk.
De *lengte* van een lijnstuk is de afstand van de beide eindpunten. Lijnstukken met dezelfde lengte zijn congruent. Men spreekt bij congruente lijnstukken ook wel, enigszins slordig, van *gelijke* lijnstukken.

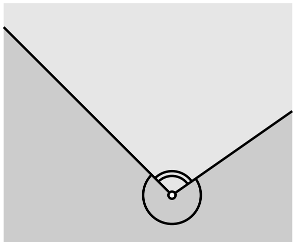
Stelling 3.3 *Als een punt P niet op een lijn m ligt, is er precies één lijn door P evenwijdig aan m.*

Bewijs: Kies toegelaten coördinaten zo, dat m gegeven wordt door $y = 0$. Als in dit stelsel $P = (p, q)$ dan heeft elke lijn door het punt P een vergelijking van de vorm $a(x - p) + b(y - q) = 0$, en alleen als $a = 0$ heeft zo'n lijn geen punt gemeen met $y = 0$. De enige lijn door P evenwijdig aan $y = 0$ is dus de lijn $y = q$. □

3.2 Hoeken

Ook in deze paragraaf komen uitsluitend 'vanzelfsprekende' begrippen en eigenschappen aan de orde. Ik begin met een precisering van het begrip 'hoek'.

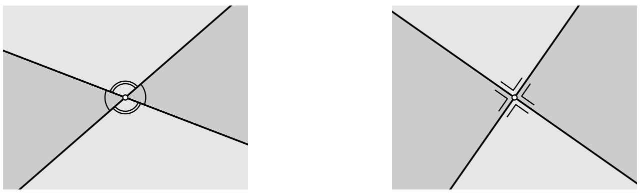
Definitie 3.1 *Een* hoek *is een deel van het vlak dat begrensd wordt door twee halve lijnen met hetzelfde eindpunt. Dat punt heet het* hoekpunt, *en de halve lijnen heten de* benen *van de hoek. We spreken af dat de benen ook deel uitmaken van de hoek. De benen begrenzen twee vlakdelen, en dus ook twee hoeken; men noemt die hoeken* complementair *(zie figuur 4). Vormen de benen samen een volledige lijn, dan zijn de twee complementaire hoeken congruent; zo'n hoek heet dan een* gestrekte *hoek. Is* *dat niet het geval, dan bevat precies één van beide hoeken een gestrekte hoek. Die hoek noemt men dan een* inspringende hoek.



Figuur 4: *Complementaire hoeken.*

Twee elkaar snijdende lijnen verdelen het vlak in vier hoeken met hun snijpunt als gemeenschappelijk hoekpunt. Hoeken die daarbij naast elkaar liggen, vormen samen een gestrekte hoek. Overstaande hoeken, dat wil zeggen hoeken die tegenover elkaar liggen, zijn congruent (zie ook opgave 3.2.1).

Definitie 3.2 *Zijn bij twee elkaar snijdende lijnen alle vier de hoeken congruent, dan zegt men dat de lijnen elkaar* loodrecht *snijden. Zo'n hoek noemt men dan een* rechte hoek. *Elke hoek die niet recht is, maar die wel bevat is in een rechte hoek, heet een* scherpe hoek. *Elke hoek die niet recht of scherp is, maar die wel bevat is in een gestrekte hoek, heet een* stompe hoek. *Elke hoek die een gestrekte hoek bevat, heet een* inspringende hoek.



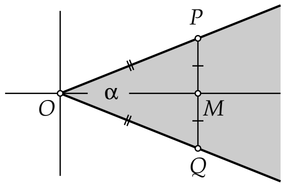
Figuur 5: *Overstaande hoeken (links) en rechte hoeken (rechts).*

In figuur 4 zie je een stompe hoek en een inspringende hoek.

Met de notatie $\angle ABC$ wordt een hoek aangegeven met hoekpunt B en benen BA en BC. Hoeken worden ook vaak met een Griekse letter aangeduid.

Bissectrices

Laat een niet-inspringende, niet-gestrekte hoek α gegeven zijn met hoekpunt O. Kies punten P en Q op de benen, op elk been één, zo, dat $d(O,P) = d(O,Q) > 0$. Laat M het midden zijn van het lijnstuk PQ (zie figuur 6). Op



Figuur 6: *De bissectrice OM van hoek α.*

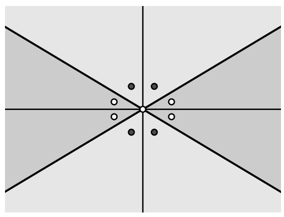
grond van de Basisstelling is er dan precies één toegelaten coördinatenstelsel waarin $O = (0, 0)$, $M = (m, 0)$ met $m > 0$ en $P = (p_1, p_2)$ met $p_2 > 0$. Stel $Q = (q_1, q_2)$. Omdat M het midden is van PQ, moet gelden dat $\frac{1}{2}(p_2 + q_2) = 0$, dus $q_2 = -p_2$. Omdat $\frac{1}{2}(p_1 + q_1) = m$ en $p_1^2 + p_2^2 = q_1^2 + q_2^2$ volgt hieruit $p_1 = q_1 = m$. De coördinaten van P en Q zijn dus resp. (m, p_2) en $(m, -p_2)$.

Definitie 3.3 *Met de bovenstaande notaties heet de halve lijn OM de* bissectrice *(ook wel:* deellijn*) van hoek α.*

De bissectrice verdeelt hoek α in twee congruente delen. Het verlengde van de bissectrice verdeelt de complementaire hoek in twee congruente delen. Bij een gestrekte hoek verdeelt de lijn door het hoekpunt loodrecht op de benen de hoek in twee congruente delen. Voor elke hoek kan men dus op deze manier de bissectrice definiëren als de halve lijn binnen de hoek die de hoek in twee congruente delen verdeelt.

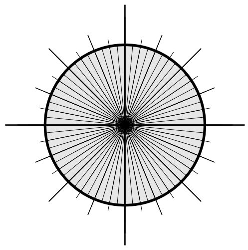
Stelling 3.4 *Bij twee elkaar snijdende lijnen snijden de bissectrices van de vier hoeken elkaar loodrecht.*

Bewijs: Zie figuur 7. Twee donkere en twee lichte hoeken vormen samen een gestrekte hoek, dus een donkere en een lichte hoek vormen samen een rechte hoek.



Figuur 7: *De bissectrices snijden elkaar loodrecht.*

Hoekmeting
De coördinaatassen vormen vier rechte hoeken die de eenheidscirkel in vier congruente delen verdelen. Elk van die rechte hoeken kan door de bissectrice in twee congruente delen worden verdeeld, die op hun beurt weer kunnen worden gehalveerd, *et cetera*. Zie figuur 8.



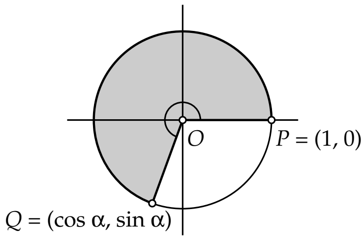
Figuur 8: *Binaire schaalverdeling op de eenheidscirkel door voortgezette hoekhalveringen.*

Op die manier ontstaat op de eenheidscirkel een binaire schaalverdeling waarmee men een willekeurige hoek met de oorsprong als hoekpunt kan meten, dat wil zeggen dat men de grootte ervan met een reëel getal kan uitdrukken in een gekozen hoekeenheid. Kiest men die eenheid zo dat de gestrekte hoek de getalswaarde 180 krijgt, dan ontstaat de traditionele hoekmeting in graden. Neemt men voor de gestrekte hoek de numerieke waarde π, dan krijgt men de in de wiskunde meer gebruikelijke hoekmeting in radialen, die de extra eigenschap heeft dat de hoekgrootte samenvalt met de lengte van de cirkelboog die de hoek op de eenheidscirkel uitsnijdt.

Er geldt algemeen: twee hoeken zijn congruent dan en slechts dan als hun hoekmaten gelijk zijn. In plaats van congruente hoeken zegt men ook vaak (enigszins slordig): *gelijke* hoeken.

Sinus, cosinus en tangens
Laat een willekeurige hoek α met hoekpunt O gegeven zijn. Kies punten P en Q op de benen met een afstand 1 tot O, en kies toegelaten coördinaten zo dat $O = (0,0)$, $P = (1,0)$ en $Q = (q_1, q_2)$ met $q_2 \geq 0$ bij een scherpe, rechte, stompe of gestrekte hoek, en $q_2 < 0$ bij een inspringende hoek. De coördinaten q_1 en q_2 van Q noemt men dan de *cosinus*, respectievelijk de *sinus* van die hoek. Notatie: $\cos\alpha$ en $\sin\alpha$, dus $Q = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ (zie figuur 9).

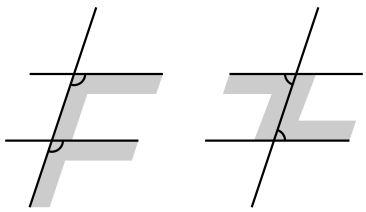
Door de hoek te meten in radialen worden de sinus en de cosinus functies met domein $[0, 2\pi]$ en bereik $[-1, 1]$, en door ze periodiek voort te zetten verkrijgt men de uit de analyse bekende functies $\cos\alpha$ en $\sin\alpha$, beide met domein $\mathbb{R}$ en bereik $[-1, 1]$. Voor $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k geheel) definieert men de *tangens* van α, met



Figuur 9: *De cosinus en de sinus van een hoek.*

notatie $\tan\alpha$, door $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

F-hoeken en Z-hoeken
Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, ontstaan er bij de twee snijpunten allerlei paren hoeken waarvan men met behulp van een translatie of een puntspiegeling van een geschikt gekozen toegelaten coordinatenstelsel gemakkelijk kan bewijzen dat ze congruent zijn (zie opgave 3.2.2). Naar analogie van de situatie bij de hoofdletters F en Z spreekt men dan van congruente *F-hoeken* en congruente *Z-hoeken* (zie figuur 10).



Figuur 10: *F-hoeken en Z-hoeken.*

3.2.1 Opgaven

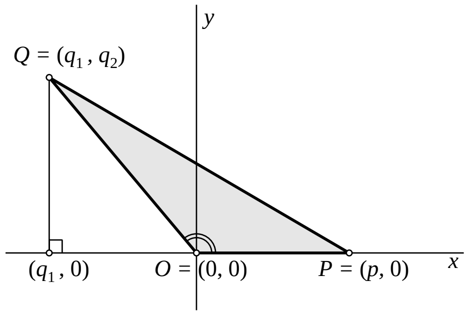
3.2.1. Bewijs dat bij twee elkaar snijdende lijnen de overstaande hoeken congruent zijn.

3.2.2. Twee evenwijdige lijnen worden gesneden door een derde lijn. Bewijs dat corresponderende F-hoeken en corresponderende Z-hoeken congruent zijn.

3.2.3. Hoeveel paren F-hoeken en Z-hoeken zijn er wanneer twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn?

3.2.4. Gegeven is een punt P met coördinaten $(x, y) \neq (0, 0)$. Bewijs dat er een positief getal r en een hoek α met $0 \le \alpha < 2\pi$ bestaan zo, dat $x = r \cos\alpha$ en $y = r \sin\alpha$. Bepaal r en α voor de volgende punten: $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,2)$, $(-2,0)$, $(-2,-2)$, $(0,-2)$ en $(2,-2)$.

3.3 Driehoeken



Figuur 11: *De cosinusregel.*

Stelling 3.5 (cosinusregel) *Voor elk drietal verschillende punten O, P en Q geldt*

$$d(P,Q)^2 = d(O,P)^2 + d(O,Q)^2 - 2d(O,P)d(O,Q)\cos\angle POQ$$

Bewijs: Kies coördinaten $O = (0,0)$, $P = (p,0)$ en $Q = (q_1,q_2)$ met $p > 0$, $q_2 \ge 0$ (zie figuur 11). Dan is $q_1 = d(O,Q)\cos\angle POQ$ dus

$$\begin{aligned} d(P,Q)^2 &= (p-q_1)^2 + (0-q_2)^2 = p^2 + {q_1}^2 + {q_2}^2 - 2pq_1 \\ &= d(O,P)^2 + d(O,Q)^2 - 2d(O,P)d(O,Q)\cos\angle POQ \end{aligned}$$

□

Omdat $\angle POQ$ recht is dan en slechts dan als $\cos\angle POQ = 0$, volgen hieruit tegelijkertijd de stelling van Pythagoras en de omgekeerde stelling van Pythagoras. Een ander gevolg van de cosinusregel is de driehoeksongelijkheid:

Stelling 3.6 (driehoeksongelijkheid) *Voor elk drietal verschillende punten O, P en Q geldt*

$$d(P,Q) \le d(O,P) + d(O,Q)$$

met gelijkheid dan en slechts dan als O op het lijnstuk PQ ligt.

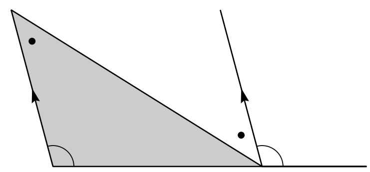
Bewijs: Schrijf de cosinusregel als

$$d(P,Q)^2 = (d(O,P) + d(O,Q))^2 - 2d(O,P)d(O,Q)(1 + \cos \angle POQ)$$

Hieruit volgt de driehoeksongelijkheid direct, met gelijkheid dan en slechts dan als $\cos \angle POQ = -1$, dat wil zeggen als O op het lijnstuk PQ ligt. □

Drie punten A, B, C, niet op één lijn, vormen tezamen een *driehoek* ABC met *hoekpunten* A, B, C en *zijden* BC, CA, AB. Soms bedoelt men met de zijden slechts de lijnstukken, soms ook de hele lijnen. Ook gebruikt men AB vaak voor de lengte van de zijde AB, etc. Men geeft de zijden ook wel met kleine letters aan: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, en ook dan geldt dat soms het lijnstuk, soms de gehele lijn, en soms ook de lengte van het lijnstuk bedoeld wordt. Uit de context zal echter steeds duidelijk zijn wat de precieze betekenis is.

Wanneer men voor de zijden van een driehoek de gehele lijnen neemt, ontstaan in elk hoekpunt vier hoeken, die twee aan twee congruent zijn. De hoek waar de driehoek in ligt, noemt men de *binnenhoek*, of kortweg de *hoek* van dat hoekpunt, de twee hoeken die in dat hoekpunt samen met de binnenhoek een gestrekte hoek vormen, noemt men de bijbehorende *buitenhoeken*. Een halve lijn vanuit een hoekpunt evenwijdig aan de tegenoverliggende zijde verdeelt de desbetreffende buitenhoek in twee delen. Het ene deel vormt een paar F-hoeken met een van de twee tegenoverliggende binnenhoeken van de driehoek, het andere deel vormt een paar Z-hoeken met de andere tegenoverliggende binnenhoek (zie figuur 12). Daarmee is bewezen:



Figuur 12: *De buitenhoekstelling.*

Stelling 3.7 (buitenhoekstelling) *Een buitenhoek van een driehoek is gelijk aan de som van de binnenhoeken van de beide andere hoekpunten.*

En tevens ook:

Stelling 3.8 (som van de hoeken van een driehoek) *De hoeken van een driehoek vormen samen een gestrekte hoek. Anders gezegd: de som van de hoeken van een driehoek is gelijk aan π radialen.*

Stelling 3.9 (F-hoeken of Z-hoeken, omgekeerd) *Als twee lijnen gesneden worden door een derde lijn, en twee F-hoeken of twee Z-hoeken zijn gelijk, dan zijn die twee lijnen evenwijdig.*

Bewijs: Zouden de lijnen elkaar snijden, dan zou er een driehoek ontstaan met twee hoeken die samen reeds π radialen zijn. □

Definitie 3.4 *Een driehoek heet* scherphoekig *wanneer alle hoeken scherp zijn,* rechthoekig *wanneer één hoek recht is, en* stomphoekig *wanneer één hoek stomp is.*

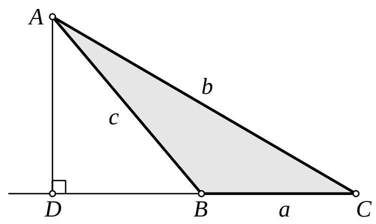
Stelling 3.10 (sinusregel) *In een driehoek ABC geldt*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Bewijs: Laat vanuit A de loodlijn AD neer op de (eventueel verlengde) zijde BC, dan is

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AD/c}{AD/b} = \frac{b}{c}$$

et cetera. □



Figuur 13: *De sinusregel.*

Stelling 3.11 *Een driehoek is gelijkbenig dan en slechts dan wanneer er twee hoeken gelijk zijn.*

Bewijs: Merk eerst op: als $0 < \angle A + \angle B < \pi$ dan geldt

$$\angle A = \angle B \quad \Longleftrightarrow \quad \sin A = \sin B$$

Pas vervolgens de sinusregel toe. □

Gevolg:
Een driehoek is gelijkzijdig dan en slechts dan als alle hoeken gelijk zijn (en dus gelijk zijn aan $\pi/3$ radialen).

Opgaven

3.3.1. Hieronder zijn telkens drie getallen a, b en c gegeven. Onderzoek in welke gevallen er een driehoek met zijden a, b en c bestaat. Bepaal in dat geval ook wat voor soort driehoek (scherphoekig, rechthoekig, stomphoekig) het is.

a. $a = 2, b = 3, c = 4$.

b. $a = 2, b = 3, c = 5$.

c. $a = 1, b = 3, c = \pi$.

d. $a = 315, b = 1972, c = 1997$.

e. $a = 315, b = 1972, c = 1998$.

f. $a = 4601, b = 4800, c = 6649$.

3.3.2. Wat is de som van de hoeken van een regelmatige n-hoek ($n > 3$)? En hoe groot is dus elke hoek van een regelmatige n-hoek?

3.3.3. Bewijs: in elke driehoek ABC geldt:

$$BC \leq CA \leq AB \quad \Longleftrightarrow \quad \angle A \leq \angle B \leq \angle C.$$

3.3.4. Bewijs: als voor de driehoeken ABC en $A'B'C'$ geldt dat $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ en $\angle A = \angle A'$, dan zijn die driehoeken congruent (congruentiekenmerk ZHZ).

3.3.5. Bewijs: als voor de driehoeken ABC en $A'B'C'$ geldt dat $AB = A'B'$, $\angle A = \angle A'$ en $\angle C = \angle C'$, dan zijn die driehoeken congruent (congruentiekenmerk ZHH).

3.3.6. Bewijs: als voor de driehoeken ABC en $A'B'C'$ geldt dat $AB = A'B'$, $\angle A = \angle A'$ en $\angle B = \angle B'$, dan zijn die driehoeken congruent (congruentiekenmerk HZH).

3.3.7. Toon aan dat het volgende 'congruentiekenmerk' *niet* correct is: als voor de driehoeken ABC en $A'B'C'$ geldt dat $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ en $\angle B = \angle B'$, dan zijn die driehoeken congruent.

3.3.8. Voor twee driehoeken ABC en $A'B'C'$ geldt dat de hoeken B en B' recht zijn, dat $AB = A'B'$ en dat $AC = A'C'$. Bewijs dat ABC en $A'B'C'$ congruent zijn.

3.4 Cirkels

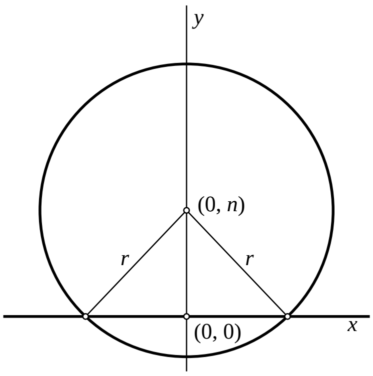
De *cirkel* met *middelpunt* M en *straal* r ($r > 0$) bestaat uit alle punten die een afstand r tot M hebben. Een lijnstuk dat twee punten van de cirkel verbindt, heet een *koorde*. Een koorde die door het middelpunt gaat, heet een *middellijn*, of ook wel *diameter* van de cirkel. De eindpunten van een diameter noemt men *diametrale punten*.
Punten met een afstand kleiner dan r tot M liggen *binnen* de cirkel, punten met

een afstand groter dan r tot M liggen *buiten* de cirkel. De cirkel met middelpunt $M = (m, n)$ en straal r wordt gegeven door de vergelijking

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

dat wil zeggen dat een punt $X = (x, y)$ dan en slechts dan op die cirkel ligt als x en y aan deze vergelijking voldoen.

Stelling 3.12 *Een cirkel en een lijn hebben twee, een of geen punten gemeen.*



Figuur 14: *De snijpunten van een cirkel en een lijn.*

Bewijs: Kies het coördinatenstelsel zo, dat de gegeven lijn de x-as wordt, en het middelpunt van de gegeven cirkel op de positieve y-as komt te liggen. Dan moeten we voor het bepalen van de snijpunten het volgende stelsel oplossen

$$\begin{aligned} x^2 + (y - n)^2 &= r^2 \\ y &= 0. \end{aligned}$$

De oplossingen zijn $(\pm\sqrt{r^2 - n^2}, 0)$ mits $r \geq n$. □

Hebben een lijn en een cirkel slechts één punt gemeen, dan noemt men de lijn een *raaklijn*, en het gemeenschappelijke punt het *raakpunt*.

Stelling 3.13 *De loodlijn op de raaklijn in het raakpunt gaat door het middelpunt van de cirkel.*

Bewijs: Zie het bewijs van de vorige stelling. Het raakpunt is dan $(0, 0)$ en de loodlijn is de y-as. □

Stelling 3.14 *Twee verschillende cirkels hebben twee, een of geen punten gemeen. Zijn er twee snijpunten, dan liggen die gespiegeld ten opzichte van de verbindingslijn van de beide middelpunten.*

Is er één gemeenschappelijk punt, dan spreekt men over *rakende* cirkels. De raaklijnen aan de twee cirkels in dit punt, het *raakpunt*, vallen dan samen. Het raakpunt ligt op de verbindingslijn van de twee middelpunten, en de gemeenschappelijke raaklijn staat daar loodrecht op. Ligt een van de middelpunten binnen de andere cirkel, dan spreekt men over *inwendig rakende cirkels*, ligt elk middelpunt buiten de andere cirkel, dan spreekt men over *uitwendig rakende cirkels*.

Bewijs van stelling 3.14: Kies toegelaten coördinaten zo, dat de cirkels gegeven worden door

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{en} \quad (x - m)^2 + y^2 = R^2$$

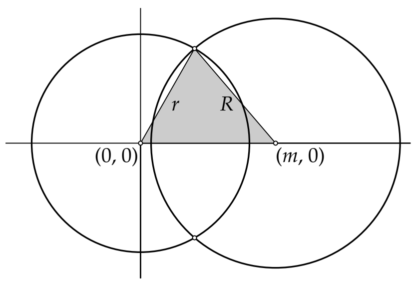
met $m > 0$. Eventuele snijpunten (x_s, y_s) moeten dan voldoen aan de vergelijking

$$2x_s m - m^2 = r^2 - R^2$$

hetgeen, teruggesubstitueerd in bijvoorbeeld $x^2 + y^2 = r^2$, leidt tot

$$y_s{}^2 = r^2 - \frac{(r^2 - R^2 + m^2)^2}{4m^2}.$$

Dit geeft inderdaad nul, een of twee oplossingen, en daarmee even zovele snijpunten, die symmetrisch liggen ten opzichte van de x-as, de verbindingslijn van de beide middelpunten. Is er één gemeenschappelijk punt, dan moet het op de x-as liggen, en dan is de gemeenschappelijke raaklijn de verticale lijn door dat punt. □



Figuur 15: *De snijpunten van twee cirkels.*

Terzijde merk ik voor de liefhebbers van elegant rekenwerk op, dat de laatste vergelijking ook geschreven kan worden als

$$y_s{}^2 = \frac{(R + r + m)(R + r - m)(R - r + m)(-R + r + m)}{4m^2}.$$

Omdat R, r en m positief zijn, is de eerste van de vier factoren in de teller positief, en kan er van de andere drie hoogstens één negatief zijn. In dat geval zijn de cirkels dus *disjunct*. Als een van de drie factoren nul is, raken de cirkels elkaar; inwendig als $r = R + m$ of $R = r + m$, en uitwendig als $m = r + R$. Er zijn twee verschillende snijpunten dan en slechts dan als alle factoren positief zijn. Merk op dat het positief zijn van de laatste drie factoren in het geval van twee snijpunten equivalent is met de drie vormen van de *driehoeksongelijkheid*, toegepast op de grijze driehoek in figuur 15. Daarmee hebben we *en passant* dus een alternatief bewijs voor de driehoeksongelijkheid gekregen.

Een ander resultaat dat nu voor het oprapen ligt, is de formule voor de oppervlakte O van een driehoek met zijden a, b en c. Bekijk daartoe opnieuw in figuur 15 de grijze driehoek die gevormd wordt door de beide middelpunten en het snijpunt in het bovenhalfvlak. Noem $a = R$, $b = r$ en $c = m$. Dit zijn de zijden van de driehoek, en de hoogte is $h = y_s$. De oppervlakte, halve hoogte maal basis, is dan $O = \frac{1}{2}h \cdot c$. Hieruit volgt met behulp van de boven afgeleide formule voor y_s

$$O^2 = \frac{1}{4}h^2c^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{16}.$$

Met de notatie $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ wordt dit de **Formule van Heron:**

$$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Opgaven

3.4.1. Bewijs: als voor de driehoeken ABC en $A'B'C'$ geldt dat $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ en $CA = C'A'$, dan zijn die driehoeken congruent (congruentiekenmerk ZZZ).

3.4.2. De hoekpunten van een regelmatige n-hoek ($n \geq 3$) liggen op een cirkel met straal 1. Bereken de lengte van de zijden.

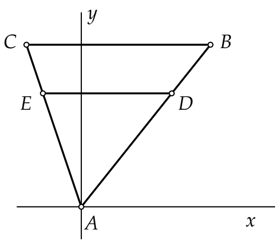
3.4.3. De zijden van een regelmatige n-hoek ($n \geq 3$) raken een cirkel met straal 1. Bereken de lengte van de zijden.

3.4.4. Verifieer de formules voor ${y_s}^2$.

3.4.5. Bereken de oppervlakte van de driehoeken van opgave 3.3.1.(a), (b), (d) en (f).

3.5 Bijzondere lijnen en punten in een driehoek

Stelling 3.15 *Als ABC een driehoek is met D en E op de (eventueel verlengde) zijden AB resp. AC, dan geldt: DE is evenwijdig met BC dan en slechts dan als $AD : DB = AE : EC$ (we werken daarbij met van teken voorziene verhoudingen van gerichte lijnstukken).*



Figuur 16: *Evenredige verdelingen en evenwijdige lijnen.*

Bewijs: Kies coördinaten zo, dat BC de lijn $y = a$ is, en $A = (0, 0)$. Dan is dus $B = (b, a)$ en $C = (c, a)$ voor zekere b en c en $D = (\lambda b, \lambda a)$ en $E = (\mu c, \mu a)$ voor zekere λ en μ (zie figuur 16). Hieruit volgt dat DE evenwijdig is met AB dan en slechts dan als $\lambda a = \mu a$, dus als $\lambda = \mu$. □

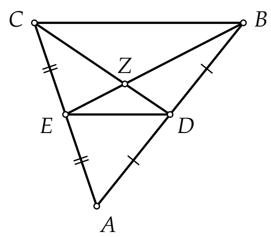
Stelling 3.16 *Als ABC een driehoek is met D en E op de (eventueel verlengde) zijden AB resp. AC, en als DE evenwijdig is met BC, dan geldt:*
$AD : AB = AE : AC = DE : BC$.

Bewijs: Kies coördinaten als boven, *et cetera*. □

Zwaartelijnen en het zwaartepunt

Definitie 3.5 *Een* zwaartelijn *is een lijn die een hoekpunt van de driehoek verbindt met het midden van de tegenoverliggende zijde.*

Stelling 3.17 (zwaartelijnenstelling) *De zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt, het* zwaartepunt. *Het zwaartepunt verdeelt elke zwaartelijn in de verhouding* $2 : 1$.



Figuur 17: *Bij het bewijs van de zwaartelijnenstelling.*

Bewijs: Laat ABC de driehoek zijn, en stel D en E zijn de middens van resp. AB en AC, en Z is het snijpunt van de zwaartelijnen BE en CD (zie figuur 17). Volgens stelling 3.15 zijn BC en DE dan evenwijdig, en volgens stelling 3.16 is $DE = \frac{1}{2}BC$. Opnieuw volgens stelling 3.16 is nu $ZB : ZE = ZC : ZD = BC : ED = 2 : 1$.
Het punt Z verdeelt dus reeds twee zwaartelijnen in de verhouding 2 : 1. Bijgevolg moet Z ook op de derde zwaartelijn liggen en ook dat lijnstuk in de verhouding 2 : 1 verdelen. □

Middelloodlijnen

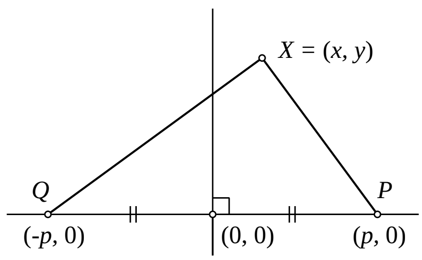
Definitie 3.6 *De* middelloodlijn *van een lijnstuk PQ is de lijn door het midden van PQ loodrecht op PQ.*

Stelling 3.18 *De middelloodlijn van een lijnstuk PQ is de verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot P en Q.*

Bewijs: Kies coördinaten zo dat $P = (p, 0)$ en $Q = (-p, 0)$. Dan is de middelloodlijn van PQ dus de lijn $x = 0$, en inderdaad geldt voor elk punt $X = (x, y)$

$$d(X, P) = d(X, Q) \iff (x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2 + y^2 \iff x = 0.$$

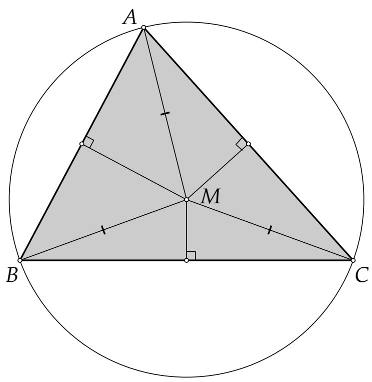
□



Figuur 18: *De middelloodlijn.*

De omgeschreven cirkel

Laat bij een driehoek ABC het punt M het snijpunt zijn van de middelloodlijnen van AB en BC, dan geldt $d(A, M) = d(B, M) = d(C, M)$, dus M ligt ook op de middelloodlijn van CA (stelling 3.18). Bijgevolg gaan die drie middelloodlijnen door één punt, dat gelijke afstanden heeft tot de drie hoekpunten. Het is dus het middelpunt van de (uniek bepaalde) cirkel die door A, B en C gaat. Deze cirkel heet de *omgeschreven cirkel* van driehoek ABC (zie figuur 19). Hiermee is dus de volgende stelling bewezen:



Figuur 19: *De middelloodlijnen en de omgeschreven cirkel van een driehoek.*

Stelling 3.19 *Bij elke driehoek gaan de middelloodlijnen van de zijden door één punt, het middelpunt van de omgeschreven cirkel.*

Hoogtelijnen en het hoogtepunt

Definitie 3.7 *Een* hoogtelijn *is een lijn door een hoekpunt van de driehoek loodrecht op de (eventueel verlengde) overstaande zijde.*

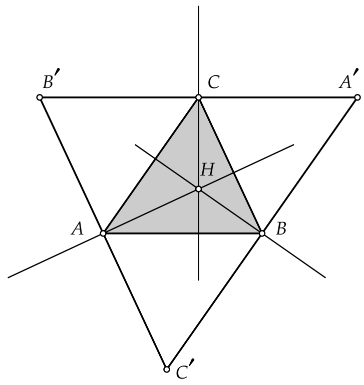
Stelling 3.20 *De drie (eventueel verlengde) hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt, het* hoogtepunt *van de driehoek.*

Bewijs: Laat ABC de driehoek zijn, en $A'B'C'$ de driehoek die gevormd wordt door lijnen te trekken door de hoekpunten van driehoek ABC evenwijdig aan de tegenoverliggende zijden (zie figuur 20). De punten A, B en C zijn dan de middens van de zijden van driehoek $A'B'C'$, en de hoogtelijnen van driehoek ABC zijn daarom de middelloodlijnen van driehoek $A'B'C'$. We weten al dat die door één punt gaan (stelling 3.18). □

Merk op dat het hoogtepunt van een scherphoekige driehoek altijd binnen de driehoek ligt, dat het hoogtepunt van een rechthoekige driehoek in het hoekpunt van de rechte hoek ligt, en dat het hoogtepunt van een stomphoekige driehoek buiten de driehoek ligt.

Bissectrices, ingeschreven en aangeschreven cirkels

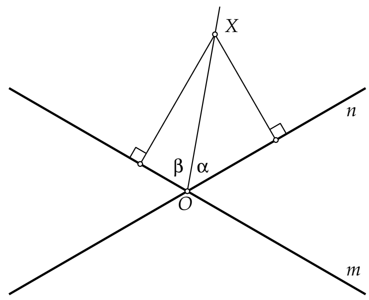
Stelling 3.21 *Laat twee elkaar snijdende lijnen n en m gegeven zijn. Dan wordt de verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot n en m gevormd door de bissectrices van n en m.*



Figuur 20: *De hoogtelijnen zijn de middelloodlijnen van een driehoek met twee maal zo lange zijden.*

Bewijs: Laat O het snijpunt zijn van n en m en stel dat X een willekeurig punt ongelijk aan O is. Laat α een van de hoeken zijn tussen de halve lijn OX en de lijn n, en β een van de hoeken tussen OX en m. Kies deze hoeken zo, dat ze samen gelijk zijn aan een van de vier hoeken tussen n en m (zie figuur 21).

Dan geldt: de afstand van X tot n is gelijk aan $OX \sin\alpha$ en de afstand van X tot m is gelijk aan $OX \sin\beta$. Deze afstanden zijn gelijk dan en slechts dan als $\sin\alpha = \sin\beta$, en omdat $0 < \alpha + \beta < \pi$ is dit equivalent met $\alpha = \beta$. $\square$



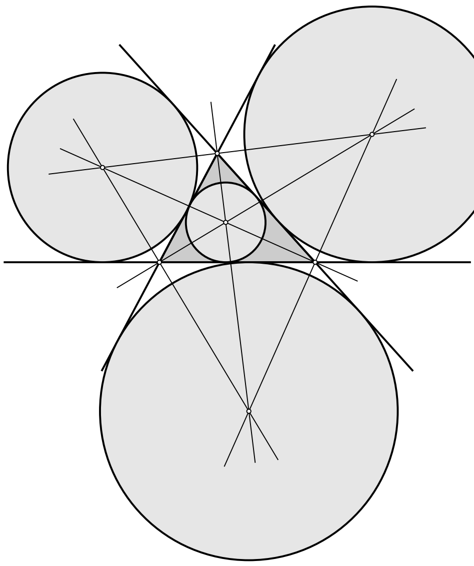
Figuur 21: *De hoeken α en β.*

Laat nu een driehoek ABC gegeven zijn. Onder de bissectrices van een hoekpunt verstaat men de tot gehele lijnen verlengde bissectrices van de eveneens tot gehele lijnen verlengde zijden van de driehoek die in dat hoekpunt samenkomen. De *binnenbissectrice* is de bissectrice die het inwendige van de driehoek doorsnijdt; de *buitenbissectrice* is de andere.

Het snijpunt van twee bissectrices van verschillende hoeken ligt even ver van alle drie de zijden van de driehoek, dus ligt het op grond van de vorige stelling ook op één van de twee bissectrices van de derde hoek. Twee binnenbissectrices snijden elkaar altijd binnen de driehoek, dus hun snijpunt ligt dan ook op de derde binnenbissectrice. Het is het middelpunt van de *ingeschreven cirkel*, de cirkel binnen driehoek ABC die de drie zijden raakt.

Bij twee buitenbissectrices ligt het snijpunt op de binnenbissectrice van de derde hoek. Het snijpunt is dan het middelpunt van een *aangeschreven cirkel*. Daarvan zijn er drie, één tegenover elk hoekpunt (zie figuur 22). We hebben hiermee de volgende stelling bewezen.

Stelling 3.22 *De binnen- en buitenbissectrices van een driehoek snijden elkaar in vier punten, de middelpunten van de ingeschreven cirkel en de drie aangeschreven cirkels. Elk van die cirkels raakt elk van de (eventueel verlengde) zijden van de driehoek.*



Figuur 22: *Bissectrices en in- en aangeschreven cirkels.*

3.5.1 Opgaven

3.5.1. Laat AD de binnenbissectrice zijn van hoek A in driehoek ABC, waarbij D op BC ligt. Bewijs: $BD : DC = AB : AC$.
(Dit resultaat staat bekend als de *bissectricestelling*.) Aanwijzing: bepaal op het verlengde van AD het punt E waarvoor CE evenwijdig is met AB.

3.5.2. Formuleer en bewijs een analoge stelling voor de buitenbissectrice.

3.5.3. In driehoek ABC vallen het zwaartepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel samen. Bewijs dat ABC gelijkzijdig is.

3.5.4. Driehoek ABC heeft twee zwaartelijnen van gelijke lengte. Bewijs dat ABC gelijkbenig is.

3.5.5. Driehoek ABC heeft twee hoogtelijnen van gelijke lengte. Bewijs dat ABC gelijkbenig is.

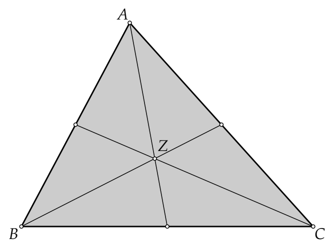
3.5.6. In driehoek ABC is H het hoogtepunt. Wat is het hoogtepunt van driehoek ABH?

3.5.7. Stel dat de ingeschreven cirkel van driehoek ABC straal r heeft. Bewijs dat de oppervlakte van driehoek ABC gelijk is aan $\frac{1}{2}r(a+b+c)$.

3.5.8. Stel dat de aangeschreven cirkel van driehoek ABC tegenover hoekpunt A straal r_a heeft. Bewijs dat de oppervlakte van ABC gelijk is aan $\frac{1}{2}r_a(-a+b+c)$.

3.5.9. De stralen van de ingeschreven en de aangeschreven cirkels van een driehoek ABC noemt men resp. r, r_a, r_b en r_c. Bewijs:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$



Figuur 23: *De zwaartelijnen verdelen een driehoek in zes stukken van gelijke oppervlakte (opgave 3.5.10).*

3.5.10. Bewijs dat de zes stukken waarin de zwaartelijnen een driehoek verdelen, dezelfde oppervlakte hebben.

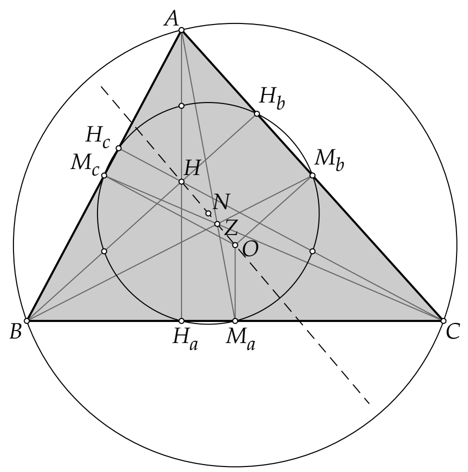
3.5.11. In een niet-gelijkzijdige driehoek ABC is O het middelpunt van de omgeschreven cirkel, R de straal van die cirkel, en Z het zwaartepunt. K is het punt op de halve lijn OZ waarvoor geldt dat $KZ = 2 \cdot ZO$. De middelpunten van de zijden a, b en c noemt men resp. M_a, M_b en M_c en de voetpunten van de hoogtelijnen op deze zijden noemt men H_a, H_b en H_c.

a. Bewijs dat AK evenwijdig is aan OM_a (of met OM_a samenvalt).

b. Concludeer dat K op de hoogtelijn uit A ligt, en dus ook op de hoogtelijnen uit B en C, met andere woorden dat K het **hoogtepunt** is van driehoek ABC. (Dit is dus een alternatief bewijs van de stelling dat de hoogtelijnen door één punt gaan!)

c. Concludeer ook dat bij elke driehoek het hoogtepunt H, het zwaartepunt Z en het middelpunt van de omgeschreven cirkel O op één lijn liggen, en wel zo, dat $HZ : ZO = 2 : 1$.
(Deze lijn staat bekend als de *rechte van Euler*.)

d. Het midden van het lijnstuk HO noemt men N. Bewijs dat de zes punten M_a, M_b, M_c, H_a, H_b en H_c en de middens van HA, HB en HC samen op één cirkel liggen met middelpunt N, en dat de straal van die cirkel gelijk is aan $\frac{1}{2}R$. (Deze cirkel staat bekend als de *negenpuntscirkel*.)
Aanwijzing: maak gebruik van de puntvermenigvuldiging met centrum Z en factor $-\frac{1}{2}$ en de puntvermenigvuldiging met centrum H en factor $\frac{1}{2}$.

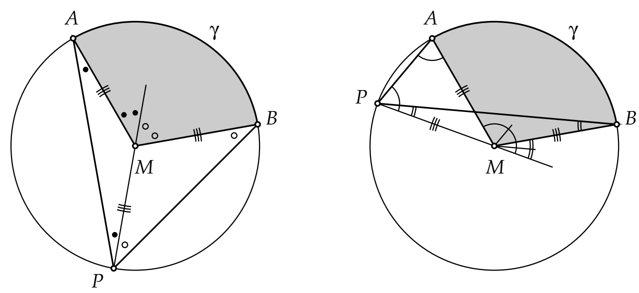


Figuur 24: *De negenpuntscirkel en de rechte van Euler (zie opgave 3.5.11).*

3.5.12. De middelpunten van de aangeschreven cirkels van driehoek ABC noemt men resp. I_a, I_b en I_c. Wat is het hoogtepunt van driehoek $I_aI_bI_c$?

3.6 Verdere cirkeleigenschappen

Laten A en B twee verschillende punten op een cirkel met middelpunt M zijn, en stel dat γ een van de twee cirkelbogen is met eindpunten A en B. Beschouw voor een punt P op de cirkel dat niet op de boog γ ligt, de hoek met benen PA en PB die boog γ bevat. Men noemt die hoek de bij P en γ behorende



Figuur 25: *Omtrekshoek en middelpuntshoek.*

omtrekshoek. De hoek met benen MA en MB die boog γ bevat, heet de bij die boog behorende *middelpuntshoek*.

Stelling 3.23 *Elke omtrekshoek is half zo groot als de bijbehorende middelpuntshoek.*

Bewijs: Laat in de notatie als boven $\angle P$ de omtrekshoek, en $\angle M$ de bijbehorende middelpuntshoek zijn. We onderscheiden twee gevallen
1. M ligt binnen $\angle P$. Dan is op grond van de buitenhoekstelling en stelling 3.11

$$\angle M = 2\angle APM + 2\angle BPM = 2\angle P.$$

2. M ligt niet binnen $\angle P$. Stel, zonder beperking van de algemeenheid, dat AM en PB elkaar snijden. Dan is op grond van dezelfde stellingen

$$\angle M = 2\angle APM - 2\angle BPM = 2\angle P.$$

□

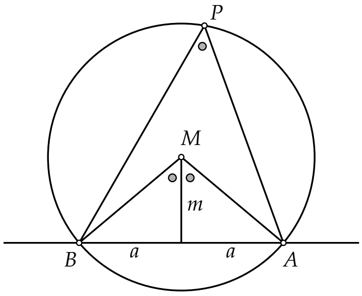
Neemt men als middelpuntshoek een gestrekte hoek, dan is de bijbehorende omtrekshoek dus recht. Dit resultaat staat bekend als de **Stelling van Thales**.

Definitie 3.8 *Een vierhoek $ABCD$ heet een* koordenvierhoek *wanneer de vier hoekpunten op een cirkel liggen (en de zijden dus opvolgende koorden van die cirkel zijn).*

Stelling 3.24 (koordenvierhoekstelling) *In een koordenvierhoek is de som van elk paar overstaande hoeken gelijk aan π radialen (180 graden).*

Bewijs: De bijbehorende middelpuntshoeken zijn samen 2π. □

Stelling 3.25 (omgekeerde koordenvierhoekstelling) *1. Liggen P en Q aan dezelfde kant van een lijn AB en geldt $0 < \angle APB = \angle AQB < \pi$, dan liggen A, B, P*



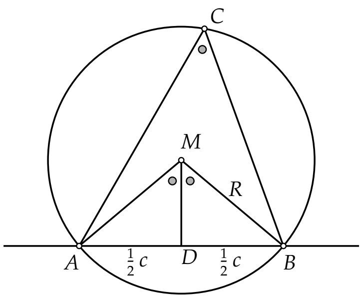
Figuur 26: *Bij het bewijs van de omgekeerde koordenvierhoekstelling.*

en Q op een cirkel.
2. Liggen P en Q aan verschillende kanten van een lijn AB en geldt $\angle APB + \angle AQB = \pi$, dan is $APBQ$ een koordenvierhoek.

Bewijs: 1. Kies coördinaten met $A = (a, 0)$, $B = (-a, 0)$, $a > 0$, en P en Q in het bovenhalfvlak, d.w.z. y-coördinaat positief. Noem $\alpha = \angle APB = \angle AQB$ en laat $M = (0, m)$ het middelpunt zijn van de omgeschreven cirkel van driehoek ABP. Dan is (zie figuur 26) m het getal waarvoor

$$\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{m}{a}.$$

Wanneer men op zo'n zelfde manier van driehoek ABQ de omgeschreven cirkel met middelpunt $M' = (0, m')$ bepaalt, ontstaat net zo'n vergelijking voor m', met daarin dezelfde a en α. Bijgevolg geldt $m = m'$, en dus vallen de beide cirkels samen.
2. Kies een punt P' op de omcirkel van driehoek ABQ aan de andere kant van AB dan Q. Volgens Stelling 3.23 is dan $\angle P' = \pi - \angle Q = \angle P$, en volgens het zojuist bewezen deel 1 van deze stelling ligt P ook op deze cirkel. $\square$



Figuur 27: *De uitgebreide sinusregel.*

Stelling 3.26 (uitgebreide sinusregel) *Als R de straal is van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC dan geldt*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Bewijs: Laat M het middelpunt zijn van de omgeschreven cirkel en D het midden van AB (zie figuur 27). Dan is

$$\sin C = \sin \frac{1}{2}\angle AMB = \sin \angle AMD = \frac{AD}{AM} = \frac{\frac{1}{2}c}{R}.$$

Dit kan worden herleid tot de laatste gelijkheid van de stelling; de andere twee bewijst men net zo. □

Opgaven

3.6.1. Laat R de straal zijn van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC. Bewijs dat de oppervlakte van de driehoek gelijk is aan $\dfrac{abc}{4R}$.

3.6.2. Gegeven zijn een lijnstuk AB, een lijn ℓ loodrecht op AB die AB niet snijdt, en een variabel punt P op ℓ. Voor welke posities van P is $\angle APB$ maximaal?

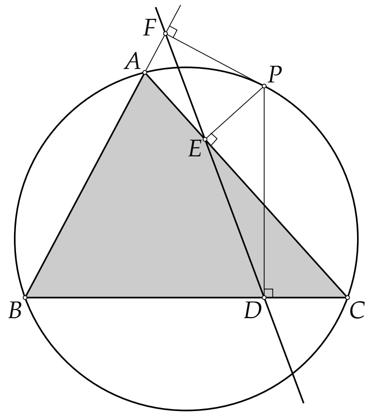
3.6.3. De voetpunten van de hoogtelijnen van de scherphoekige driehoek ABC noemt men D, E en F (met D op BC, etc.). Bewijs dat het hoogtepunt H van driehoek ABC samenvalt met het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek DEF.

3.6.4. Onderzoek de situatie die ontstaat als in opgave 3.6.3 driehoek ABC rechthoekig of stomphoekig is.

3.6.5. Vanuit een punt P op de omgeschreven cirkel van driehoek ABC laat men loodlijnen PD, PE en PF neer op de (indien nodig, verlengde) zijden van de driehoek, D op BC, etc. Bewijs dat D, E en F op één lijn liggen (dit is de zg. *rechte van Wallace* die bij het punt P behoort; zie figuur 28).

3.7 Nawoord

In het voorafgaande heb ik niet alle onderwerpen uit de klassieke vlakke meetkunde behandeld. Zo heb ik nauwelijks aandacht geschonken aan het begrip gelijkvormigheid, het begrip oppervlakte of aan de speciale eigenschappen van bijzondere vierhoeken zoals parallellogrammen, trapezia, vliegers, ruiten, rechthoeken en vierkanten. Het zal echter duidelijk zijn dat het niet moeilijk is deze onderwerpen op een soortgelijke wijze uit te werken.



Figuur 28: *De rechte van Wallace (zie opgave 3.6.5).*

Wat de bovenstaande presentatie vooral duidelijk heeft willen maken, is dat het mogelijk is om de vlakke meetkunde in de bovenbouw van het vwo op een zodanige wijze te behandelen dat leerlingen niet het gevoel krijgen dat het geven van bewijzen een hobby van de leraar is, die naar willekeur of in samenspraak met de klas vaststelt waar je vanuit mag gaan, en wat je daar dan vervolgens uit af moet leiden. Bij de voorgestelde opzet zullen leerlingen ook vanaf het begin beseffen dat meetkundige eigenschappen geen eigenschappen van de werkelijkheid zijn, maar eigenschappen van een model van de werkelijkheid. Daarbij zal ook direct duidelijk zijn wat de betekenis is van definities, stellingen en bewijzen, juist omdat de fundamenten van het wiskundige model helder zijn.

Ik heb bovendien laten zien dat in deze opzet de bewijzen van alle stellingen (natuurlijk met uitzondering van de basisstelling) uitermate kort, elegant en doorzichtig zijn. De meeste bewijzen vergen slechts een paar regels tekst; het langste bewijs, dat van stelling 3.25, telt twaalf regels, maar die stelling bestaat dan ook uit twee delen. Naar believen kunnen leerlingen details die hen nog niet helemaal duidelijk zijn, verder invullen. Nergens hoeft een beroep te worden gedaan op vage intuïties of op autoriteit.

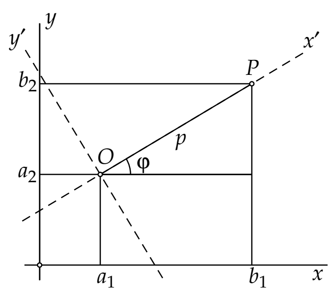
Appendix A: Een bewijs van de basisstelling

Basisstelling In een euclidisch vlak kun je bij elk drietal punten O, P en Q die niet op één lijn liggen precies één toegelaten coördinatenstelsel kiezen zo, dat

1. het punt O de coördinaten $(0, 0)$ heeft,
2. het punt P de coördinaten $(p, 0)$ heeft voor zekere $p > 0$,
3. het punt Q de coördinaten (q_1, q_2) heeft voor zekere q_1 en q_2 met $q_2 > 0$.

Bewijs: Ik ga ervan uit dat in het euclidische vlak reeds een toegelaten coördinatenstelsel aanwezig is. Een euclidisch vlak is immers gedefinieerd als een wiskundige structuur met punten, lijnen en afstanden die de eigenschap heeft dat je daarin zo'n toegelaten coördinatenstelsel kunt kiezen.

Existentie:
Stel dat in het oorspronkelijke coördinatenstelsel geldt $O = (a_1, a_2)$, $P = (b_1, b_2)$ en $Q = (c_1, c_2)$. Noem $p = d(O, P) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.



Figuur 29: *Bij het bewijs van de basisstelling.*

De coördinatentransformatie

$$\begin{aligned} x' &= \frac{b_1 - a_1}{p}(x - a_1) + \frac{b_2 - a_2}{p}(y - a_2) \\ y' &= -\frac{b_2 - a_2}{p}(x - a_1) + \frac{b_1 - a_1}{p}(y - a_2) \end{aligned}$$

levert een nieuw coördinatenstelsel waarin $O = (0, 0)$ en $P = (p, 0)$. Door uitschrijven kun je controleren dat afstanden niet veranderen:

$$\sqrt{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ook in het nieuwe stelsel worden lijnen door lineaire vergelijkingen gegeven. Schrijf, om dit te controleren, de oude coördinaten (x, y) in termen van de nieuwe coördinaten (x', y') (verifieer zelf dat dit klopt):

$$\begin{array}{rcl} x & = & a_1 + \dfrac{b_1 - a_1}{p}\, x' - \dfrac{b_2 - a_2}{p}\, y' \\ y & = & a_2 + \dfrac{b_2 - a_2}{p}\, x' + \dfrac{b_1 - a_1}{p}\, y' \end{array}$$

Een lineaire vergelijking van de vorm $ax + by + c = 0$ met a en b niet beide nul gaat dus over in

$$\left(a\frac{b_1 - a_1}{p} + b\frac{b_2 - a_2}{p}\right) x' + \left(-a\frac{b_2 - a_2}{p} + b\frac{b_1 - a_1}{p}\right) y' + (aa_1 + ba_2 + c) = 0$$

Dit is een lineaire vergelijking van de vorm $a'x' + b'y' + c' = 0$. Omdat

$$(a')^2 + (b')^2 = \left(a\frac{b_1 - a_1}{p} + b\frac{b_2 - a_2}{p}\right)^2 + \left(-a\frac{b_2 - a_2}{p} + b\frac{b_1 - a_1}{p}\right)^2 = a^2 + b^2$$

zijn ook a' en b' niet beide nul. Het nieuwe stelsel is dus een toegelaten coordinatenstelsel.

Wanneer in het nieuwe coördinatenstelsel de tweede coördinaat van Q positief is, is aan alle voorwaarden voldaan en dan is dit het gezochte stelsel. In het andere geval moet je nog de spiegeling in de lijn OP toepassen, dat wil zeggen de isometrische coördinatentransformatie $x'' = x'$, $y'' = -y'$ om het gewenste stelsel te krijgen.

Overigens, de bovenstaande coördinatentransformatie $(x, y) \longrightarrow (x', y')$ is de translatie $(x, y) \longrightarrow (x - a_1, y - a_2)$ gevolgd door een draaiing om O over de hoek φ waarvoor geldt dat $\cos\varphi = \dfrac{b_1 - a_1}{p}$ en $\sin\varphi = \dfrac{b_2 - a_2}{p}$ (zie figuur 29).

Uniciteit:
Stel dat er twee toegelaten coördinatenstelsels zijn met de gewenste eigenschappen. De coördinaten van een punt X in die stelsels zullen we aangeven met (x_1, x_2), respectievelijk (x_1', x_2'). In beide stelsels heeft O de coördinaten $(0, 0)$. Ook de coördinaten van P zijn in beide stelsels gelijk, want $p > 0$, $p' > 0$ en $p^2 = d(O, P)^2 = p'^2$. Voor een willekeurig punt X geldt nu

$$\begin{array}{rcl} {x_1}^2 + {x_2}^2 & = & {x_1'}^2 + {x_2'}^2 \quad (= d(O, X)^2) \\ (x_1 - p)^2 + {x_2}^2 & = & (x_1' - p)^2 + {x_2'}^2 \quad (= d(P, X)^2) \end{array}$$

en dit geeft na uitwerken $x_1 = x_1'$ en $x_2 = \pm x_2'$. Neem je $X = Q$, dan geldt dus $q_1 = q_1'$ en $q_2 = \pm q_2'$. Maar $q_2 > 0$ en $q_2' > 0$ dus $q_2 = q_2'$. Ook Q heeft dus in beide stelsels dezelfde coördinaten. Zou nu voor zekere $X \neq Q$ gelden dat $x_2 = -x_2'$ dan is enerzijds

$$d(X, Q)^2 = (x_1 - q_1)^2 + (x_2 - q_2)^2$$

en anderzijds wegens $x_1 = x'_1$, $q_1 = q'_1$ en $q_2 = q'_2$

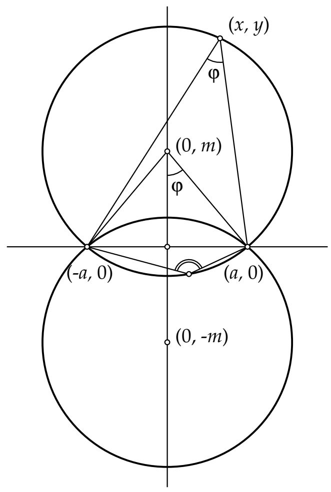
$$d(X,Q)^2 = (x'_1 - q'_1)^2 + (x'_2 - q'_2)^2 = (x_1 - q_1)^2 + (-x_2 - q_2)^2$$

Hieruit volgt $x_2 = 0$ want $q_2 \neq 0$. Voor alle punten X geldt dus $(x_1, x_2) = (x'_1, x'_2)$. □

Appendix B: Koordenvierhoekstellingen korter

De wat moeizame behandeling van koordenvierhoeken enzovoort op bladzijde 29 e.v. kan als volgt worden vereenvoudigd.

Stelling 3.27 *Stel dat gegeven zijn een hoek φ met $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ en twee punten A en B. Kies coördinaten zo, dat $A = (a, 0)$ en $B = (-a, 0)$ en definieer $m = \frac{a}{\tan\varphi}$. Dan bestaat de verzameling van alle punten $X = (x, y)$ waarvoor $\angle AXB = \varphi$ of $\angle AXB = \pi - \varphi$ uit de twee cirkels door A en B met middelpunten $(0, m)$ en $(0, -m)$ (zie figuur 30).*



Figuur 30: *Koordenvierhoekstellingen korter.*

Bewijs: Voor een punt $X = (x, y)$ geldt volgens de cosinusregel $\angle AXB = \varphi$ of $\angle AXB = \pi - \varphi$ dan en slechts dan als

$$d(A,B)^2 = d(X,A)^2 + d(X,B)^2 \pm 2d(X,A)d(X,B)\cos\varphi$$

oftewel

$$4a^2 = (x-a)^2 + y^2 + (x+a)^2 + y^2 \pm 2\sqrt{(x-a)^2 + y^2}\sqrt{(x+a)^2 + y^2}\cos\varphi$$

Haakjes uitwerken, vereenvoudigen en delen door 2 geeft

$$a^2 - x^2 - y^2 = \pm\sqrt{(x-a)^2 + y^2}\sqrt{(x+a)^2 + y^2}\cos\varphi$$

Kwadrateren en herschrijven leidt tot

$$(a^2 - x^2 - y^2)^2 = ((x-a)^2 + y^2)((x+a)^2 + y^2)\cos^2\varphi$$

oftewel

$$\begin{aligned}
(a^2 - x^2 - y^2)^2 &= (x^2 + y^2 + a^2 - 2ax)(x^2 + y^2 + a^2 + 2ax)\cos^2\varphi \\
&= ((x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2)\cos^2\varphi \\
&= ((a^2 - x^2 - y^2)^2 + 4a^2y^2)\cos^2\varphi
\end{aligned}$$

dus, gebruik makend van $1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi$,

$$(a^2 - x^2 - y^2)^2 \sin^2\varphi = 4a^2y^2\cos^2\varphi$$

Worteltrekken en delen door $\sin\varphi$ geeft

$$x^2 + y^2 - a^2 = \pm 2ay\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

oftewel, wegens $m = \frac{a}{\tan\varphi} = a\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$

$$x^2 + (y \mp m)^2 = a^2 + m^2$$

Dit zijn inderdaad de vergelijkingen van de twee cirkels door A en B met middelpunten $(0, m)$ en $(0, -m)$. □

De stellingen 3.23, 3.24, 3.25 en 3.26 zijn allemaal directe gevolgen van deze stelling.

Literatuur

1. D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1899, Engelse vertaling met aanvullingen: *Foundations of geometry*, Open Court, La Salle, Illinois, 1971
2. B.L. van der Waerden, *De logische grondslagen der Euklidische meetkunde*. Noordhoff, Groningen, 1937
3. *Meetkunde, oud en nieuw*, Syllabus van de CWI-Vacantiecursus 1998, Amsterdam, ISBN 90 6196 478 4