Jan van Mill
KdV Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
j.vanmill@uva.nl

Geschiedenis

Brouwer versus Menger: scheiden doet lijden

Het begrip *scheider* heeft in de ontwikkeling van de dimensietheorie tot verwarring geleid en was er de oorzaak van dat L.E.J. Brouwer in conflict kwam met K. Menger. In dit artikel neemt Jan van Mill het begrip scheider onder de loep en poogt zicht te krijgen op wat nu precies de verwarring heeft veroorzaakt en de gemoederen nog altijd bezighoudt.

Voor 1700 waren er twee Nederlandse wiskundige genieën, die de wereld nu nog kent: Simon Stevin en Christiaan Huygens. Stevin was overigens een Vlaming; wij delen hem met de Belgen. In de drie eeuwen daarna is er maar één, namelijk Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966).

Hij was een wonderkind. Op negenjarige leeftijd ging hij naar de hbs in Hoorn, op zijn zestiende begon hij met de studie wis- en natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam en in 1912 werd hij daar hoogleraar. Brouwers bijdrage aan de wiskunde is groot en wel om twee redenen. Ten eerste bracht hij de *topologie* op gang.[1] De sleutelvraag in de meetkunde is: wat gebeurt er met meetkundige figuren onder toegestane vervormingen? De topologie is de liberaalste tak van de meetkundefamilie, zij staat continue vervormingen toe. Dat zijn vervormingen waarin wel geduwd en getrokken mag worden, maar niet geknipt of geplakt, *vloeiende bewegingen* dus. De topologie staat daarom ook wel als 'rubbermeetkunde' bekend. Ook was Brouwer de grondlegger van het zogenaamde *intuïtionisme*. In zijn intuïtionistische formele logica is de regel van de uitgesloten derde niet geldig. Deze logica wordt heden ten dage vooral toegepast in de theoretische informatica bij de algoritmische berekenbaarheid van wiskundige entiteiten.

Brouwer was een originele en dwarse denker die gedurende zijn carrière met menigeen botste. Hij schrok er niet voor terug om met de groten der aarde moordende conflicten uit te vechten, zoals met David Hilbert (1862–1943) over de grondslagen van de wiskunde. Hilbert was misschien wel de meest bekende wiskundige van zijn dagen. De geschiedenis heeft geleerd dat Brouwer in zijn conflicten meestal het gelijk aan zijn zijde had. Er lijkt slechts één uitzondering te zijn op deze regel en dat betreft het conflict met de Oostenrijkse wiskundige Karl Menger (1902–1985) over wie de échte grondlegger is van de dimensietheorie. In de ogen van Brouwer was hij dat en toen Menger zich dat in zijn boek [32] toe-eigende, vlogen de heren elkaar in de haren. Het conflict spitste zich toe op de vraag welke definitie van scheider (zie onder) de juiste is en of Brouwer zijn vermeende fouten had verdoezeld bij zijn werk als redacteur van het postuum verschenen monumentale werk van Urysohn [38, 39]. Dat laatste was een onprettige beschuldiging. De meeste verhandelingen over de controverse, waaronder de gezaghebbende bijdragen van Freudenthal [15], Alexandroff [3], Johnson [27] en Van Dalen [16], ondersteunen de weergave van de feiten door Brouwer. De eveneens gezaghebbende Engelking twijfelt niet over de vraag wie de eerste dimensiefunctie heeft gedefinieerd, maar hij vindt Brouwers argumenten op bepaalde punten niet echt overtuigend [18, p. 7]. In zijn boek [17] gaat Engelking een stap verder als hij schrijft op pagina 392: "Dimension theory was originated by Menger and Urysohn." In het onovertroffen meesterwerk uit 1948 van Hurewicz en Wallman [25] wordt op pagina 4 aan Brouwer het krediet gegeven dat hij verdient maar aan de controverse wordt wijselijk voorbij gegaan. De verwarring over de scheiders wordt daar wel aanzienlijk vergroot door de bewering dat er in de meeste gevallen eigenlijk niets aan de hand is. Het duurde tot het jaar 2000 voor daar helderheid over kwam (Fedorchuk en Van Mill [21]): *scheiden doet lijden*.

Het doel van dit artikel is niet om het conflict tussen Brouwer en Menger opnieuw te beschrijven, dat is immers al op een voortreffelijke manier gedaan in de bovengenoemde bronnen. In plaats daarvan wordt het begrip scheider onder de loep genomen en gepoogd zicht te krijgen op wat nu precies de verwarring heeft veroorzaakt en de gemoederen nog altijd bezighoudt. En hoe de worsteling in de vroege dagen van de dimensietheorie verliep om tot het juiste begrip van scheider te komen.

De conclusie van dit artikel is dat Brouwer bij het corrigeren van zijn 'slip of the pen' misschien te veel op zijn intuïtie vertrouwde.

De benodigde topologische voorkennis stijgt naarmate het artikel vordert. In het begin is de stijl informeel, maar geleidelijk aan zal geheel in Brouweriaanse stijl de wiskundige strengheid zoveel mogelijk worden opgevoerd.

Ik ben veel dank verschuldigd aan Jan Aarts, Henno Brandsma, Robbert Fokkink, Klaas Pieter Hart, Dale M. Johnson, Teun Koetsier, Dieter Remus en de gezamenlijke dames Van Mill voor nuttig commentaar.

Prelude

Deze paragraaf is onder meer gebaseerd op Van Mill [33]. *Dimensietheorie* is een klassiek gebied van de wiskunde dat beoogt topologische ruimten op een bepaalde manier te ordenen. Een *topologische ruimte* is in dit artikel een deelverzameling van de separabele Hilbertruimte ℓ^2. Een *dimensiefunctie* is een functie die aan elke topologische ruimte een getal in $\{-1,0,1,2,\ldots\}$ toekent, haar *dimensie*, op zo'n manier dat de ruimte in topologische zin steeds complexer wordt naarmate de dimensie stijgt. Het gaat hier dus om *topologische* dimensie. Er zijn tegenwoordig bijvoorbeeld in de dynamica vele verschillende dimensiebegrippen waaronder Hausdorff-dimensie. De standaard Cantor-verzameling heeft topologische dimensie 0 en Hausdorff-dimensie $\log_3(2)$.

Bij een nuttige dimensiefunctie is een punt 0-dimensionaal, een lijn 1-dimensionaal, een vlak 2-dimensionaal en de ruimte waarin we leven 3-dimensionaal, et cetera. Hoe zou je dit formeel kunnen aanpakken en bewijzen, en is dimensie invariant bij de bewegingen die in de topologie zijn toegestaan? Een punt kan niet worden overgevoerd in een lijn en het is niet moeilijk in te zien dat een lijn niet vloeiend kan worden overgevoerd in een vlak, maar hoe zit het met een vlak en de 3-dimensionale euclidische ruimte? Dit probleem bood hardnekkig weerstand aan alle aanvallen en had duidelijk een doorbraak nodig. Die kwam van Brouwer.

Een goede definitie van dimensie was niet voorhanden. Al in 1843–1844 schreef Bolzano [5] over dimensie voor deelverzamelingen van de driedimensionale euclidische ruimte. Maar dit artikel werd pas ongeveer honderd jaar na schrijven gepubliceerd, dus dat schoot niet op. Zijn definitie is nooit gebruikt, maar is in essentie sterk verwant aan een nu gangbare definitie van dimensie. Zie ook Johnson [26]. Na een aantal vage pogingen van verschillende auteurs was er in 1912 de eerste serieuze poging om tot een dimensiebegrip te komen van de bekende Franse wiskundige Henri Poincaré [34], die leefde van 1854 tot 1912. Poincaré stierf spoedig na de publicatie van zijn artikel en hij heeft daardoor zijn ideeën nooit kunnen uitwerken.


Karl Menger

Voortbouwend op de ideeën van Poincaré, gaf Brouwer [8] in 1913 de eerste formele definitie van (topologische) dimensie, de zogenaamde *dimensionsgrad* $\mathrm{Dg}\,X$ van een topologische ruimte X behorend tot de klasse 'Normalmengen (im Fréchetschen Sinne)'. In de terminologie van nu zijn dat Poolse ruimten [2] zonder geïsoleerde punten (zie ook Johnson [27, p. 172, regels 27–29]). De ruimten van dimensie 0 zijn bijzonder bij Brouwer, we komen hier later op terug.

Het was een revolutionaire gedachte van Brouwer om een dimensiefunctie te definiëren in puur topologische termen en voor een abstracte klasse van topologische ruimten. Hij bewees dat $\mathrm{Dg}\,\mathbb{R}^n = n$ en dus kan een vlak niet in een vloeiende beweging overgevoerd worden in de 3-dimensionale euclidische ruimte. (Dit werd al eerder bewezen in Brouwer [6].). Dit resultaat en de technieken die door Brouwer werden gebruikt schokten de wiskundige wereld van zijn dagen.

Brouwers bewijs van de stelling $\mathrm{Dg}\,\mathbb{R}^n = n$ gebruikt een spel. Het is een spel voor twee personen en heet *dimensie-berekening*. Bij het begin van het spel heeft speler B de ruimte X waarvan de dimensie berekend moet worden. Bij iedere zet kiest A uit de ruimte van B twee disjuncte gesloten deelverzamelingen. En daarna kiest B telkens als nieuwe ruimte een gesloten deelverzameling S die A en B scheidt. Dit spel wordt gespeeld totdat B er bij de k-de stap in slaagt een S te kiezen van dimensie 0. Als nu B er voor kan zorgen dat, ongeacht hoe A speelt, altijd $k \le n$, terwijl anderzijds A, ongeacht de keuzes van B, er voor kan zorgen dat nooit $k < n$, dan is vastgesteld dat de dimensie van X gelijk is aan n. En als B nooit in staat is om een 0-dimensionale scheider te kiezen, dan krijgt X de dimensie oneindig. Dit zou wel eens de eerste keer kunnen zijn dat de notie van een spel wordt gebruikt in een serieus bewijs; hierin lijkt Brouwer weer zijn tijd ver vooruit te zijn geweest.

In dezelfde periode bewees Brouwer [7] zijn beroemde *dekpuntstelling*, één der meest gebruikte stellingen uit de wiskunde. Deze stelling zegt ruwweg dat na niet al te wild roeren in een kopje koffie ten minste één molecuul zijn oorspronkelijke positie zal hebben ingenomen. De meeste wiskundigen kennen de dekpuntstelling en gebruiken haar veelvuldig, maar hebben er geen idee van hoe zij bewezen moet worden. We zullen later zien dat de dekpuntstelling het hart is van de dimensietheorie.

Twee tegenvoorbeelden

We beschrijven hier twee klassieke en gemakkelijk te visualiseren voorbeelden van deelruimten van het platte vlak die in de literatuur regelmatig opduiken als tegenvoorbeelden tegen diverse beweringen. In de volgende paragraaf over scheiders spelen zij een belangrijke rol.

Het eerste voorbeeld is het bekende $\sin(1/x)$-continuüm [3] S. Dit continuüm is de vereniging van de deelverzamelingen A en B van $\mathbb{R}^2$, waarbij

$$A = \{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \le 1/\pi\},$$
$$B = \{(0,y) : -1 \le y \le 1\}.$$

Bezie de punten $P = (0,-1)$, $Q = (1/\pi, 0)$ en $R = (0,1)$ van S. Het is duidelijk dat S zelf het enige continuüm in S is dat zowel P als Q bevat. Dus, elk continuüm in S dat zowel P als Q bevat, bevat ook R. Zoals we later zullen zien heeft deze eenvoudige opmerking Brouwer heel wat hoofdbrekens gekost.

Laat C het *Cantor-discontinuüm* zijn in $\mathbb{I}=[0,1]$. Dat is de verzameling die je krijgt door uit het interval $[0,1]$ het middelste derde interval weg te laten, dan uit de overblijvende twee intervallen de middelste derden en ga zo maar door. Aan het eind van het proces is er nog heel veel over, maar daar zit geen enkel lijnstukje in want wat in totaal is weggelaten heeft lengte 1. Vandaar de term *discontinuüm*.

We bezien nu C als deelverzameling van $\mathbb{I}\times\{0\}\subseteq\mathbb{R}^2$. Laat Q de verzameling van eindpunten zijn van alle weggelaten intervallen. Dus Q bevat de punten $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{9}$, et cetera. Zij $P=C\backslash Q$. Voor $c\in C$, zij L_c het rechte lijnstuk in $\mathbb{R}^2$ van $(c,0)$ naar $q=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Laat F_c de verzameling van alle punten $(x,y)\in L_c$ zijn met y rationaal als $c\in Q$ en y irrationaal als $c\in P$. De deelruimte $F=\bigcup_{c\in C}F_c$ van $\mathbb{R}^2$ staat bekend als de *waaier van Knaster en Kuratowski* [29].[4]

De ruimte F heeft een aantal bijzondere eigenschappen. Allereerst is zij samenhangend. Dat kan gemakkelijk bewezen worden door een geschikte toepassing van de Stelling van Baire. Ook blijkt dat als Y een samenhangende deelverzameling is van $F\backslash\{q\}$, dat Y dan bestaat uit slechts één punt. Dit heeft tot gevolg dat F geen continua bevat. Voor details, zie [29] en [17, 6.3.23].

Een deelverzameling van een topologische ruimte heet in goed Nederlands *clopen* als zij open zowel als gesloten is.

Lemma 1. *Als V een niet-lege relatief clopen deelverzameling is van $F\backslash\{q\}$, dan behoort q tot de afsluiting[5] van V.*

Bewijs. Als dat namelijk niet het geval is, dan zou V een open deelverzameling zijn van F die tevens gesloten is. Maar dat is in tegenspraak met de samenhang van F. □

Gevolg 1. *Als $x\in F\backslash\{q\}$ en als U een open omgeving is van x in F met $q\notin\overline{U}$, dan geldt dat elke relatief clopen deelverzameling V van $F\backslash\{q\}$ die x bevat de rand $\overline{U}\backslash U$ van U snijdt.*

Bewijs. Laat D een (relatief) clopen deelverzameling zijn van $F\backslash\{q\}$ die x bevat maar $\overline{U}\backslash U$ mist. Dan is $V=D\cap U=D\cap\overline{U}$ een clopen verzameling van $F\backslash\{q\}$ die bevat is in $\overline{U}$ en dus q niet bevat. Maar dat is in tegenspraak met Lemma 1. □

De waaier van Knaster en Kuratowski is niet een Poolse ruimte omdat zij een gesloten topologische kopie van de ruimte van alle rationale getallen bevat. Met (heel veel) meer moeite dan bij de waaier kan een Poolse deelruimte van het platte vlak worden geconstrueerd met dezelfde eigenschappen. Bezie daartoe de zogenaamde volledige Erdősruimte E_c uit [19]. Dat wil zeggen,

$$E_c=\{x\in\ell^2:(\forall i\in\mathbb{N})\,(x_i\text{ is irrationaal})\}.$$

Het is duidelijk dat E_c een G_δ-verzameling[6] is van ℓ^2 en dus is zij Pools[7]. Ook is zij *totaal onsamenhangend*, dat wil zeggen, voor elk tweetal verschillende punten x en y van E_c bestaat er een clopen deelverzameling V van E_c die x bevat maar y niet. Erdős [19] bewees dat elke niet-lege clopen deelverzameling van E_c onbegrensd is (in norm). Dat impliceert dat E_c 1-dimensionaal is. Tevens zijn E_c en $E_c\times E_c$ homeomorf; het kwadraat van een 1-dimensionale ruimte kan dus 1-dimensionaal zijn. Uit Knaster [28] volgt dat er een samenhangende ruimte X is met een punt $x\in X$ zodat $X\backslash\{x\}$ homeomorf is met E_c. De ruimte X is Pools en een variant daarvan kan met de techniek in Engelking [18, Examples 1.4.6, 1.4.7 en 1.4.8] in het platte vlak worden ingebed. Dit voorbeeld valt dus binnen de klasse van ruimten waarvoor Brouwer zijn dimensiefunctie definieerde.

Scheiders

Zoals we eerder zagen definieerde Brouwer [8] in 1913 de dimensiefunctie dimensionsgrad en bewees dat op $\mathbb{R}^n$ die functie de waarde n aanneemt. Een onmiddellijk gevolg is dat de euclidische ruimten $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ homeomorf zijn precies dan wanneer $n=m$. Een generalisatie van dit resultaat staat bekend als *Brouwers Stelling over de Invariantie van Gebied*: als U een open deelverzameling is van $\mathbb{R}^n$ en $f:U\to f(U)\subseteq\mathbb{R}^n$ een continue bijectie, dan is $f(U)$ open in $\mathbb{R}^n$ en $f:U\to f(U)$ een homeomorfisme. Fantastische resultaten die antwoorden gaven op lang openstaande fundamentele problemen. In 1923, tien jaar na de publicatie van Brouwers artikel, verschenen er wolken aan de horizon. Niemand had in de tussentijd enig probleem ontdekt totdat de Russische wiskundige Urysohn (1898–1924) het artikel [8] las. Tijdens het congres van de Deutsche Mathematiker-Vereinigung in Marburg stelde hij in 1923 dat er een moeilijkheid is met de definitie van scheider zoals gehanteerd door Brouwer en dat derhalve de bewijzen van zijn stellingen niet deugden.

Wij bespreken in deze paragraaf vijf noties van scheider die een rol speelden of later gingen spelen in de artikelen van Brouwer. Het doel van deze paragraaf is de relaties tussen deze noties helder te krijgen.

Als A en B deelverzamelingen zijn van de topologische ruimte X, dan verstaan we onder een *continuüm van A naar B* een continuüm in X dat zowel A als B snijdt.

Zij X een topologische ruimte en laat A, B en C paarsgewijs disjuncte gesloten deelverzamelingen zijn van X. Laat (S1), (S2), (S3), (S4) en (S5) afkortingen zijn van de volgende beweringen:

(S1) Elk continuüm van A naar B snijdt C.
(S2) Elke *gesloten* samenhangende deelverzameling van X die zowel A als B snijdt, snijdt ook C.
(S3) Elke samenhangende deelverzameling van X die zowel A als B snijdt, snijdt ook C.
(S4) $X\backslash C$ kan geschreven worden als $U\cup V$, waarbij U en V disjuncte open omgevingen zijn van A respectievelijk B.
(S5) $X\backslash C$ kan geschreven worden als $U\cup V$, waarbij U en V disjuncte open omgevingen zijn van A respectievelijk B terwijl tevens U te schrijven is als een vereniging van open samenhangende verzamelingen.

Voor $i\leq 5$ zeggen we dat C een (Si)-*scheider* is tussen A en B.

Opmerkingen:
(S1) In de literatuur wordt een (S1)-scheider een *snede* genoemd.
(S2) Dit is de definitie van scheider in Brouwer [8].
(S3) Toen Brouwer geconfronteerd werd met de kritiek van Urysohn, reageerde hij als volgt. Hij stelde dat de bewijzen van zijn stellingen correct zijn modulo kleine triviale aanpassingen die elke competente wiskundige ogenblikkelijk zou moeten kunnen zien. En dat hij — Brouwer — (S2) geschreven

had maar (S3) bedoelde, het woord *gesloten* bij (S2) moet worden doorgehaald. Dat was niets meer dan een 'slip of the pen' die erin was geslopen door druk van buiten (Van Dalen [16, p. 408, regels 8–9]). Bovendien had hij de 'fout' in een zeer vroeg stadium gezien en door 'omstandigheden' was het er niet van gekomen dat aan de wiskundige gemeenschap tijdig te communiceren.[8] Hij publiceerde errata ruim tien jaar na de publicatie van zijn oorspronkelijke artikel in verschillende tijdschriften, onder meer in [9–14]. Behalve deze errata bombardeerde Brouwer verscheidene wiskundigen met brieven. De veelheid aan reacties laat zien hoezeer hij door de kritiek getroffen was.

(S4) Dit is de definitie van scheider in Urysohn [37] en Menger [31].

(S5) Deze definitie van scheider is identiek aan (S4) met extra samenhang daaraan toegevoegd. Dit begrip komt wellicht 'wat uit de lucht vallen', zie verderop voor nadere informatie.

Het bewijs van het volgende lemma laten we aan de lezer.

Lemma 2. (S5) ⇒ (S4) ⇒ (S3) ⇒ (S2) ⇒ (S1).

De problemen voor Brouwer begonnen met Urysohns observatie dat (S2) ⇏ (S3). Om dat in te zien, beschouwde Urysohn het $\sin(1/x)$-continuüm S (zie de vorige paragraaf). Laat $A=\{(0,-1)\}$, $B=\{(1/\pi,0)\}$ en $C=\{(0,1)\}$. Het enige deelcontinuüm van S dat A en B snijdt is S zelf en dus snijdt het C. Maar dan voldoet C aan (S2), terwijl $S\backslash C$ een samenhangende verzameling is die zowel de punten in A als B bevat! Met andere woorden, (S2) ⇏ (S3), zelfs voor continua.

Lemma 3. *Geen der implicaties in Lemma 2 kan worden omgekeerd, zelfs niet in de klasse van alle samenhangende topologische ruimten.*

Bewijs. Zij $X=F\cup K$, waarbij F de waaier van Knaster en Kuratowski is (zie de vorige paragraaf) en K een topologische kopie is van het interval $\mathbb{I}$ met $|F\cap K|=1$. Zij x het unieke punt in $F\cap K$, zij y een willekeurig punt in $K\backslash F$, en laat $a,b\in F\backslash\{x\}$ twee willekeurige maar verschillende punten zijn. Dan is $C=\{y\}$ een (S1)-scheider tussen $A=\{a\}$ en $B=\{b\}$ om de flauwe reden dat er helemaal geen continua bestaan in X die zowel a als b bevatten. Maar F is een gesloten samenhangende deelverzameling van X die zowel A als B snijdt, maar C mist. Met andere woorden, (S1) ⇏ (S2) en het tegenvoorbeeld is samenhangend.

Dat (S2) ⇏ (S3) werd boven aangetoond met een continuüm als tegenvoorbeeld.

Bezie weer de waaier F van Knaster en Kuratowski. Kies een willekeurig punt $x\in F\backslash\{q\}$, en laat U een open omgeving zijn van x zodat $q\notin\overline{U}$. Zij nu $A=\{x\}$, $B=\overline{U}/U$ en $C=\{q\}$. Elke niet-triviale samenhangende deelverzameling van F bevat q, want $F\backslash\{q\}$ bevat slechts triviale samenhangende deelverzamelingen. Dus C voldoet aan (S3). We beweren dat C niet aan (S4) voldoet. Immers, stel dat $F\backslash\{q\}$ geschreven kan worden als $V\cup W$, waarbij V en W disjuncte open omgevingen zijn van A respectievelijk B. Dan is V een (relatief) clopen deelverzameling van $F\backslash\{q\}$ die B mist. Maar dat is in tegenspraak met Gevolg 1. Met andere woorden, (S3) ⇏ (S4).

Bezie voor (S4) ⇏ (S5) weer het $\sin(1/x)$-continuüm S. Zij $A=\{(0,-1)\}$, $B=\{(0,1)\}$, en C de doorsnijding van de x-as met S. Dan is C een (S4)-scheider, maar uiteraard voldoet C niet aan (S5). □

Gebruiken we de volledige Erdősruimte E_c (zie de vorige paragraaf) in het bewijs van Lemma 3 dan zijn alle tegenvoorbeelden 'Normalmengen (im Fréchetschen Sinne)'. Door deze tegenvoorbeelden te vermenigvuldigen met $\mathbb{I}^n$, verkrijgen we zelfs samenhangende Poolse tegenvoorbeelden van willekeurig hoge dimensionsgrad (zie de volgende paragraaf). De implicaties in Lemma 3 kunnen dus 'nooit' worden omgekeerd. Vanwege de leesbaarheid hebben we er bewust voor gekozen om de bewijzen van deze beweringen niet op te nemen.

Gevolg 2. (S3) ⇏ (S4).

In een belangrijke klasse van topologische ruimten zijn alle beschouwde begrippen van scheider equivalent. Het gaat om de klasse van alle Poolse lokaal samenhangende ruimten, dat wil zeggen separabele ruimten waarvan de topologie gegeneerd wordt door een volledige metriek en een basis voor de open verzamelingen hebben bestaande uit samenhangende verzamelingen.

Lemma 4. *Onderstel dat X Pools en lokaal samenhangend is, dan geldt* (S1) ⇒ (S5).

Bewijs. Bezie de open verzameling $Y=X\backslash C$. Vanwege lokale samenhang is elke component van Y open. Laat $\mathcal{E}$ de familie van alle componenten van Y zijn. Stel dat er een element $E\in\mathcal{E}$ is dat zowel A als B snijdt. Merk op dat E eveneens Pools en lokaal samenhangend is. Uit de samenhang van E en een resultaat van Mazurkiewicz [30] (zie ook [17, 6.3.11]), volgt dat er een topologische kopie J van (het continuüm) $\mathbb{I}$ in E bestaat die zowel A als B snijdt. Maar dat is in tegenspraak met (S1). Zij nu $\mathcal{U}=\{E\in\mathcal{E}: E\cap A\neq\emptyset\}$ en $\mathcal{V}=\mathcal{E}\backslash\mathcal{U}$. Dan zijn $U=\bigcup\mathcal{U}$ en $V=\bigcup\mathcal{V}$ disjuncte open omgevingen van A respectievelijk B zodat $X\backslash C=U\cup V$, hetgeen is zoals gewenst. □

Hardnekkige misverstanden

Deze paragraaf gaat over enkele hardnekkige misverstanden die ik zal pogen uit de wereld te helpen.

We gaan eerst in op hoe een dimensiefunctie doorgaans wordt gedefinieerd. De lege ruimte krijgt altijd de waarde -1 toegekend. De ruimten van dimensie 0 zijn in een bepaalde zin 'triviaal'.[9] Dan gaat de definitie recursief verder. De dimensie van een topologische ruimte X is ten hoogste n, waarbij $n\geq 1$, als voor elk tweetal disjuncte gesloten deelverzamelingen A en B van X een scheider C tussen A en B bestaat van dimensie hooguit $n-1$. De ruimte X is n-dimensionaal als zij hooguit n-dimensionaal is maar niet hooguit $(n-1)$-dimensionaal. Alle ruimten waaraan op deze wijze niet een getal uit $\{-1,0,1,2,\ldots\}$ wordt toegekend heten *oneindig-dimensionaal*.

Een dimensiefunctie hangt dus af van twee vooraf gekozen variabelen: (1) de klasse 'triviale' ruimten, en (2) de notie van scheider tussen twee gesloten verzamelingen. Verschillende variabelen leveren verschillende dimensiefuncties op. Maar niet elke keuze van de variabelen levert een nuttig dimensiebegrip op. Je kunt bijvoorbeeld alle niet-lege topologische ruimten 0-dimensionaal verklaren. Dan heb je een prima dimensiebegrip maar het zegt niets. We schreven eerder dat bij een nuttig dimensiebegrip een punt 0-dimensionaal is, een lijn 1-dimensionaal, een vlak 2-dimensionaal en de ruimte waarin we leven

3-dimensionaal, et cetera. Om dergelijke dimensiefuncties gaat het in de dimensietheorie.

De dimensionsgrad Dg uit [8] zit als volgt in elkaar. De 'triviale' ruimten zijn de ruimten die geen enkel continuüm bevatten, en de notie van scheider is (S2). Zoals we eerder opmerkten, beperkte Brouwer zich hierbij tot de klasse 'Normalmengen (im Fréchetschen Sinne)', dat wil zeggen, Poolse ruimten zonder geïsoleerde punten (zie ook Johnson [27, p. 172, regels 27–29]).

De definitie van de Menger–Urysohn-dimensiefunctie ind gaat als volgt. De lege ruimte krijgt wederom de waarde -1 toegekend. Vervolgens gaat de definitie recursief verder: $\mathrm{ind}\,X \le n$, waarbij $n \ge 0$, als voor elk punt a in X en elke gesloten deelverzameling B van X met $a \notin B$ er een (S4)-scheider C is tussen $\{a\}$ en B met $\mathrm{ind}\,C \le n-1$. Ten slotte, $\mathrm{ind}\,X = n$ als $\mathrm{ind}\,X \le n$ en $\mathrm{ind}\,X \not\le n-1$, en $\mathrm{ind}\,X = \infty$ als $\mathrm{ind}\,X \ne n$ voor elke n. We spreken ook wel over de *kleine inductieve dimensie* van een topologische ruimte.

Deze definitie lijkt niet helemaal te passen in het schema zoals we dat boven beschouwden. Maar dat is schijn. Definieer de *grote inductieve dimensie* $\mathrm{Ind}\,X$ van een topologische ruimte X als volgt. De 'triviale' ruimten zijn de 0-dimensionale ruimten. Dat wil zeggen, de ruimten die een basis hebben van clopen verzamelingen, en de definitie van scheider is (S4). Deze dimensiefunctie staat ook bekend onder de naam *Brouwer–Čech-dimensie*. Een belangrijke stelling is dat voor elke ruimte X geldt: $\mathrm{ind}\,X = \mathrm{Ind}\,X$ [18, 1.6.4].

Het eerste hardnekkige misverstand is dat Brouwer een 'foute' dimensiefunctie zou hebben gedefinieerd gebaseerd op een 'foute' notie van scheider. Johnson [27, p. 173, regel 21] is daar het meest expliciet over: "There is a subtle difficulty in this definition of separation which makes it 'wrong'." Maar dit is onjuist. Er is niets verkeerds aan het begrip (S2) en derhalve ook niet met de dimensionsgrad. Het beste bewijs hiervan is mijns inziens dat voor een compacte ruimte X geldt: $\mathrm{Dg}\,X = \mathrm{ind}\,X$, zie Urysohn [39], Hurewicz [24] en Tumarkin [36].[10] Fedorchuk, Levin en Shchepin [20] bewezen dit voor ruimten die een aftelbare vereniging zijn van compacte deelruimten.[11] Dus zelfs voor lokaal compacte ruimten stemmen alle beschouwde dimensiefuncties overeen. Maar voor willekeurige topologische ruimten bleek de dimensiefunctie ind een beter onderscheid op te leveren dan de dimensionsgrad. Vandaar dat ind de standaard is geworden. Je moet dus niet spreken in termen van 'goed of fout', maar in termen van 'meer of minder nuttig'.

Het tweede hardnekkige misverstand is dat $\mathrm{Dg}\,X$ en $\mathrm{ind}\,X$ dezelfde waarde aannemen als X Pools en lokaal samenhangend is. Op pagina 4 van Hurewicz en Wallman [25] staat zelfs zonder bewijs dat de dimensionsgrad van Brouwer en het nu gangbare dimensiebegrip overeenkomen in de klasse van *alle* lokaal samenhangende topologische ruimten, Pools of niet. Deze mededeling is zeer geruststellend want de meeste wiskundigen werken alleen met ruimten die lokaal samenhangend zijn en daar treden dus kennelijk geen verschillen in de dimensiebegrippen op. Deze zelfde bewering is te vinden in talloze artikelen en boeken die over de (geschiedenis van de) dimensietheorie gaan. Maar in 2000 bewezen Fedorchuk en Van Mill [21] dat er samenhangende en lokaal samenhangende Poolse ruimten X bestaan met $\mathrm{Dg}\,X = 1$ en $\mathrm{ind}\,X$ willekeurig groot: *scheiden doet lijden*.

De verwarring lijkt ingegeven door Lemma 4: als de beschouwde ruimte Pools en lokaal samenhangend is, dan stemmen alle noties van scheider overeen. Maar een gesloten deelverzameling van een lokaal samenhangende ruimte is niet noodzakelijk lokaal samenhangend. Dus zodra men in een lokaal samenhangende ruimte een scheider kiest, dan is er in het algemeen geen sprake meer van lokale samenhang en kan Lemma 4 niet meer worden toegepast.

Laten we deze paragraaf besluiten met de introductie van een nieuwe dimensiefunctie die in het vervolg een rol gaat spelen. De *grote dimensionsgrad* DG definiëren we als volgt. De 'triviale' ruimten zijn wederom de ruimten die geen enkel continuüm bevatten, en de notie van scheider is (S3). Het derde hardnekkige misverstand dat we de wereld uit willen helpen is dat deze dimensiefunctie dicht in de buurt komt bij die van Menger en Urysohn.

Lemma 5. *Voor elke topologische ruimte* X *geldt:* $\mathrm{Dg}\,X \le \mathrm{DG}\,X$.

Bewijs. Het is duidelijk dat $\mathrm{Dg}\,X = 0 \Leftrightarrow \mathrm{DG}\,X = 0$. Stel dat de bewering waar is voor alle ruimten X met $\mathrm{DG}\,X \le n$, waarbij $n \ge 0$. Bezie nu een ruimte Y met $\mathrm{DG}\,Y = n+1$, en laat A en B twee disjunctie gesloten verzamelingen zijn van Y. Volgens aanname bestaat er een (S3)-scheider C tussen A en B met $\mathrm{DG}\,C \le n$. Maar elke (S3)-scheider is een (S2)-scheider volgens Lemma 2. Met andere woorden, tussen elk tweetal disjuncte gesloten verzamelingen van Y bestaat een (S2)-scheider C met, volgens de inductieonderstelling, $\mathrm{Dg}\,C \le \mathrm{DG}\,C \le n$. Maar dan geldt: $\mathrm{Dg}\,Y \le n+1$. □

Met de techniek van Fedorchuk, Levin en Shchepin [20] kan gemakkelijk bewezen worden dat voor elke σ-compacte ruimte X geldt: $\mathrm{ind}\,X = \mathrm{DG}\,X$.

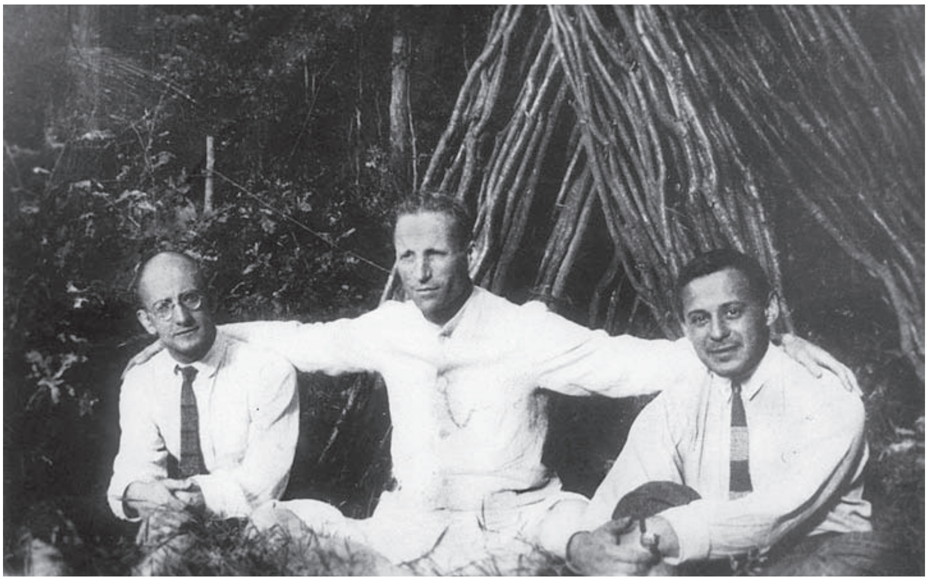
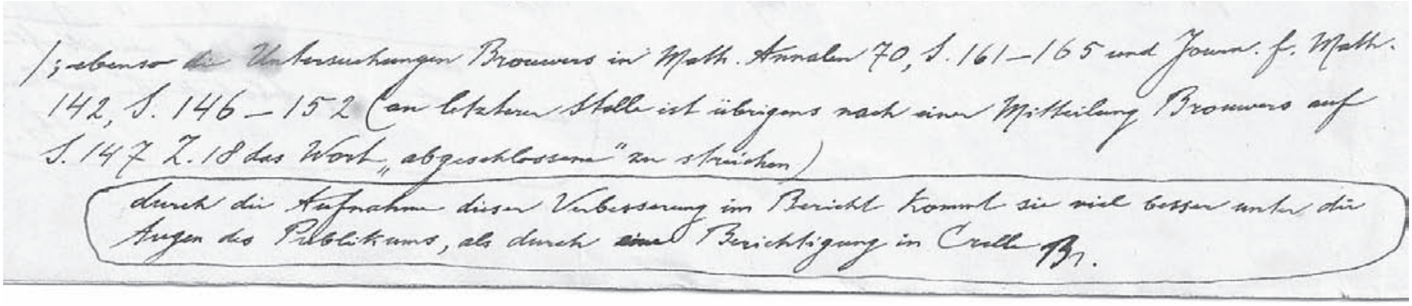


Foto: Brouwer-archief

Alexandroff, Brouwer en Urysohn


/; ebenso die Untersuchungen Brouwers in Math. Annalen 70, S. 161–165 und Journ. f. Math. 142, S. 146–152 (an letzterer Stelle ist übrigens nach einer Mitteilung Brouwers auf S. 147 Z. 18 das Wort „abgeschlossenen" zu streichen)
(durch die Aufnahme dieser Verbesserung im Bericht kommt sie viel besser unter die Augen des Publikums, als durch ~~eine~~ Berichtigung in Crelle Br.

Afbeelding: Brouwer-archief

Verwijzing naar 'slip of the pen' van Brouwer

Komt DG dus 'dicht in de buurt van' ind? Het antwoord is: helaas niet. Voor de voorbeelden X in Fedorchuk en Van Mill geldt namelijk dat $\mathrm{DG}\,X=1$ terwijl $\mathrm{ind}\,X$ willekeurig groot kan zijn, zie [21, Lemma 2.3].

Reacties Brouwer op kritiek Urysohn

Tijdens het congres van de Deutsche Mathematiker-Vereinigung in Marburg stelde Urysohn in 1923 dat er een moeilijkheid is met de definitie van scheider zoals gehanteerd door Brouwer en dat derhalve de bewijzen van zijn stellingen niet deugden. Hij sprak van een 'irreparable mistake' (Van Dalen [16, p. 404, regels 26–27]). Zoals we eerder opmerkten, stelde Brouwer onder meer in [14] dat hij (S2)-scheiders had geschreven maar (S3) had bedoeld. Dit is de beroemde 'slip of the pen' die door Urysohn werd geaccepteerd.

Brouwer verving Dg kennelijk door de dimensiefunctie DG uit de vorige paragraaf want als je 'gesloten' in (S2) schrapt dan verkrijg je (S3). Maar we zagen dat die dimensiefunctie niet veel verbetering brengt.

In [14, p. 318, regels 12–13] beweert Brouwer dat (S3) equivalent is met het volgende:

(S3)′ A und B heißen in X durch C getrennt, wenn C in X eine A enthaltende, aber nicht B enthaltende Gebietsmenge bestimmt.

(Brouwer gebruikte andere symbolen: A is bij hem ρ, B is ρ', C is π_1 en X is π.) Deze uitspraak heeft ook tot verwarring geleid in de literatuur. Allereerst over de vraag wat Brouwer verstaat onder *Gebietsmenge*. Het lijkt erop dat Brouwer hier gewoon *open verzameling* bedoelde, zie voetnoot * op pagina 150 van [8]. Dit wordt bevestigd door Freudenthal [15, p. 550, regels 23–26], die wel een waarschuwing afgeeft:

> "Formally Gebietsmenge is Brouwer's term for relative open set. Its historical origin, however, is the division of the plane or euclidean space by a closed subset into a number of domains; any union of such domains is called a Gebietsmenge."

Je moet dus oppassen met dit begrip want zijn historische betekenis is een andere dan die Brouwer lijkt te hebben bedoeld. Bij Hausdorff [22, p. 215, regels 10–11] is open verzameling een *Gebiet*. (In de referentielijst verwijzen we naar een herziene druk van Hausdorffs boek, de eerste druk werd in 1914 gepubliceerd). Hij noemt daar ook het woord *Gebietsmenge* in voetnoot 1 op pagina 215 en lijkt zich aan te sluiten bij wat Weierstraß daaronder verstaat: een vereniging van samenhangende open verzamelingen. Maar geheel duidelijk is het niet. In de derde druk [23, p. 173, regels 4–5] is in de Engelse vertaling de terminologie aangepast: "A closed connected set is called a continuum; an open connected set is called a domain." Ook Alexandroff en Hopf [4, p. 51, regel 24] verstaan onder Gebiet een samenhangende open verzameling.

Johnson [27, p. 174, regels 14–17] vertaalt (S3)′ als volgt:

> "... wenn C in X eine A enthaltende, aber nicht B enthaltende Gebietsmenge bestimmt."
>
> (... if C determines a domain set [i.e., a union of connected open sets; thus an open set] in X containing A, but containing no part of B.)

(We hebben ook hier de symbolen aangepast.) En Van Dalen [16, p. 409, regels 1–3] gaat nog een stap verder:

> In the published corrections Brouwer used a somewhat different version of separation: S separates A and B if S determines a domain containing A, but not B.

Vermoedelijk bedoelde Van Dalen hier eveneens 'domain set'. En dan is er ook nog Alexandroff [2] die in 1924 aan *Gebietsmenge* een geheel andere betekenis toekende, namelijk, die van familie van open verzamelingen.

Verder is het onduidelijk wat Brouwer precies bedoelde met *bestimmt* in (S3)′, het woord dat door Johnson werd vertaald met *determines*. Brouwer moet daar naar mijn mening bedoeld hebben dat $X\backslash C$ uiteenvalt in twee disjuncte open verzamelingen, waarbij de ene A bevat en de andere B, (S4) dus. Er is namelijk geen andere interpretatie die topologisch hout snijdt. Maar dan zijn (S3) en (S3)′ niet equivalent. Zekerheid over wat Brouwer precies bedoelde valt niet meer te krijgen naar mijn (bescheiden) mening. We bespreken namelijk een artikel dat bijna honderd jaar geleden is geschreven. Bovendien, wat doet het er eigenlijk toe? De prestaties van Brouwer waren formidabel en zijn bewijs van de n-dimensionaliteit van $\mathbb{R}^n$ is correct als je uitgaat van (S4)-scheiders. Dat is wat belangrijk is en de rest is eigenlijk van ondergeschikt belang.

De moderne dimensietheorie is geheel gestoeld op de Dekpuntstelling van Brouwer [7] dat voor elke n, elke continue functie $f:\mathbb{I}^n\to\mathbb{I}^n$ een dekpunt heeft. Om die stelling te bewijzen kan men het apparaat van de algebraïsche topologie aanroepen. Maar het meest elementaire bewijs ervan volgt uit een combinatorisch resultaat van Sperner [35]. Er kan gemakkelijk bewezen worden dat Brouwers Dekpuntstelling voor $\mathbb{I}^n$ equivalent is met het bestaan van een n-dimensionale topologische ruimte. De Dekpuntstelling is dus het hart van de dimensietheorie. Brouwers Stelling over de Invariantie van Gebied is ook een ogenblikkelijk gevolg van de Dekpuntstelling (Hurewicz en Wallman [25, Theorem VI 9]).

Epiloog

Als ik door de gangen van het Korteweg-De Vries Instituut voor Wiskunde van de Universiteit van Amsterdam loop, dan vraag ik mij weleens af wat ik zou doen als ik Brouwer zou tegenkomen. Uit de verhandelingen van Van Dalen [16] komt hij naar voren als iemand die slimmer was dan de meeste mensen, altijd tot debat en polemiek bereid, scherp en soms onaangenaam. Maar, wel een strijder die met open vizier streed. En een strijder die voor de Nederlandse wiskunde en informatica van onmetelijke betekenis is geweest. Er bestaat geen twijfel over dat hij de grondvester was van de dimensietheorie, of zijn pen enkele malen is uitgeschoten als het om trivialiteiten ging of niet, dat doet er niets toe. Dat Menger [32] hem dit wilde ontnemen kan moeilijk anders dan als kwalijk worden bestempeld. En Brouwers onvrede over deze handelswijze is heel erg begrijpelijk. Nu terug naar de vraag wat ik zou doen als ik Brouwer zou tegenkomen. Ik denk dat ik toch wel een praatje met hem zou willen maken en hem de volgende vraag zou willen stellen: “Beste Bertus, wat vind jij nou van die Trump?”

Noten

1 En dat was maar goed ook. De Nobelprijs voor Natuurkunde is dit jaar toegekend aan drie Britten voor de ontdekking van topologische fase-overgangen, een quantummechanisch verschijnsel dat in de jaren tachtig ontdekt werd.

2 Een *Poolse ruimte* is een volledige separabele metrische ruimte.

3 Een *continuüm* is een compacte samenhangende topologische ruimte die tenminste twee punten bevat.

4 Bronisław Knaster (1893–1980) was een bekend Pools wiskundige. Toen ik hem bezocht in 1979 in Wrocław (Polen) vroeg hij mij mijn lezing in het Frans te houden. Was ik soms een student van L.E.J. Brouwer? Uiteraard antwoordde ik ontkennend. Na mijn lezing nam hij mij mee naar zijn studeerkamer om zijn boeken te bewonderen. Daar vroeg hij me of ik een student was van J. de Groot (1914–1972). Ook daar antwoordde ik ontkennend op. Toen wees hij me op de foto’s van Brouwer en De Groot die naast elkaar hingen aan een muur van zijn studeerkamer. Kazimierz Kuratowski (1896–1980) was ook een bekend Pools wiskundige. Hem heb ik in 1976 in Praag ontmoet.

5 Een punt x van een topologische ruimte X behoort tot de afsluiting $\overline{A}$ van een deelverzameling A van X als elke omgeving van x, hoe klein die omgeving ook is, een punt van A bevat.

6 Een deelverzameling A van een topologische ruimte X heet een G_δ*-verzameling* van X als zij te schrijven is als $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, waarbij elke U_n open is in X.

7 Een G_δ-verzameling van een Poolse ruimte is weer Pools, zoals werd bewezen door Alexandroff en Hausdorff, [17, Theorem 4.3.23].

8 Alle ‘bewijzen’ wijzen in de richting dat Brouwer hier de waarheid sprak. Zie Freudenthal [15], Alexandroff [3], Johnson [27] en Van Dalen [16].

9 Dit is een volkomen legitieme handelswijze die in de dimensietheorie ‘dimensie modulo een klasse’ is gaan heten (Aarts en Nishiura [1]).

10 Dit is een niet-triviale bewering en het bewijs omzeilt behendig het probleem dat bij ind en Dg de respectievelijke noties van scheider niet overeenstemmen.

11 Zo’n ruimte heet σ*-compact*.

Referenties

1 J.M. Aarts en T. Nishiura, *Dimension and Extensions*, North-Holland Mathematical Library, Vol. 48, North-Holland, 1993.

2 P. Alexandroff, Über die Struktur der bikompakten topologischen Räume, *Math. Ann.* 92(3-4) (1924), 267-274.

3 P. Alexandroff, Die Topologie in und um Holland in den Jahren 1920–1930, *Nieuw Arch. Wiskunde* 3/17 (1969), 109–127.

4 P. Alexandroff en H. Hopf, *Topologie. I*, Berichtigter Reprint, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 45, Springer, 1974.

5 B. Bolzano, Über Haltung, Richtung, Krümmung und Schnörkelung bei Linien sowohl als Flächen sammt einigen verwandten Begriffen, in: J. Vojtěch, ed., *Spisy Bernarda Bolzana*, Vol. 5, Geometrické práce, 1948.

6 L.E.J. Brouwer, Beweis der Invariantz der dimensionenzahl, *Math. Ann.* 71 (1911), 161–165.

7 L.E.J. Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* 71 (1912), 97–115.

8 L.E.J. Brouwer, Über den natürlichen Dimensionsbegriff, *J. Reine Angew. Math.* 142 (1913), 146–152.

9 L.E.J. Brouwer, Over het natuurlijke dimensiebegrip, *KNAW Versl.* 32 (1923), 881–886.

10 L.E.J. Brouwer, Über den natürlichen Dimensionsbegriff, *KNAW Proc.* 26 (1923), 795–800.

11 L.E.J. Brouwer, Bemerkungen zum natürlichen Dimensionsbegriff, *KNAW Proc.* 27 (1924), 635–638.

12 L.E.J. Brouwer, Berichtung, *J. Reine Angew. Math.* 153 (1924), 253.

13 L.E.J. Brouwer, Opmerkingen over het natuurlijke dimensiebegrip, *KNAW Versl.* 33 (1924), 476–478.

14 L.E.J. Brouwer, Zum natürlichen Dimensionsbegriff, *Math. Z.* 21 (1924), 312–314.

15 L.E.J. Brouwer, *Collected Works, Vol. 2: Geometry, Analysis, Topology and Mechanics*, edited by Hans Freudenthal, North-Holland, 1976,

16 D. van Dalen, *L.E.J. Brouwer – Topologist, Intuitionist, Philosopher. How mathematics is rooted in life*, Springer, 2013.

17 R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, 1989, 2nd ed.

18 R. Engelking, *Theory of Dimensions Finite and Infinite*, Heldermann, 1995.

19 P. Erdős, The dimension of the rational points in Hilbert space, *Annals of Math.* 41 (1940), 734–736.

20 V.V. Fedorchuk, M. Levin en E.V. Shchepin, On the Brouwer definition of dimension, *Uspekhi Mat. Nauk* 54 (1999), 193–194.

21 V.V. Fedorchuk en J. van Mill, Dimensionsgrad for locally connected Polish spaces, *Fund. Math.* 163 (2000), 77–82.

22 F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Chelsea, 1949.

23 F. Hausdorff, *Set Theory* (English translation of *Grundzüge der Mengenlehre*, 3rd ed., 1937), Chelsea, 1962, 2nd English ed.

24 W. Hurewicz, Normalbereiche und Dimensionstheorie, *Math. Ann.* 96 (1927), 736–764.

25 W. Hurewicz en H. Wallman, *Dimension Theory*, Van Nostrand, 1948.

26 D.M. Johnson, Prelude to dimension theory: the geometrical investigations of Bernard Bolzano, *Arch. History Exact Sci.* 17 (1977), 262–295.

27 D.M. Johnson, The problem of the invariance of dimension in the growth of modern topology, Part II, *Arch. Hist. Exact Sci.* 25 (1981), 85–267.

28 B. Knaster, Sur un problème de P. Alexandroff, *Fund. Math.* 33 (1945), 308–313.

29 B. Knaster en K. Kuratowski, Sur les ensembles connexes, *Fund. Math.* 2 (1921), 206–255.

30 S. Mazurkiewicz, O arytmetyzacji continuów, *C.R. Varsovie* 6 (1913), 305–311.

31 K. Menger, Über die Dimension von Punktmengen I, *Monatsh. für Math. und Phys.* 33 (1923), 148–160.

32 K. Menger, *Dimensionstheorie*, B.G. Teubner, 1928.

33 J. van Mill, Brouwers dimensionsgrad: controverse en verwarring, *Nieuw Arch. Wiskunde* 5/14 (2013), 130–138.

34 H. Poincaré, Pourquoi l’espace a trois dimensions, *Revue de Metaph. et de Morale* 20 (1912), 483–504.

35 E. Sperner, Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes, *Abh. Math. Semin. Hamburg. Univ.* 6 (1928), 265–272.

36 L.A. Tumarkin, Über die Dimension nicht abgeschlossener Mengen, *Math. Ann.* 98 (1928), 637–656.

37 P. Urysohn, Les multiplicités Cantoriennes, *C.R. Acad. Paris* 175 (1922), 440–442.

38 P. Urysohn, Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes, *Fund. Math.* 7 (1925), 30–137.

39 P. Urysohn, Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes (suite), *Fund. Math.* 8 (1926), 225–359.