# ELECTRODYNAMICA EN RELATIVITEITSTHEORIE

## STUDIEHANDLEIDING

**L.G. Suttorp**
**Instituut voor Theoretische Fysica**
**Universiteit van Amsterdam**

# Inhoudsopgave

# Waarom een studiehandleiding ?

Het vak Electrodynamica en Relativiteitstheorie in het derde jaar wordt gegeven aan de hand van het boek *Introduction to Electrodynamics* (3e druk, 1999) van D.J. Griffiths (in het vervolg wordt het boek IE genoemd). Ter begeleiding van de studie van het boek, en voor gebruik bij het college en de werkcolleges wordt een studiehandleiding uitgereikt.

Wat staat er in deze studiehandleiding? Per hoofdstuk van het boek komen een aantal vaste punten aan bod:

1. *Kernbegrippen.* Hoewel IE zeer goed is geschreven, blijkt het soms wat lastig het overzicht over het geheel te bewaren: het boek is dik en de hoofdstukken zijn soms behoorlijk lang. Er kan dan behoefte ontstaan aan een lijstje, per hoofdstuk, van de belangrijkste kernbegrippen die aan bod komen.

2. *Notaties.* De in IE gebruikte notatie is meestal standaard. Echter, sommige van de daar gekozen notaties zijn niet steeds handig. In het college en de werkcolleges wordt daarom op sommige punten van die notatie afgeweken. Hoe de notaties in het college worden gekozen staat onder dit kopje per hoofdstuk uitgelegd.

3. *Addenda.* Op sommige punten is de uitleg in IE wat kort, of ontbreekt er nuttige informatie. De addenda bevatten samenvattingen van het materiaal in IE en voorts van op het hoorcollege behandelde onderwerpen, die naast IE tot de voor het tentamen te bestuderen stof behoren.

4. *Samenvatting van belangrijke resultaten.* In elk hoofdstuk komen een aantal resultaten voor die men paraat moet hebben om met succes vraagstukken te kunnen maken. Een lijstje van deze essentiële resultaten is daarom per hoofdstuk toegevoegd.

Paginanunmmers uit IE worden genoteerd als IEPn, formulenummers als IEFn en vraagstuknummers als IEVn.

# Hoofdstuk 1

# Vector-analyse

## 1.1 Kernbegrippen

### Vectoren en tensoren

Vectoren en tensoren. Transformatiegedrag onder rotaties. Cartesische componenten. Inproduct van vectoren. Kronecker-delta. Contractiepunt. Contracties met tensoren. Uitproduct. Levi-Civita-symbool. Tripel-product. Herhaald uitproduct. Scalarvelden, vectorvelden, tensorvelden.

### Differentiatie

Nabla-operator. Gradiënt, divergentie, rotatie. Differentiatie van producten van scalairen en/of vectoren. Herhaalde afgeleiden. Laplace-operator. D'Alembert-operator.

### Integratie

Lijn-integraal, oppervlakte-integraal, volume-integraal. Stellingen voor gradiënt, divergentie (Gauss), en rotatie (Stokes).

### Kromlijnige coördinaten

Bolcoördinaten en cylindercoördinaten. Gradiënt, divergentie, rotatie en Laplaciaan in kromlijnige coördinaten.

### Delta-functie

Delta-functie in één of meer dimensies. Delta-functie van een functie. Afgeleide van delta-functie. Laplaciaan van de functie $1/4\pi r$.

### Longitudinale en transversale vectorvelden

Definitie en eigenschappen van longitudinale en transversale velden. Opsplitsing van een vectorveld in longitudinale en transversale delen. Stelling van Helmholtz. Fourier-taal.

## 1.2 Notaties

### Scalairen, vectoren, tensoren

*Scalairen* worden cursief gedrukt: $f, \phi, \psi$ (er zal geen systematisch onderscheid worden gemaakt tussen $\phi$ en $\varphi$, evenmin tussen $\theta$ en $\vartheta$).

*Vectoren* worden vet gedrukt: $\mathbf{A}$, en geschreven met een pijl boven het symbool: $\vec{A}$.

*Tensoren* met twee of meer indices worden hier genoteerd als schreefloze vette symbolen: $\mathsf{T}$, en geschreven met twee of meer pijlen boven het symbool. (In IE wordt een tensor met twee indices genoteerd als een vet symbool met een naar twee zijden wijzende pijl er boven, dus $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$, dat doen we hier om typografische reden niet.) De eenheidstensor $\mathsf{U}$ is een tensor met twee indices waarvan de cartesische componenten juist de Kronecker-delta $\delta_{ij}$ zijn.

### Eenheidsvectoren en componenten van vectorvelden

*Eenheidsvectoren* in de richting van de cartesische coördinaat-assen worden genoteerd als $\mathbf{e}_i$, met $i = x, y, z$. De notatie in IE, nl. $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$, zal niet worden gebruikt.

Ook eenheidsvectoren in de richting van de coördinaatlijnen van willekeurige orthogonale kromlijnige coördinaten (d.i. lijnen waarlangs twee van de drie coördinaten constant worden gehouden) worden genoteerd als $\mathbf{e}_i$, met $i = r, \theta, \varphi$ voor bolcoördinaten, en $i = r, \varphi, z$ voor cylindercoördinaten. In IE wordt de component $r$ in cylindercoördinaten genoteerd als $s$, dit is ongebruikelijk en zal hier niet worden gedaan. De notaties van IE voor de eenheidsvectoren, nl. $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ en $\hat{\mathbf{s}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\mathbf{z}}$, zullen evenmin worden gebruikt.

De *componenten* van een vectorveld $\mathbf{v}$ in de richting van de coördinaatlijn $i$ worden genoteerd als $v_i$, met $i$ als tevoren.

### Inproducten en contracties

*Inproducten* worden genoteerd met een *contractiepunt*: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i$. Hierbij is de *sommatieconventie* gehanteerd, volgens welke een sommatie over herhaalde indices niet expliciet wordt genoteerd. Bij afspraak betekent de contractiepunt: contraheer met betrekking tot de indices die aan weerszijden van de contractiepunt staan (d.w.z. stel die indices aan elkaar gelijk en sommeer). De componenten $v_i$ van een vectorveld in cartesische of kromlijnige coördinaten kunnen met behulp van de contractiepunt worden geschreven als $v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$.

Een inproduct van een vector met een tensor, of van twee tensoren is analoog te definiëren. Het resultaat hoeft niet een scalair te zijn, maar kan ook een vector of een tensor zijn. Voorbeelden: contractie van een vector $\mathbf{A}$ en een tensor $\mathsf{T}$ geeft de vector $\mathbf{A} \cdot \mathsf{T}$ met de componenten $A_j T_{ji}$ voor $i = 1, 2, 3$. Een speciaal voorbeeld van een contractie is het nemen van het *spoor van een tensor* met twee indices. De notatie met de contractiepunt is daar niet bruikbaar, men schrijft $\mathrm{Tr}\, \mathsf{T} = T_{ii}$.

Naast de enkele contractie kent men ook *meervoudige* contracties. Bij een dubbele contractie (aangegeven met :) worden twee indices links van de dubbele contractiepunt gecontraheerd met twee indices rechts. Bij het successievelijk gelijkstellen van indices werkt men van binnen naar buiten: eerst worden de indices direct aan weerszijden van het contractiesymbool gelijkgesteld, daarna de volgende indices, en zo voorts. Voorbeelden zijn: $\mathbf{AB} : \mathbf{CD} = A_i B_j C_j D_i$ (voor vier vectoren) of $\mathbf{AB} : \mathsf{T} = A_i B_j T_{ji}$ (voor twee vectoren en een tensor).

### Uitproducten

Het *uitproduct* van twee vectoren wordt genoteerd met een wig $\wedge$, de notatie in IE met $\times$ wordt hier niet gebruikt.

### Nabla-operator, Laplace-operator, d'Alembert-operator

De *nabla-operator* wordt genoteerd als $\nabla = \partial/\partial\mathbf{r}$. De gradiënt van een scalair veld $\phi$ is dan $\nabla\phi$. De divergentie van een vectorveld $\mathbf{v}$ is $\nabla \cdot \mathbf{v}$. De rotatie van een vectorveld is $\nabla \wedge \mathbf{v}$.

De *Laplace-operator* wordt geschreven als $\Delta$ (in IE als $\nabla^2$). De in IE op IEP9 ingevoerde notatie met een *script* $\mathbf{r}$, ter aanduiding van de vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ zal hier niet worden gebruikt, wegens de verwarring die kan ontstaan met $\mathbf{r}$.

### Lijn-elementen, oppervlakte-elementen en volume-elementen

*Lijn-elementen* zijn vectoren en worden genoteerd als $d\mathbf{l}$. De lengte van het lijn-element wordt geschreven als $dl$. *Oppervlakte-elementen* zijn ook vectoren, namelijk het product van de grootte van het oppervlakte-elementje ($dS$ of $da$) en de normaal $\mathbf{n}$ op het oppervlak, en worden genoteerd als $d\mathbf{S}$ of $d\mathbf{a}$. *Volume-elementen* zijn scalair en worden genoteerd als $dV$ of $d\mathbf{r}$ of $d\tau$. Merk op dat $d\mathbf{r}$ niet een vector is, maar staat voor $dx\,dy\,dz$ in cartesische coördinaten (voor $r^2 \sin\theta\; dr\; d\theta\; d\varphi$ in bolcoördinaten en voor $r\; dr\; dz\; d\varphi$ in cylindercoördinaten).

### Integralen

De *lijn-integralen*:

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \phi(\mathbf{r})\; d\mathbf{l} \quad , \quad \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \quad , \quad \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \wedge d\mathbf{l} \quad , \tag{1.2.1}$$

met het scalaire veld $\phi(\mathbf{r})$ en het vectorveld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, zijn respectievelijk een vector, een scalair en een vector (het lijn-element $d\mathbf{l}$ is immers een vector). Daarnaast komen ook voor lijn-integralen met de lengte van het lijn-element in de integrand:

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \phi(\mathbf{r})\; dl \quad , \quad \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{v}(\mathbf{r})\; dl \quad . \tag{1.2.2}$$

Dit zijn respectievelijk een scalair en een vector.

De *oppervlakte-integralen*:

$$\int_S \phi(\mathbf{r})\; d\mathbf{S} \quad , \quad \int_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad , \quad \int_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \wedge d\mathbf{S} \tag{1.2.3}$$

zijn respectievelijk een vector, een scalair en een vector (het oppervlakte-element is een vector). Opnieuw komen daarnaast ook hier oppervlakte-integralen voor met de grootte van het oppervlakte-element in de integrand:

$$\int_S \phi(\mathbf{r})\; dS \quad , \quad \int_S \mathbf{v}(\mathbf{r})\; dS \quad . \tag{1.2.4}$$

Dit zijn respectievelijk een scalair en een vector.

De *volume-integralen*:

$$\int_V \phi(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \quad , \quad \int_V \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \quad , \tag{1.2.5}$$

zijn respectievelijk een scalair en een vector (het volume-element is een scalair).

Integralen over gesloten krommen of over gesloten oppervlakken worden vaak genoteerd als $\oint$.

Integralen met tensoren in de integrand kunnen analoog worden gedefinieerd. Voorbeelden zijn:

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathsf{T}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \quad , \quad \int_S \mathsf{T}(\mathbf{r}) \wedge d\mathbf{S} \quad , \quad \int_V \mathsf{T}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \quad , \tag{1.2.6}$$

die respectievelijk een vector, een tensor en nogmaals een tensor zijn.

### Delta-functie

De één-dimensionale *delta-functie* $\delta(x)$ kan worden gegeneraliseerd tot meer dimensies, en wordt in drie dimensies geschreven als $\delta(\mathbf{r})$. In IE wordt geschreven $\delta^3(\mathbf{r})$, wij zullen de index 3 meestal weglaten, uit het vectorkarakter van $\mathbf{r}$ blijkt de hogere dimensie. Al eerder werd vermeld dat de notatie met een *script* letter $\mathbf{r}$, ter aanduiding van $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, zoals in IEF(1.100), niet zal worden gebruikt.

### Transversale en longitudinale vectorvelden

Het *transversale* deel van een vectorveld $\mathbf{v}$ wordt genoteerd als $\mathbf{v}_T$, het *longitudinale* deel als $\mathbf{v}_L$.

## 1.3 Addenda

### Kronecker- en Levi-Civita-symbool

Het Kronecker-symbool $\delta_{ij}$ met $i, j$ twee indices die elk 1,2 of 3 kunnen zijn, is gedefinieerd door de eigenschappen:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 0 \text{ als de twee indices ongelijk zijn,} \\ \delta_{ij} &= 1 \text{ als de twee indices gelijk zijn.} \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Het Kronecker-symbool geeft de cartesische componenten van een *invariante tensor* met twee indices, de *eenheidstensor* $\mathsf{U}$. Inderdaad bewijst men (ga na) dat voor elke rotatiematrix $R_{ij}$ geldt:

$$R_{ip}R_{jq}\delta_{pq} = \delta_{ij} \quad , \tag{1.3.2}$$

met gebruik van de sommatieconventie (cf. IEF(1.32)).

Het Levi-Civita-symbool $\varepsilon_{ijk}$, met $i, j, k$ drie indices die elk 1,2 of 3 kunnen zijn, is gedefinieerd door de eigenschappen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} &= 0 \text{ als twee indices gelijk zijn,} \\ \varepsilon_{ijk} &= 1 \text{ als de indices een even permutatie van } 1, 2, 3 \text{ zijn,} \\ \varepsilon_{ijk} &= -1 \text{ als de indices een oneven permutatie van } 1, 2, 3 \text{ zijn.} \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Het Levi-Civita-symbool geeft de cartesische componenten van een *invariante tensor* met drie indices. Dit betekent dat voor elke rotatiematrix $R_{ij}$ geldt:

$$R_{ip}R_{jq}R_{kr}\varepsilon_{pqr} = \varepsilon_{ijk} \quad , \tag{1.3.4}$$

met gebruik van de sommatieconventie (vergelijk opnieuw met IEF(1.32)).

Het Levi-Civita-symbool heeft de eigenschap

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}} \quad , \tag{1.3.5}$$

opnieuw met de sommatieconventie, en voor elke keus van de vrije indices $j, k, m, n$. Het bewijs volgt door gebruik van de definitie (1.3.3).

Inproducten kunnen eenvoudig worden genoteerd met de Kronecker-delta:

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \delta_{ij}A_iB_j} \quad . \tag{1.3.6}$$

Evenzo kunnen uitproducten worden geschreven met het Levi-Civita-symbool:

$$\boxed{(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k} \quad . \tag{1.3.7}$$

Met gebruik van (1.3.5)–(1.3.7) bewijst men eenvoudig relaties zoals IEF(1.17) en IEF(1.18) (ga na).

De eenheidstensor kan worden gebruikt om een inproduct te herschrijven, omdat geldt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathsf{U} \cdot \mathbf{B} \quad . \tag{1.3.8}$$

### Differentiaties

De $\nabla$-operator is gedefinieerd als (cf. IEF(1.39)):

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}} \quad . \tag{1.3.9}$$

Met behulp hiervan definieert men de gradiënt $\nabla\psi$ van een scalair veld $\psi(\mathbf{r})$, de divergentie $\nabla \cdot \mathbf{v}$ van een vectorveld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ en de rotatie $\nabla \wedge \mathbf{v}$ van een vectorveld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$.

Op analoge wijze kan men ook de divergentie $\nabla \cdot \mathsf{T}$ van een tensorveld $\mathsf{T}(\mathbf{r})$ definiëren; het is een vector met de cartesische $j$-component $\nabla_i T_{ij}$. In het bijzonder kan men, gebruikmakend van de eenheidstensor $\mathsf{U}$ de gradiënt van een scalair veld $\phi$ herschrijven als $\nabla \cdot (\phi \mathsf{U})$.

Er zijn zes productregels voor differentiatie van producten van scalairen en vectoren (zie IEP20-21):

1. gradiënt van product van twee scalairen:

$$\boxed{\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi} \quad ; \tag{1.3.10}$$

2. gradiënt van inproduct van twee vectoren:

$$\boxed{\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\nabla\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} + (\nabla\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}} \quad ; \tag{1.3.11}$$

merk op dat $\nabla\mathbf{A}$ in feite een tensor is met twee indices, en met componenten $\nabla_i A_j$; merk voorts op dat de relatie (ii) van IEP21 gekunsteld is, dubbele uitproducten introduceert en beter kan worden vergeten;

3. divergentie van product van scalair en vector:

$$\boxed{\nabla\cdot(\psi\mathbf{A}) = (\nabla\psi)\cdot\mathbf{A} + \psi\nabla\cdot\mathbf{A}} \quad ; \tag{1.3.12}$$

4. divergentie van uitproduct van twee vectoren:

$$\boxed{\nabla\cdot(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}) = (\nabla\wedge\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} - (\nabla\wedge\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}} \quad ; \tag{1.3.13}$$

merk op dat IEF(1.15) werd gebruikt om de tweede term handig te kunnen noteren;

5. rotatie van product van scalair en vector:

$$\boxed{\nabla\wedge(\psi\mathbf{A}) = (\nabla\psi)\wedge\mathbf{A} + \psi\nabla\wedge\mathbf{A}} \quad ; \tag{1.3.14}$$

6. rotatie van uitproduct van twee vectoren:

$$\begin{aligned} \nabla\wedge(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}) &= \nabla_A\wedge(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}) + \nabla_B\wedge(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}) \\ &= \mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{A} - (\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) \quad ; \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

in de eerste regel voerden we als hulpgrootheden in $\nabla_A$ en $\nabla_B$, dat zijn nabla-operatoren, die uitsluitend op $\mathbf{A}$, resp. $\mathbf{B}$ werken; de tweede regel volgt dan met IEF(1.17).

De bewijzen van de relaties kunnen gebeuren door uitschrijven per component (zie bv. IEP21 voor het bewijs van (1.3.12)). Handiger is het om gebruik te maken van (1.3.5)–(1.3.7). Het bewijs van (1.3.12) is dan:

$$\nabla_i(\psi A_i) = (\nabla_i\psi)A_i + \psi\nabla_i A_i \quad . \tag{1.3.16}$$

Evenzo wordt het bewijs van (1.3.13):

$$\begin{aligned} \delta_{ij}\nabla_i(\varepsilon_{jkl}A_k B_l) &= \varepsilon_{ikl}\nabla_i(A_k B_l) = \varepsilon_{ikl}(\nabla_i A_k)B_l + \varepsilon_{ikl}A_k(\nabla_i B_l) \\ &= (\varepsilon_{lik}\nabla_i A_k)B_l - (\varepsilon_{kil}\nabla_i B_l)A_k \quad . \end{aligned} \tag{1.3.17}$$

Ook (1.3.14)–(1.3.15) kunnen zo worden bewezen (ga na).

Door ook tensoren te introduceren kan men meer productregels afleiden, voor de differentiatie van een product van een scalair met een tensor, of van een inproduct van een vector met een tensor, enzovoorts.

## Gradiënt-, divergentie- en rotatie-stelling

De *gradiënt-stelling* geeft het resultaat van lijn-integratie van een gradiënt met inproduct in gesloten vorm:

$$\boxed{\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (\nabla\phi)\cdot d\mathbf{l} = \phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1)} \quad . \tag{1.3.18}$$

De *divergentie-stelling* of *stelling van Gauss* , en de *rotatie-stelling* of *stelling van Stokes* geven beiden alleen een verband tussen integralen:

$$\boxed{\int_V (\nabla\cdot\mathbf{v})\, d\mathbf{r} = \oint_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}} \quad , \tag{1.3.19}$$

$$\boxed{\int_S (\nabla\wedge\mathbf{v})\cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l}} \quad . \tag{1.3.20}$$

Merk op dat in de laatste twee stellingen de dimensie van de integralen rechts 1 lager is dan links, en dat de integralen rechts zich uitstrekken over de rand van de gebieden van de integralen links.

## Afleiding van de uitdrukkingen voor gradiënt, divergentie en rotatie in kromlijnige coördinaten

De afleiding in IE in Appendix A (IEP547-554) is geldig voor algemene *orthogonale* coördinaten, d.w.z. coördinaten waarbij de coördinaatlijnen elkaar in elk punt onderling orthogonaal snijden. De resultaten in de hoofdtekst volgen daaruit direct door invullen van de tabel op IEP548.

## Eigenschappen van de delta-functie

Van belang zijn i.h.b. de eigenschappen IEF(1.94), de formules uit IEV 1.45, en IEF(1.102). Deze laatste schrijven we liever als

$$\boxed{\Delta\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \quad . \tag{1.3.21}$$

### Longitudinale en transversale velden

Een *longitudinaal* of *irrotationeel* of *rotatievrij* veld is een vectorveld met overal rotatie 0, dus waarvoor geldt $\nabla \wedge \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0$ voor alle $\mathbf{r}$. Het heeft de eigenschappen:

- Elke lijn-integraal van een longitudinaal veld langs een gesloten lus geeft de uitkomst 0, dus $\oint \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 0$. (Bewijs via de stelling van Stokes.)

- Een longitudinaal veld is te schrijven als de gradiënt van een geschikt gekozen scalair veld, dus $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla\psi(\mathbf{r})$, voor zekere $\psi(\mathbf{r})$, die tot op een constante na is bepaald. Het bewijs volgt door expliciet te kiezen $\psi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$; dan is inderdaad $\mathbf{v} = \nabla\psi$.

Elk van deze twee eigenschappen kan ook als definitie dienen, m.a.w. uit elk van de eigenschappen volgt de definitie. (Bewijs: Als de eerste eigenschap geldt, dan is voor elke gesloten lus $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$, en dus met Stokes voor elk oppervlak $\int (\nabla \wedge \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = 0$, zodat dan moet gelden $\nabla \wedge \mathbf{v} = 0$. Als de tweede eigenschap geldt, dan volgt direct $\nabla \wedge \mathbf{v} = \nabla \wedge (\nabla\psi) = 0$.)

Een *transversaal* of *solenoïdaal* of *divergentievrij* veld is een vectorveld met overal divergentie 0, dus waarvoor geldt $\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0$ voor alle $\mathbf{r}$. Het heeft de eigenschappen:

- Elke oppervlakte-integraal van een transversaal veld over een gesloten oppervlak geeft 0, dus $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0$. (Bewijs via de stelling van Gauss.)

- Een transversaal veld is te schrijven als de rotatie van een geschikt gekozen vectorveld, dus $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r})$, voor zekere $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, die tot op de gradiënt van een willekeurige scalaire $\psi(\mathbf{r})$ is bepaald. Het bewijs volgt door te schrijven $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \wedge \int_o^1 d\lambda\ \lambda\mathbf{v}(\lambda\mathbf{r})$; dan is inderdaad $\mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{A}$. (Vul immers de uitdrukking voor $\mathbf{A}$ in $\nabla \wedge \mathbf{A}$ in, en werk de herhaalde uitproducten uit met (1.3.15). Gebruik dan $\nabla \cdot \mathbf{v}(\lambda\mathbf{r}) = 0$ en $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$. Gebruik voorts de kettingregel, volgens welke geldt $\mathbf{r} \cdot \nabla\mathbf{v}(\lambda\mathbf{r}) = \lambda d\mathbf{v}(\lambda\mathbf{r})/d\lambda$. Na optellen van de resterende termen ontstaat dan de integraal $\int_0^1 d\lambda\ d[\lambda^2\mathbf{v}(\lambda\mathbf{r})]/d\lambda = \mathbf{v}(\mathbf{r})$.)

Elk van de twee eigenschappen kan ook weer als definitie dienen, m.a.w. uit elk van de eigenschappen volgt de definitie. (Bewijs: Als de eerste eigenschap geldt, dan is voor elk gesloten oppervlak $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0$, en dus met Gauss voor elk volume $\int (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{r} = 0$, zodat dan moet gelden $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Als de tweede eigenschap geldt, dan volgt direct $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0$.)

### Stelling van Helmholtz

Elk op oneindig voldoende snel afvallend vectorveld is te schrijven als de som van een longitudinaal veld en een transversaal veld (cf. IEF(B.10) uit Appendix B):

$$\boxed{\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_L(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_T(\mathbf{r})} \quad . \tag{1.3.22}$$

De twee bijdragen rechts worden gegeven door

$$\boxed{\mathbf{v}_L(\mathbf{r}) = -\nabla \int_\infty d\mathbf{r}'\ \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\ [\nabla' \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}')]} \quad , \tag{1.3.23}$$

$$\boxed{\mathbf{v}_T(\mathbf{r}) = \nabla \wedge \int_\infty d\mathbf{r}' \, \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \, [\nabla' \wedge \mathbf{v}(\mathbf{r}')]} \quad , \tag{1.3.24}$$

met $\nabla = \partial/\partial\mathbf{r}$ een differentiatie naar $\mathbf{r}$ als tevoren en $\nabla' = \partial/\partial\mathbf{r}'$ een differentiatie naar $\mathbf{r}'$. De uitdrukking in (1.3.23) is longitudinaal, immers de rotatie is 0. Dit longitudinale veld wordt geheel bepaald door de divergentie van het vectorveld $\mathbf{v}$ in de gehele ruimte. Evenzo is de uitdrukking (1.3.24) transversaal, immers de divergentie is 0. Dit transversale veld wordt geheel bepaald door de rotatie van het vectorveld $\mathbf{v}$ in de gehele ruimte. De stelling leert blijkbaar dat kennis van de divergentie en rotatie van een veld voldoende is om het veld geheel vast te leggen. Het veld moet voldoende snel afvallen, zodat de integralen convergeren. (Voor een constant veld convergeren de integralen weliswaar, maar is de stelling toch onjuist!)

Het bewijs van de stelling van Helmholtz bestaat uit twee delen:

1. controle dat de divergentie en de rotatie van het rechterlid van (1.3.22) voor alle $\mathbf{r}$ hetzelfde zijn als van $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ zelf;

2. bewijs dat twee velden die in de gehele ruimte dezelfde divergentie en rotatie hebben, en voldoende snel afvallen, aan elkaar gelijk zijn; als we dat weten dan is wegens 1. het bewijs rond.

Het bewijs van 1. staat uitgelegd op IEP555-556. Echter de notatie in de twee formules onder IEF(B.7) is wat onduidelijk, we schrijven die twee formules daarom opnieuw op (gebruik IEF(B.1–B.2)). Allereerst de eerste formule onder IEF(B.7):

$$\begin{aligned} -\Delta\mathbf{W} &= -\int_\infty d\mathbf{r}'\Delta\left[\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] [\nabla' \wedge \mathbf{v}(\mathbf{r}')] \\ &= \int_\infty d\mathbf{r}' \, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \, [\nabla' \wedge \mathbf{v}(\mathbf{r}')] = \nabla \wedge \mathbf{v}(\mathbf{r}) \quad , \end{aligned} \tag{1.3.25}$$

waar we in de tweede regel eerst (1.3.21) gebruikten, en daarna de definiërende eigenschap van de delta-functie. Voorts luidt IEF(B.8) in meer expliciete notatie:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{W} &= \int_\infty d\mathbf{r}' \left[\nabla\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]\cdot[\nabla' \wedge \mathbf{v}(\mathbf{r}')] \\ &= -\int_\infty d\mathbf{r}' \left[\nabla'\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]\cdot[\nabla' \wedge \mathbf{v}(\mathbf{r}')] \\ &= -\int_\infty d\mathbf{r}' \, \nabla'\cdot\left[\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,[\nabla' \wedge \mathbf{v}(\mathbf{r}')]\right] \\ &= -\oint_{S_\infty} d\mathbf{S}'\cdot\left[\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,[\nabla' \wedge \mathbf{v}(\mathbf{r}')]\right] = 0 \quad . \end{aligned} \tag{1.3.26}$$

Hier werd in de tweede regel gebruikt dat $\nabla$ kan worden vervangen door $-\nabla'$ als deze operator werkt op een functie van $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. Voorts werd in de derde regel gebruikt dat $\nabla'\cdot[\nabla' \wedge \mathbf{v}(\mathbf{r}')] = 0$. In de vierde regel werd de stelling van Gauss gebruikt, en vervolgens dat voor voldoende snel afvallende integrand een integraal over een oppervlak op oneindig ($S_\infty$) wegvalt.

Het bewijs van 2. gaat als volgt: als twee velden dezelfde divergentie en rotatie hebben, dan heeft het verschil van die velden een divergentie 0 en een rotatie 0. Wegens rotatie

0 is dat 'verschilveld' dan te schrijven als $\nabla\psi$ voor een zeker scalair veld $\psi(\mathbf{r})$. Wegens divergentie 0 voldoet $\psi$ dan aan $\Delta\psi = 0$. Nu is een scalair veld $\psi$, waarvoor overal geldt $\Delta\psi = 0$, en dat bovendien voldoende snel afvalt op oneindig, noodzakelijkerwijze gelijk aan 0. (Het bewijs van deze laatste uitspraak wordt geleverd in hoofdstuk 2, bij de bespreking van de eigenschappen van de Laplace-operator, zie IEP116.) Als $\psi = 0$ dan is ook $\nabla\psi = 0$, zodat het 'verschilveld' gelijk is aan 0. QED.

*Opmerkingen:*

- Net zoals hierboven onder 2. is gedaan bewijst men dat er maar één manier is om een vectorveld te schrijven als de som van een longitudinaal veld en een transversaal veld, namelijk zoals in (1.3.22). Bezie nl. eens het hypothetische geval dat geldt $\mathbf{v} = \mathbf{v}_L + \mathbf{v}_T$ en ook $\mathbf{v} = \mathbf{v}'_L + \mathbf{v}'_T$. Aftrekken leert dan dat $\mathbf{v}_L - \mathbf{v}'_L = -(\mathbf{v}_T - \mathbf{v}'_T)$. Links staat een longitudinaal veld, rechts een transversaal veld. Deze velden zijn gelijk, zodat we een veld hebben dat zowel longitudinaal als transversaal is. Als dit veld voldoende snel afvalt, dan is het nul. QED.

- Wegens de gevonden uniciteit van de opsplitsing kunnen we de twee termen in (1.3.22) voortaan het *longitudinale deel* en het *transversale deel* van het vectorveld noemen.

- Bijzondere gevallen van de stelling ontstaan als het veld $\mathbf{v}$ irrotationeel of solenoïdaal is. Dan valt direct het transversale, resp. het longitudinale deel weg.

### Fourier-taal

Een op oneindig voldoende snel afvallend scalair veld $\psi(\mathbf{r})$ kan worden gerepresenteerd als een drie-dimensionale Fourier-integraal:

$$\boxed{\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\; \psi(\mathbf{k})} \quad , \tag{1.3.27}$$

met de inverse

$$\boxed{\psi(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r}\; e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\; \psi(\mathbf{r})} \quad . \tag{1.3.28}$$

De hier geïntroduceerde $\psi(\mathbf{k})$ heet de Fourier-getransformeerde van $\psi(\mathbf{r})$. Een vectorveld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ kan op analoge wijze als Fourier-integraal worden geschreven.

Een voorbeeld van een Fourier-representatie is

$$\boxed{\frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\; \frac{1}{k^2}} \quad , \tag{1.3.29}$$

zoals volgt uit (1.3.21) en de standaard Fourier-representatie van de delta-functie

$$\boxed{\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}} \quad . \tag{1.3.30}$$

Voor de integralen in (1.3.23)–(1.3.24) is eenvoudig een Fourier-representatie op te schrijven. Dat komt omdat het *convolutie-integralen* zijn. Een convolutie-integraal heeft de algemene vorm

$$\int d\mathbf{r}'\psi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\phi(\mathbf{r}') \quad , \tag{1.3.31}$$

waar we de functies voor het gemak scalair namen. De Fourier-getransformeerde van zo'n convolutie-integraal is eenvoudig te vinden:

$$\begin{aligned}\int d\mathbf{r}\; e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \int d\mathbf{r}'\psi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\phi(\mathbf{r}') &= \int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\; e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\;\psi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\phi(\mathbf{r}') \\ &= \int d\mathbf{r}'\int d\mathbf{r}''\; e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}\; e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}''}\;\psi(\mathbf{r}'')\,\phi(\mathbf{r}') \\ &= \psi(\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}) \quad . \end{aligned} \tag{1.3.32}$$

De Fourier-getransformeerde van (1.3.22) met (1.3.23)–(1.3.24) is nu eenvoudig te vinden door te bedenken dat de Fourier-getransformeerde van $\nabla$ gegeven wordt door $i\mathbf{k}$. Er komt dan uit het rechterlid van (1.3.22) met (1.3.23)–(1.3.24):

$$-i\mathbf{k}\,\frac{1}{k^2}\,i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{k})+i\mathbf{k}\wedge\left[\frac{1}{k^2}\,i\mathbf{k}\wedge\mathbf{v}(\mathbf{k})\right]=\frac{1}{k^2}\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{k})+\left[\mathbf{v}(\mathbf{k})-\frac{1}{k^2}\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{k})\right] \quad , \tag{1.3.33}$$

of wel

$$\boxed{\mathbf{v}(\mathbf{k})=\frac{1}{k^2}\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{k})+\left[\mathbf{v}(\mathbf{k})-\frac{1}{k^2}\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{k})\right]} \quad . \tag{1.3.34}$$

Dit is een manifeste identiteit. De twee bijdragen zijn blijkbaar de Fourier-getransformeerden van het longitudinale deel en het transversale deel van $\mathbf{v}(\mathbf{r})$:

$$\boxed{\mathbf{v}_L(\mathbf{k})=\frac{1}{k^2}\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{k})} \quad , \tag{1.3.35}$$

$$\boxed{\mathbf{v}_T(\mathbf{k})=(\mathsf{U}-\frac{1}{k^2}\mathbf{k}\mathbf{k})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{k})} \quad , \tag{1.3.36}$$

met $\mathsf{U}$ de eenheidstensor met componenten $\delta_{ij}$. We zien dat in Fourier-taal het longitudinale deel van een veld in de richting van $\mathbf{k}$ staat en het transversale deel er loodrecht op.

## 1.4 Samenvatting van belangrijke resultaten

### Vectoren en tensoren

- Inproduct en uitproduct: IEF(1.10), IEF(1.13–1.14), (1.3.6), (1.3.7)
- Eigenschappen tripel-producten: IEF(1.15–1.17), (1.3.5)
- Transformatie vectoren en tensoren: IEF(1.29–1.32)

### Differentiatie

- Definitie van $\nabla$: (1.3.9), IEF(1.39)
- Definitie gradiënt, divergentie en rotatie: IEF(1.38), IEF(1.40–1.41)
- Differentiatie van producten: (1.3.10)–(1.3.14), afleiding van (1.3.15)
- Tweede afgeleiden: IEF(1.42–1.47)

### Integratie

- Gradiënt-, divergentie- en rotatie-stelling: IEF(1.55–1.57), (1.3.18)–(1.3.20)

### Kromlijnige coördinaten

- Bolcoördinaten: IEF(1.65–1.70), *niet* IEF(1.71–1.73)
- Cylindercoördinaten: IEF(1.74–1.79), *niet* IEF(1.80–1.82)

### Delta-functie

- Definitie delta-functie: IEF(1.86–1.92)
- Eigenschappen delta-functie: IEF(1.94), IEV 1.45
- Drie-dimensionale delta-functie: IEF(1.96–1.98)
- Eigenschap drie-dimensionale delta-functie: (1.3.21)

### Longitudinale en transversale vectorvelden

- Stelling van Helmholtz: (1.3.22)–(1.3.24)
- Fourier-taal: (1.3.27)–(1.3.30), (1.3.34)–(1.3.36)

# Hoofdstuk 2

# Electrostatica

## 2.1 Kernbegrippen

### Electrostatisch veld

Wet van Coulomb. Superpositie-principe. Veld van puntladingen. Veld van continue ladingsverdeling.

### Divergentie en rotatie van electrostatische velden

Wet van Gauss. Veld van configuraties met symmetrie (uniform geladen bol, oneindig lange cylinder met cylindersymmetrische ladingsdichtheid, oneindig vlak met uniforme oppervlakteladingsdichtheid, twee evenwijdige oneindige vlakken met uniforme oppervlakteladingsdichtheid).

### Electrostatische potentiaal

Verband met electrostatisch veld. Vergelijkingen van Poisson en Laplace. Integraalrepresentatie van de potentiaal. Potentiaal van een uniform geladen bolschil. Randcondities aan een geladen oppervlak. Veld en potentiaal in Fourier-taal.

### Kracht, arbeid en energie in de electrostatica

Kracht op een puntlading. Krachtdichtheid op een continue ladingsverdeling. Maxwell-spanningstensor. Arbeid verricht door een bewegende puntlading. Energie van een systeem van puntladingen. Energie van een continue ladingsverdeling.

### Geleiders

Eigenschappen van het veld, de potentiaal en de ladingsdichtheid in aanwezigheid van een ideale geleider. Geïnduceerde ladingen. Kooi van Faraday. Verband tussen oppervlaktelading en electrostatisch veld buiten de geleider. Effectief veld en electrostatische druk. Capaciteit en electrostatische energie van condensatoren.

## 2.2 Notaties

### Vectoren

In hoofdstuk 1 werd al vermeld dat de notatie met een *script* letter $\mathbf{r}$, ter aanduiding van $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, zoals in IEF(2.1), niet zal worden gebruikt. Ook de notatie met een van een dakje voorziene *script* letter $\mathbf{r}$ voor een eenheidsvector zoals in IEF(2.1) zal worden vermeden, omdat er gemakkelijk verwarring kan ontstaan. Bij de addenda zullen een aantal van de formules van IE worden opgeschreven met vermijding van deze verwarrende notatie.

### Ladingen en ladingsdichtheden

De lading van een puntlading $i$ wordt geschreven als $q_i$ of $e_i$. De ladingsdichtheid wordt genoteerd als $\rho(\mathbf{r})$, waarbij het van belang is het argument expliciet te vermelden, als de ladingsdichtheid binnen een integraal optreedt (zie IEF(2.6–2.8)). Evenzo wordt een oppervlakteladingsdichtheid geschreven als $\sigma(\mathbf{r})$ en een lijnladingsdichtheid als $\lambda(\mathbf{r})$.

### Electrostatische potentiaal

Deze zullen we noteren als $\varphi$ of soms ook als $\phi$, niet als $V$. Verwarring met de azimuthale hoek van bol- of cylindercoördinaten is door de context uitgesloten.

### Velden bij oppervlakken

Een vectorveld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ kan in de buurt van een oppervlak $S$ geschreven worden als de som van twee bijdragen, door te kijken naar de oriëntatie van $\mathbf{v}$ ten opzichte van de normaal $\mathbf{n}$ op het oppervlak (een eenheidsvector met een af te spreken conventie over het teken); het dakje dat in IE wordt toegevoegd boven $\mathbf{n}$ gebruiken we niet. Dan is de *loodrechte* bijdrage gegeven door $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\,\mathbf{n}$; een andere veel gebruikte notatie is $\mathbf{v}_n$. Voorts is de *parallelle* bijdrage gegeven door $\mathbf{v}_\parallel = \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\,\mathbf{n}$; een andere veel gebruikte notatie is $\mathbf{v}_t$. (Verwar dit niet met de transversale component $\mathbf{v}_T$). Omdat de loodrechte en parallelle bijdragen aan de twee zijden $(1, 2)$ van het oppervlak verschillend kunnen zijn, voegt men wel een extra index $i = 1, 2$ toe, zowel aan $\mathbf{v}_\perp$ als aan $\mathbf{v}_\parallel$.

### Geleidingsvermogen

Het geleidingsvermogen zal worden genoteerd als $\sigma_g(\mathbf{r})$. In IE wordt het geleidingsvermogen geschreven als $\sigma(\mathbf{r})$, zonder index $g$. Omdat daardoor verwarring kan ontstaan met de oppervlakteladingsdichtheid, zullen we dat hier niet overnemen.

## 2.3 Addenda

### Electrostatisch veld van puntladingen en ladingsverdelingen

De wet van Coulomb en het superpositie-principe leiden tot IEF(2.4) die in een nettere notatie luidt:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{e_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} = -\sum_i \nabla \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}} \quad . \tag{2.3.1}$$

Merk op dat nu goed duidelijk is hoe het electrisch veld afhangt van alle posities van de puntladingen.

Het veld van een continue ladingsverdeling is (ipv. IEF(2.8)) beter te schrijven als:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, \rho(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' = -\int_V \nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, \rho(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'} \quad . \tag{2.3.2}$$

Merk op dat (2.3.1) volgt uit (2.3.2) door invullen van

$$\boxed{\rho(\mathbf{r}) = \sum_i e_i\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)} \quad . \tag{2.3.3}$$

Dit geeft de ladingsdichtheid van een collectie puntladingen.

Als de electrische ladingsdichtheid geconcentreerd is op een oppervlak dan kan men een continue oppervlakteladingsverdeling $\sigma(\mathbf{r})$ introduceren door te kijken naar de lading in een plat cylindervormig volume-element ter plekke $\mathbf{r}$ op het oppervlak, met as loodrecht op het oppervlak. Het volume $d\mathbf{r}'$ van dit element is dan gelijk aan $dS'\, dh'$, met $dS'$ de basis van de cylinder en $dh'$ de hoogte. De oppervlakteladingsdichtheid volgt dan uit de continue ladingsverdeling $\rho(\mathbf{r}')$ door integratie over $dh'$:

$$\boxed{\sigma(\mathbf{r}) = \int dh'\, \rho(\mathbf{r}')} \quad . \tag{2.3.4}$$

Analoog aan (2.3.2) is dan het veld van een continue oppervlakteladingsverdeling te schrijven als (cf. IEF(2.7))

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, \sigma(\mathbf{r}')\, dS' = -\int_S \nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, \sigma(\mathbf{r}')\, dS' \quad , \tag{2.3.5}$$

met $dS' = |d\mathbf{S}'|$.

Evenzo is, voor het geval de ladingsverdeling is geconcentreerd in een dunne draad, een lijnladingsdichtheid in te voeren door te kijken naar de lading in een cylindervormig volume-element ter plekke $\mathbf{r}$ op de draad, met as parallel aan de draad, basis $dS'$, hoogte $dl'$ en volume $d\mathbf{r}' = dS'\, dl'$. De lijnladingsdichtheid volgt dan uit $\rho(\mathbf{r}')$ door integratie over $dS'$:

$$\boxed{\lambda(\mathbf{r}) = \int dS'\, \rho(\mathbf{r}')} \quad . \tag{2.3.6}$$

Analoog aan (2.3.2) is nu het veld van een continue lijnladingsverdeling te schrijven als (cf. IEF(2.6))

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_l \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, \lambda(\mathbf{r}')\, dl' = -\int_l \nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, \lambda(\mathbf{r}')\, dl' \quad , \tag{2.3.7}$$

met $dl' = |d\mathbf{l}'|$.

Het veld van een geladen lijnsegment volgt door uitvoeren van de integraal in (2.3.7), zoals in het eerste Voorbeeld van IE (op IEP63) wordt getoond.

### Divergentie van het veld en de wet van Gauss

In expliciete notatie luidt de divergentie van het veld (2.3.2):

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, \rho(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' = -\int_V \nabla \cdot \nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, \rho(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' \quad , \qquad (2.3.8)$$

(cf. de formule tussen IEF(2.15) en IEF(2.16)). Met de standaard wiskundige formule (1.3.21) volgt dan de *wet van Gauss* (d.i. een der *Maxwell-vergelijkingen*) (cf. IEF(2.14)):

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r})} \quad , \qquad (2.3.9)$$

of in integraalvorm (na toepassing van de divergentiestelling) (cf. IEF(2.13))

$$\boxed{\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q} \quad , \qquad (2.3.10)$$

met $Q$ de omsloten lading. In IEP staan verschillende voorbeelden waar het electrisch veld in een bepaalde situatie wordt bepaald door toepassing van de Gauss-wet in integraalvorm, en gebruikmaken van de symmetrie van het probleem:

- een uniform geladen bol (Voorbeeld 2, IEP70),
- een uniform geladen bolschil (Voorbeeld 6, IEP81),
- een oneindig lange cylinder met cylindersymmetrische ladingsdichtheid (Voorbeeld 3, IEP72),
- een oneindig vlak met uniforme oppervlakteladingsdichtheid (Voorbeeld 4, IEP73),
- twee evenwijdige oneindige vlakken met uniforme oppervlakteladingsdichtheid (Voorbeeld 5, IEP74).

### Rotatie van het veld en de electrostatische potentiaal

Het veld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ van een set puntladingen en van een continue ladingsverdeling is irrotationeel:

$$\boxed{\nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0} \quad , \qquad (2.3.11)$$

of in integraalvorm:

$$\boxed{\oint_l \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 0} \quad , \qquad (2.3.12)$$

(cf. IEF(2.19–2.20)). Het is dus te schrijven als een gradiënt $-\nabla\varphi(\mathbf{r})$ , met $\varphi(\mathbf{r})$ de *electrostatische potentiaal*. Dit is al te zien aan de laatste leden van (2.3.1) en (2.3.2). Uit

(2.3.2) volgt voor de potentiaal van een continue ladingsverdeling de volgende *integraalrepresentatie* (cf. IEF(2.29)):

$$\boxed{\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\ \rho(\mathbf{r}')\ d\mathbf{r}'} \quad . \tag{2.3.13}$$

Het electrostatisch veld is puur longitudinaal. Als we dat gebruiken, dan volgt het electrische veld (2.3.2) ook eenvoudig uit de eerste term van de Helmholtz-stelling (1.3.22) met invullen van (2.3.9), zoals men gemakkelijk nagaat. De potentiaal kan door integratie uit het veld worden gevonden (zie IEF(2.21)).

De wet van Gauss (2.3.9) gaat na invoeren van de electrostatische potentiaal over in de *Poisson-vergelijking* (cf. IEF(2.24)):

$$\boxed{\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r})} \quad . \tag{2.3.14}$$

Als de ladingsdichtheid nul is dan ontstaat hieruit de *Laplace-vergelijking*, met een rechterlid nul (zie IEF(2.25)).

Een voorbeeld van een situatie waarin de electrostatische potentiaal eenvoudig kan worden berekend is een uniform geladen bolschil; de potentiaal wordt op twee manieren berekend in IE, door integratie van het uit de Gauss-stelling verkregen veld (Voorbeeld 6, IEP81), of door directe integratie van de integraal in (2.3.13) (Voorbeeld 7, IEP85).

### Randcondities bij een geladen oppervlak

Bij een oppervlak met een oppervlakteladingsverdeling $\sigma(\mathbf{r})$ is de parallelle bijdrage van het electrisch veld (d.i. parallel aan het oppervlak) continu (zoals volgt uit de rotatiestelling (1.3.20)):

$$\boxed{\mathbf{E}_{\parallel,1}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\parallel,2}(\mathbf{r})} \quad , \tag{2.3.15}$$

met $\mathbf{E}_{\parallel,i}(\mathbf{r})$ de parallelle bijdrage aan de zijde $i$ ter plekke $\mathbf{r}$. De loodrechte bijdrage van het electrisch veld vertoont echter een sprong (zoals volgt uit de divergentiestelling (1.3.19)):

$$\boxed{\mathbf{E}_{\perp,1}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_{\perp,2}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\ \sigma(\mathbf{r})\ \mathbf{n}(\mathbf{r})} \quad , \tag{2.3.16}$$

met $\mathbf{E}_{\perp,i}(\mathbf{r})$ de loodrechte bijdrage van het veld aan de zijde $i$ op de plaats $\mathbf{r}$. De eenheidsvector $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ staat loodrecht op het oppervlak ter plekke $\mathbf{r}$ en wijst van de zijde 2 naar de zijde 1. Optellen van de twee resultaten geeft voor het volledige veld (cf. IEF(2.33)):

$$\boxed{\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})} \quad . \tag{2.3.17}$$

De electrostatische potentiaal is steeds continu aan het oppervlak (zie IEF(2.34)).

### Fourier-taal

Door Fourier-representaties in te voeren, zoals in het vorige hoofdstuk, voor het electrostatische veld, de potentiaal en de ladingsdichtheid vindt men uit de Poisson-vergelijking (2.3.14):

$$k^2\varphi(\mathbf{k}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{k}) \quad , \tag{2.3.18}$$

met de oplossing:

$$\boxed{\varphi(\mathbf{k}) = \frac{1}{\varepsilon_0 k^2}\rho(\mathbf{k})} \quad . \tag{2.3.19}$$

Als we gebruik maken van de convolutiestelling (1.3.32) en de Fourier-representatie van de Coulomb-potentiaal (1.3.29), dan zien we dat hier juist de Fourier-representatie van (2.3.13) staat. Het electrostatisch veld luidt in Fourier-taal:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{k}) = -i\mathbf{k}\varphi(\mathbf{k}) = -\frac{i}{\varepsilon_0 k^2}\mathbf{k}\rho(\mathbf{k})} \quad . \tag{2.3.20}$$

Het longitudinale karakter van het electrostatische veld blijkt opnieuw duidelijk: in Fourier-taal staat het in de richting van $\mathbf{k}$.

### Krachtdichtheid en Maxwell-spanningstensor

De kracht $\mathbf{F}$ op een puntlading wordt gegeven door de Coulomb-kracht IEF(2.1), of voor een collectie puntladingen door IEF(2.3). De krachtdichtheid $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ ter plekke $\mathbf{r}$ uitgeoefend op een ladingsdichtheid $\rho(\mathbf{r})$ luidt analoog:

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})} \quad . \tag{2.3.21}$$

Door gebruik te maken van de wet van Gauss (2.3.9) volgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{r}) &= \varepsilon_0(\nabla\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{E} = \varepsilon_0\nabla\cdot(\mathbf{EE}) - \varepsilon_0\mathbf{E}\cdot(\nabla\mathbf{E}) \\ &= \varepsilon_0\nabla\cdot(\mathbf{EE}) - \varepsilon_0(\nabla\mathbf{E})\cdot\mathbf{E} = \varepsilon_0\nabla\cdot(\mathbf{EE}) - \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\nabla(E^2) \quad , \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

waarbij we voor de overgang van de eerste naar de tweede regel gebruikten dat geldt $\mathbf{E}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{E}) = 0$ of $\mathbf{E}\cdot(\nabla\mathbf{E}) = (\nabla\mathbf{E})\cdot\mathbf{E}$ wegens het irrotationele karakter van $\mathbf{E}$. Nu kan de gradiënt van een scalair $\psi$ ook worden herschreven tot de divergentie van een tensor: $\nabla\psi = \nabla\cdot(\psi\mathsf{U})$. Aldus ontstaat:

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0\nabla\cdot(\mathbf{EE} - \tfrac{1}{2}E^2\mathsf{U}) = \nabla\cdot\mathsf{T}} \quad , \tag{2.3.23}$$

met de *Maxwell-spanningstensor*

$$\boxed{\mathsf{T} = \varepsilon_0(\mathbf{EE} - \tfrac{1}{2}E^2\mathsf{U})} \quad , \tag{2.3.24}$$

waarbij de eerste term de tensor $\mathbf{EE}$ bevat. De spanningstensor kan worden geïnterpreteerd als een anisotrope 'elastische' spanning in het vacuum. Later zal de spanningstensor worden gegeneraliseerd voor niet-statische velden (zie IEP352).

### Arbeid en energie

De arbeid $W$ verricht op een puntlading $e$ om die tegen een uitwendig electrostatisch veld (beschreven door een potentiaal $\varphi(\mathbf{r})$) in te verplaatsen van $\mathbf{r}_0$ naar $\mathbf{r}$ volgt door integratie; het resultaat is (cf. IEP91 boven IEF(2.38)):

$$W = e[\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0)] \quad . \tag{2.3.25}$$

Evenzo is de arbeid die moet worden verricht om een collectie van puntladingen $e_i$ (met $i = 1, \ldots n$) uit het oneindige naar posities $\mathbf{r}_i$ te brengen te berekenen door successievelijk de configuratie op te bouwen (IEP92). Het resultaat is IEF(2.40–2.41), of in meer expliciete notatie:

$$\boxed{W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j>i}^{n} \frac{e_i e_j}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{e_i e_j}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}} \quad . \tag{2.3.26}$$

We kunnen dit beschouwen als de (potentiële) electrostatische energie van de ladingsverdeling.

De arbeid die nodig is om een continue ladingsverdeling op te bouwen (ofwel de electrostatische energie van die ladingsverdeling) is analoog:

$$\boxed{W = \tfrac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \, \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}} \quad . \tag{2.3.27}$$

De 'zelfenergie' voor $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ is hierbij meegerekend, maar deze is voor een continue ladingsverdeling te verwaarlozen. Merk echter op dat we een oneindige zelfenergie vinden, als we proberen uit (2.3.27) weer (2.3.26) terug te vinden door in te vullen $\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} e_i \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$; dat is dus niet geoorloofd: (2.3.27) geldt niet voor singuliere ladingsverdelingen.

Een andere vorm voor de electrostatische energie (2.3.27) ontstaat door een der ladingsdichtheden om te schrijven (zie IEP93) met de Gauss-stelling (2.3.9), de vectorregel (1.3.12), de divergentie-stelling (1.3.19) en de uitdrukking (2.3.2) voor het veld van een continue ladingsverdeling. Het resultaat is (cf. IEF(2.45)):

$$\boxed{W = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \int d\mathbf{r} \, [\mathbf{E}(\mathbf{r})]^2} \quad . \tag{2.3.28}$$

Ook deze uitdrukking geldt *niet* als het veld is veroorzaakt door puntladingen, omdat er dan een oneindige zelfenergie wordt meegerekend. De energie kan worden geschreven als een integraal over een energiedichtheid $W(\mathbf{r})$, die luidt:

$$W(\mathbf{r}) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \, [\mathbf{E}(\mathbf{r})]^2 \quad . \tag{2.3.29}$$

Een voorbeeld van een berekening van $W$ is gegeven op IEP94 (Voorbeeld 8), waar de energie van een uniform geladen bolschil, met oppervlakteladingsdichtheid $\sigma$ en dus lading $4\pi R^2\sigma$, op twee manieren wordt berekend.

### Ideale geleiders

In een geleider geldt de wet van Ohm:

$$\boxed{\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma_g(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})} \quad , \tag{2.3.30}$$

met $\sigma_g(\mathbf{r})$ het geleidingsvermogen, dat van de plaats $\mathbf{r}$ kan afhangen. Dit geleidingsvermogen moet *niet* verward worden met de oppervlakteladingsdichtheid $\sigma(\mathbf{r})$. In een *ideale* geleider is $\sigma_g$ oneindig. Dan volgen de eigenschappen:

- het veld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ is nul binnen in de geleider, wegens (2.3.30);
- de potentiaal $\varphi(\mathbf{r})$ is constant binnen in de geleider, omdat het veld 0 is;
- de ladingsdichtheid $\rho(\mathbf{r})$ is nul binnen in de geleider, wegens de Gauss-wet (2.3.9);
- als de geleider geladen is, met totale lading $Q$, dan moet de lading aan het oppervlak zijn geconcentreerd, met een zekere oppervlakteladingsdichtheid $\sigma(\mathbf{r})$ die uiteraard voldoet aan $\int_S dS\ \sigma(\mathbf{r}) = Q$; de verdeling van deze oppervlaktelading gebeurt zodanig dat overal langs het oppervlak de resulterende potentiaal constant is:

$$\int dS'\ \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \text{constant over oppervlak} \quad ; \tag{2.3.31}$$

- als de geleider geladen is dan is net buiten de geleider een electrisch veld aanwezig, dat loodrecht op het oppervlak staat (omdat de potentiaal constant is langs het oppervlak); dit veld hangt wegens (2.3.17) samen met de oppervlakteladingsdichtheid volgens:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})} \quad ; \tag{2.3.32}$$

- als er bovendien een extern electrisch veld aanwezig is, dan wordt de lading herverdeeld; zo'n door een externe potentiaal gewijzigde oppervlakteladingsverdeling heet *geïnduceerd*; de herverdeling gebeurt zodanig dat de totale potentiaal (de som van de externe potentiaal $\varphi_e$ en de potentiaal tengevolge van de oppervlakteladingsdichtheid zelf) constant is:

$$\int dS'\ \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \varphi_e(\mathbf{r}) = \text{constant over oppervlak} \quad . \tag{2.3.33}$$

  Men kan bewijzen dat de verdeling van de lading aan het oppervlak met een constante potentiaal juist díe verdeling is die de laagste electrostatische energie heeft.

Voorbeelden van de bepaling van velden in aanwezigheid van geleiders met holtes er in worden gegeven op IEP99 (Voorbeeld 9) en IEP101 (de Faraday-kooi).

Het electrische veld net buiten een geladen geleider oefent een kracht uit op de oppervlakteladingen. Het effectieve veld $\mathbf{E}_{eff}(\mathbf{r})$ dat door de oppervlakteladingen ter plekke $\mathbf{r}$ wordt gevoeld is *niet* het veld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ juist buiten de geleider, maar het gemiddelde van het veld binnen (dat is nul) en het veld buiten:

$$\mathbf{E}_{eff}(\mathbf{r}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r}) \quad . \tag{2.3.34}$$

De krachtdichtheid per eenheid van oppervlak luidt dan:

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}_{eff}(\mathbf{r}) = \tfrac{1}{2}\ \frac{1}{\varepsilon_0}[\sigma(\mathbf{r})]^2\mathbf{n}(\mathbf{r})} \quad . \tag{2.3.35}$$

Merk op dat $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ hier staat voor een kracht per oppervlakte-eenheid, anders dan in (2.3.21)–(2.3.23), waar een kracht per volume-eenheid is opgeschreven! De in (2.3.35) gegeven kracht per oppervlakte-eenheid is zoiets als een hydrostatische druk, alleen met het andere teken, want de krachten willen de geleider uit elkaar trekken, en juist niet samendrukken. Men spreekt wel van een (negatieve) electrostatische druk of een *electrostatische spanning* (vergelijk de Maxwell-spanningstensor).

Berekeningen van velden en potentialen in aanwezigheid van geladen geleiders zijn van belang voor de bepaling van de *capaciteit* van condensatoren, en van de electrostatische energie van zulke condensatoren, zie IEP103–106.

## 2.4 Samenvatting van belangrijke resultaten

### Electrostatisch veld

- Wet van Coulomb: IEF(2.1)
- Veld van puntladingen: (2.3.1)
- Ladingsdichtheid van collectie puntladingen: (2.3.3)
- Veld van continue ladingsverdeling: (2.3.2)

### Divergentie en rotatie van electrostatische velden

- Wet van Gauss: (2.3.9), (2.3.10)
- Irrotationeel karakter van veld: (2.3.11), (2.3.12)

### Electrostatische potentiaal

- Verband met electrostatisch veld: IEF(2.21–2.23)
- Vergelijkingen van Poisson en Laplace: (2.3.14), IEF(2.24–2.25)
- Integraalrepresentatie: (2.3.13)

### Randcondities

- Randcondities van parallelle en loodrechte bijdragen: (2.3.15)–(2.3.17)
- Continuïteit van de potentiaal: IEF(2.34)

### Fourier-taal

- Potentiaal in Fourier-taal: (2.3.19)
- Verband tussen veld en potentiaal: (2.3.20)

### Kracht, arbeid en energie

- Krachtdichtheid in electrostatisch veld: (2.3.21), (2.3.23)
- Maxwell-spanningstensor: (2.3.24)
- Electrostatische energie van een collectie puntladingen: (2.3.26)
- Electrostatische energie van een continue ladingsverdeling: (2.3.27)–(2.3.28)

### Ideale geleiders

- Wet van Ohm: (2.3.30)
- Veld net buiten geleider: (2.3.32)
- Krachtdichtheid aan oppervlak van geleider: (2.3.35)

# Hoofdstuk 3

# Berekening van de electrostatische potentiaal

## 3.1 Kernbegrippen

### Eigenschappen van de Laplace-vergelijking

Middelingsstelling voor de Laplace-vergelijking. Afwezigheid van locale extremen. Uniciteitsstellingen voor potentiaal.

### Spiegelbeeldladingen

Oplossingen van de Poisson-vergelijking voor een puntlading in aanwezigheid van een geaarde geleidende plaat of een geaarde geleidende bol.

### Scheiding van variabelen

Oplossing van de Laplace-vergelijking door scheiding van variabelen in cartesische coördinaten of in bolcoördinaten. Eigenschappen van de Fourier-sinusreeks. Orthogonaliteit en volledigheid van de sinusfuncties. Eigenschappen van de Legendre-polynomen. Voorbeelden van potentiaalproblemen die door scheiding van variabelen kunnen worden opgelost.

### Multipool-ontwikkkeling

Cartesische en sferische multipool-ontwikkeling. Legendre-ontwikkeling voor de Coulombpotentiaal. Dipoolmoment en quadrupoolmoment voor puntladingen en continue ladingsverdelingen. Veld van een dipool.

## 3.2 Addenda

### Eigenschappen van Laplace-vergelijking en Poisson-vergelijking

De middelingsstelling voor de Laplace-vergelijking is te schrijven als (cf. IEP114):

$$\boxed{\varphi(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\int_S dS\ \phi(\mathbf{r})} \quad , \tag{3.2.1}$$

met $S$ een bol-oppervlak met straal $R$ om $\mathbf{r}_0$. Het rechterlid is blijkbaar *onafhankelijk* van $R$. Een iets andere formulering van de middelingsstelling geeft de potentiaal als een gemiddelde over alle richtingen vanuit $\mathbf{r}_0$:

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega d\Omega\ \phi(\mathbf{r}_0 + \mathbf{n}R) \quad . \tag{3.2.2}$$

Hierbij is $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ een eenheidsvector wijzend in de richting bepaald door de bolcoördinaathoeken $\theta, \varphi$. Het ruimtehoek-element is $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$. De integratie vindt plaats over de gehele ruimtehoek $4\pi$.

Het bewijs, zoals gegeven in IEP114, maakt gebruik van het superpositie-principe. Een iets ander bewijs gaat als volgt. Kies het middelpunt van de bol als oorsprong van het coördinatenstelsel. Beschouw nu de volgende identiteit:

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\left[\varphi\left(\nabla\frac{1}{4\pi r}\right) - \frac{1}{4\pi r}\nabla\varphi + \frac{1}{4\pi R}\nabla\varphi\right] = \\ &= \varphi\,\Delta\frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi + \frac{1}{4\pi R}\Delta\varphi = -\varphi\,\delta(\mathbf{r}) \quad , \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

waar we (1.3.21) gebruikten. Integreer nu het eerste en het derde lid over de bol. Uit het eerste lid komt dan met Gauss een integraal over het oppervlak van de bol:

$$\begin{aligned} &\int_S d\mathbf{S}\cdot\left(\nabla\frac{1}{4\pi r}\right)\varphi - \int_S d\mathbf{S}\cdot(\nabla\varphi)\frac{1}{4\pi r} + \int_S d\mathbf{S}\cdot(\nabla\varphi)\frac{1}{4\pi R} = \\ &= -\int_S dS\,\mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3}\ \varphi = -\int_S dS\,\frac{1}{4\pi R^2}\ \varphi = -\frac{1}{4\pi}\int d\Omega\ \varphi \quad . \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Uit het derde lid van (3.2.3) komt na integratie over de bol direct $-\varphi(0)$. Daarmee is het bewijs compleet.

De afwezigheid van locale extrema in de potentiaal volgt onmiddellijk uit de middelingsstelling.

Volgens de zogenaamde *eerste uniciteitsstelling* is de potentiaal in een gebied zonder ladingen geheel bepaald door de waarden op de rand van het gebied. Het bewijs verloopt 'uit het ongerijmde': het bestaan van twee verschillende oplossingen leidt tot een tegenspraak met de middelingsstelling (zie IEP116). Ook bij een *vaste* gegeven ladingsverdeling in het gebied is de potentiaal geheel bepaald door de waarden op de rand van het gebied.

Als er ook geladen ideale geleiders in het gebied zijn, dan geldt de bovenstaande stelling niet zonder meer omdat de ladingsverdeling nu *niet* vast is. De ladingen op die geleiders kunnen immers vrijelijk bewegen over het oppervlak van de geleiders; wel is de totale lading op elk der geleiders nu vast. Als de ruimte tussen de geleiders leeg is, dan is volgens de *tweede uniciteitsstelling* bij gegeven totale lading op elk der geleiders de potentiaal opnieuw geheel bepaald door de waarden op de rand. De stelling blijft juist als er tevens een vaste ladingsverdeling tussen de geleiders aanwezig is. Het bewijs is weer een bewijs uit het ongerijmde (zie IEP 118).

De stellingen zijn hier geformuleerd voor een eindig gebied, met een rand waarover de waarde van de potentiaal wordt gegeven. Een bijzondere vorm van de stellingen ontstaat als het gebied oneindig groot wordt. De rand gaat dan naar oneindig. De potentiaal op deze oneindig verre rand kan altijd gelijk aan 0 worden gekozen.

### Oplossingen van de Laplace- en de Poisson-vergelijking

Het belang van de uniciteitsstellingen schuilt in het feit dat het vinden van een potentiaal bij gegeven randwaarden er door wordt vereenvoudigd: als op een of andere manier (bij voorbeeld door een 'educated guess') een oplossing wordt gevonden, dan hoeft men niet verder te zoeken, er is er immers maar één.

Naast het gissen van een oplossing voor een potentiaalprobleem zijn er verschillende meer systematische manieren, die alle op een of andere manier een symmetrie in het probleem gebruiken:

- gebruik van de stelling van Gauss voor het veld (voorbeelden hiervan zijn al eerder gegeven);
- de methode van de spiegelbeeldladingen, die zeer specifiek is voor het oplossen van de Poisson-vergelijking;
- de methode van de 'scheiding van variabelen'; dit is een algemene methode voor het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen, die in het bijzonder ook kan worden gebruikt voor de Laplace-vergelijking.

### Spiegelbeeldladingen

De potentiaal binnen een gebied in de drie-dimensionale ruimte, bij gegeven ladingsverdeling en gegeven waarde van de potentiaal over de rand van het gebied, kan soms – als het gebied een eenvoudige vorm heeft, en de ladingsverdeling eenvoudig is – worden gevonden door fictieve hulpladingen te introduceren op posities die gespiegeld zijn t.o.v. de posities van de echte fysische ladingen. Belangrijk is dat de hulpladingen zich bevinden buiten het gebied waarin de potentiaal moet worden bepaald, en dat zowel de grootte van de hulpladingen als ook hun positie correct moet worden gekozen. Voorbeelden van situaties waarin deze methode werkt zijn:

- een puntlading tegenover een oneindige vlakke geleidende plaat met een constante potentiaal, die 0 kan worden gekozen (IEP121): de hulplading is tegengesteld aan die van de puntlading en bevindt zich op de gespiegelde positie t.o.v. de plaat;
- een ladingsverdeling tegenover een oneindige vlakke geleidende plaat met een constante potentiaal (IEP124): dit is een generalisatie van het vorige voorbeeld wegens het superpositie-principe;

- een puntlading tegenover een geleidende bol met een constante potentiaal (IEP124): zowel de plaats als de grootte van de hulplading moet nu wat subtieler worden gekozen.

Als de potentiaal bekend is dan volgt ook het veld, en met de randconditie (2.3.32) ook de oppervlakteladingsdichtheid van de geleider.

### Scheiding van variabelen

Deze methode voor het oplossen van de Laplace-vergelijking met randconditie kan worden gebruikt als de rand eenvoudig is te parametriseren in een geschikt te kiezen coördinatenstelsel. Het coördinaatstelsel hoeft niet cartesisch te zijn, ook bolcoördinaten of cylindercoördinaten kunnen worden gebruikt. (Naast de drie genoemde coördinaatstelsels kunnen nog acht meer exotische stelsels tot een oplossing leiden, die worden hier niet bekeken.) De potentiaal wordt geschreven als een product van drie factoren, elk afhankelijk van slechts één variabele. De Laplace-vergelijking leidt dan tot gewone differentiaalvergelijkingen voor die factoren. De algemene oplossingen van die differentiaalvergelijkingen bevatten nog aan te passen constanten. Door lineaire combinaties te nemen van producten van factoren met verschillende waarden voor de constanten wordt vervolgens gezorgd dat aan de randcondities wordt voldaan. Voorbeelden zijn:

- de potentiaal binnen een oneindig U-vormig gebied, met een gespecificeerde potentiaal op de randen (Voorbeeld 3, IEP127);

- de potentiaal binnen een oneindige rechthoekige pijp, opnieuw met een gespecificeerde potentiaal op de randen (Voorbeeld 4, IEP132);

- de potentiaal binnen een aan één zijde afgesloten rechthoekige pijp, met bekende potentiaal op de randen (Voorbeeld 5, IEP134);

- de potentiaal binnen een holle bol, met bekende potentiaal op het oppervlak (Voorbeeld 6, IEP139);

- de potentiaal buiten een holle bol, opnieuw met bekende potentiaal op het oppervlak (Voorbeeld 7, IEP140);

- de potentiaal buiten een ongeladen ideaal-geleidende bol in een uniform electrisch veld (Voorbeeld 8, IEP141);

- de potentiaal buiten een niet-geleidende bol met een gegeven oppervlakteladingsverdeling (Voorbeeld 9, IEP142).

Bij de eerste drie problemen is er een rechthoekige symmetrie in het systeem. De rand van het gebied is eenvoudig op te schrijven bij gebruik van cartesische coördinaten. De Laplaciaan is dan eenvoudig. Na factoriseren van de potentiaal leiden de differentiaalvergelijkingen voor de factoren tot staande golven, of exponentiaalfuncties (zie IEF(3.28), IEF(3.41) of IEF(3.47)). De aanpassing aan de randconditie vindt plaats door een geschikte superpositie te nemen, met coëfficiënten die worden bepaald door de orthogonaliteitsrelatie IEF(3.33).

De laatste vier problemen hebben een bolsymmetrie, en daar kunnen beter bolcoördinaten worden gebruikt. Dan moet allereerst de Laplaciaan in de nieuwe coördinaten worden omgeschreven (zie IEF(3.53) of IEF(3.54). De oplossingen voor de radiële vergelijkingen zijn nu eenvoudige machten van $r$ (zie IEF(3.59)). Als er *azimuthale symmetrie* is (de randconditie over de bol hangt niet af van de azimuthale hoek $\varphi$, alleen van $\theta$), dan leidt de vergelijking voor het hoekafhankelijke deel tot Legendre-polynomen $P_\ell(\cos\theta)$ . De algemene vorm voor de potentiaal is nu een superpositie van oplossingen met verschillende waarden van $\ell$, zie IEF(3.65). De orthogonaliteitsrelatie IEF(3.68) voor de Legendre-polynomen kan dan worden gebruikt om de coëfficiënten in de expansie te bepalen.

## Cartesische multipool-ontwikkeling

De electrostatische potentiaal ver buiten een gelocaliseerde ladingsverdeling kan worden geschreven als een reeks van termen, die elk de bijdrage van een zogenaamde *electrostatische multipool* geven. Dit kan gebeuren in cartesische coördinaten of in bolcoördinaten. In IE wordt alleen de tweede manier uitgelegd, maar de eerste methode, met gebruik van cartesische coördinaten, is wiskundig eenvoudiger, en zal daarom hier eerst worden bekeken.

Neem een collectie puntladingen $e_i$, met posities $\mathbf{r}_i$. Kies een positie $\mathbf{r}_0$ ergens tussen de puntladingen. Bekijk nu de potentiaal ver buiten de ladingsverdeling, d.w.z. op een plaats $\mathbf{r}$ zodanig dat de afstand $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|$ groter is dan elk van de afstanden $|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0|$. De potentiaal kan dan worden ontwikkeld in een (drie-dimensionale) Taylor-reeks:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}|} \\ &= \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|}+(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0)\cdot\nabla_0\frac{1}{|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|}\right. \\ &\qquad \left.+\tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0):\nabla_0\nabla_0\frac{1}{|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|}+\ldots\right] \quad . \qquad (3.2.5)\end{aligned}$$

Hierbij staat $\nabla_0$ voor de afgeleide $\partial/\partial\mathbf{r}_0$ naar $\mathbf{r}_0$. Het symbool : staat voor een dubbele contractie: de twee vectoren links worden gecontraheerd met de twee vectoren rechts.

De reeks in (3.2.5) kan verkort worden opgeschreven door naast de totale lading $Q=\sum_i e_i$ van de collectie puntladingen ook hun *cartesische multipoolmomenten* in te voeren, namelijk het dipoolmoment (een vector):

$$\boxed{\mathbf{p}=\sum_i e_i(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0)} \quad , \qquad (3.2.6)$$

het quadrupoolmoment (een tensor met twee indices):

$$\boxed{\mathbf{q}=\tfrac{1}{2}\sum_i e_i(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0)} \quad , \qquad (3.2.7)$$

en zo voorts. (De totale lading wordt wel de electrostatische monopool van de configuratie genoemd.) De Taylor-reeks wordt dan de *cartesische multipool-ontwikkeling*:

$$\boxed{\varphi(\mathbf{r})=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|}-\mathbf{p}\cdot\nabla\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|}+\mathbf{q}:\nabla\nabla\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|}+\ldots} \quad , \qquad (3.2.8)$$

waarbij we gebruikten dat $\nabla_0 = -\nabla$ als de differentiaal-operator werkt op een functie van het verschil $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$.

*Opmerking 1:* Wegens de eigenschap (1.3.21) is $\mathsf{U} : \nabla\nabla[1/(4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|)]$ gelijk aan 0 voor $\mathbf{r}_0$ verschillend van $\mathbf{r}$. Daarom kan men in de quadrupoolterm van (3.2.8) het quadrupoolmoment $\mathsf{q}$ vervangen door het *spoorloze quadrupoolmoment*:

$$\mathsf{q}' = \tfrac{1}{2}\sum_i e_i \left[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) - \tfrac{1}{3}|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|^2\, \mathsf{U}\right] \quad . \tag{3.2.9}$$

Het spoor van de tensor in het rechterlid is inderdaad nul.

*Opmerking 2:* De multipoolmomenten hangen in het algemeen af van de keus van $\mathbf{r}_0$. Echter, Voor $Q = 0$ hangt het dipoolmoment niet af van $\mathbf{r}_0$, het dipoolmoment is dan invariant.

*Opmerking 3:* Voor een continue ladingsverdeling, die in de ruimte begrensd is, zijn de cartesische multipolen analoog te definiëren. Naast de monopool $Q = \int d\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')$ heeft men dan:

$$\boxed{\mathbf{p} = \int d\mathbf{r}'\ (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)\ \rho(\mathbf{r}')} \quad . \tag{3.2.10}$$

Dit is dezelfde uitdrukking als in IEF(3.98), als de oorsprong van het coördinatenstelsel in $\mathbf{r}_0$ wordt gelegd. Voorts vindt men voor de quadrupoolmomenten:

$$\boxed{\mathsf{q} = \tfrac{1}{2}\int d\mathbf{r}'\ (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)\ \rho(\mathbf{r}')} \quad , \tag{3.2.11}$$

$$\mathsf{q}' = \tfrac{1}{2}\int d\mathbf{r}'\ \left[(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) - \tfrac{1}{3}|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|^2\mathsf{U}\right]\ \rho(\mathbf{r}') \quad . \tag{3.2.12}$$

De convergentie van de multipool-ontwikkeling (3.2.8) is verzekerd, als $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ groter is dan het maximum van $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|$ voor alle punten $\mathbf{r}'$ van de (ruimtelijk begrensde) ladingsverdeling.

*Opmerking 4:* Uit de potentiaal volgt op de gebruikelijke wijze het veld. Voor de dipoolbijdrage vindt men bij voorbeeld:

$$\boxed{\mathbf{p}\cdot\nabla\nabla\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|}} \quad . \tag{3.2.13}$$

Dit is equivalent met IEF(3.103) of IEF(3.104), als de oorsprong van het coördinatenstelsel in $\mathbf{r}_0 = 0$ wordt gelegd. Het dipoolveld valt voor grote $r$ evenredig met $r^{-3}$ af. Evenzo valt de quadrupoolbijdrage tot het veld evenredig met $r^{-4}$ af.

## Sferische multipool-ontwikkeling

Naast de cartesische multipool-ontwikkeling kan men ook een multipool-ontwikkeling afleiden met gebruik van bolcoördinaten. Men kan namelijk de zogenaamde *Legendre-ontwikkeling* voor de Coulomb-potentiaal bewijzen (cf. IEF(3.94)):

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}}\ P_\ell(\cos\chi)} \quad , \tag{3.2.14}$$

voor $r > r'$ en met $\chi$ de hoek tussen $\mathbf{r}$ en $\mathbf{r}'$. Het bewijs kan veel eleganter worden gegeven dan in IEP148, waar de eerste paar termen nogal moeizaam worden afgeleid. Immers, kies de $z$-as van een bolcoördinatenstelsel in de richting van $\mathbf{r}'$. De poolhoek is dan $\chi$. Het linkerlid, gezien als functie van $\mathbf{r}$ bij vaste $\mathbf{r}'$, is nu onafhankelijk van de azimuthale hoek van $\mathbf{r}$. Bovendien is dit linkerlid een oplossing van de Laplace-vergelijking in het gebied $r > r'$, en gaat het naar 0 voor grote $r$. Dan moet het van de vorm zijn van IEF(3.65), met alle $A_\ell$ gelijk aan nul, en met $B_\ell$ functies van $r'$:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell(r')}{r^{\ell+1}}\, P_\ell(\cos\chi) \quad , \tag{3.2.15}$$

voor alle $r > r'$. Ter bepaling van $B_\ell(r')$ kiezen we nu eens $\chi = 0$. Volgens IEF(3.63) komt er dan (steeds is $r > r'$)

$$\frac{1}{r-r'} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell(r')}{r^{\ell+1}} \quad . \tag{3.2.16}$$

Anderzijds is het linkerlid eenvoudig als een meetkundige reeks te schrijven:

$$\frac{1}{r-r'} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{1-r'/r} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} \quad . \tag{3.2.17}$$

Vergelijken geeft de coëfficiënten $B_\ell(r')$, en daarmee is (3.2.14) bewezen.

Als we de Legendre-ontwikkeling (3.2.14) gebruiken in de uitdrukking voor de potentiaal van een collectie puntladingen, dan vinden we de *sferische multipool-ontwikkeling*:

$$\boxed{\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0|^\ell}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^{\ell+1}}\, P_\ell(\cos\chi_i)} \quad , \tag{3.2.18}$$

mits is voldaan aan $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| > |\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0|$ voor alle $i$. Hierbij is $\chi_i$ de hoek tussen $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ en $\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0$. Deze hoek kan worden uitgedrukt in de poolhoeken van $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ (nl. $\theta, \varphi$) en van $\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0$ (nl. $\theta_i, \varphi_i$):

$$\cos\chi_i = \cos\theta\ \cos\theta_i + \sin\theta\ \sin\theta_i\ \cos(\varphi-\varphi_i) \quad . \tag{3.2.19}$$

Voor een continue ladingsverdeling, die in de ruimte begrensd is, vindt men de sferische multipool-ontwikkeling (cf. IEF(3.95)):

$$\boxed{\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^{\ell+1}} \int d\mathbf{r}'\ |\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0|^\ell\ P_\ell(\cos\chi)\ \rho(\mathbf{r}')} \quad . \tag{3.2.20}$$

Hierbij is nu $\chi$ de hoek tussen $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ en $\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0$, en dus afhankelijk van $\mathbf{r}'$. Juist zoals bij de cartesische multipool-ontwikkeling is de convergentie van de reeks verzekerd als $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|$ groter is dan het maximum van $|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0|$ voor alle punten $\mathbf{r}'$ van de (ruimtelijk begrensde) ladingsverdeling.

*Opmerking:* Men controleert gemakkelijk dat de monopool- en de dipoolbijdragen van (3.2.8) en (3.2.18) overeenstemmen. Voor de dipoolbijdrage moet men gebruiken dat geldt: $|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0|\cos\chi_i = (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0)/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|$.

## 3.3 Samenvatting van belangrijke resultaten

### Eigenschappen van de Laplace-vergelijking

- Middelingsstelling: (3.2.1), IEP114
- Afwezigheid van extremen in oplossingen: IEP114

### Oplossingen van de Laplace- en de Poisson-vergelijking

- Uniciteitsstellingen: IEP116, IEP118

### Scheiding van variabelen

- Orthogonaliteit van Fourier-sinusfuncties: IEF(3.33)
- Rodrigues-formule voor Legendre-polynomen: IEF(3.62)
- Expliciete uitdrukkingen voor de Legendre-polynomen met $\ell = 0, 1, 2$: IEP138
- Normering Legendre-polynomen: IEF(3.63)
- Orthogonaliteit Legendre-polynomen: IEF(3.68)
- Algemene oplossing Laplace-vergelijking in bolcoördinaten: IEF(3.65)

### Multipool-ontwikkelingen

- Cartesische multipoolmomenten: (3.2.6)–(3.2.7), (3.2.10)–(3.2.11)
- Cartesische multipool-ontwikkeling: (3.2.8)
- Veld van een dipool: (3.2.13)
- Legendre-ontwikkeling: (3.2.14)
- Sferische multipool-ontwikkeling: (3.2.18), (3.2.20)

# Hoofdstuk 4

# Electrische velden in polariseerbare materie

## 4.1 Kernbegrippen

### Polarisatie

Geïnduceerde en polaire moleculen. Polariseerbaarheid. Polarisatie van diëlectrica.

### Electrisch veld tengevolge van polarisatie

Gebonden ladingen. Effectieve ladingsdichtheid en oppervlakteladingsdichtheid. Veld in een diëlectricum. Veld van uniform gepolariseerde bol.

### Diëlectrische verplaatsing

Wet van Gauss in aanwezigheid van een diëlectricum. Randcondities aan oppervlak van diëlectricum.

### Lineaire diëlectrica

Permeabiliteit en susceptibiliteit. Diëlectrische constante. Diëlectrische bol in uniform electrisch veld. Wet van Clausius-Mossotti voor geïnduceerde dipolen.

### Krachten, momenten van krachten en energie

Krachten en moment van krachten op dipool in extern veld. Kracht op diëlectricum in extern veld. Energie in aanwezigheid van diëlectricum.

## 4.2 Notaties

### Dichtheid

De moleculaire dichtheid, d.i. het aantal moleculen per eenheid van volume, zullen we aangeven door $n$, niet door $N$ zoals in IE. Het symbool $N$ geeft het aantal moleculen in een systeem aan. Als het volume $V$ is en de dichtheid is uniform dan is $n = N/V$.

## 4.3 Addenda

### Electrisch veld tengevolge van de polarisatie in een diëlectricum

In gepolariseerde materie zijn op microscopische schaal vele electrische dipolen aanwezig. Deze geven aanleiding tot een macroscopische dipooldichtheid of polarisatie $\mathbf{P}(\mathbf{r})$. De potentiaal die wordt gegenereerd door een collectie dipolen luidt (zie (3.2.8)):

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|} \quad . \tag{4.3.1}$$

De potentiaal tengevolge van een continue polarisatie binnen een volume $V$ is analoog:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\int_V d\mathbf{r}'\, \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad . \tag{4.3.2}$$

We kunnen deze uitdrukking nu gaan omvormen op de manier van IEP167-8. Wegens de wat verwarrende notatie daar (met niet goed aangegeven afhankelijkheid van de verschillende positie-variabelen) schrijven we die omvorming hier opnieuw op.

Allereerst is het nuttig de $\nabla$-operator te vervangen door $-\nabla'$ (d.i. een differentiatie naar $\mathbf{r}'$):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V d\mathbf{r}'\, \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad . \tag{4.3.3}$$

Vervolgens gebruiken we de vectorregel (1.3.12) en daarna de divergentiestelling (1.3.19):

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \int_V d\mathbf{r}' \left\{ \nabla' \cdot \left[ \mathbf{P}(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right] - [\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')] \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right\} \\ &= \int_S dS'\, \mathbf{n}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \int_V d\mathbf{r}'\; [\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')] \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad , \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

met $\mathbf{n}(\mathbf{r}')$ de naar buiten wijzende normaal op het oppervlak $S$ ter plekke $\mathbf{r}'$. Dit is de som van twee bijdragen:

- een potentiaal zoals in (2.3.5), door een *effectieve oppervlakteladingsverdeling*:

$$\boxed{\sigma_b(\mathbf{r}) = \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})} \quad , \tag{4.3.5}$$

- een potentiaal zoals in (2.3.2), door een *effectieve ruimtelijke ladingsverdeling*:

$$\boxed{\rho_b(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})} \quad . \tag{4.3.6}$$

Met gebruikmaken van deze afkortingen wordt de potentiaal tenslotte:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_S dS' \sigma_b(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} + \int_V d\mathbf{r}' \ \rho_b(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad . \tag{4.3.7}$$

We hebben hiermee IEF(4.11–4.13) teruggevonden. Het electrische veld luidt:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \int_S dS' \ \sigma_b(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \nabla \int_V d\mathbf{r}' \ \rho_b(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}} \quad . \tag{4.3.8}$$

Als de polarisatie $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ uniform is binnen $V$, dan wordt het veld geheel bepaald door de oppervlakteladingsverdeling (4.3.5). Dit is onder meer het geval in Voorbeeld 2 op IEP168, waar het veld gegenereerd door een uniform gepolariseerde bol wordt berekend. Buiten de bol vindt men hetzelfde veld als van één grote dipool in het middelpunt van de bol. Binnen de bol blijkt het veld uniform te zijn, met de waarde $\mathbf{E} = -\mathbf{P}/(3\varepsilon_0)$ (zie IEF(4.14)).

Voor een punt $\mathbf{r}$ buiten $V$ is de interpretatie van het electrische veld (4.3.8) eenvoudig. Voor een punt binnen $V$, dus in de polariseerbare materie gelegen, is de interpretatie wat subtieler. De uitdrukking (4.3.8) geeft dan nog steeds het electrische veld, mits dit veld wordt geïnterpreteerd als het ruimtelijk gemiddelde van het microscopische veld dat tussen de microscopische deeltjes heerst (zie IEP173-175).

### Diëlectrische verplaatsing

De divergentie van het electrische veld (4.3.8) luidt:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\Delta \int_S dS' \ \sigma_b(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \Delta \int_V d\mathbf{r}' \ \rho_b(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_S dS' \ \sigma_b(\mathbf{r}') \ \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d\mathbf{r}' \ \rho_b(\mathbf{r}') \ \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad , \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

waar we (1.3.21) gebruikten. De integralen kunnen eenvoudig worden uitgevoerd. Als $\mathbf{r}$ niet precies op de rand ligt, dan blijft alleen de tweede bijdrage over. Er komt dan voor het veld gegenereerd door de polarisatie van een diëlectricum:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})} \quad . \tag{4.3.10}$$

Als er ook vrije ladingen aanwezig zijn, met ladingsdichtheid $\rho_f$, dan telt het daardoor gegenereerde veld op bij het veld veroorzaakt door de polarisatie (wegens het superpositie-principe). Het totale veld voldoet dan wegens (2.3.9) aan de relatie

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) + \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_f(\mathbf{r})} \quad . \tag{4.3.11}$$

Deze formules rechtvaardigen de introductie van de hulpgrootheid $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, de *diëlectrische verplaatsing*. Deze heeft als bron de vrije ladingsdichtheid (cf. IEF(4.22)):

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r})} \quad . \tag{4.3.12}$$

Dit is de *wet van Gauss* voor de diëlectrische verplaatsing in aanwezigheid van diëlectrica. Deze is analoog aan de wet van Gauss voor het electrisch veld tengevolge van een ladingsverdeling zonder aanwezigheid van polarisaties. Bedenk echter dat $\mathbf{D}$ *niet* rotatievrij is, want er geldt $\nabla \wedge \mathbf{D} = \nabla \wedge \mathbf{P} \neq 0$. Het gevolg is dat $\mathbf{D}$ niet als de gradiënt van een scalaire potentiaal kan worden geschreven, zodat de bekende oplossingsmethodes via de Laplace- en Poisson-vergelijking hier niet opgaan. Wel helpen soms symmetriebeschouwingen samen met (4.3.12), zie Voorbeeld 4 (IEP176).

Precies op de rand van een diëlectricum gelden (4.3.10)–(4.3.12) niet meer. Immers, dan draagt ook de oppervlakteterm van (4.3.8) tot het veld bij. Het gevolg is dat het veld niet meer continu is. De component parallel aan het oppervlak is nog wel continu (zie (2.3.15)):

$$\boxed{\mathbf{E}_{\parallel,1}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\parallel,2}(\mathbf{r})} \quad , \tag{4.3.13}$$

waar de index 1 het vacuum en index 2 het diëlectricum aanduidt. Volgens (2.3.16) en (4.3.5) maakt de component loodrecht op het oppervlak echter een sprong:

$$\mathbf{E}_{\perp,1}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_{\perp,2}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\, \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})\, \mathbf{n}(\mathbf{r}) \quad , \tag{4.3.14}$$

waar we veronderstelden dat er geen 'vrije' oppervlaktelading aan de rand van het diëlectricum aanwezig is. Omdat het rechterlid – afgezien van een triviale factor – juist gelijk is aan de loodrechte bijdrage van de polarisatie in het diëlectricum (dus aan $\mathbf{P}_{\perp,2}(\mathbf{r})$), staat hier:

$$\boxed{\mathbf{D}_{\perp,1}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}_{\perp,2}(\mathbf{r})} \quad . \tag{4.3.15}$$

De loodrechte component van de diëlectrische verplaatsing is dus juist weer continu. De hier afgeleide randcondities leiden tot breking van electrische veldlijnen aan een oppervlak (zie IEV 4.33).

### Lineaire diëlectrica

In lineaire diëlectrica is de polarisatie evenredig met het locaal aanwezige veld. De evenredigheidsconstante is dan de *susceptibiliteit* $\chi_e$ (zie IEF(4.30)):

$$\boxed{\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}} \quad . \tag{4.3.16}$$

Ook de diëlectrische verplaatsing is dan evenredig met het electrische veld, met evenredigheidsconstante $\varepsilon$, de *permeabiliteit*. De verhouding $\varepsilon/\varepsilon_0$ heet de *diëlectrische constante*.

Als de polarisatie lineair afhangt van het veld dan is de polarisatie niet langer alleen een bron van het electrische veld (zodat men kan spreken van een veld gegenereerd door de polarisatie), maar dan wordt de polarisatie op haar beurt ook weer beïnvloed door het veld (het veld produceert dan de polarisatie). Het gevolg is dat electrostatische problemen in aanwezigheid van diëlectrica vaak moeilijker zijn op te lossen. Soms kan weer symmetrie samen met de Gauss-wet worden gebruikt (zie Voorbeeld 5, IEP181 en Voorbeeld 6, IEP183).

Als er geen symmetrie is dan wordt het vinden van het veld lastiger (zie Voorbeeld 7, IEP186 en Voorbeeld 8, IEP188). In Voorbeeld 8 kan men ook direct – onder de veronderstelling dat de polarisatie uniform zal zijn – het resultaat van Voorbeeld 2 (dus

IEF(4.14)) gebruiken. Het totale veld is dan de som van het veld $-\mathbf{P}/(3\varepsilon_0)$ tengevolge van de polarisatie $\mathbf{P}$ en het externe veld $\mathbf{E}_0$:

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{1}{3\varepsilon_0}\mathbf{P}} \quad . \tag{4.3.17}$$

Door eliminatie van $\mathbf{P}$ tussen deze vergelijking en (4.3.16) vinden we dan direct het verband tussen het totale veld in de bol $\mathbf{E}$ en het externe veld $\mathbf{E}_0$:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{1 + \chi_e/3} \quad , \tag{4.3.18}$$

en dat is inderdaad IEF(4.49). De polarisatie is dan

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \frac{\chi_e}{1 + \chi_e/3}\,\mathbf{E}_0 \quad . \tag{4.3.19}$$

Ook het veld *buiten* de bol kan nu eenvoudig worden gevonden. Het is de som van het externe veld en het in Voorbeeld 2 gevonden veld buiten een uniform gepolariseerde bol:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{4\pi}{3}R^3\;\mathbf{P}\cdot\nabla\nabla\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \mathbf{E}_0 + \frac{4\pi}{3}R^3\;\frac{\chi_e}{1+\chi_e/3}\;\mathbf{E}_0\cdot\nabla\nabla\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad , \tag{4.3.20}$$

met $R$ de straal van de bol en $\mathbf{r}_0$ het middelpunt.

### Polariseerbaarheid en susceptibiliteit

De lineaire relatie tussen polarisatie en veld in een lineair diëlectricum kan begrepen worden uit het gedrag van de moleculen in het diëlectricum. Daarbij moet een onderscheid worden gemaakt tussen twee soorten van diëlectrica (zie IEP160–166): het diëlectricum kan bestaan uit *polariseerbare* moleculen, of het is opgebouwd uit *polaire* moleculen, die een permanente dipool dragen. In het eerste geval ontstaan de 'geïnduceerde' dipolen pas door de invloed van een extern veld, in het tweede geval zorgt het electrische veld alleen voor de oriëntatie van de dipolen.

Een *geïnduceerde dipool* is voor voldoend klein veld altijd lineair met het veld: de respons van het molecuul als reactie op de 'storing' door het electrische veld is lineair. Dit kan men netjes bewijzen door het molecuul quantummechanisch te beschrijven en de invloed van het electrische veld te berekenen in het kader van eerste-orde storingstheorie. Het resultaat is dan dat een moleculair dipoolmoment $\mathbf{p}$ ontstaat dat evenredig is met $\mathbf{E}$, dus $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}$, met $\alpha$ de polariseerbaarheid. De dipooldichtheid $\mathbf{P}$ volgt dan door vermenigvuldiging van $\mathbf{p}$ met de moleculaire dichtheid $n$, dus $\mathbf{P} = n\alpha\mathbf{E}$. Er volgt dan (zie IEF(4.70), waar de dichtheid werd genoteerd als $N$ in plaats van $n$):

$$\boxed{\chi_e = \frac{n\alpha}{\varepsilon_0}} \quad . \tag{4.3.21}$$

Dit eenvoudige verband is correct voor een diëlectricum met een lage moleculaire dichtheid, bv. voor een verdund gas.

Als de moleculaire dichtheid hoger is, zoals bv. in een vloeistof of een vaste stof, dan is het verband (4.3.21) niet langer juist, zoals ook de toestandsvergelijking niet langer de ideale gaswet zal zijn. Er treden dan 'hogere-dichtheid-correcties' op. De reden is dat het veld $\mathbf{E}_{mol}$, dat door het molecuul wordt gevoeld, en waarop het reageert door een geïnduceerde dipool te produceren, niet langer het locale Maxwell-veld $\mathbf{E}$ is. In goede benadering wordt de susceptibiliteit dan uit de polariseerbaarheid gevonden door de relatie van *Clausius* en *Mossotti*:

$$\boxed{\chi_e = \frac{n\alpha/\varepsilon_0}{1 - n\alpha/(3\varepsilon_0)}} \quad . \tag{4.3.22}$$

In een diëlectricum bestaande uit *polaire moleculen* ontstaat een macroscopische polarisatie doordat de moleculen zich richten in het electrische veld. Deze oriëntatie wordt echter tegengewerkt door de warmtebeweging. Het gevolg is dat de macroscopische polarisatie toch weer lineair is in het veld voor kleine velden, al zijn de microscopische dipoolmomenten nu onafhankelijk van het veld. Een eenvoudig model voor de optredende oriëntatie in een diëlectricum met temperatuur $T$ wordt besproken in IEV 4.40. Het leidt tot de Langevin formule IEF(4.73), die inderdaad voor kleine velden een polarisatie evenredig met het veld geeft, met een susceptibiliteit die afhangt van de temperatuur. Voor diëlectrica met hogere moleculaire dichtheid is het richtend veld niet langer gelijk aan het Maxwell-veld. De correctie is hier anders dan voor een diëlectricum met polariseerbare moleculen, zodat de correctie niet dezelfde vorm krijgt als eerder.

### Krachten en momenten

Een electrische dipool $\mathbf{p}$ in een extern veld $\mathbf{E}_e$ ondervindt een kracht, die de som is van de krachten op de samenstellende ladingen (zie IEP164). Er ontstaat (cf. IEF(4.5)):

$$\boxed{\mathbf{F} = (\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{E}_e(\mathbf{r}) = [\nabla\mathbf{E}_e(\mathbf{r})]\cdot\mathbf{p}} \quad , \tag{4.3.23}$$

waar we gebruikten dat $\nabla \wedge \mathbf{E}_e = 0$, en dus ook $(\nabla \wedge \mathbf{E}_e) \wedge \mathbf{p} = (\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{E}_e - (\nabla\mathbf{E}_e)\cdot\mathbf{p} = 0$. De kracht is alleen ongelijk 0 als het veld inhomogeen is.

De *totale kracht* op een collectie dipolen is de som van bijdragen van de vorm (4.3.23). Echter, de dipolen veroorzaken zelf ook een veld (zie (3.2.13) of (4.3.1)), zodat het totale veld $\mathbf{E}$ dat wordt gevoeld door een dipool de som is van het externe veld en van alle velden opgewekt door de andere dipolen. De totale kracht op alle dipolen tesamen is dus:

$$\mathbf{F} = \sum_i \left\{ \nabla_i \left[ \mathbf{E}_e(\mathbf{r}_i) + \sum_{j(\neq i)} \mathbf{p}_j \cdot \nabla_i \nabla_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \right] \right\} \cdot \mathbf{p}_i \quad , \tag{4.3.24}$$

met $\nabla_i$ de differentiatie naar $\mathbf{r}_i$. Nu vallen de bijdragen van de dipoolvelden juist weg, omdat deze kunnen worden geschreven als

$$-\sum_{i,j(i\neq j)} \mathbf{p}_i \cdot \nabla_i \mathbf{p}_j \cdot \nabla_j \nabla_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} = 0 \quad , \tag{4.3.25}$$

waar we gebruikten dat de dubbelsom van teken omkeert als we de dummy sommatievariabelen $i$ en $j$ verwisselen. Het wegvallen van de dipoolbijdragen kan worden gezien als een uiting van de wet "actie=–reactie". Als gevolg van (4.3.25) is de totale kracht op de dipolen alleen afhankelijk van het externe veld:

$$\mathbf{F} = \sum_i [\nabla_i \mathbf{E}_e(\mathbf{r}_i)] \cdot \mathbf{p}_i \quad . \tag{4.3.26}$$

Als de dipolen *continu verdeeld* zijn, zoals in een diëlectricum, dan vindt men voor de totale kracht op het diëlectricum (cf. IEF(4.69)):

$$\boxed{\mathbf{F} = \int d\mathbf{r}\ [\nabla \mathbf{E}_e(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})} \quad . \tag{4.3.27}$$

Het is verleidelijk dit te zien als een integraal over een locale krachtdichtheid van de vorm $(\nabla \mathbf{E}_e) \cdot \mathbf{P}$, maar aan die interpretatie zitten wat haken en ogen. De reden is dat in een diëlectricum naast de locale electrische krachten ook de druk bijdraagt tot de totale kracht, die de locale versnelling volgens Newton bepaalt. Deze druk blijkt af te hangen van het externe veld, zodat de twee bijdragen niet eenvoudig gescheiden kunnen worden.

De krachten die een extern veld op een electrische dipool uitoefent trachten de dipool te roteren, want de krachten op de individuele ladingen hebben een *moment* ongelijk 0. Men vindt voor dit moment $\mathbf{N}$ (zie IEF(4.4)):

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}_e(\mathbf{r})} \quad . \tag{4.3.28}$$

Anders dan de kracht (4.3.23) is het moment ook ongelijk 0 in een uniform veld.

Het *totale moment* van de krachten op een collectie dipolen is de som van de momenten uitgeoefend op elk van de dipolen. Deze bevat weer naast de bijdrage van het externe veld een bijdrage van de dipoolvelden:

$$\sum_i \mathbf{p}_i \wedge \left[ \sum_{j(\neq i)} \mathbf{p}_j \cdot \nabla_i \nabla_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \right] \quad . \tag{4.3.29}$$

Deze bijdrage is nu *niet* gelijk aan 0; er is geen wet "actie=–reactie" voor momenten (zie ook IEV 4.5 en IEV 4.29). Het totale moment dat wordt uitgeoefend op een diëlectricum met een continue dipoolverdeling hangt daarom niet alleen van het externe veld af, maar ook van de bijdrage van de polarisatie tot het totale electrostatische veld.

### Energie van een diëlectricum

Vroeger, in hoofdstuk 2, berekenden we de arbeid die nodig is om een ladingsverdeling op te bouwen. Het resultaat was (2.3.26), of voor een continue ladingsverdeling een van de vormen (2.3.27) en (2.3.28). Omdat een diëlectricum is opgebouwd uit ladingen zou men kunnen denken dat het mogelijk is uit die eerdere uitdrukkingen ook de energie van een diëlectricum te vinden. Dat is echter niet zo eenvoudig. Als men namelijk van (2.3.26) wil uitgaan, dan berekent men in feite de totale electrostatische energie inclusief de energie nodig om de constituerende ladingen in de dipolen uit het oneindige op hun plaats te brengen. Het is duidelijk dat dan in feite de bindingsenergie van de electronen in de atomen of de moleculen een rol gaat spelen. Dat leidt weliswaar tot een interessante berekening, maar niet een waaruit men kan verwachten een eenvoudig antwoord te krijgen, zeker niet een uitdrukking van de eenvoud van (2.3.28).

Wèl een eenvoudig antwoord ontstaat als men de *verandering* in energie wil bepalen die ontstaat als men in een configuratie, bestaande uit een diëlectricum en een stel ladingen buiten dat diëlectricum, een wijziging aanbrengt, bij voorbeeld door de ladingen te verplaatsen. Men vindt voor de verandering in de energie (cf IEF(4.57)):

$$\delta W = \int d\mathbf{r}\ \delta\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad . \tag{4.3.30}$$

Voor een *lineair* diëlectricum is dit verder om te werken tot

$$\delta W = \tfrac{1}{2}\,\delta \int d\mathbf{r}\;\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} \quad . \tag{4.3.31}$$

Door te beginnen met alle ladingen op oneindig, en deze vervolgens in kleine stapjes op hun plaats te brengen (daarmee het diëlectricum steeds verder polariserend), vindt men tenslotte de toename in energie door het opbouwen van de configuratie van ladingen en diëlectricum (zie IEF(4.58)):

$$\boxed{W = \tfrac{1}{2} \int d\mathbf{r}\;\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}} \quad . \tag{4.3.32}$$

De afleiding leert dat deze uitdrukking alleen zin heeft voor een lineair diëlectricum, en alleen een *deel* van de energie van dat diëlectricum geeft, niet zijn totale energie.

## 4.4 Samenvatting van belangrijke resultaten

### Electrisch veld tengevolge van polarisatie

- Effectieve ladingsdichtheden: (4.3.5)–(4.3.6)
- Veld door polarisatie: (4.3.8)
- Veld geproduceerd door uniform gepolariseerde bol: IEF(4.14-4.15)

### Diëlectrische verplaatsing

- Divergentie van veld door polarisatie: (4.3.10)
- Definitie diëlectrische verplaatsing: IEF(4.21)
- Wet van Gauss voor diëlectrische verplaatsing: (4.3.12)
- Randcondities voor electrisch veld en diëlectrische verplaatsing: (4.3.13), (4.3.15)

### Lineaire diëlectrica

- Lineaire relaties tussen polarisatie, veld en verplaatsing: IEF(4.30–4.32)
- Definitie van susceptibiliteit, permeabiliteit en diëlectrische constante: IEF(4.26), IEF(4.33–4.34)
- Veld in aanwezigheid van uniform gepolariseerde bol en uitwendig veld: (4.3.17)
- Verband susceptibiliteit en polariseerbaarheid: (4.3.21), (4.3.22)

### Krachten en momenten van krachten

- Kracht op dipool: (4.3.23)
- Totale kracht op diëlectricum: (4.3.27)
- Moment van kracht op dipool: (4.3.28)

### Energie

- Energie van een dipool in een veld: IEF(4.6)
- Toename van energie door polarisatie onder invloed van ladingen: (4.3.32)

# Hoofdstuk 5

# Magnetostatica

## 5.1 Kernbegrippen

### Stroomdichtheid

Electrische stroomdichtheid van collectie puntladingen. Continue stroomdichtheid. Stroom door dunne draad. Oppervlaktestroomdichtheid. Continuïteitsvergelijking.

### Wet van Biot-Savart

Wet van Biot-Savart voor magnetische veld van continue stroomverdeling, voor stromen door een dunne draad en voor oppervlaktestromen.

### Divergentie en rotatie van magnetostatisch veld

Solenoïdaal karakter van magnetisch veld. Wet van Ampère. Veld van configuraties met symmetrie (oneindig lange rechte stroomdraad, plat vlak met uniforme oppervlaktestromen, oneindig lange solenoïde, toroïdale spoel)

### Vectorpotentiaal

Verband met magnetisch veld. IJktransformaties. Coulomb-ijking of stralingsijking. Poisson-vergelijking voor vectorpotentiaal. Integraalrepresentatie van de vectorpotentiaal. Potentiaal van een roterende bol met uniforme oppervlaktelading. Randcondities aan een oppervlak met oppervlaktestromen. Magneetveld en vectorpotentiaal in Fourier-taal.

### Krachten in de magnetostatica

Lorentz-kracht. Beweging in een uniform magnetostatisch veld en in gekruiste electromagnetostatische velden. Krachtdichtheid op een continue stroomverdeling. Magnetische Maxwell-spanningstensor.

### Multipool-ontwikkeling

Cartesische en sferische multipool-ontwikkeling. Magnetisch dipoolmoment. Veld van een magnetische dipool.

## 5.2 Notaties

Er worden in dit hoofdstuk geen nieuwe van IE afwijkende notaties ingevoerd.

## 5.3 Addenda

### Stroomdichtheid

De kracht op een lading $e$ in een extern electromagnetisch veld $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ wordt gegeven door de *formule van Lorentz* IEF(5.2). De totale kracht op een collectie deeltjes wordt gegeven door de som van de bijdragen voor elk der deeltjes:

$$\mathbf{F} = \sum_i e_i \ [\mathbf{E}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)] \quad . \tag{5.3.1}$$

Door invoeren van een $\delta$-functie en een integraal kunnen we dit schrijven als:

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{r} \left\{ \left[ \sum_i e_i \ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right] \ \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left[ \sum_i e_i \ \mathbf{v}_i \ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right] \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) \right\} \quad . \tag{5.3.2}$$

Alle informatie over de deeltjes zit verstopt in de twee combinaties tussen de rechte haken. De eerste daarvan zijn we al tegengekomen in hoofdstuk 2 (zie (2.3.3)); het is de ladingsdichtheid van een collectie puntladingen:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i e_i \ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad . \tag{5.3.3}$$

De tweede combinatie heeft ook een fysische betekenis: het is de electrische stroomdichtheid van een collectie puntladingen:

$$\boxed{\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_i e_i \ \mathbf{v}_i \ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)} \quad . \tag{5.3.4}$$

Net als de ladingsdichtheid kan ook de stroomdichtheid $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ een continue functie van de positie zijn. Dit ziet men direct door de ladingen te verkleinen en hun aantal te vergroten; in de limiet ontstaat dan een continue verdeling.

Als de electrische stroomdichtheid geconcentreerd is in een draad, dan kan men de totale stroom door de draad berekenen als:

$$I = \int_S d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \quad , \tag{5.3.5}$$

met $S$ een oppervlak dat de draad doorsnijdt. Deze totale stroom is onafhankelijk van de plaats $\mathbf{r}$ waar de draad wordt doorsneden. Als de draad dun is dan is $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ binnen de draad parallel aan de richting van de draad, zodat we kunnen schrijven $\mathbf{J}(\mathbf{r}') = |\mathbf{J}(\mathbf{r}')|\mathbf{n}(\mathbf{r})$, met $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ een eenheidsvector parallel aan de draad ter plekke $\mathbf{r}$. Als we het oppervlak $S$ dan loodrecht op de draad kiezen, dan volgt:

$$\boxed{I \ \mathbf{n}(\mathbf{r}) = \int dS' \ \mathbf{J}(\mathbf{r}')} \quad . \tag{5.3.6}$$

Als de electrische stroomdichtheid geconcentreerd is in een oppervlak, dan kan men beter een oppervlaktestroomdichtheid $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ introduceren in plaats van de stroomdichtheid $\mathbf{J}(\mathbf{r})$. Om de relatie tussen de twee stroomdichtheden te bepalen schrijven we $\mathbf{J}(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ op voor een plat cylindervormig volume-element ter plekke $\mathbf{r}$, met as loodrecht op het oppervlak. Dan geldt $d\mathbf{r}' = dS'\, dh'$, met $dS'$ de basis van de cylinder en $dh'$ de hoogte. De oppervlaktestroomdichtheid volgt dan uit $\mathbf{J}$ door integratie over $dh'$:

$$\boxed{\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \int dh'\, \mathbf{J}(\mathbf{r}')} \quad . \tag{5.3.7}$$

Omdat $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ langs het oppervlak is gericht, is ook $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ parallel aan het oppervlak.

De ladingsdichtheid en de stroomdichtheid voldoen aan de zogenaamde *continuïteits-vergelijking* IEF(5.29), die het behoud van lading uitdrukt. Voor een collectie bewegende puntladingen bewijst men die vergelijking als volgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial t}\sum_i e_i\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) = \sum_i e_i\, \mathbf{v}_i(t) \cdot \nabla_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \\ &= -\sum_i e_i\, \mathbf{v}_i(t) \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) = -\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad , \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

waar we eerst de kettingregel (met $\nabla_i$ een differentiatie naar $\mathbf{r}_i$) gebruikten, en vervolgens dat $\nabla_i$ door $-\nabla$ kan worden vervangen wegens de vorm van het argument van de $\delta$-functie. De continuïteitsvergelijking geldt ook voor een continue stroom-ladingsverdeling, zoals men ziet door de grootte van de puntladingen te verkleinen, en hun aantal te vergroten, als tevoren. Als de ladingsdichtheid en de stroomdichtheid in een oppervlak zijn geconcentreerd, dan krijgt de continuïteitsvergelijing de vorm

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}) \quad . \tag{5.3.9}$$

Uit de continuïteitsvergelijking volgt dat in een *stationaire* stroom-ladingsverdeling, d.i. in een verdeling die onafhankelijk van de tijd is, de stroomdichtheid divergentievrij is.

### Wet van Biot-Savart

Zoals de electrostatica berust op de wet van Coulomb, zo berust de magnetostatica op de wet van Biot-Savart. Beide wetten postuleren een specifieke uitdrukking voor een veld in termen van zijn bron. Voor de electrostatica is de bron van het electrische veld $\mathbf{E}$ de ladingsdichtheid $\rho$, voor de magnetostatica is de bron van het magnetische veld $\mathbf{B}$ de stroomdichtheid $\mathbf{J}$. De wet van Biot-Savart geeft het veld dat wordt gegenereerd door een *stationaire* stroomdichtheidsverdeling (cf. IEF(5.39)):

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \int d\mathbf{r}'\, \mathbf{J}(\mathbf{r}') \wedge \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}} \quad . \tag{5.3.10}$$

Als de stroomdichtheid is geconcentreerd in een dunne draad, dan vindt men (door analoge stappen als bij de afleiding van (5.3.6)):

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 I \int d\mathbf{l}' \wedge \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}} \quad , \tag{5.3.11}$$

met $d\mathbf{l}'$ een lijn-element van de draad. Deze formule is equivalent aan IEF(5.32), maar is hier neergeschreven in een meer expliciete notatie.

Voorts is het veld dat door een oppervlaktestroom wordt gegenereerd (cf. IEF(5.39)):

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \int dS'\, \mathbf{K}(\mathbf{r}') \wedge \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}} \quad . \tag{5.3.12}$$

De formules (5.3.10)–(5.3.12) gelden alleen als de stroomverdeling *stationair* is, d.i. onafhankelijk van de tijd. In dat geval is de stroomdichtheid divergentievrij, zoals we zagen. Het is *niet* zinvol om in (5.3.10) de stroomdichtheid (5.3.4) voor een collectie puntladingen in te vullen. Die stroomdichtheid is immers niet stationair, daar de posities en de snelheden van de deeltjes van de tijd afhangen. De ladingsdichtheid is evenmin stationair. Later (in hoofdstuk 10 van IE) zal blijken hoe het magnetische veld gegenereerd door een collectie puntladingen kan worden berekend.

In het algemeen zijn de integralen in (5.3.10)–(5.3.12) lastig te berekenen. In IE staan enkele voorbeelden waar de integralen wel eenvoudig zijn:

- het veld van een oneindig lange rechte stroomdraad (Voorbeeld 5, IEP216);
- het veld op de as van een circulaire stroomdraad (Voorbeeld 6, IEP218).

### Divergentie en rotatie van het magnetische veld

De divergentie van het magnetische veld volgt uit (5.3.10) als:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= -\mu_0 \nabla \cdot \int d\mathbf{r}'\, \mathbf{J}(\mathbf{r}') \wedge \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&= \mu_0 \nabla \cdot \left[\nabla \wedge \int d\mathbf{r}'\, \mathbf{J}(\mathbf{r}')\, \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] = 0 \quad .
\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

Het magnetische veld is dus divergentievrij of *solenoïdaal*, zoals het electrostatische veld rotatievrij was. Anders gezegd: het electrostatische veld is longitudinaal, het magnetische veld transversaal (zie hoofdstuk 1 voor deze benamingen).

De berekening van de rotatie van $\mathbf{B}$ is wat lastiger:

$$\begin{aligned}
\nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= -\mu_0 \nabla \wedge \int d\mathbf{r}'\, \mathbf{J}(\mathbf{r}') \wedge \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&= \mu_0 \nabla \wedge \left[\nabla \wedge \int d\mathbf{r}'\, \mathbf{J}(\mathbf{r}')\, \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] \\
&= -\mu_0 \Delta \int d\mathbf{r}'\, \mathbf{J}(\mathbf{r}')\, \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \mu_0 \nabla\nabla \cdot \int d\mathbf{r}'\, \mathbf{J}(\mathbf{r}')\, \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&= \mu_0 \int d\mathbf{r}'\, \mathbf{J}(\mathbf{r}')\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \mu_0 \nabla \int d\mathbf{r}'\, \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&= \mu_0\, \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \mu_0 \int d\mathbf{r}' \left\{\nabla' \cdot \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}')\, \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] - \left[\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')\right] \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right\} \quad ,
\end{aligned} \tag{5.3.14}$$

waar $\nabla'$ staat voor de differentiatie naar $\mathbf{r}'$ als tevoren. In de laatste regel kan de middelste bijdrage nu met de divergentiestelling worden omgevormd tot een oppervlakte-integraal, die nul is omdat ver weg de stroomdichtheid nul is. Voorts is de laatste bijdrage ook nul, omdat de stroom-ladingsverdeling stationair is. Als resultaat vinden we aldus de *wet van Ampère* IEF(5.54):

$$\boxed{\nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \, \mathbf{J}(\mathbf{r})} \quad . \tag{5.3.15}$$

De hier gegeven afleiding is dezelfde als in IEP224, maar de notatie is explicieter (door steeds de afkorting, die in IE wordt gebruikt voor $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, te vermijden).

De wet van Ampère kan met de rotatiestelling (1.3.20) (ook wel de stelling van Stokes genoemd) in integraalvorm worden gebracht, zoals in IEF(5.55). In die vorm is de wet handiger dan die van Biot-Savart voor de bepaling van het magnetische veld in al die gevallen waar symmetrie-argumenten kunnen worden gebruikt. Voorbeelden die worden besproken in IE zijn

- het veld van een oneindig lange rechte stroomdraad (Voorbeeld 7, IEP226);
- het veld van een uniforme oppervlaktestroomdichtheid in een oneindig plat vlak (Voorbeeld 8, IEP226);
- het veld van een oneindig lange solenoïde (Voorbeeld 9, IEP227);
- het veld van een toroïdale spoel (Voorbeeld 10, IEP229).

## Vectorpotentiaal

Omdat het magnetische veld solenoïdaal of transversaal is kan men het schrijven als de rotatie van een ander veld, dat in analogie met de scalaire potentiaal $\varphi$ de vectorpotentiaal wordt genoemd:

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r})} \quad . \tag{5.3.16}$$

Omdat alleen de rotatie van $\mathbf{A}$ van belang is, kan bij $\mathbf{A}$ een gradiënt van een scalair worden opgeteld:

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\psi(\mathbf{r})} \quad . \tag{5.3.17}$$

Deze zogenaamde *ijkvrijheid* kan worden gebruikt om de vectorpotentiaal zo te kiezen dat geldt $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Men zegt dan dat er gekozen is voor de *Coulomb-ijking* of ook wel de *stralingsijking*. In deze ijking is niet alleen $\mathbf{B}$ maar ook $\mathbf{A}$ transversaal. Het bewijs dat de keus voor deze ijking inderdaad kan worden gemaakt is eenvoudig te leveren (zie IEP235); er blijkt een Poisson-vergelijking te moeten worden opgelost.

Invullen van (5.3.16) in de wet van Ampère leidt in de Coulomb-ijking tot een Poisson-vergelijking voor de potentiaal (cf. IEF(5.62)):

$$\boxed{\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})} \quad . \tag{5.3.18}$$

Bedenk hierbij dat alleen in cartesische coördinaten het linkerlid eenvoudig is uit te werken. In algemene kromlijnige coördinaten is het moeilijk het linkerlid per component neer te schrijven, zie voetnoot 13 op IEP235.

De formele oplossing van deze vergelijking is in cartesische coödinaten eenvoudig neer te schrijven naar analogie met de oplossing van de Poisson-vergelijking voor de scalaire potentiaal. Als de stroomdichtheid naar 0 gaat op oneindig dan vindt men (cf. IEF(5.63)):

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int d\mathbf{r}' \, \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}} \quad . \tag{5.3.19}$$

Inderdaad vindt men bij invullen van deze uitdrukking in (5.3.16) weer de wet van Biot-Savart terug. We merken op dat het rechterlid van (5.3.19) in cartesische coördinaten moet worden uitgewerkt. Het is bij voorbeeld *onjuist* om te denken dat de radiële component van $\mathbf{A}$ in bolcördinaten kan worden gevonden door de integraal rechts, met in de teller de radiële component van $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ ingevuld, uit te werken! Dat dit onzinnig zou zijn ziet men direct: de definitie van wat de radiële component van $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ is hangt af van de plaats $\mathbf{r}'$.

Voor een oppervlaktestroomdichtheid vindt men uit (5.3.12) dat het veld kan worden beschreven door de vectorpotentiaal:

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int dS' \, \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}} \quad , \tag{5.3.20}$$

onder de veronderstelling dat de stroomdichtheid op oneindig naar 0 gaat. Tenslotte vindt men uit (5.3.11) dat het veld gegenereerd door een dunne stroomvoerende draad wordt gegeven door de vectorpotentiaal:

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 I \int d\mathbf{l}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}} \quad , \tag{5.3.21}$$

onder de veronderstelling dat de stroomdraad zich niet tot in het oneindige uitstrekt.

Voorbeelden van de berekening van de vectorpotentiaal in IE zijn:

- de vectorpotentiaal gegenereerd door een om zijn as draaiende bolschil met constante oppervlakteladingsdichtheid (Voorbeeld 11, IEP236); het veld blijkt binnen de bolschil uniform te zijn;

- de vectorpotentiaal van een oneindige stroomvoerende solenoïde, uitgaande van het reeds bekende magnetische veld (Voorbeeld 12, IEP238).

## Randcondities bij een stroomdragend oppervlak

Bij een oppervlak met een oppervlaktestroomdichtheid $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ is de loodrechte bijdrage van het magnetische veld continu, zoals volgt uit (5.3.13) en de divergentiestelling (1.3.19):

$$\boxed{\mathbf{B}_{\perp,1}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_{\perp,2}(\mathbf{r})} \quad , \tag{5.3.22}$$

met $\mathbf{B}_{\perp,i}(\mathbf{r})$ de loodrechte bijdrage aan de zijde $i$ ter plekke $\mathbf{r}$. De parallelle bijdrage van het magnetische veld vertoont echter een sprong, zoals volgt uit (5.3.15), (5.3.7) en de rotatiestelling (1.3.20):

$$\boxed{\mathbf{B}_{\parallel,1}(\mathbf{r}) - \mathbf{B}_{\parallel,2}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{K}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{n}(\mathbf{r})} \quad , \tag{5.3.23}$$

met $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ de normaal op het oppervlak wijzend van de zijde 2 naar de zijde 1. Combinatie van deze twee resultaten geeft (cf. IEF(5.74)):

$$\boxed{\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{K}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{n}(\mathbf{r})} \quad . \tag{5.3.24}$$

De vectorpotentiaal is steeds continu aan een oppervlak (cf. IEF(5.75)). Deze randcondities zijn analoog aan die voor het electrostatische veld (zie (2.3.15)–(2.3.17)).

### Fourier-taal

Net als in het geval van de electrostatica (zie Hoofdstuk 2) zijn ook de basisvergelijkingen van de magnetostatica eenvoudig te vertalen naar Fourier-taal. Men vindt nl. uit de Poisson-vergelijking (5.3.18):

$$k^2 \mathbf{A}(\mathbf{k}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{k}) \quad , \tag{5.3.25}$$

met de oplossing:

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{k}) = \frac{\mu_0}{k^2} \mathbf{J}(\mathbf{k})} \quad . \tag{5.3.26}$$

Dit is inderdaad het equivalent van de oplossing (5.3.19), zoals volgt uit de convolutiestelling (1.3.32) en de Fourier-representatie van de Coulomb-potentiaal (1.3.29). Het magnetische veld luidt in Fourier-taal:

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{k}) = i\mathbf{k} \wedge \mathbf{A}(\mathbf{k}) = \frac{i\mu_0}{k^2} \mathbf{k} \wedge \mathbf{J}(\mathbf{k})} \quad . \tag{5.3.27}$$

Het transversale karakter van het magnetostatische veld blijkt duidelijk: in Fourier-taal staat het loodrecht op de richting van $\mathbf{k}$.

### Krachtdichtheid en magnetische Maxwell-spanningstensor

De krachten op bewegende geladen deeltjes worden gegeven door de Lorentz-formule. In IE worden twee voorbeelden gegeven van toepassingen van bewegingen onder invloed van de Lorentz-kracht:

- beweging in een uniform magnetisch veld; dit geeft een cirkelbaan of een spiraalbaan, die wordt bepaald door de cyclotronfrequentie $\omega_c = eB/m$ (Voorbeeld 1, IEP205);
- beweging in gekruiste electrische en magnetische velden; dit geeft een cycloïdale beweging, met een systematische beweging in de richting van $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ (Voorbeeld 2, IEP205).

De totale kracht op een stroom-ladingsverdeling kan worden geschreven als (cf. IEF(5.27)):

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{r} \, [\rho(\mathbf{r}) \, \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r})] \quad , \tag{5.3.28}$$

zoals ook direct volgt uit (5.3.2). Het rechterlid is de integraal over de krachtdichtheid $\mathbf{f}(\mathbf{r})$. De electrische krachtdichtheid is dezelfde als eerder gevonden (zie (2.3.21)). De magnetische krachtdichtheid luidt:

$$\boxed{\mathbf{f}_{magn}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r})} \quad . \tag{5.3.29}$$

Dit is net als in (2.3.22) om te vormen, hier door gebruik te maken van de wet van Ampère:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{magn}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\mu_0}(\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0}\left[\mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{B} - (\nabla\mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}\right] \\ &= \frac{1}{\mu_0}\left[\nabla \cdot (\mathbf{BB}) - (\nabla\mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}\right] = \frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot (\mathbf{BB}) - \frac{1}{2\mu_0}\nabla(B^2) \quad , \end{aligned} \tag{5.3.30}$$

waar we in de eerste regel het dubbele vectorproduct uitwerkten (daarbij steeds lettend op het differentiëren van de juiste factor $\mathbf{B}$). Bij de overgang van de eerste regel naar de tweede gebruikten we vervolgens het divergentievrije karakter van het magnetische veld. Net als in Hoofdstuk 2 (zie (2.3.23)) schrijven we nu de gradiënt in de laatste term als de divergentie van een tensor. Dan ontstaat tenslotte:

$$\boxed{\mathbf{f}_{magn}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot (\mathbf{BB} - \tfrac{1}{2}B^2\mathsf{U}) = \nabla \cdot \mathsf{T}_{magn}} \quad , \tag{5.3.31}$$

met de magnetische *Maxwell-spanningstensor*

$$\boxed{\mathsf{T}_{magn} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{BB} - \tfrac{1}{2}B^2\mathsf{U})} \quad . \tag{5.3.32}$$

Ook hier (vergelijk Hoofdstuk 2) kan de spanningstensor worden geïnterpreteerd als een anisotrope 'elastische' spanning in het vacuum.

Als de electrische stroomdichtheid geconcentreerd is in een dunne draad, dan voldoet de stroomdichtheid aan de relatie (5.3.6). De magnetische bijdrage tot de totale kracht (5.3.28) krijgt dan de vorm:

$$\mathbf{F}_{magn} = I \int dl \; \mathbf{n}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad , \tag{5.3.33}$$

met rechts een integraal over de lengte van de stroomvoerende draad. We gebruikten dat het volume-element $d\mathbf{r}$ is te schrijven als $dS\;dl$. Een iets andere vorm is (cf. IEF(5.16)):

$$\boxed{\mathbf{F}_{magn} = I \int d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r})} \quad , \tag{5.3.34}$$

opnieuw met rechts een integraal over de lengte van de stroomdraad.

Als de electrische stroomdichtheid geconcentreerd is in een oppervlak, dan kan men de kracht beter uitdrukken in de oppervlaktestroomdichtheid $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ in plaats van in de stroomdichtheid $\mathbf{J}(\mathbf{r})$. De door $\mathbf{K}$ gegenereerde bijdrage tot de totale kracht wordt dan (cf. IEF(5.24))

$$\boxed{\mathbf{F}_{magn} = \int dS \; \mathbf{K}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}_{eff}(\mathbf{r})} \quad . \tag{5.3.35}$$

In het rechterlid treedt net als in (2.3.34) een effectief veld op. Dit wordt gegeven door $\mathbf{B}_{eff} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)$, met $\mathbf{B}_i$ de velden ter weerszijden van het oppervlak. De reden is dat de oppervlaktestroomdichtheid tot een discontinuïteit in het magnetische veld leidt, zoals we zagen. Analoog aan (2.3.35) kunnen we de kracht per eenheid van oppervlak schrijven als:

$$\mathbf{f}_{magn}(\mathbf{r}) = \mathbf{K}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) + \tfrac{1}{2}\mu_0[\mathbf{K}(\mathbf{r})]^2\mathbf{n}(\mathbf{r}) \quad , \tag{5.3.36}$$

waar we (5.3.24) gebruikten en voorts dat $\mathbf{K}$ en $\mathbf{n}$ loodrecht op elkaar staan.

Tenslotte merken we op dat magnetische krachten *geen* arbeid verrichten (zie IEF(5.11)), omdat de kracht steeds loodrecht op de snelheid staat. Energiebeschouwingen in magnetostatische velden zijn daarom nogal triviaal: er wordt geen energie uitgewisseld tussen het veld en de materie.

### Cartesische multipool-ontwikkeling

In Hoofdstuk 3 zagen we hoe een cartesische multipool-ontwikkeling kan worden afgeleid voor de electrostatische potentiaal. Iets dergelijks kan gebeuren voor de magnetostatische vectorpotentiaal, door uit te gaan van de oplossing (5.3.19) voor het veld van een continue stationaire stroomverdeling die in de ruimte begrensd is. (Merk op dat we anders dan in Hoofdstuk 3 niet kunnen uitgaan van een discrete stroomverdeling van een set puntladingen, want die geven een niet-stationaire stroomverdeling.) We kiezen een positie $\mathbf{r}_0$ ergens in de stroomverdeling, en bekijken de vectorpotentiaal ver buiten de stroomverdeling door een Taylor-ontwikkeling te maken van de Coulomb-factor (vergelijk (3.2.5)):

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mu_0 \int d\mathbf{r}' \, \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \, \mathbf{J}(\mathbf{r}') \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \, \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + (\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\cdot\nabla_0 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right. \\
&\quad \left. + \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0) : \nabla_0\nabla_0 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \ldots \right] \mathbf{J}(\mathbf{r}') \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \int d\mathbf{r}' \, \mathbf{J}(\mathbf{r}') - \mu_0 \left[ \int d\mathbf{r}' \, \mathbf{J}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0) \right] \cdot \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \ldots \quad ,
\end{aligned} \tag{5.3.37}$$

waar we gebruikten dat de afstand $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|$ groter is dan $|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0|$ voor alle punten $\mathbf{r}'$ binnen de stroomverdeling. De eerste bijdrage is de *monopool-bijdrage*, de tweede de *dipool-bijdrage*.

Nu is de eerste bijdrage, de monopool-bijdrage dus, altijd 0 voor een stationaire stroomverdeling, omdat de integraal van $\mathbf{J}$ over de gehele ruimte 0 is. Het bewijs wordt geleverd door uit te gaan van het divergentievrije karakter van elke stationaire $\mathbf{J}$ zodat geldt:

$$\int d\mathbf{r}' \, (\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0) \, \left[\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')\right] = 0 \quad , \tag{5.3.38}$$

met $\nabla'$ een differentiatie naar $\mathbf{r}'$. We werken nu het linkerlid om:

$$\begin{aligned}
&\int d\mathbf{r}' \, (\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0) \, \left[\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')\right] \\
&= \int d\mathbf{r}' \, \nabla' \cdot \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\right] - \int d\mathbf{r}' \, \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla'(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0) \\
&= \int d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \, (\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0) - \int d\mathbf{r}' \, \mathbf{J}(\mathbf{r}') \quad .
\end{aligned} \tag{5.3.39}$$

We gebruikten hier dat geldt $\nabla'(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0) = \mathsf{U}$ en $\mathbf{J}\cdot\mathsf{U} = \mathbf{J}$. Omdat de eerste term in de laatste regel een oppervlakte-integraal is over een oppervlak dat de gehele stroomverdeling omsluit, is die bijdrage 0, zodat we met (5.3.38) inderdaad hebben gevonden dat voor elke stationaire stroomverdeling geldt:

$$\int d\mathbf{r}\ \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0 \quad . \tag{5.3.40}$$

De eerste niet-verdwijnende bijdrage uit de multipool-ontwikkeling (5.3.37) is de tweede, d.i. de dipool-bijdrage. Die kunnen we omschrijven op een manier analoog aan de monopool-bijdrage, door uit te gaan van de identiteit:

$$\int d\mathbf{r}'\ (\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\ \left[\nabla'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}')\right] = 0 \quad . \tag{5.3.41}$$

Het linkerlid, dat een tensor met twee indices is, herschrijven we nu als volgt:

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{r}'\ (\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\ \left[\nabla'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}')\right] \\
= & \int d\mathbf{r}'\ \nabla'\cdot\left[\mathbf{J}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\right] - \int d\mathbf{r}'\ \mathbf{J}(\mathbf{r}')\cdot\nabla'\left[(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\right] \\
= & \int d\mathbf{S}'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}')\ (\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0) - \int d\mathbf{r}'\ \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)+(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\mathbf{J}(\mathbf{r}')\right] \ .
\end{aligned} \tag{5.3.42}$$

De eerste term valt weer weg, zodat we met (5.3.41) hebben gevonden:

$$\int d\mathbf{r}\ \left[\mathbf{J}(\mathbf{r})(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)+(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{J}(\mathbf{r})\right] = 0 \quad . \tag{5.3.43}$$

Deze relatie, die het analogon is van (5.3.40), kan worden gebruikt om de dipool-bijdrage in (5.3.37) te herschrijven tot:

$$\begin{aligned}
- & \ \tfrac{1}{2}\mu_0\left\{\int d\mathbf{r}'\ \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)-(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\mathbf{J}(\mathbf{r}')\right]\right\}\cdot\nabla\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \\
= & \ -\tfrac{1}{2}\mu_0\left\{\int d\mathbf{r}'\ \left[(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\wedge\mathbf{J}(\mathbf{r}')\right]\right\}\wedge\nabla\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad .
\end{aligned} \tag{5.3.44}$$

We hebben nu tenslotte gevonden (cf. IEF(5.83)):

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0\ \mathbf{m}\wedge\nabla\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}+\ldots} \quad , \tag{5.3.45}$$

met het *magnetische dipoolmoment*:

$$\boxed{\mathbf{m} = \tfrac{1}{2}\int d\mathbf{r}'\ \left[(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\wedge\mathbf{J}(\mathbf{r}')\right]} \quad . \tag{5.3.46}$$

Voor een stroomdichtheid die is geconcentreerd in een dunne stroomdraad gaat dit magnetische dipoolmoment over in IEF(5.84), als de oorsprong van het coördinatenstelsel in $\mathbf{r}_0$ wordt gelegd. De hier opgeschreven afleiding van de dipool-bijdrage tot de vectorpotentiaal is wat systematischer dan de op IEP243 gegeven reeks stappen, al zijn de ingrediënten dezelfde.

De uitdrukking (5.3.45) voor de dipool-bijdrage van de vectorpotentiaal is analoog aan die voor de dipool-bijdrage in de electrostatische potentiaal (3.2.8).

Uit de vectorpotentiaal volgt op de gebruikelijke wijze het magnetische veld. Voor de dipool-bijdrage vindt men

$$-\mu_0 \, \nabla \wedge \left[ \mathbf{m} \wedge \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right] \quad , \tag{5.3.47}$$

of wel door gebruik van (1.3.21):

$$\boxed{\mu_0 \mathbf{m} \cdot \nabla\nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}} \quad . \tag{5.3.48}$$

Deze uitdrukking is analoog aan (3.2.13), en is equivalent met IEF(5.87).

## Sferische multipool-ontwikkeling

Net als in de electrostatica (zie Hoofdstuk 3) kan ook in de magnetostatica een sferische multipool-ontwikkeling worden opgeschreven, en wel voor de vectorpotentiaal. Door invullen van (3.2.14) in (5.3.19) vindt men voor een ruimtelijk begrensde stroomverdeling (cf. (3.2.20)):

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{\ell+1}} \int d\mathbf{r}' \; |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|^\ell \; P_\ell(\cos\chi) \; \mathbf{J}(\mathbf{r}')} \quad . \tag{5.3.49}$$

Hierbij is $\chi$ - net als tevoren - de hoek tussen $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ en $\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0$, en dus afhankelijk van $\mathbf{r}'$. De bijdrage voor $\ell = 0$ valt weg wegens (5.3.40). De bijdrage voor $\ell = 1$ is de dipool-bijdrage, die inderdaad overeenkomt met (5.3.45), zoals kan worden nagegaan. Voor een stroomdichtheid die is geconcentreerd in een dunne stroomdraad vindt men uit (5.3.49) de uitdrukking IEF(5.78) terug. Om dat in te zien kan gebruik worden gemaakt van (5.3.6).

## 5.4 Samenvatting van belangrijke resultaten

### Stroomdichtheid

- Stroomdichtheid van een collectie puntladingen: (5.3.4)
- Stroom door dunne draad: (5.3.6)
- Oppervlaktestroomdichtheid: (5.3.7), IEF(5.23)
- Continuïteitsvergelijking: IEF(5.29), (5.3.9)

### Wet van Biot-Savart

- Wet van Biot-Savart voor stroomdichtheid: (5.3.10)
- Wet van Biot-Savart voor stroom door dunne draad: (5.3.11)
- Wet van Biot-Savart voor oppervlaktestroomdichtheid: (5.3.12)

### Divergentie en rotatie van magnetisch veld

- Divergentie: IEF(5.48)
- Rotatie (wet van Ampère): IEF(5.54)
- Integraalvorm van wet van Ampère: IEF(5.55)

### Vectorpotentiaal

- Verband magnetisch veld en vectorpotentiaal: IEF(5.59)
- IJktransformatie: (5.3.17)
- Coulomb- of stralingsijking: IEF(5.61)
- Poisson-vergelijking voor de vectorpotentiaal: IEF(5.62), (5.3.18)
- Vectorpotentiaal van een stroomverdeling: (5.3.19)

### Randcondities

- Randcondities van parallelle en loodrechte bijdragen: (5.3.22)–(5.3.24)
- Continuïteit van de vectorpotentiaal: IEF(5.75)

### Fourier-taal

- Potentiaal in Fourier-taal: (5.3.26)
- Verband tussen veld en potentiaal: (5.3.27)

### Krachten

- Lorentz-kracht: IEF(5.1)
- Krachtdichtheid in magnetostatisch veld: (5.3.29), (5.3.31)
- Maxwell-spanningstensor: (5.3.32)
- Kracht op dunne stroomdraad: (5.3.34)
- Kracht op oppervlaktestromen: (5.3.35)-(5.3.36)

### Multipool-ontwikkelingen

- Cartesisch magnetisch dipoolmoment: (5.3.46)
- Cartesische multipool-ontwikkeling: (5.3.45)
- Veld van een magnetische dipool: (5.3.48)
- Sferische multipool-ontwikkeling: (5.3.49)

# Hoofdstuk 6

# Magnetische velden in magnetiseerbare materie

## 6.1 Kernbegrippen

### Magnetisatie

Geïnduceerde dipolen en permanente dipolen. Diamagnetisme, paramagnetisme en ferromagnetisme. Magnetisatie.

### Magnetisch veld tengevolge van magnetisatie

Effectieve stroomdichtheid en oppervlaktestroomdichtheid. Veld in een magnetiseerbare stof. Veld van uniform gemagnetiseerde bol.

### Magnetisch hulpveld H

Wet van Ampère in aanwezigheid van een magnetiseerbare stof. Randcondities aan oppervlak van een magnetiseerbare stof.

### Lineaire en niet-lineaire magnetiseerbare stoffen

Permeabiliteit en susceptibiliteit. Magnetiseerbaarheid en verband met susceptibiliteit. Veld in een solenoïde gevuld met een lineaire magnetische stof. Ferromagnetische materialen. Hysterese.

### Krachten en momenten

Krachten en momenten van krachten op magnetische dipool in extern magneetveld. Kracht op magnetiseerbare stof in extern magneetveld.

## 6.2 Notaties

Er worden in dit hoofdstuk geen nieuwe van IE afwijkende notaties ingevoerd.

## 6.3 Addenda

### Magnetisch veld tengevolge van de magnetisatie

In gemagnetiseerde materie zijn op microscopische schaal magnetische dipolen aanwezig, die aanleiding geven tot een een macroscopische dipooldichtheid of magnetisatie $\mathbf{M}(\mathbf{r})$. De vectorpotentiaal gegenereerd door een collectie magnetische dipolen is (zie (5.3.45)):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \sum_i \mathbf{m}_i \wedge \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|} \quad . \tag{6.3.1}$$

De vectorpotentiaal tengevolge van een continue magnetisatie binnen een volume $V$ is analoog:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \int_V d\mathbf{r}' \, \mathbf{M}(\mathbf{r}') \wedge \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad . \tag{6.3.2}$$

De vectorpotentiaal is nu net als in (4.3.3)–(4.3.7) om te vormen (zie ook IEP264):

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mu_0 \int_V d\mathbf{r}' \, \mathbf{M}(\mathbf{r}') \wedge \nabla' \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \\
&= -\mu_0 \int_V d\mathbf{r}' \left\{ \nabla' \wedge \left[ \mathbf{M}(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right] - \left[ \nabla' \wedge \mathbf{M}(\mathbf{r}') \right] \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right\} \\
&= -\mu_0 \int_S dS' \, \mathbf{n}(\mathbf{r}') \wedge \mathbf{M}(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} + \mu_0 \int_V d\mathbf{r}' \, \left[ \nabla' \wedge \mathbf{M}(\mathbf{r}') \right] \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad ,
\end{aligned} \tag{6.3.3}$$

met $\mathbf{n}(\mathbf{r}')$ de naar buiten wijzende normaal op het oppervlak $S$ ter plekke $\mathbf{r}'$. Dit is de som van twee bijdragen:

- een vectorpotentiaal zoals in (5.3.20), door een *effectieve oppervlaktestroomdichtheid*:

$$\boxed{\mathbf{K}_b(\mathbf{r}) = -\mathbf{n}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{M}(\mathbf{r})} \quad , \tag{6.3.4}$$

- een vectorpotentiaal zoals in (5.3.19), door een *effectieve ruimtelijke stroomdichtheid*:

$$\boxed{\mathbf{J}_b(\mathbf{r}) = \nabla \wedge \mathbf{M}(\mathbf{r})} \quad . \tag{6.3.5}$$

Merk op dat de hier gevonden effectieve stroomdichtheid divergentievrij is, zoals voor het toepassen van de wet van Biot-Savart vereist is.

Met gebruikmaken van de afkortingen (6.3.4) en (6.3.5) wordt de vectorpotentiaal tenslotte:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int_S dS' \, \mathbf{K}_b(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} + \mu_0 \int_V d\mathbf{r}' \, \mathbf{J}_b(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad . \tag{6.3.6}$$

We hebben hiermee IEF(6.13–6.15) teruggevonden. In onze afleiding is de notatie met betrekking tot de positie-variabelen explicieter gemaakt dan in IE. Het magnetische veld luidt:

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \nabla \wedge \int_S dS' \, \mathbf{K}_b(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} + \mu_0 \nabla \wedge \int_V d\mathbf{r}' \, \mathbf{J}_b(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}} \quad . \tag{6.3.7}$$

Als de magnetisatie $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ uniform is binnen $V$, dan wordt het veld geheel bepaald door de oppervlaktestroomdichtheid (6.3.4). Dit is onder meer het geval in Voorbeeld 1 op IEP264, waar het magneetveld gegenereerd door een uniform gemagnetiseerde bol wordt berekend. Buiten de bol vindt men hetzelfde veld als van één grote magnetische dipool in het middelpunt van de bol. Binnen de bol blijkt het magneetveld uniform te zijn, met de waarde $\mathbf{B} = 2\mu_0\mathbf{M}/3$ (zie IEF(6.16)).

Voor een punt $\mathbf{r}$ buiten $V$ is de interpretatie van het magneetveld (6.3.7) eenvoudig. Voor een punt binnen $V$, dus in de magnetiseerbare materie gelegen, is de interpretatie wat subtieler, net als in het overeenkomstige electrostatische geval. De uitdrukking (6.3.7) geeft dan nog steeds het magneetveld, mits dit veld wordt geïnterpreteerd als het ruimtelijk gemiddelde van het microscopische veld dat tussen de microscopische deeltjes heerst (zie IEP268).

## Hulpveld H

De rotatie van het magnetische veld kan het eenvoudigste worden gevonden door terug te keren naar (6.3.2). We vinden allereerst:

$$\nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \wedge [\nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r})] = \nabla\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad . \tag{6.3.8}$$

Door nu (6.3.2) in te vullen ontstaat:

$$\nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla\nabla \cdot \int_V d\mathbf{r}' \, \mathbf{M}(\mathbf{r}') \wedge \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} + \mu_0 \Delta \int_V d\mathbf{r}' \, \mathbf{M}(\mathbf{r}') \wedge \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad . \tag{6.3.9}$$

De eerste bijdrage is nul. In de tweede bijdrage gebruiken we (1.3.21):

$$\nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \int_V d\mathbf{r}' \, \mathbf{M}(\mathbf{r}') \wedge \nabla\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \mu_0 \nabla \wedge \int_V d\mathbf{r}' \, \mathbf{M}(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad . \tag{6.3.10}$$

Na uitvoeren van de integraal vinden we

$$\boxed{\nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \nabla \wedge \mathbf{M}(\mathbf{r})} \quad , \tag{6.3.11}$$

voor alle $\mathbf{r}$ die niet juist op het oppervlak ligt. Als er ook een 'vrije' stroomdichtheid $\mathbf{J}_f$ van ongebonden ladingen aanwezig is, dan telt het daardoor gegenereerde veld op bij het veld veroorzaakt door de magnetisatie. Het totale veld voldoet dan wegens (5.3.15) aan de relatie:

$$\boxed{\nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \nabla \wedge \mathbf{M}(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{J}_f(\mathbf{r})} \quad . \tag{6.3.12}$$

Deze relatie is dezelfde als op IEP269.

We kunnen (6.3.12) herschrijven als (cf. IEF(6.19)):

$$\boxed{\nabla \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_f(\mathbf{r})} \quad , \tag{6.3.13}$$

waar we het hulpveld $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ invoerden. Dit is de *wet van Ampère* voor het hulpveld $\mathbf{H}$ in aanwezigheid van een magnetiseerbare stof. De hier gevonden wet van Ampère is analoog aan de wet van Ampère voor het magnetische veld tengevolge van een stationaire stroomdichtheid zonder aanwezigheid van een magnetisatie. Men moet echter bedenken dat $\mathbf{H}$ niet divergentievrij is, anders dan $\mathbf{B}$, die in de wet van Ampère in het vorige hoofdstuk optreedt. Er geldt immers $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \neq 0$. Het gevolg is dat $\mathbf{H}$ niet als de rotatie van een vectorpotentiaal kan worden geschreven, zodat de oplossingsmethodes via de Laplace- en Poisson-vergelijkingen niet opgaan. Wel helpen soms symmetriebeschouwingen samen met (6.3.12), zie Voorbeeld 2 (IEP270). De hier gemaakte opmerkingen zijn analoog aan die in hoofdstuk 4 (onder (4.3.12)).

Precies op de rand van een gemagnetiseerde stof gelden (6.3.11)–(6.3.13) niet meer. Immers, daar is $\mathbf{M}$ niet continu. Het gevolg is dat het veld $\mathbf{B}$ evenmin continu is. De component loodrecht op het oppervlak is nog wel continu (zie (5.3.22)):

$$\boxed{\mathbf{B}_{\perp,1}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_{\perp,2}(\mathbf{r})} \quad , \tag{6.3.14}$$

waar de index 1 het vacuum en de index 2 de gemagnetiseerde stof aanduidt. Volgens (5.3.23) en (6.3.4) maakt de component parallel aan het oppervlak echter een sprong:

$$\mathbf{B}_{\parallel,1}(\mathbf{r}) - \mathbf{B}_{\parallel,2}(\mathbf{r}) = \mu_0\, \mathbf{K}_b(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mu_0[\mathbf{M}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{n}(\mathbf{r})] \wedge \mathbf{n}(\mathbf{r}) \quad , \tag{6.3.15}$$

waar we veronderstelden dat er geen ‘vrije’ oppervlaktestromen langs de rand lopen. Omdat het rechterlid, afgezien van een triviale factor $-\mu_0$, juist gelijk is aan de parallelle bijdrage van de magnetisatie in de gemagnetiseerde stof (dus aan $-\mu_0\mathbf{M}_{\parallel,2}(\mathbf{r})$), staat hier:

$$\boxed{\mathbf{H}_{\parallel,1}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_{\parallel,2}(\mathbf{r})} \quad . \tag{6.3.16}$$

De parallelle component van het hulpveld $\mathbf{H}$ is dus juist weer continu. De hier afgeleide randcondities zijn analoog aan die welke gelden aan de rand van een diëlectricum (zie (4.3.13), (4.3.15)). Ze leiden tot breking van magnetische veldlijnen aan een oppervlak (zie IEV 6.26).

### Lineaire en niet-lineaire magnetiseerbare stoffen

Paramagnetische en diamagnetische stoffen zijn lineair: de magnetisatie neemt lineair met het veld toe (als dit voldoende klein is). De evenredigheidsconstante tussen $\mathbf{M}$ en $\mathbf{B}$ zou men de susceptibiliteit kunnen noemen. Echter, volgens traditie definieert men de *susceptibiliteit* $\chi_m$ door te schrijven (zie IEF(6.29)):

$$\boxed{\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}} \quad . \tag{6.3.17}$$

Dan is $\mathbf{M}$ ook evenredig met $\mathbf{B}$, want er geldt

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0(1+\chi_m)}\mathbf{B} \quad . \tag{6.3.18}$$

Uiteraard is nu ook **B** evenredig met **H**, met evenredigheidsconstante $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$, de *permeabiliteit*.

Als de magnetisatie lineair afhangt van het veld **B**, dan is de magnetisatie niet langer alleen een bron van het magnetische veld (zodat men kan spreken van een veld gegenereerd door de magnetisatie), maar dan wordt de magnetisatie op haar beurt ook weer beïnvloed door het veld (het veld produceert dan de magnetisatie). Het gevolg is dat magnetostatische problemen in aanwezigheid van lineaire magnetiseerbare materie vaak moeilijker zijn op te lossen dan de overeenkomstige magnetostatische problemen zonder zulke materie. De situatie is geheel analoog aan die van diëlectrica. Soms kan weer symmetrie samen met de Ampère-wet worden gebruikt (zie Voorbeeld 3, IEP275).

Een ferromagnetisch materiaal is niet-lineair: daar hangt de magnetisatie op niet-lineaire wijze af van het veld. Er kan onder meer hysterese optreden (zie IEP280). Magnetostatische problemen in aanwezigheid van ferromagnetica zijn daardoor nog weer lastiger dan de analoge problemen in aanwezigheid van diamagnetische of paramagnetische materialen.

### Magnetiseerbaarheid en susceptibiliteit

De lineaire relatie tussen de magnetisatie en het veld (hetzij **B**, hetzij **H**) in diamagnetische en paramagnetische materialen kan, net als in het overeenkomstige diëlectrische geval, begrepen worden uit het gedrag van de moleculen in de magnetiseerbare stof. In een diamagnetische stof zijn de moleculen magnetiseerbaar, doordat de electronenwolken deformeren onder invloed van een uitwendig magneetveld. Als gevolg worden magnetische dipolen geïnduceerd. In een paramagnetische stof treedt oriëntatie van de magnetische dipoolmomenten (gekoppeld aan de spins) van de electronen in een uitwendig veld op; daar zijn dus permanente dipolen aanwezig.

De grootte van de geïnduceerde magnetische dipool in de moleculen van een *diamagnetische* stof kan eenvoudig worden berekend in het klassieke Bohr-model (zie IEP260). Een nette berekening moet natuurlijk quantummechanisch worden gedaan. Men vindt dat het geïnduceerde moment tegen het magnetische veld in gaat staan (zie IEF(6.8)), dus $\mathbf{m} = \alpha_m \mathbf{B}$, met een negatieve $\alpha_m$. Dit diamagnetische effect is nogal klein, en het leidt tot een geringe macroscopische magnetisatie **M**. Deze wordt voor lage dichtheid gevonden als $n\mathbf{m} = n\alpha_m \mathbf{B}$, met $n$ de dichtheid van de magnetiseerbare moleculen. Men vindt dan voor de susceptibiliteit:

$$\frac{\chi_m}{\mu_0(1+\chi_m)} = n\,\alpha_m \quad , \tag{6.3.19}$$

ofwel, omdat $\chi_m$ voor lage dichtheid klein is:

$$\boxed{\chi_m = \mu_0\, n\, \alpha_m} \quad . \tag{6.3.20}$$

Voor hogere dichtheden moet in principe rekening worden gehouden met het feit dat het door het molecuul gevoelde veld niet langer het locale Maxwell-veld **B** is. Echter, het diamagnetische effect is zelf al zo klein, dat deze correctie zelden een rol speelt.

In *paramagnetische* materialen ontstaat de macroscopische magnetisatie doordat de electronenspins zich richten, en daarbij worden tegengewerkt door de warmtebeweging, juist zoals in een diëlectricum met polaire moleculen. Men vindt in een eenvoudig model weer een Langevin-formule (zie IEF(4.73)), die voor kleine velden een magnetisatie evenredig met het veld geeft. Als de dichtheid hoger is, dan is het richtend veld weer niet gelijk aan het Maxwell-veld. De correctie kan op een soortgelijke wijze als voor een diëlectricum met polaire moleculen worden berekend.

### Krachten en momenten

Een magnetische dipool $\mathbf{m}$ in een extern veld $\mathbf{B}_e$ ondervindt een kracht, die de som is van de krachten op de stroomdichtheid (zie IEP257). Anders dan in IE willen we dat hier laten zien voor een willekeurige stroomdichtheid, niet alleen voor een stroomlus. We gaan uit van de uitdrukking voor de kracht op een ruimtelijk begrensde stroomdichtheid:

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{r}\; \mathbf{J}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}_e(\mathbf{r}) \quad . \tag{6.3.21}$$

We nemen nu aan dat het veld slechts weinig verandert als we ons door de stroomverdeling bewegen. Dan kunnen we een Taylor-ontwikkeling maken voor het veld, en die ontwikkeling afbreken na de lineaire term:

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{r}\; \mathbf{J}(\mathbf{r}) \wedge [\mathbf{B}_e(\mathbf{r}_0) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla_0 \mathbf{B}_e(\mathbf{r}_0)] \quad . \tag{6.3.22}$$

De eerste term bevat $\int d\mathbf{r}\; \mathbf{J}(\mathbf{r})$, en dat is nul volgens (5.3.40). De tweede term bevat $\int d\mathbf{r}\; (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\; \mathbf{J}(\mathbf{r})$. Dat kan worden omgewerkt tot een antisymmetrische combinatie door gebruik te maken van (5.3.43). Dan komt er:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \tfrac{1}{2} \int d\mathbf{r}\; [\mathbf{J}(\mathbf{r})\; (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla_0 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\; \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_0] \wedge \mathbf{B}_e(\mathbf{r}_0) \\ &= \tfrac{1}{2} \int d\mathbf{r}\; \{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \wedge \mathbf{J}(\mathbf{r})] \wedge \nabla_0\} \wedge \mathbf{B}_e(\mathbf{r}_0) \\ &= \left\{ \left[ \tfrac{1}{2} \int d\mathbf{r}\; (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \wedge \mathbf{J}(\mathbf{r}) \right] \wedge \nabla_0 \right\} \wedge \mathbf{B}_e(\mathbf{r}_0) \quad . \end{aligned} \tag{6.3.23}$$

De integraal is nu juist het magnetische dipoolmoment (5.3.46), zodat is gevonden:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{m} \wedge \nabla_0] \wedge \mathbf{B}_e(\mathbf{r}_0) = [\nabla_0 \mathbf{B}_e(\mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{m} \quad , \tag{6.3.24}$$

waar we gebruikten dat het veld divergentievrij is. In een verkorte notatie hebben we dan gevonden:

$$\boxed{\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{B}_e) \cdot \mathbf{m}} \quad . \tag{6.3.25}$$

Dit is dezelfde uitdrukking als IEF(6.3), omdat de $\nabla$-operator in die formule natuurlijk niet op $\mathbf{m}$ werkt. De hier gevonden kracht is analoog aan de kracht (4.3.23) op een electrische dipool.

De *totale kracht* op een collectie magnetische dipolen is de som van bijdragen van de vorm (6.3.25). Het totale veld $\mathbf{B}$ dat door een magnetische dipool wordt gevoeld is de som van het externe veld en de velden gegenereerd door de andere dipolen. De totale kracht op alle dipolen samen is dus:

$$\mathbf{F} = \sum_i \left\{ \nabla_i \left[ \mathbf{B}_e(\mathbf{r}_i) + \mu_0 \sum_{j(\neq i)} \mathbf{m}_j \cdot \nabla_i \nabla_i \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \right] \right\} \cdot \mathbf{m}_i \quad , \tag{6.3.26}$$

waar we (5.3.48) gebruikten. Als tevoren is $\nabla_i$ de differentiatie naar $\mathbf{r}_i$. Nu vallen de bijdragen van de dipoolvelden juist weg, net als in (4.3.25). De totale kracht op de magnetische dipolen is dus alleen afhankelijk van het externe veld:

$$\mathbf{F} = \sum_i [\nabla_i \mathbf{B}_e(\mathbf{r}_i)] \cdot \mathbf{m}_i \quad , \tag{6.3.27}$$

net als in (4.3.26). Juist als in het electrostatische geval kan men nu ook de totale kracht op een magnetiseerbare stof uitdrukken als een integraal:

$$\boxed{\mathbf{F} = \int d\mathbf{r}\ (\nabla \mathbf{B}_e) \cdot \mathbf{M}} \quad . \tag{6.3.28}$$

Ook hier leidt dit niet tot een uitdrukking voor een locale krachtdichtheid, wegens het optreden van krachten die afhangen van de locale druk.

Tot slot bezien we het *moment* van de krachten die een extern veld op een magnetische dipool uitoefenen. Dit moment $\mathbf{N}$ wordt gevonden door op grond van (6.3.21) te schrijven:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \int d\mathbf{r}\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \wedge [\mathbf{J}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}_e(\mathbf{r})] \\ &= \int d\mathbf{r}\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \wedge [\mathbf{J}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}_e(\mathbf{r}_0)] \\ &= \int d\mathbf{r}\ [\mathbf{J}(\mathbf{r})\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{B}_e(\mathbf{r}_0) - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})\ \mathbf{B}_e(\mathbf{r}_0)] \quad . \end{aligned} \tag{6.3.29}$$

In de tweede regel werd $\mathbf{B}_e(\mathbf{r})$ vervangen door $\mathbf{B}_e(\mathbf{r}_0)$ onder de veronderstelling dat het veld slechts langzaam varieert. Om $\mathbf{N}$ verder uit te werken kunnen we nu gebruik maken van (5.3.43). Dan valt de tweede bijdrage in de laatste regel van (6.3.29) weg. De eerste bijdrage is te herschrijven tot een antisymmetrische combinatie van twee termen, op een soortgelijke manier als we in (6.3.23) deden:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \tfrac{1}{2} \int d\mathbf{r}\ [\mathbf{J}(\mathbf{r})\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{B}_e(\mathbf{r}_0) - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\ \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}_e(\mathbf{r}_0)] \\ &= \tfrac{1}{2} \int d\mathbf{r}\ \{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \wedge \mathbf{J}(\mathbf{r})] \wedge \mathbf{B}_e(\mathbf{r}_0)\} \quad . \end{aligned} \tag{6.3.30}$$

In de laatste regel herkennen we weer het magnetische dipoolmoment. Er is dus gevonden:

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B}_e} \quad . \tag{6.3.31}$$

Anders dan de kracht (6.3.25) is het moment ook ongelijk 0 in een uniform veld. Het hier gevonden resultaat heeft dezelfde vorm als IEF(6.1). De afleiding die we hier gaven is echter algemener dan op IEP257, omdat daar de kracht op een stroomlus wordt berekend.

Het *totale moment* van de krachten op een collectie magnetische dipolen is de som van de momenten uitgeoefend op elk van de dipolen. Deze bevat weer naast de bijdrage van het externe veld een bijdrage van de dipoolvelden:

$$\mu_0 \sum_i \mathbf{m}_i \wedge \left[ \sum_{j(\neq i)} \mathbf{m}_j \cdot \nabla_i \nabla_i \frac{1}{4\pi |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \right] \quad . \tag{6.3.32}$$

Net als in het electrostatische geval is deze bijdrage *niet* gelijk aan 0; er is ook hier geen wet “actie=–reactie”voor momenten. Het totale moment dat wordt uitgeoefend op een magnetiseerbare stof met een continue magnetische dipooldichtheid hangt daarom niet alleen van het externe veld af, maar ook van de bijdrage van de magnetisatie tot het totale magnetostatische veld.

## 6.4 Samenvatting van belangrijke resultaten

### Magnetisch veld tengevolge van magnetisatie

- Effectieve stroomdichtheden: (6.3.4)–(6.3.5)
- Veld door magnetisatie: (6.3.7)
- Veld geproduceerd door uniform gepolariseerde bol: IEF(6.16)

### Hulpveld H

- Rotatie van magneetveld door magnetisatie: (6.3.11)
- Definitie hulpveld **H**: IEF(6.18)
- Wet van Ampère voor hulpveld **H**: (6.3.13)
- Randcondities voor magnetisch veld en hulpveld **H**: (6.3.14), (6.3.16)

### Lineaire en niet-lineaire magnetiseerbare stoffen

- Lineaire relaties tussen magnetisatie, magneetveld en hulpveld **H**: IEF(6.29–6.31)
- Definitie susceptibiliteit en permeabiliteit: IEF(6.29), (6.31)
- Verband susceptibiliteit en polariseerbaarheid: (6.3.20)

### Krachten en momenten van krachten

- Kracht op dipool: (6.3.25)
- Totale kracht op magnetiseerbare stof: (6.3.28)
- Moment van kracht op dipool: (6.3.31)

# Hoofdstuk 7

# Electrodynamica

## 7.1 Kernbegrippen

### Wet van Ohm en electromotorische kracht in statische velden

Wet van Ohm. Geleidingsvermogen en soortelijke weerstand. Electromotorische kracht. Bewegende geleiders in statische magnetische velden.

### Wet van Faraday

Electromagnetische inductie en de wet van Faraday. Quasistatische benadering. Wederkerige inductie en de formule van Neumann. Zelfinductie.

### Maxwell-vergelijkingen

Verplaatsingsstroom. Behoud van lading. Maxwell-vergelijkingen in vacuum en in materie. Randcondities.

## 7.2 Notaties

De 'electromotorische kracht' zullen we niet noteren als de script-letter $\mathcal{E}$, maar als $V_{em}$.

## 7.3 Addenda

### Wet van Ohm en de electromotorische kracht in statische velden

In een ideale geleider, met een oneindig groot geleidingsvermogen, is het electrische veld nul, zoals we zagen in Hoofdstuk 2 van IE. In een niet-ideale geleider kan het electrische veld echter wel van nul verschillen. De stroomdichtheid $\mathbf{J}$ is daar evenredig met het electrische veld $\mathbf{E}$:

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}} \quad . \tag{7.3.1}$$

Dit is de bekende *wet van Ohm* (zie IEF(7.3)). De evenredigheidsconstante $\sigma$ is het *geleidingsvermogen*. In IE staan enkele voorbeelden (Voorbeelden 1-3 op IEP286–288) van het gebruik van de wet van Ohm.

Als er ook een magnetisch veld aanwezig is dan is de stroomdichtheid $\mathbf{J}$ evenredig met de Lorentz-kracht op de ladingen in de geleider, dus evenredig met $\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$. Hierbij kan $\mathbf{v}$ in principe van lading tot lading verschillend zijn. Echter, als de geleider een vaste stof is, waar een electrische stroom door heen loopt, dan is de snelheid van de individuele ladingen slechts weinig verschillend van de geleider als geheel (d.i. van het rooster van vaste atomen waar tussen door de electronen hun weg zoeken). In dat geval kan $\mathbf{v}$ dus worden opgevat als de snelheid van de geleider als geheel. We krijgen dan de *gegeneraliseerde wet van Ohm* (cf. IEF(7.2)):

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \left( \mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right)} \quad , \tag{7.3.2}$$

met $\sigma$ opnieuw het geleidingsvermogen. Hierbij is verondersteld dat de ladingsdichtheid $\rho$ gelijk aan 0 is, hetgeen meestal in goede benadering het geval is voor (niet-ideale) geleiders. Als $\rho$ ongelijk 0 is, dan is de totale stroomdichtheid de som van twee bijdragen: het *conductieve* deel $\mathbf{J}_{cond}$, dat nog steeds wordt gegeven door de gegeneraliseerde wet van Ohm (7.3.2), en het *convectieve* deel $\mathbf{J}_{conv} = \rho \mathbf{v}$, dat ontstaat doordat de bewegende draad de ladingsdichtheid meevoert. De totale stroomdichtheid is dan dus $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{cond} + \mathbf{J}_{conv}$.

Als de geleider een dunne stroomdraad is, dan kan de gegeneraliseerde wet van Ohm (7.3.2) worden herschreven voor de door de draad lopende stroom $I$, die volgens (5.3.6) luidt:

$$I \, \mathbf{n}(\mathbf{r}) = \int_S dS' \, \mathbf{J}(\mathbf{r}') \quad , \tag{7.3.3}$$

met $\mathbf{n}$ een eenheidsvector in de richting van draad. Als de velden niet of slechts langzaam veranderen over de doorsnede van de draad, dan vindt men:

$$I \, \mathbf{n}(\mathbf{r}) = \sigma S (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad , \tag{7.3.4}$$

met $S$ de draaddoorsnede, die constant langs de draad wordt verondersteld. Vermenigvuldig deze vergelijking inwendig met een lijn-element $d\mathbf{l}$, en integreer het resultaat over de gehele lengte van de draad. Omdat $I$ constant is langs de draad, vindt men dan voor een draad met lengte $L$:

$$I \frac{L}{\sigma S} = \int_1^2 d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad . \tag{7.3.5}$$

De hier optredende combinatie $L/(\sigma S)$ is de totale *weerstand* $R$ van de draad, zodat men vindt:

$$IR = \int_1^2 d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad . \tag{7.3.6}$$

Voor een gesloten stroomlus wordt dit:

$$IR = \oint d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad . \tag{7.3.7}$$

Het rechterlid heet de *electromotorische kracht* $V_{em}$ van de bewegende stroomlus in het electromagnetische veld (cf. IEF(7.9)). Voor een electrostatisch veld is de eerste bijdrage 0, omdat zo'n veld rotatievrij is. Alleen de tweede bijdrage blijft dan over, wanneer tenminste zowel $\mathbf{v}$ als $\mathbf{B}$ ongelijk nul zijn. In dat geval ontstaat:

$$V_{em} = \oint d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad . \tag{7.3.8}$$

De electromotorische kracht bepaalt de stroom die door de draad zal vloeien, omdat geldt:

$$I = \frac{1}{R} V_{em} \quad . \tag{7.3.9}$$

Als wordt gebruikt dat het magneetveld divergentievrij is, zoals voor een magnetostatisch veld in Hoofdstuk 5 is vastgesteld, dan kan men de kringintegraal verder uitwerken. Als het tijdonafhankelijk karakter van het veld ook expliciet wordt gebruikt (dus $\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$), dan vindt men (zie IEF(7.13) en het bewijs op IEP296–297):

$$\boxed{V_{em} = -\frac{d}{dt}\Phi(t)} \quad , \tag{7.3.10}$$

met $\Phi(t)$ de door de stroomdraad omsloten magnetische flux (zie IEF(7.12)):

$$\boxed{\Phi(t) = \int_{S(t)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})} \quad . \tag{7.3.11}$$

Hierbij staat rechts een integraal over een oppervlak $S(t)$ dat wordt begrensd door de stroomlus. Omdat het magnetostatische veld divergentievrij is, is de integraal inderdaad *on*afhankelijk van de keus van dit oppervlak.

Ook al is het magneetveld statisch, toch kan de door de bewegende stroomdraad omsloten magnetische flux in de tijd veranderen, mits het veld *inhomogeen* is. De electromotorische kracht kan dan van nul verschillen. De stroom volgt tenslotte als

$$I = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\Phi(t) \quad . \tag{7.3.12}$$

### Wet van Faraday

Volgens (7.3.12) zal door een stroomlus, die beweegt in een inhomogeen magnetostatisch veld, een stroom gaan lopen, mits de omsloten flux verandert. Als de lus met een eenparige snelheid zonder vormverandering door het magneetveld beweegt, dan moet dit verschijnsel ook begrepen kunnen worden door een waarnemer die met de lus meereist, zoals volgt uit de algemene eis van *Galilei-invariantie* van de theorie. De met de lus meebewegende waarnemer ziet ter plekke van de stroomdraad een tijdafhankelijk magneetveld. De magnetische flux is weer tijdafhankelijk, ditmaal niet doordat het omsloten oppervlak $S$ tijdafhankelijk is, maar door een tijdafhankelijkheid van $\mathbf{B}$:

$$\Phi(t) = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad , \tag{7.3.13}$$

een uitdrukking die op subtiele wijze verschilt van (7.3.11). De formule (7.3.12) voor de opgewekte stroom wordt nu:

$$IR = -\int_S d\mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad . \tag{7.3.14}$$

Omdat ook voor de meebewegende waarnemer de opgewekte stroom moet volgen uit de wet van Ohm, dus uit (7.3.7) met $\mathbf{v} = 0$, volgt dat voor hem moet gelden:

$$\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = -\int_S d\mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad . \tag{7.3.15}$$

Blijkbaar is de kringintegraal van het electrische veld voor de meebewegende waarnemer ongelijk aan nul, zodat het electrische veld niet langer rotatievrij is: een karakteristieke eigenschap van puur electrostatische velden is verloren gegaan.

Door links in (7.3.15) de rotatie-stelling (zie (1.3.20) uit Hoofdstuk 1) te gebruiken ontstaat:

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E}) = -\int_S d\mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad . \tag{7.3.16}$$

Daar de vergelijking moet gelden voor een willekeurige stroomlus, vindt men tenslotte de *wet van Faraday* (cf. IEF(7.16)):

$$\boxed{\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \quad . \tag{7.3.17}$$

Uit de wet van Faraday volgt door het nemen van de divergentie dat $\nabla \cdot \mathbf{B}$ onafhankelijk is van de tijd, hoe de tijdafhankelijkheid van $\mathbf{B}$ zelf ook mag zijn. Een magnetostatisch veld is divergentievrij. De wet van Faraday is consistent met het door Maxwell geformuleerde postulaat dat ook een tijdafhankelijk magnetisch veld divergentievrij is.

### Quasistatische benadering; inductie en zelfinductie

In de electrostatica voldoet het electrische veld aan de vergelijkingen:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \quad . \tag{7.3.18}$$

In de magnetostatica voldoet het magnetische veld aan de vergelijkingen:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad . \tag{7.3.19}$$

Een *tijdafhankelijk* magnetisch veld geeft via de wet van Faraday aanleiding tot een electrisch veld, zodat de vergelijkingen gekoppeld raken. De koppeling vindt plaats doordat het electrische veld niet langer rotatievrij is. De tweede vergelijking van (7.3.18) moet worden vervangen door (7.3.17). De andere drie vergelijkingen uit (7.3.18) en (7.3.19) blijven onveranderd, althans *als de velden niet te snel veranderen.* In de zogenaamde *quasistatische benadering* zijn de veldvergelijkingen dus:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}} \quad . \tag{7.3.20}$$

Enkele voorbeelden van het berekenen van velden in de quasistatische benadering zijn besproken in IE Voorbeelden 7-9 (p. 306-309).

Het in de quasistatische benadering optredende nieuwe verschijnsel, dat niet in de electro- en magnetostatica voorkomt, is de wet van Faraday. Volgens (7.3.10) geeft een veranderende magnetische flux door een stroomlus een electromotorische kracht in de lus. Anders gezegd: een veranderende magnetische flux *induceert* een electromotorische kracht. Als het magneetveld zelf door een andere stroomlus wordt opgewekt, dan wordt de vectorpotentiaal gegeven door de wet van Biot-Savart (5.3.21). Omdat de door een stroomlus omsloten flux via de rotatie-stelling (1.3.20) direct kan worden uitgedrukt in de vectorpotentiaal:

$$\Phi = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} \quad , \tag{7.3.21}$$

vindt men dan tenslotte voor de door stroomlus 2 omsloten flux tengevolge van stroomlus 1:

$$\boxed{\Phi_2 = \mu_0 I_1 \oint_2 d\mathbf{l}_2 \cdot \left[ \oint_1 d\mathbf{l}_1 \frac{1}{4\pi |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right] \equiv M_{21}\, I_1} \quad , \tag{7.3.22}$$

met $M_{21}$ de coëfficiënt van *wederkerige inductie.* De hier gevonden uitdrukking is de *Neumann-formule*, die ook in IEF(7.22) in een weinig expliciete notatie met een scriptletter $r$ is opgeschreven. De overeenkomstige uitdrukking voor de coëfficiënt van *zelfinductie* ontstaat door de stroomlussen 1 en 2 gelijk te kiezen. In IE worden in Voorbeelden 10 en 11 een wederkerige inductie en een zelfinductie berekend. Tenslotte wordt in Voorbeeld 12 van IE het gevolg van de zelfinductie voor de inschakeling van een batterij in een circuit bepaald.

## Maxwell-vergelijkingen

De quasistatische vergelijkingen (7.3.20) bevatten als bronnen de ladingsdichtheid $\rho$ en de stroomdichtheid $\mathbf{J}$. Deze voldoen aan de continuïteitsvergelijking IEF(5.29), die het behoud van lading uitdrukt. Uit de Ampère-wet (de laatste van (7.3.20)) volgt direct door het nemen van de divergentie dat in de quasistatische benadering de stroomdichtheid divergentievrij is, zodat er in het algemeen niet aan de continuïteitsvergelijking is voldaan. Uit de wet van Gauss (de eerste van (7.3.20)) kan de tijdafgeleide van $\rho$ direct worden gevonden:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad , \tag{7.3.23}$$

zodat aan de continuïteitsvergelijking wordt voldaan als geldt:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad . \tag{7.3.24}$$

Het rechterlid is minus de divergentie van de zogenaamde *verplaatsingsstroomdichtheid*. De som van de stroomdichtheid en de verplaatsingsstroomdichtheid is blijkbaar wèl divergentievrij. Door in het rechterlid van de Ampère-wet nu deze som te schrijven worden de vergelijkingen alsnog compatibel met de continuïteitsvergelijking. De volle Maxwell-vergelijkingen luiden dan tenslotte (cf. IEF(7.39)):

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\quad,\quad\nabla\wedge\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\quad,\quad\nabla\cdot\mathbf{B}=0\quad,\quad\nabla\wedge\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}}\quad. \tag{7.3.25}$$

Deze vergelijkingen gelden voor willekeurige tijdafhankelijke velden.

## Randcondities

In Hoofdstuk 2 en 5 zijn de randcondities voor het electrostatische en het magnetostatische veld afgeleid in de buurt van oppervlakken met een oppervlakteladingsdichtheid $\sigma$ en een oppervlaktestroomdichtheid $\mathbf{K}$. De resultaten werden vermeld in (2.3.17) of IEF(2.33) en (5.3.24) of IEF(5.74):

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(\mathbf{r})-\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})\quad,\\ \mathbf{B}_1(\mathbf{r})-\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) &= \mu_0\mathbf{K}(\mathbf{r})\wedge\mathbf{n}(\mathbf{r})\quad.\end{aligned} \tag{7.3.26}$$

Deze randcondities blijven geldig voor algemene tijdafhankelijk velden, die aan de volle Maxwell-vergelijkingen voldoen. De extra tijdafgeleiden van het electrische en het magnetische veld die in de volle Maxwell-vergelijkingen optreden geven geen extra bijdragen. Voor het electrische veld ziet men dat in door terug te keren naar de afleiding van (2.3.17). De vergelijking (2.3.15), die de continuïteit van de component van het electrische veld parallel aan het oppervlak gaf, volgde indertijd door toepassen van de rotatie-stelling op de electrostatische vergelijking $\nabla\wedge\mathbf{E}$. Nu moet in plaats daarvan de wet van Faraday worden gebruikt, zodat $\mathbf{E}$ niet langer rotatievrij is. De tijdafgeleide van het magnetische veld geeft echter bij toepassen van de rotatie-stelling aanleiding tot de tijdafgeleide van de magnetische flux door een verdwijnend klein oppervlak, zoals getekend in Figuur 7.47 van IEP332, zodat de tijdafgeleide geen rol speelt in de randconditie. Op analoge wijze ziet men dat de verplaatsingsstroom niet bijdraagt tot de randconditie, als men de rotatie-stelling toepast op de vierde vergelijking van Maxwell.

## Maxwell-vergelijkingen in gepolariseerde en gemagnetiseerde materie

In Hoofdstuk 3 werd afgeleid, door uit te gaan van een multipool-ontwikkeling, dat het electrische veld van een continue ladingsverdeling met totale lading nul op grote afstand wordt gedomineerd door de electrische dipoolbijdrage (3.2.13). Als gevolg daarvan werd in Hoofdstuk 4 gevonden dat het electrische veld gegenereerd door een brok gepolariseerde materie een bijdrage bevat met een effectieve ladingsdichtheid $-\nabla\cdot\mathbf{P}$ en een effectieve oppervlakteladingsdichtheid $\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}$. In een gepolariseerd brok materie, met een electrische dipooldichtheid $\mathbf{P}$, bevat de wet van Gauss daardoor in het rechterlid een extra term (zie (4.3.11)). Deze uitbreiding van de wet van Gauss blijft van kracht als het electrische veld tijdafhankelijk is, zodat de wet van Gauss (de eerste vergelijking van (7.3.25)) een extra term bevat met:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad . \tag{7.3.27}$$

Evenzo is in Hoofdstuk 5 gevonden, opnieuw door uit te gaan van een multipool-ontwikkeling, dat het magnetische veld van een continue stroomverdeling op grote afstand wordt gedomineerd door de magnetische dipoolbijdrage (5.3.48). Als gevolg daarvan werd in Hoofdstuk 6 gevonden dat in een gemagnetiseerd brok materie, met een magnetische dipooldichtheid $\mathbf{M}$, de wet van Ampère in het rechterlid een extra term $\mu_0 \nabla \wedge \mathbf{M}$ (zie (6.3.12)) bevat. Deze uitbreiding van de wet van Ampère blijft echter *niet* van kracht als het magnetische veld tijdafhankelijk is.

De reden daarvan is dat de multipool-ontwikkeling voor een continue stroomverdeling in Hoofdstuk 5 is afgeleid onder de voorwaarde dat de stroomdichtheid $\mathbf{J}$ divergentievrij is, en dat is in het algemeen niet het geval voor een tijdafhankelijke stroom-ladingsverdeling, zoals we boven al zagen. Het gevolg is dat zelfs in de quasistatische benadering de multipool-ontwikkeling voor het magnetische veld (of voor de vectorpotentiaal) een extra bijdrage bevat, zoals we nu zullen laten zien.

In de quasistatische benadering is de vectorpotentiaal gegeven door de wet van Biot-Savart (5.3.19), en dus de multipool-ontwikkeling door (5.3.37). De monopoolbijdrage voor de vectorpotentiaal is, zoals we zagen in (5.3.37), evenredig met $\int d\mathbf{r}' \mathbf{J}(\mathbf{r}')$. Voor een stationaire stroomverdeling is dat nul, zoals in (5.3.40) bleek. Als de stroomverdeling echter *niet* stationair is dan luidt (5.3.38):

$$\int d\mathbf{r}' \; (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \; [\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', t)] = -\int d\mathbf{r}' \; (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \, \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{p}(t)}{\partial t} \quad , \tag{7.3.28}$$

met $\mathbf{p}$ het electrische dipoolmoment van de stroom-ladingsverdeling. Omdat (5.3.39) onverkort blijft gelden, ontstaat dan in plaats van (5.3.40):

$$\int d\mathbf{r} \; \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{p}(t)}{\partial t} \quad . \tag{7.3.29}$$

De multipool-ontwikkeling voor de vectorpotentiaal bevat dus naast de magnetische dipoolbijdrage (zie (5.3.45)) een monopoolbijdrage met de tijdafgeleide van het electrische dipoolmoment:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \mu_0 \; \mathbf{m} \wedge \nabla \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \ldots \quad , \tag{7.3.30}$$

nog steeds in de quasistatische benadering. [Terzijde merken we op dat in de afleiding van de magnetische dipoolterm in (5.3.41)–(5.3.44) opnieuw gebruik werd gemaakt van het stationaire karakter van de stroomdichtheid. Men ziet eenvoudig aan (5.3.41) dat dit betekent dat een term met de tijdafgeleide van het electrische quadrupoolmoment is weggelaten. Die term komt voor in de met ... aangegeven termen in (7.3.30).]

Het gevolg van de hier gevonden extra term is dat in de quasistatische benadering het magnetische veld gegenereerd door een gepolariseerd en gemagnetiseerd brok materie een bijdrage bevat met een effectieve stroomdichtheid:

$$\mathbf{J}_b = \nabla \wedge \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad , \tag{7.3.31}$$

zoals volgt door de afleiding van (6.3.3) na te lopen. De extra term in de wet van Ampère door de aanwezigheid van gepolariseerde en gemagnetiseerde materie wordt bepaald door deze effectieve stroomdichtheid. Na toevoeging van de verplaatsingsstroom ontstaat dan uit de wet van Ampère de vierde Maxwell-vergelijking, nu voor gepolariseerde en gemagnetiseerde materie. De effectieve oppervlaktestroomdichtheid blijft $-\mathbf{n}\wedge\mathbf{M}$, zoals vroeger (zie (6.3.4)). De hier gegeven afleiding van de bijdrage van $\mathbf{P}$ tot $\mathbf{J}_b$ is wat zorgvuldiger en algemener dan in IE, boven IEF(7.48), is gepresenteerd.

De Maxwell-vergelijkingen voor gepolariseerde en gemagnetiseerde materie hebben nu tenslotte de vorm:

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho_f+\rho_b}{\varepsilon_0}\ ,\ \nabla\wedge\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\ ,\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0\ ,\ \nabla\wedge\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J}_f+\mathbf{J}_b)+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}}\ , \tag{7.3.32}$$

met $\rho_b$ en $\mathbf{J}_b$ gegeven door (7.3.27) en (7.3.31). Deze effectieve stroom- en ladingsdichtheden voldoen aan een continuïteitsvergelijking, juist als $\rho_f$ en $\mathbf{J}_f$. Net als in de electrostatica en de magnetostatica kan men weer de hulpvelden $\mathbf{D}$ en $\mathbf{H}$ invoeren. Dat leidt tot de Maxwell-vergelijkingen in de standaardvorm IEF(7.55).

### Randcondities in aanwezigheid van gepolariseerde en gemagnetiseerde materie

De in Hoofdstuk 4 en 6 afgeleide randcondities voor de velden aan de randen van gepolariseerde en gemagnetiseerde materie blijven van kracht als de velden voldoen aan de volle veldvergelijkingen. De reden is dezelfde als hierboven uitgelegd voor de velden in vacuum. Men vindt dus weer opnieuw (4.3.13) en (4.3.15) voor de electrische velden, en (6.3.14) en (6.3.16) voor de magnetische velden. In IE, op IEP331-333, is de afleiding van de randcondities nogmaals samengevat.

## 7.4 Samenvatting van belangrijke resultaten

### Wet van Ohm en electromotorische kracht

- Wet van Ohm: (7.3.1), (7.3.2)
- Electromotorische kracht: (7.3.10)
- Magnetische flux: (7.3.11)

### Wet van Faraday

- Wet van Faraday: (7.3.17)
- Quasistatische veldvergelijkingen: (7.3.20)
- Neumann-formule voor wederkerige inductie: (7.3.22)

### Maxwell-vergelijkingen

- Maxwell-vergelijkingen in vacuum: (7.3.25)
- Maxwell-vergelijkingen in gepolariseerde en gemagnetiseerde materie: (7.3.32)
- Randcondities: IEF(7.59–7.62)

# Hoofdstuk 8

# Behoudswetten

## 8.1 Kernbegrippen

### Balansvergelijkingen en behoudswetten

Behoudswetten van massa en lading. Balansvergelijking voor materiële impuls en veld-impuls. Spanningstensor van Maxwell. Behoudswet voor totale impuls. Behoudswet van impulsmoment. Balansvergelijking voor kinetische energie en voor veld-energie. Joule-warmte. Poynting-vector. Balansvergelijking voor inwendige energie. Behoudswet voor totale energie.

## 8.2 Notaties

Als tevoren wordt het boek *Introduction to Electrodynamics* van D.J. Griffiths kort IE genoemd. Paginanummers uit IE worden genoteerd als IEPn, formulenummers als IEFn en vraagstuknummers als IEVn. We zullen dezelfde notaties gebruiken als in Electrodynamica A. Soms wijken die enigszins af van die in IE. Voorts zullen we ook in dit hoofdstuk en de volgende enkele nieuwe van IE afwijkende notaties gebruiken.

## 8.3 Addenda

### Behoudswetten

Behoudswetten spelen een belangrijke rol in de fysica. Een bekend voorbeeld van zo'n behoudswet is de wet van behoud van energie, die een van de belangrijkste pijlers van het bouwwerk 'natuurkunde' is. Het is een voorbeeld van een universele wet, die algemene geldigheid lijkt te bezitten. Andere voorbeelden van behoudswetten zijn de wet van behoud van impuls en impulsmoment. Nog weer een ander voorbeeld zijn we in het kader van de electrodynamica tegengekomen: de continuïteitsvergelijking die het behoud van lading uitdrukt. In het vervolg worden de behoudswetten en de bijbehorende 'balanswetten' (een begrip dat straks duidelijk zal worden) systematisch bekeken. Daarbij zal de materie gezien worden als een continuum. De deeltjes waaruit het continuum is opgebouwd zullen niet worden bekeken. Voor de eenvoud zullen we *niet* kijken naar polarisatie- en magnetisatie-effecten. Achtereenvolgens zullen we bespreken:

1. behoud van massa en lading;
2. behoud van impuls;
3. behoud van impulsmoment;
4. behoud van energie.

Deze behoudswwetten worden in het bijzonder ook veel gebruikt in de *magnetohydrodynamica*.

### Behoud van massa en lading

Het behoud van lading wordt gegeven door de continuïteitsvergelijking IEF(8.4):

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}} \quad . \tag{8.3.1}$$

Zowel $\rho$ als $\mathbf{J}$ hangen af van plaats en tijd. Door integreren over de gehele ruimte en gebruiken van de divergentie-stelling ziet men dat de totale lading inderdaad onafhankelijk van de tijd is.

Een analoge vergelijking is op te schrijven voor het behoud van massa:

$$\boxed{\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v})} \quad . \tag{8.3.2}$$

Hierbij is $\rho_m$ de *massadichtheid*, en $\mathbf{v}$ de *locale snelheid* van de materie. Voor een vloeistof bij voorbeeld is dit de zogenaamde 'hydrodynamische snelheid', d.i. de locale snelheid van de vloeistof op een bepaalde plaats en een zeker tijdstip. (Dit moet worden onderscheiden van de snelheid van een puntdeeltje, die we eerder bekeken.) Het product $\rho_m \mathbf{v}$ is de *massastroomdichtheid*, of ook de (mechanische) *impulsdichtheid* van de materie. Net als $\rho$ en $\mathbf{J}$ zijn ook $\rho_m$ en $\mathbf{v}$ functies van plaats en tijd. Opnieuw vindt men door integratie dat de totale massa tijdonafhankelijk is. (Relativistische effecten die kunnen leiden tot omzetting van massa in energie worden hier buiten beschouwing gelaten.)

### Behoud van impuls

De bewegingsvergelijking voor de materie heeft de vorm:

$$\rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{f} \quad , \tag{8.3.3}$$

waar links de meebewogen afgeleide staat. Deze is voor een continuum gedefinieerd als

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad . \tag{8.3.4}$$

Voorts treedt rechts in (8.3.3) minus de gradiënt van de *druk* $p$ op. Tenslotte is $\mathbf{f}$ de krachtdichtheid van de Lorentz-kracht op de stroom-ladingsverdeling:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} \quad . \tag{8.3.5}$$

Alle grootheden, in het bijzonder dus ook $\mathbf{f}$ en $p$, hangen van plaats en tijd af.

Een iets geschiktere vorm voor (8.3.3) ontstaat door massabehoud (8.3.2) te gebruiken om de meebewogen afgeleide te herschrijven:

$$\begin{aligned}\rho_m\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho_m\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\rho_m\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}=\frac{\partial(\rho_m\mathbf{v})}{\partial t}-\frac{\partial\rho_m}{\partial t}\mathbf{v}+\rho_m\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\\ &= \frac{\partial(\rho_m\mathbf{v})}{\partial t}+[\nabla\cdot(\rho_m\mathbf{v})]\mathbf{v}+\rho_m\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}=\frac{\partial(\rho_m\mathbf{v})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_m\mathbf{v}\mathbf{v}) \quad . \end{aligned} \tag{8.3.6}$$

Aldus wordt (8.3.3):

$$\boxed{\frac{\partial(\rho_m\mathbf{v})}{\partial t}=-\nabla\cdot(\rho_m\mathbf{v}\mathbf{v})-\nabla p+\mathbf{f}} \quad . \tag{8.3.7}$$

Het linkerlid is de tijdafgeleide van de impulsdichtheid. Rechts staat allereerst (minus) de divergentie van een tensor $\rho_m\mathbf{v}\mathbf{v}$. Deze tensor beschrijft de stroming of de *convectie* van de impulsdichtheid $\rho\mathbf{v}$, en is dus een *impulsstroomdichtheid*. Het verband tussen de impulsdichtheid en de impulsstroomdichtheid is analoog aan dat tussen de massadichtheid en de massastroomdichtheid in (8.3.2). De laatste beschrijft de convectie van de eerste. Voorts treedt in (8.3.7) op de gradiënt van de druk, die we, als we willen, ook kunnen schrijven als (minus) de divergentie van de tensor $p\mathsf{U}$.

Net als in de wetten voor ladingsbehoud en voor massabehoud vallen de divergentie-bijdragen in (8.3.7) bij integratie over de gehele ruimte weg, zoals is te zien na gebruik van de divergentie-stelling. Toch is er *geen behoud* van de over de ruimte geïntegreerde mechanische impulsdichtheid, want de laatste term $\mathbf{f}$ heeft niet de vorm van een divergentie. Door het optreden van die bronterm is (8.3.7) geen *behoudswet* van impuls, maar een zogenaamde *balansvergelijking*. De hier gevonden *balansvergelijking van de mechanische impulsdichtheid*, die als het ware de winst- en verliesrekening van de impulsdichtheid bijhoudt. De termen die niet de vorm van een divergentie hebben (hier dus $\mathbf{f}$) heten de *brontermen* van de balansvergelijking.

Een echte behoudswet voor de totale impuls van het systeem volgt als we de krachtdichtheid herschrijven door gebruik te maken van de Maxwell-vergelijkingen. In de electrostatica en de magnetostatica hebben we dat al gezien in (2.3.23) en (5.3.31). Voor tijdafhankelijke velden loopt het uitwerken als volgt:

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \varepsilon_0(\nabla\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}+\left(\frac{1}{\mu_0}\nabla\wedge\mathbf{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\wedge\mathbf{B}\\ &= \varepsilon_0\nabla\cdot(\mathbf{E}\mathbf{E})-\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\nabla\mathbf{E}+\frac{1}{\mu_0}[\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{B}-(\nabla\mathbf{B})\cdot\mathbf{B}]-\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\wedge\mathbf{B}\\ &= \varepsilon_0\nabla\cdot(\mathbf{E}\mathbf{E})-\varepsilon_0(\nabla\mathbf{E})\cdot\mathbf{E}-\varepsilon_0(\nabla\wedge\mathbf{E})\wedge\mathbf{E}+\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\mathbf{B}\mathbf{B})-\frac{1}{\mu_0}(\nabla\mathbf{B})\cdot\mathbf{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\wedge\mathbf{B}\\ &= \nabla\cdot\left(\varepsilon_0\mathbf{E}\mathbf{E}+\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\mathbf{B}\right)-\tfrac{1}{2}\nabla\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}) \quad . \end{aligned} \tag{8.3.8}$$

Er is dus gevonden:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\mathbf{E}\wedge\mathbf{B})=\nabla\cdot\mathsf{T}_{em}-\mathbf{f}} \tag{8.3.9}$$

(cf. IEF(8.21)), met $\mathsf{T}_{em}$ de *electromagnetische Maxwell-spanningstensor* (zie IEF(8.19)):

$$\boxed{\mathsf{T}_{em} = \varepsilon_0 \mathbf{E}\mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\mathbf{B} - \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)\mathsf{U}} \quad . \tag{8.3.10}$$

Deze spanningstensor is een generalisatie van de electrostatische en de magnetostatische spanningstensoren (2.3.24) en (5.3.32). We kunnen deze vergelijking opvatten als een balansvergelijking voor de *electromagnetische impulsdichtheid* $\varepsilon_0 \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$.

Een andere vorm voor de electromagnetische impulsdichtheid ontstaat door de zogenaamde *Poynting-vector* $\mathbf{S}$ in te voeren, die ook een rol speelt in de straks te bespreken wet van behoud van energie:

$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}} \tag{8.3.11}$$

(zie IEF(8.10)). In termen van $\mathbf{S}$ luidt de electromagnetische impulsdichtheid $\mu_0\varepsilon_0\mathbf{S}$.

De bronterm van de balansvergelijking (8.3.9) voor de electromagnetische impulsdichtheid is de laatste term $-\mathbf{f}$. Deze is juist het tegengestelde van de bronterm in de balansvergelijking (8.3.7) voor de materiële impulsdichtheid. Dat is geen toeval: winst voor de ene impulsdichtheid moet gaan ten koste van verlies voor de andere impulsdichtheid. Anders gezegd: er vindt uitwisseling van impuls plaats tussen materie en veld. Als we (8.3.7) en (8.3.9) combineren, en aldus $\mathbf{f}$ elimineren, dan ontstaat:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \mathbf{v} + \varepsilon_0 \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = -\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}\mathbf{v}) - \nabla \cdot (p\mathsf{U}) + \nabla \cdot \mathsf{T}_{em}} \quad . \tag{8.3.12}$$

Dit is de *behoudswet van de totale impuls*, die de som is van de impuls van de materie en van het veld. Links staat immers de som van de materiële impulsdichtheid en de electromagnetische impulsdichtheid. Bij integratie over de gehele ruimte vallen de divergentietermen rechts weg wegens de divergentie-stelling, en we houden over dat de integraal (over de gehele ruimte) van de totale impulsdichtheid tijdonafhankelijk is. Tot slot merken we op dat de Maxwell-spanningstensor afgezien van het teken op één lijn staat met de materiële druk. Dit verklaart het gebruik van het aan de elasticiteitsleer ontleende woord 'spanning' in plaats van 'druk' ('druk' is minus 'spanning'). We merken op dat (8.3.12) niet geheel overeenkomt met IEF(8.31), omdat daar de eerste twee termen in het rechterlid van (8.3.12) ten onrechte ontbreken.

### Behoud van impulsmoment

Als we het vectorproduct van $\mathbf{r}$ met de materiële impulsdichtheid $\rho_m\mathbf{v}$ nemen, dan ontstaat de materiële impulsmomentdichtheid $\mathbf{r} \wedge (\rho_m \mathbf{v})$. Evenzo ontstaat uit de electromagnetische impulsdichtheid de electromagnetische impulsmomentdichtheid $\mathbf{r} \wedge (\varepsilon_0 \mathbf{E} \wedge \mathbf{B})$. Het is niet moeilijk uit de balansvergelijkingen (8.3.7) en (8.3.9) de balansvergelijkingen voor de impulsmomentdichtheden af te leiden. Ze bevatten als brontermen het moment $\mathbf{r} \wedge \mathbf{f}$ van de krachtdichtheid $\mathbf{f}$. Door optellen van de twee balansvergelijkingen ontstaat een behoudswet voor het totale impulsmoment. Dit zullen we niet verder uitwerken.

### Behoud van energie

Om de behoudswet voor energie af te leiden kijken we eerst naar de kinetische energie van de materie. Als materie met een massadichtheid $\rho_m$ beweegt met een snelheid $\mathbf{v}$, dan is de dichtheid van kinetische energie $\frac{1}{2}\rho_m v^2$. De balansvergelijking voor deze kinetische energiedichtheid volgt door te schrijven:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho_m v^2) = \frac{\partial(\rho_m \mathbf{v})}{\partial t} \cdot \mathbf{v} - \tfrac{1}{2}v^2 \frac{\partial \rho_m}{\partial t} \quad . \tag{8.3.13}$$

In de eerste term rechts gebruiken we de balansvergelijking (8.3.7) van de materiële impulsdichtheid, en in de tweede de behoudswet (8.3.2) van massa. Dan komt er:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho_m v^2) &= -\left[\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}\mathbf{v})\right] \cdot \mathbf{v} - (\nabla p) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \tfrac{1}{2}v^2 \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) \\
&= -\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) v^2 - \rho_m \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - (\nabla p) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \tfrac{1}{2}v^2 \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) \\
&= -\tfrac{1}{2}v^2 \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) - \tfrac{1}{2}\rho_m \mathbf{v} \cdot (\nabla v^2) - (\nabla p) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad ,
\end{aligned} \tag{8.3.14}$$

of wel tenslotte de balansvergelijking voor de kinetische energiedichtheid:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho_m v^2) = -\nabla \cdot (\tfrac{1}{2}\rho_m v^2 \mathbf{v} + p\mathbf{v}) + p\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad . \tag{8.3.15}$$

De eerste twee termen hebben de vorm van een divergentie. Als ze de enige termen rechts zouden zijn dan was de totale kinetische energie behouden, zoals men ziet door de vergelijking te integreren over de gehele ruimte en de divergentie-stelling te gebruiken (vergelijk de opmerking bij de wetten van behoud van lading en massa). De laatste twee termen zijn de *brontermen* van de balansvergelijking: zij verstoren het behoud.

De eerste bronterm $p\nabla \cdot \mathbf{v}$ in (8.3.15) is eenvoudig te interpreteren. We bedenken daarvoor dat uit de behoudswet voor massa volgt:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\rho_m}\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) - \frac{1}{\rho_m}\mathbf{v} \cdot \nabla \rho_m = -\frac{1}{\rho_m}\left(\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_m\right) = -\frac{1}{\rho_m}\frac{d\rho_m}{dt} \quad . \tag{8.3.16}$$

De eerste bronterm in (8.3.15) is dus

$$p\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{p}{\rho_m}\frac{d\rho_m}{dt} = \frac{p}{v_m}\frac{dv_m}{dt} \quad , \tag{8.3.17}$$

met $v_m = 1/\rho_m$ het volume per massa-eenheid. Nu is uit thermodynamische beschouwingen bekend dat $p dv_m/dt$ de arbeid per tijdseenheid is die door de druk wordt verricht op een massa-eenheid, als het door deze laatste ingenomen volume verandert. De bronterm (8.3.17) geeft (na de deling door $v_m$) de door de druk verrichte arbeid per tijdseenheid en per volume-eenheid, ofwel het door de druk verrichte *vermogen* per volume-eenheid. De kinetische energie verandert door deze arbeid, zodat het optreden van de bronterm in (8.3.15) verklaarbaar is. De kinetische energie is niet langer behouden door dit druk-effect.

De laatste bronterm in (8.3.15) is de arbeid per tijdseenheid en per volume-eenheid die wordt verricht door de krachten met krachtdichtheid $\mathbf{f}$ op de met snelheid $\mathbf{v}$ bewegende materie. Door invullen van de Lorentz-kracht (8.3.5) kunnen we deze arbeid verder uitwerken:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} &= \rho\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}+(\mathbf{J}\wedge\mathbf{B})\cdot\mathbf{v}\\
&= \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}-(\mathbf{J}-\rho\mathbf{v})\cdot\mathbf{E}-\mathbf{J}\cdot(\mathbf{v}\wedge\mathbf{B})\\
&= \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}-(\mathbf{J}-\rho\mathbf{v})\cdot\mathbf{E}-\mathbf{J}\cdot(\mathbf{v}\wedge\mathbf{B})+\rho\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\wedge\mathbf{B})\\
&= \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}-(\mathbf{J}-\rho\mathbf{v})\cdot(\mathbf{E}+\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}) \quad . \qquad (8.3.18)
\end{aligned}$$

De tweede term bevat de combinatie $\mathbf{J}-\rho\mathbf{v}$. Dit is de *conductieve* stroomdichtheid, zoals we onder (7.3.2) opmerkten. Deze conductieve stroomdichtheid voldoet aan de gegeneraliseerde wet van Ohm (7.3.2), zodat we voor de tweede bronterm in (8.3.15) hebben gevonden:

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}-P_{Joule} \quad , \qquad (8.3.19)$$

met

$$P_{Joule}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{v}\wedge\mathbf{B})^2=\frac{1}{\sigma}(\mathbf{J}-\rho\mathbf{v})^2 \qquad (8.3.20)$$

de per tijdseenheid en per volume-eenheid opgewekte zogenaamde *Joule-warmte*, die met het proces van electrische geleiding gepaard gaat. Anders gezegd, $P_{Joule}$ is het vermogen dat per volume-eenheid wordt ontwikkeld door de Joule-warmte. Voor een weerstand in de vorm van een stilstaande dunne draad zonder ladingsdichtheid is de Joule-warmte van een gedeelte van de draad met doorsnede $S$ en lengte $L$ gegeven door (cf. IEF(7.7)):

$$\frac{LS}{\sigma}J^2=\frac{L}{\sigma S}I^2=RI^2 \quad , \qquad (8.3.21)$$

met $R$ de weerstand van de draad.

De balansvergelijking (8.3.15) voor de kinetische energiedichtheid is tenslotte:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho_m v^2)=-\nabla\cdot(\tfrac{1}{2}\rho_m v^2\mathbf{v}+p\mathbf{v})+\frac{p}{v_m}\frac{dv_m}{dt}+\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}-P_{Joule}} \quad . \qquad (8.3.22)$$

Deze balansvergelijking bevat drie brontermen: een drukterm, een term $\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$ en een bijdrage van de Joule-warmte.

De bronterm $\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$ in de balansvergelijking voor de kinetische energiedichtheid kan worden begrepen als een overdracht van energie van veld naar materie. Om dat in te zien leiden we een balansvergelijking af voor de energiedichtheid van het electromagnetische veld. Uit de Maxwell-vergelijkingen volgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} &= \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\cdot\left[\nabla\wedge\mathbf{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right]\\
&= -\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B})+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\wedge\mathbf{E})\cdot\mathbf{B}-\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\\
&= -\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B})-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{B}-\tfrac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t}\\
&= -\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B})-\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t}-\tfrac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t} \quad , \qquad (8.3.23)
\end{aligned}$$

en dus (cf. IEF(8.8)):

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right) = -\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}) - \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}} \quad . \tag{8.3.24}$$

Dit is de *stelling van Poynting*. Deze kan worden gezien als een *balansvergelijking voor de electromagnetische energiedichtheid* $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}B^2/\mu_0$, die een generalisatie is van de electrostatische energiedichtheid $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$, zoals in IEF(2.45) werd gevonden. De electromagnetische energiestroomdichtheid is juist de Poynting-vector $\mathbf{S}$, die werd gedefinieerd in (8.3.11). De bronterm in de hier gevonden balansvergelijking is precies het tegengestelde van de in (8.3.22) optredende bronterm $\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$.

Door optellen van de balansvergelijkingen voor de kinetische energiedichtheid en de electromagnetische energiedichtheid vinden we nu:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho_m v^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right) = -\nabla\cdot\left(\tfrac{1}{2}\rho_m v^2\mathbf{v} + p\mathbf{v} + \mathbf{S}\right) + \frac{p}{v_m}\frac{dv_m}{dt} - P_{Joule} \quad . \tag{8.3.25}$$

Nog steeds is er geen behoud: de door de druk verrichte arbeid en de Joule-warmte gooien roet in het eten. Er is blijkbaar nog een derde vorm van energie in het spel. Dit is inderdaad het geval: de uit de thermodynamica bekende *inwendige energie* van de materie.

Als we deze inwendige energie per massa-eenheid noteren als $u$ dan weten we dat volgens de eerste hoofdwet van de thermodynamica geldt:

$$\frac{du}{dt} = \frac{dq}{dt} - p\frac{dv_m}{dt} \quad . \tag{8.3.26}$$

De gegenereerde warmte per tijdseenheid en per massa-eenheid, die de inwendige energie doet toenemen is precies de Joule-warmte:

$$\frac{dq}{dt} = v_m P_{Joule} \quad , \tag{8.3.27}$$

waar de factor $v_m$ ontstond door de overgang van volume-eenheid naar massa-eenheid. Voorts kunnen we, net als in de overgang (8.3.6), massabehoud gebruiken om te schrijven:

$$\rho_m\frac{du}{dt} = \frac{\partial(\rho_m u)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_m u\mathbf{v}) \quad . \tag{8.3.28}$$

De eerste hoofdwet is nu in de vorm te brengen van een balansvergelijking voor de inwendige energiedichtheid:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho_m u)}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho_m u\mathbf{v}) - \frac{p}{v_m}\frac{dv_m}{dt} + P_{Joule}} \quad . \tag{8.3.29}$$

Door vergelijken van (8.3.25) en (8.3.29) vinden we tenslotte de lang gezochte *behoudswet van energie*:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho_m v^2 + \rho_m u + \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right) = -\nabla\cdot\left(\tfrac{1}{2}\rho_m v^2\mathbf{v} + p\mathbf{v} + \rho_m u\mathbf{v} + \mathbf{S}\right)} \quad . \tag{8.3.30}$$

We zien dat de totale energiedichtheid de som is van drie bijdragen:

1. de kinetische energiedichtheid,
2. de inwendige energiedichtheid,
3. en de electromagnetische energiedichtheid.

Apart zijn deze drie vormen van energie niet behouden. Ze voldoen alleen aan balansvergelijkingen, namelijk (8.3.22), (8.3.24) en (8.3.29), die elk nog brontermen bevatten. Deze brontermen beschrijven de uitwisseling tussen de drie typen energie. De totale balans is echter sluitend: wat wordt gewonnen in het ene type energie gaat juist verloren in het andere type. Alle brontermen zijn verdwenen, als de totale balans wordt opgemaakt, zoals te zien is aan (8.3.30). Een dergelijke boekhouding was ook al te zien bij de impuls. Ook daar traden twee bijdragen in de totale impulsdichtheid op, de mechanische impulsdichtheid en de electromagnetische impulsdichtheid.

### Conclusie

De hier gevonden balansvergelijkingen en behoudswetten zijn zeer nuttig bij het interpreteren van electromagnetische verschijnselen. Voorbeelden die in IE worden besproken zijn:

1. impuls: IEP353 Voorbeeld 8.2, IEV8.3, IEV8.4;
2. impulsmoment: IEP359 Voorbeeld 8.4;
3. energie: IEP348 Voorbeeld 8.1, IEV8.9.

## 8.4 Samenvatting van belangrijke resultaten

- Behoud van lading en massa: (8.3.1), (8.3.2)
- Balansvergelijking van mechanische impulsdichtheid: (8.3.7)
- Balansvergelijking van electromagnetische impulsdichtheid: (8.3.9)
- Electromagnetische spanningstensor: (8.3.10)
- Poynting-vector: (8.3.11)
- Behoud van totale impuls: (8.3.12)
- Balansvergelijking voor kinetische energiedichtheid: (8.3.22)
- Stelling van Poynting: (8.3.24)
- Balansvergelijking voor inwendige energiedichtheid: (8.3.29)
- Behoudswet voor totale energie: (8.3.30)

# Hoofdstuk 9

# Golfverschijnselen

## 9.1 Kernbegrippen

### Golfvergelijking

Golfvergelijking. Golven in één ruimtelijke dimensie. Fourier-taal. Polarisatievectoren.

### Electromagnetische golven in vacuum

Electromagnetische golven in vacuum. Energie en energiestroom van golven.

### Electromagnetische golven in niet-geleidende media

Golven in lineaire media. Reflectie en transmissie. Wet van Snellius. Fresnel-vergelijkingen. Brewster-hoek.

### Golven in geleiders

Gedempte golven. Indringdiepte. Reflectie en transmissie aan oppervlak van geleider.

### Dispersie

Dispersie in niet-geleidende media.

### Geleide golven

Rechthoekige golfpijpen. TE-golven. Coaxiale geleider.

## 9.2 Notaties

Polarisatievectoren worden genoteerd als $\mathbf{e}_{\mathbf{k}j}$ of als $\mathbf{e}$ zonder indices. Een complex golfgetal wordt genoteerd als $k$. De reële en imaginaire delen van een complex golfgetal worden genoteerd als $k'$ en $k''$, niet als $k$ en $\kappa$, zoals in IE. De notaties $\tilde{f}$, $\tilde{\mathbf{E}}$ en $\tilde{\mathbf{B}}$ voor een complexe golffunctie zal niet worden gebruikt. Wij zullen uitsluitend reële golffuncties gebruiken, die ontstaan door een complexe grootheid en zijn complex geconjugeerde (c.c.) op te tellen.

## 9.3 Addenda

### Golfvergelijking

De scalaire golfvergelijking voor één ruimtelijke dimensie luidt

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0} \quad , \tag{9.3.1}$$

met $v$ de voortplantingssnelheid of *fasesnelheid*. De algemene oplossing van deze lineaire tweede-orde partiële differentiaalvergelijking is van de vorm

$$f(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad , \tag{9.3.2}$$

met $f_i$ willekeurige functies. Deze kunnen zo worden gekozen dat aan de begincondities wordt voldaan. Als begincondities kunnen bij voorbeeld worden gekozen $f(x,0)$ en $\partial f(x,t)/\partial t|_{t=0}$.

De oplossing kan ook worden gevonden door op *Fourier-taal* over te gaan volgens:

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ikx}\ g(k,t) \quad , \tag{9.3.3}$$

met complexe $g(k,t)$. Als $f(x,t)$ reëel is, dan geldt $g(k,t) = g^*(-k,t)$. De uitdrukking voldoet aan de golfvergelijking als $g(k,t)$ van de vorm is $g(k)\exp(\pm i\omega(k)t)$, met $\omega(k) = v|k|$. De Fourier-representatie van de algemene reële oplossing $f(x,t)$ is dan

$$f(x,t) = \mathcal{R}e\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ikx-i\omega t}\ g(k) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ikx-i\omega t}\ g(k) + c.c. \quad , \tag{9.3.4}$$

met *c.c.* de complex geconjugeerde van de voorafgaande uitdrukking.

De scalaire golfvergelijking in drie ruimtelijke dimensies is evenzo

$$\boxed{\Delta f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0} \quad . \tag{9.3.5}$$

De Fourier-taal oplossing (voor reële f) is nu:

$$f(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\ g(\mathbf{k}) + c.c. \quad , \tag{9.3.6}$$

met $\mathbf{k}$ de *golfvector* en $\omega(\mathbf{k}) = v|\mathbf{k}|$.

In drie dimensies kunnen we ook een vectoriële golfvergelijking beschouwen. Deze geldt voor het vectorveld $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$ met (complexe) Fourier-componenten $\mathbf{g}(\mathbf{k})$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\;\mathbf{g}(\mathbf{k}) + c.c. \quad . \tag{9.3.7}$$

Zo'n vectorveld is te ontbinden in *transversale* en *longitudinale* bijdragen, zoals we in Hoofdstuk 1 zagen. De transversale en longitudinale bijdragen volgen door $\mathbf{g}(\mathbf{k})$ te schrijven als $\mathbf{g}_T(\mathbf{k}) + \mathbf{g}_L(\mathbf{k})$, met

$$\mathbf{g}_T(\mathbf{k}) = \left(\mathsf{U} - \frac{\mathbf{kk}}{k^2}\right)\cdot\mathbf{g}(\mathbf{k}) \quad , \quad \mathbf{g}_L(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{kk}}{k^2}\cdot\mathbf{g}(\mathbf{k}) \quad , \tag{9.3.8}$$

zodat $\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}_T(\mathbf{k}) = 0$ en $\mathbf{k}\wedge\mathbf{g}_L(\mathbf{k}) = 0$. Vervolgens geldt dan

$$\mathbf{f}_T(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\;\mathbf{g}_T(\mathbf{k}) + c.c. \quad , \tag{9.3.9}$$

en een analoge uitdrukking voor de longitudinale bijdrage.

Ter verdere karakterisering van de transversale bijdrage kunnen we *polarisatievectoren* $\mathbf{e}_{\mathbf{k}j}$, met $j = 1,2$, invoeren. Dit zijn eenheidsvectoren die loodrecht op $\mathbf{k}$ staan, en ook onderling loodrecht zijn. Dan kan men schrijven

$$\boxed{\mathbf{g}_T(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^{2}\mathbf{e}_{\mathbf{k}j}\; g_j(\mathbf{k})} \quad , \tag{9.3.10}$$

met (complexe) scalaire functies $g_j(\mathbf{k})$, voor $j = 1,2$. De algemene oplossing voor de transversale bijdrage van het vectorveld is dan

$$\mathbf{f}_T(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\;\sum_{j=1}^{2}\mathbf{e}_{\mathbf{k}j}\; g_j(\mathbf{k}) + c.c. \quad . \tag{9.3.11}$$

De polarisatievectoren voldoen aan de identiteit

$$\boxed{\sum_{j=1}^{2}\mathbf{e}_{\mathbf{k}j}\mathbf{e}_{\mathbf{k}j} = \mathsf{U} - \frac{\mathbf{kk}}{k^2}} \quad , \tag{9.3.12}$$

zoals men ziet door een assenstelsel te kiezen met $\mathbf{k}$ langs de $z$-as en de polarisatievectoren langs de $x$-as en de $y$-as. Het gevolg is dat de eerste vergelijking van (9.3.8) is te schrijven als:

$$\mathbf{g}_T(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^{2}\mathbf{e}_{\mathbf{k}j}\mathbf{e}_{\mathbf{k}j}\cdot\mathbf{g}(\mathbf{k}) \quad , \tag{9.3.13}$$

zodat door vergelijken met (9.3.10) volgt dat geldt $g_j(\mathbf{k}) = \mathbf{e}_{\mathbf{k}j}\cdot\mathbf{g}(\mathbf{k})$.

### Electromagnetische golven in vacuum

Uit de Maxwell-vergelijkingen IEF(9.40) in vacuum zonder bronnen volgt dat zowel **E** als **B** voldoen aan de golfvergelijkingen (cf. IEF(9.41)):

$$\boxed{\Delta\mathbf{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad \Delta\mathbf{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0} \quad . \tag{9.3.14}$$

De fasesnelheid is $v = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = c$, zodat nu $\omega(\mathbf{k}) = ck$. Omdat beide velden in afwezigheid van bronnen divergentievrij (of transversaal) zijn, kunnen de velden worden geschreven in de vorm (9.3.7) of (9.3.11):

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\;\mathbf{E}(\mathbf{k}) + c.c = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\sum_{j=1}^{2}\mathbf{e}_{\mathbf{k}j}\;E_j(\mathbf{k}) + c.c. \quad , \\
\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\;\mathbf{B}(\mathbf{k}) + c.c.,
\end{aligned} \tag{9.3.15}$$

met (complexe) $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ en $\mathbf{B}(\mathbf{k})$, die voldoen aan de relaties $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{k}) = 0$ en $\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{k}) = 0$.

Uit de wet van Faraday volgt

$$\frac{1}{2(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\; i\mathbf{k}\wedge\mathbf{E}(\mathbf{k}) + c.c = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\; i\omega\mathbf{B}(\mathbf{k}) + c.c \quad , \tag{9.3.16}$$

en dus door vergelijken van Fourier-componenten:

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{ck}\wedge\mathbf{E}(\mathbf{k})} \tag{9.3.17}$$

(cf. IEF(9.49)). Analoog volgt uit de vierde Maxwell-vergelijking

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) = -\frac{c\mathbf{k}}{k}\wedge\mathbf{B}(\mathbf{k}) \quad . \tag{9.3.18}$$

Deze twee relaties zijn niet onafhankelijk, zoals men ziet door $\mathbf{k}\wedge$ te nemen van de eerste vergelijking en de transversaliteit te gebruiken:

$$\mathbf{k}\wedge\mathbf{B}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\wedge\left[\frac{\mathbf{k}}{ck}\wedge\mathbf{E}(\mathbf{k})\right] = -\frac{k}{c}\mathbf{E}(\mathbf{k}) \quad . \tag{9.3.19}$$

### Energie en energiestroom

De energiedichtheid van het electromagnetische veld in vacuum wordt gegeven door $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}B^2/\mu_0$. De totale energie $W_{em}$ volgt door integreren over de gehele ruimte. Als we de Fourier-ontwikkelingen (9.3.15) invullen dan ontstaat:

$$\begin{aligned}
W_{em} &= \int d\mathbf{r}\left\{\frac{\varepsilon_0}{2}[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)]^2 + \frac{1}{2\mu_0}[\mathbf{B}(\mathbf{r},t)]^2\right\} = \\
&= \frac{\varepsilon_0}{8(2\pi)^6}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{k}'\left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\mathbf{E}(\mathbf{k}) + c.c.\right]\cdot\left[e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-i\omega' t}\mathbf{E}(\mathbf{k}') + c.c.\right] \\
&\quad + \frac{1}{8\mu_0(2\pi)^6}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{k}'\left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\mathbf{B}(\mathbf{k}) + c.c.\right]\cdot\left[e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-i\omega' t}\mathbf{B}(\mathbf{k}') + c.c.\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{8(2\pi)^6}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{k}'\left\{e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}-i(\omega+\omega')t}\left[\varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{k}')+\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{B}(\mathbf{k}')\right]\right.\\
&\qquad\left.+e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}-i(\omega-\omega')t}\left[\varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{E}^*(\mathbf{k}')+\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{B}^*(\mathbf{k}')\right]\right\}+c.c. \quad . \qquad (9.3.20)
\end{aligned}
$$

De integraal over $\mathbf{r}$ geeft nu, wegens de standaardrepresentatie van de delta-functie

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{r}\; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad , \qquad (9.3.21)$$

een delta-functie $\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')$ in de eerste, en $\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ in de tweede regel. Uitvoeren van de integraties over $\mathbf{k}'$ geeft dan tenslotte voor de totale energie van het electromagnetische veld:

$$
\begin{aligned}
W_{em} &= \frac{1}{8(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\;\left\{e^{-2i\omega t}\left[\varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{E}(-\mathbf{k})+\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{B}(-\mathbf{k})\right]\right.\\
&\qquad\left.+\left[\varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{E}^*(\mathbf{k})+\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{B}^*(\mathbf{k})\right]\right\}+c.c. \quad . \qquad (9.3.22)
\end{aligned}
$$

We bedenken nu dat wegens (9.3.17) geldt:

$$\mathbf{B}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{B}(-\mathbf{k}) = -c^{-2}\mathbf{E}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{E}(-\mathbf{k}) \quad , \qquad (9.3.23)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{B}^*(\mathbf{k}) = c^{-2}\mathbf{E}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{E}^*(\mathbf{k}) \quad . \qquad (9.3.24)$$

Dan zien we dat de eerste regel uit (9.3.22) wegvalt. Uit de tweede regel vinden we tenslotte voor de totale energie $W_{em}$ van het electromagnetische veld:

$$W_{em} = \frac{\varepsilon_0}{2(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\;\mathbf{E}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{E}^*(\mathbf{k}) \quad . \qquad (9.3.25)$$

De totale energie is een integraal over alle golfvectoren. Er zijn geen kruistermen met bijdragen van twee golfvectoren: de verschillende golfvectoren zijn ontkoppeld. Men kan laten zien dat deze ontkoppeling ook optreedt bij het berekenen van de totale impuls.

Wegens de ontkoppeling van de bijdragen van de verschillende golfvectoren in de totale energie is het zinvol om apart *monochromatische golven* met één golfvector $\mathbf{k}$ en één polarisatievector $\mathbf{e}$ te bestuderen. Zo'n monochromatische golf wordt gegeven door de uitdrukkingen (cf. IEF(9.49)):

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \tfrac{1}{2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\;E(\mathbf{k})\;\mathbf{e}+c.c. \quad , \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2ck}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\;E(\mathbf{k})\;\mathbf{k}\wedge\mathbf{e}+c.c.} \quad , \qquad (9.3.26)$$

met polarisatievector $\mathbf{e}$.

De energiedichtheid van zo'n monochromatische golf is $\frac{1}{2}\varepsilon_0[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)]^2+\frac{1}{2}\mu_0^{-1}[\mathbf{B}(\mathbf{r},t)]^2$, zoals te voren. Bij invullen van (9.3.26) ontstaan termen evenredig met $\exp(\pm i\omega t)$. Deze fluctueren zeer snel in de tijd. Als we het tijdgemiddelde nemen, dan vallen deze termen weg. Alleen de kruistermen, die onafhankelijk van $t$ zijn, blijven dan over. De tijdgemiddelde energiedichtheid van een monochromatische golf wordt (cf. IEF(9.60)):

$$\boxed{\tfrac{1}{2}\varepsilon_0\;|E(\mathbf{k})|^2} \quad . \qquad (9.3.27)$$

Evenzo is de tijdgemiddelde energiestroomdichtheid (de Poynting-vector) (cf. IEF(9.61)):

$$\boxed{\frac{c\varepsilon_0}{2}\ |E(\mathbf{k})|^2\ \frac{\mathbf{k}}{k}} \quad . \tag{9.3.28}$$

De (tijdgemiddelde) energiestroomdichtheid van een monochromatische golf staat dus in de richting van de golfvector en is (in absolute waarde) een factor $c$ groter dan de (tijdgemiddelde) energiedichtheid. De energiestroomdichtheid is een maat voor de *intensiteit*.

## Golven in lineaire media

Voor een homogeen isotroop lineair medium volgt uit de Maxwell-vergelijkingen dat het electrische veld en het magnetische veld beide voldoen aan golfvergelijkingen zoals (9.3.14), met $\varepsilon_0$ vervangen door $\varepsilon$ en $\mu_0$ door $\mu$. De fasesnelheid is nu $v = c/n$, met $n$ de *brekingsindex*

$$\boxed{n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}} \quad . \tag{9.3.29}$$

De Fourier-ontwikkeling is analoog aan (9.3.15), met $\omega(\mathbf{k}) = ck/n$. De velden zijn opnieuw puur transversaal, zodat de Fourier-componenten loodrecht op de golfvector staan. De velden hangen samen zoals in (9.3.17), met $v$ in plaats van $c$:

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{k}) = \frac{n\mathbf{k}}{ck} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{k})} \quad . \tag{9.3.30}$$

Een monochromatische golf kan worden geschreven als:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \tfrac{1}{2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\ E(\mathbf{k})\ \mathbf{e} + c.c. \quad , \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{n}{2ck}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\ E(\mathbf{k})\ \mathbf{k}\wedge\mathbf{e} + c.c.} \quad . \tag{9.3.31}$$

De energiedichtheid en de energiestroomdichtheid kunnen worden berekend analoog als voor golven in vacuum, met steeds $\varepsilon_0, \mu_0 \to \varepsilon, \mu$ en $c \to c/n$. Men vindt dat de (tijdgemiddelde) energiedichtheid nu is:

$$\left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{n^2}{4\mu c^2}\right)\ |E(\mathbf{k})|^2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon\ |E(\mathbf{k})|^2 \quad . \tag{9.3.32}$$

Evenzo is de (tijdgemiddelde) energiestroomdichtheid:

$$\frac{c\varepsilon}{2n}\ |E(\mathbf{k})|^2\ \frac{\mathbf{k}}{k} \quad . \tag{9.3.33}$$

Deze uitdrukking scheelt een factor $c/n = \omega/k$ met (9.3.32), zoals verwacht. De energiestroomdichtheid is een maat voor de *intensiteit*, zoals tevoren (cf. IEF(9.73)).

## Reflectie en transmissie

Reflectie en transmissie aan de grens tussen twee media volgt door de algemene uitdrukkingen (9.3.31) te combineren met de randcondities aan het grensoppervlak, zoals gevonden in (4.3.13), (4.3.15) voor de electrische velden, en (6.3.14) en (6.3.16) voor de magnetische velden (cf. IEF(9.74)):

$$\mathbf{E}_{\parallel,1}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\parallel,2}(\mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{D}_{\perp,1}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}_{\perp,2}(\mathbf{r}) \quad ,$$
$$\mathbf{B}_{\perp,1}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_{\perp,2}(\mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{H}_{\parallel,1}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_{\parallel,2}(\mathbf{r}) \quad . \tag{9.3.34}$$

Voor loodrechte inval, met een golfvector van de inkomende bundel loodrecht op het grensoppervlak, zijn de veldcomponenten loodrecht op het oppervlak steeds 0. De uitdrukkingen voor de velden luiden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_I(\mathbf{r},t) &= \tfrac{1}{2}e^{i\mathbf{k}_I\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_I\, \mathbf{e}_I + c.c. \quad , \quad \mathbf{B}_I(\mathbf{r},t) = \frac{n_1}{2ck_I}\, e^{i\mathbf{k}_I\cdot\mathbf{r}-i\omega t} E_I\, \mathbf{k}_I \wedge \mathbf{e}_I + c.c. \quad , \\
\mathbf{E}_R(\mathbf{r},t) &= \tfrac{1}{2}e^{i\mathbf{k}_R\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_R\, \mathbf{e}_R + c.c. \quad , \quad \mathbf{B}_R(\mathbf{r},t) = \frac{n_1}{2ck_R}\, e^{i\mathbf{k}_R\cdot\mathbf{r}-i\omega t} E_R\, \mathbf{k}_R \wedge \mathbf{e}_R + c.c. \quad , \\
\mathbf{E}_T(\mathbf{r},t) &= \tfrac{1}{2}e^{i\mathbf{k}_T\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_T\, \mathbf{e}_T + c.c. \quad , \quad \mathbf{B}_T(\mathbf{r},t) = \frac{n_2}{2ck_T}\, e^{i\mathbf{k}_T\cdot\mathbf{r}-i\omega t} E_T\, \mathbf{k}_T \wedge \mathbf{e}_T + c.c. \quad .
\end{aligned} \tag{9.3.35}$$

De golfvectoren staan parallel aan de normaal $\mathbf{n}$ op het oppervlak, dus $\mathbf{k}_I = k_I\mathbf{n}, \mathbf{k}_R = -k_R\mathbf{n}, \mathbf{k}_T = k_T\mathbf{n}$. Hierbij geldt $k_I = k_R = n_1\omega/c$ en $k_T = n_2\omega/c$. We kiezen voor het gemak de oorsprong in het grensoppervlak, zodat $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = 0$ overal in het grensoppervlak.

De randcondities voor de veldcomponenten parallel aan het oppervlak geven twee relaties:

$$E_I\, \mathbf{e}_I + E_R\, \mathbf{e}_R = E_T\, \mathbf{e}_T \quad , \quad \frac{n_1}{\mu_1}\left(E_I\, \mathbf{n}\wedge\mathbf{e}_I - E_R\, \mathbf{n}\wedge\mathbf{e}_R\right) = \frac{n_2}{\mu_2} E_T\, \mathbf{n}\wedge\mathbf{e}_T \quad . \tag{9.3.36}$$

Omdat de polarisatievectoren loodrecht op $\mathbf{n}$ staan, kan de tweede vergelijking ook worden geschreven als:

$$\frac{n_1}{\mu_1}\left(E_I\, \mathbf{e}_I - E_R\, \mathbf{e}_R\right) = \frac{n_2}{\mu_2} E_T\, \mathbf{e}_T \quad . \tag{9.3.37}$$

Oplossen van $E_R\, \mathbf{e}_R$ en $E_T\, \mathbf{e}_T$ leert dat deze beide parallel staan aan $E_I\, \mathbf{e}_I$, zodat alle polarisatievectoren parallel staan, en dus hoogstens een teken kunnen schelen. Als de tekens alle gelijk worden gekozen, dan vindt men voor $E_R, E_T$ van de gereflecteerde en getransmitteerde golf in termen van die van de inkomende golf:

$$E_R = \frac{n_1/\mu_1 - n_2/\mu_2}{n_1/\mu_1 + n_2/\mu_2} E_I \quad , \quad E_T = \frac{2n_1/\mu_1}{n_1/\mu_1 + n_2/\mu_2} E_I \quad . \tag{9.3.38}$$

Een eenvoudiger vorm ontstaat door introductie van $\beta = \mu_1 n_2/(\mu_2 n_1)$:

$$\boxed{E_R = \frac{1-\beta}{1+\beta} E_I \quad , \quad E_T = \frac{2}{1+\beta} E_I} \quad . \tag{9.3.39}$$

Dit zijn de zogenaamde *relaties van Fresnel* voor reflectie en transmissie (cf. IEF(9.82)).

Het *reflectievermogen* $R$ van het grensoppervlak tussen de twee media volgt als de verhouding van de intensiteiten tussen de gereflecteerde en de getransmitterde bundel. Wegens (9.3.33) is dat het kwadraat van de coëfficiënt in de eerste relatie van (9.3.39):

$$R = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2 \quad . \tag{9.3.40}$$

Evenzo volgt het *transmissievermogen* $T$ uit de verhouding van de intensiteiten van de getransmitteerde en de inkomende bundel. Wegens (9.3.33) treedt hier een extra factor $\varepsilon/n = n/(c^2\mu)$ voor elk van de bundels op, zodat ontstaat:

$$T = \frac{n_2}{c^2\mu_2}\,\frac{c^2\mu_1}{n_1}\,\left(\frac{2}{1+\beta}\right)^2 = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2} \quad . \tag{9.3.41}$$

De som $R+T$ is gelijk aan 1, zoals uit behoud van energie moet volgen.

Bij schuine inval luiden de uitdrukkingen voor de velden net als in (9.3.35). Echter, de golfvectoren zijn niet langer parallel aan de normaal op het oppervlak. De grootte van de golfvectoren is wel hetzelfde als tevoren: $k_I = k_R = n_1\omega/c$ en $k_T = n_2\omega/c$. De randcondities voor het electrische veld geven nu :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1\, e^{i\mathbf{k}_I\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_I\, \mathbf{e}_I\cdot\mathbf{n} + \varepsilon_1\, e^{i\mathbf{k}_R\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_R\, \mathbf{e}_R\cdot\mathbf{n} &= \varepsilon_2\, e^{i\mathbf{k}_T\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_T\, \mathbf{e}_T\cdot\mathbf{n} \quad ,\\
e^{i\mathbf{k}_I\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_I\, \mathbf{e}_I\wedge\mathbf{n} + e^{i\mathbf{k}_R\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_R\, \mathbf{e}_R\wedge\mathbf{n} &= e^{i\mathbf{k}_T\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_T\, \mathbf{e}_T\wedge\mathbf{n} \quad .
\end{aligned} \tag{9.3.42}$$

Evenzo geven de randcondities voor het magnetische veld:

$$\begin{aligned}
\frac{n_1}{k_I} e^{i\mathbf{k}_I\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_I\, (\mathbf{k}_I\wedge\mathbf{e}_I)\cdot\mathbf{n} &+ \frac{n_1}{k_R} e^{i\mathbf{k}_R\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_R\, (\mathbf{k}_R\wedge\mathbf{e}_R)\cdot\mathbf{n}\\
&= \frac{n_2}{k_T} e^{i\mathbf{k}_T\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_T\, (\mathbf{k}_T\wedge\mathbf{e}_T)\cdot\mathbf{n} \quad ,\\
\frac{n_1}{k_I\mu_1} e^{i\mathbf{k}_I\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_I\, (\mathbf{k}_I\wedge\mathbf{e}_I)\wedge\mathbf{n} &+ \frac{n_1}{k_R\mu_1} e^{i\mathbf{k}_R\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_R\, (\mathbf{k}_R\wedge\mathbf{e}_R)\wedge\mathbf{n}\\
&= \frac{n_2}{k_T\mu_2} e^{i\mathbf{k}_T\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_T\, (\mathbf{k}_T\wedge\mathbf{e}_T)\wedge\mathbf{n} \quad ,
\end{aligned} \tag{9.3.43}$$

voor alle $\mathbf{r}$ in het grensoppervlak. De gelijkheden kunnen alleen dan gelden voor alle posities in het grensoppervlak tegelijk, als de fasefactoren in de drie termen van elke gelijkheid op dezelfde wijze variëren, wanneer $\mathbf{r}$ door het grensoppervlak beweegt. Dat is het geval als geldt:

$$\mathbf{k}_I\wedge\mathbf{n} = \mathbf{k}_R\wedge\mathbf{n} = \mathbf{k}_T\wedge\mathbf{n} \quad . \tag{9.3.44}$$

De componenten van de golfvectoren parallel aan het grensoppervlak zijn dan onderling gelijk. De drie golfvectoren moeten dan in één vlak liggen: *het vlak van inval.* Als we de hoek tussen $\mathbf{k}_I$ en $\mathbf{n}$ de *hoek van inval* $\theta_I$ noemen, die tussen $\mathbf{k}_R$ en $-\mathbf{n}$ de *hoek van terugkaatsing* $\theta_R$, en die tussen $\mathbf{k}_T$ en $\mathbf{n}$ de *hoek van breking* $\theta_T$, dan volgt:

$$\boxed{\theta_R = \theta_I \quad , \quad \frac{\sin\theta_T}{\sin\theta_I} = \frac{n_1}{n_2}} \quad . \tag{9.3.45}$$

De tweede relatie is de *wet van Snellius.*

In de relaties (9.3.42)–(9.3.43) kunnen de fasefactoren nu worden weggelaten. Om verder te gaan moeten vervolgens twee gevallen worden onderscheiden:

1. parallel gepolariseerde invallende golf, met polarisatievector $\mathbf{e}_I$ in het vlak van inval;

2. loodrecht gepolariseerde invallende golf, met polarisatievector $\mathbf{e}_I$ loodrecht op het vlak van inval.

Het eerste geval wordt uitgebreid besproken in IEP389–392; het tweede geval is het onderwerp van IEV9.16.

Voor een *parallel gepolariseerde* invallende golf vervalt de eerste vergelijking van (9.3.43), omdat de vectoren $\mathbf{k}_j \wedge \mathbf{e}_j$ (voor $j = I, R, T$) dan loodrecht op het vlak van inval staan, en dus ook loodrecht op $\mathbf{n}$. Van de overige drie relaties uit (9.3.42)–(9.3.43) zijn er slechts twee onafhankelijk. Met de definitie $\alpha = \cos\theta_T / \cos\theta_I$ en $\beta$ zoals boven komt er dan (cf. IEF(9.109)):

$$\boxed{E_R = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_I \quad , \quad E_T = \frac{2}{\alpha + \beta} E_I} \quad . \tag{9.3.46}$$

Dit zijn de *Fresnel-relaties* voor schuine inval en voor parallelle polarisatie. Op dezelfde wijze als eerst vindt men hieruit het reflectievermogen en het transmissievermogen:

$$R = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2 \quad , \quad T = \frac{n_2}{c^2\mu_2} \frac{c^2\mu_1}{n_1} \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I} \left(\frac{2}{\alpha + \beta}\right)^2 = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \quad , \tag{9.3.47}$$

waar de extra factor $\cos\theta_T / \cos\theta_I = \alpha$ in $T$ wordt toegevoegd om de energiestromen *loodrecht op het oppervlak* te kunnen vergelijken. Zoals verwacht vinden we weer $R+T = 1$.

Voor $\theta_I = 0$ reduceren de uitdrukkingen tot (9.3.40) en (9.3.41). Voor $\theta_I \to \pi/2$ geldt $\alpha \to \infty$, als $n_1 < n_2$. Dan volgt $T \to 0$ en $R \to 1$, zodat er *totale reflectie* optreedt. Voor $n_1 > n_2$ en $\sin\theta_I \to n_2/n_1$ gaat $\cos\theta_T$ naar 0, zodat dan wordt gevonden $\alpha \to 0$. Opnieuw geldt dan $T \to 0$ en $R \to 1$, zodat dan totale reflectie bij een eindige hoek optreedt.

Voor $\alpha = \beta$, dus voor $\sin^2\theta_I = (1 - \beta^2)/[(n_1/n_2)^2 - \beta^2]$ is $R = 0$, zodat er dan *totale transmissie* optreedt. De hoek waarbij dit gebeurt heet de *Brewster-hoek*. Een grafiek van $R$ en $T$ als functie van $\theta_I$ is gegeven op IEP392, voor $n_1 < n_2$.

Voor een *loodrecht gepolariseerde* invallende golf vervalt de eerste vergelijking van (9.3.42). Van de overige drie vergelijkingen zijn er weer slechts twee onafhankelijk, zoals volgt door gebruik te maken van de wet van Snellius. Ze geven:

$$\boxed{E_R = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} E_I \quad , \quad E_T = \frac{2}{1 + \alpha\beta} E_I} \quad . \tag{9.3.48}$$

Dit zijn de *Fresnel-relaties* voor schuine inval en voor loodrechte polarisatie. Opnieuw kan totale reflectie optreden, voor $n_1 < n_2$ alleen bij $\theta_I \to \pi/2$, en voor $n_1 > n_2$ bij een eindige hoek. Totale transmissie kan nu niet plaats vinden.

## Golven in geleiders

In homogene isotrope geleidende lineaire media is de stroomdichtheid $\mathbf{J}$ gegeven door de wet van Ohm (7.3.1), althans als het medium in rust is (dus voor $\mathbf{v} = 0$). In dat geval is er immers geen convectieve bijdrage tot de stroomdichtheid, en is er geen invloed van het magnetische veld. Combinatie van de continuïteitsvergelijking, de wet van Ohm en de wet van Gauss geeft dan:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} = -\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_f \quad . \tag{9.3.49}$$

Uit deze differentiaalvergelijking volgt dat de ladingsdichtheid exponentieel afvalt, met een relaxatietijd $\varepsilon/\sigma$. Als de geleider ideaal is dan is deze relaxatietijd verwaarloosbaar kort, zodat de ladingsdichtheid overal 0 is in de geleider - een verschijnsel dat we al in

Hoofdstuk 2 vaststelden. Ook voor niet-ideale geleiders is de relaxatietijd meestal zo kort dat in goede benadering $\rho_f = 0$ kan worden gesteld. De Maxwell-vergelijkingen worden dan

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad , \quad \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu\sigma\mathbf{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad . \tag{9.3.50}$$

De velden zijn blijkbaar weer transversaal. Door eliminatie van $\mathbf{B}$ of $\mathbf{E}$ vinden we (cf. IE(9.122)):

$$\boxed{\Delta\mathbf{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad , \quad \Delta\mathbf{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0} \quad . \tag{9.3.51}$$

De oplossingen zijn weer lineaire combinaties van monochromatische golven. Voor het electrische veld vinden we:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tfrac{1}{2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}\, E(\mathbf{k})\, \mathbf{e} + c.c. \quad . \tag{9.3.52}$$

Dit is alleen een oplossing van de eerste vergelijking van (9.3.51) als $\omega$ en $k$ voldoen aan de vergelijking:

$$\boxed{-k^2 + \varepsilon\mu\omega^2 + i\mu\sigma\omega = 0} \quad . \tag{9.3.53}$$

Bij reële $\omega$ is $k$ nu complex: $k = k' + ik''$, met $k' > 0$ en $k'' > 0$ volgend uit $\omega$ (zie IEF(9.126)). De golfvector is dan $\mathbf{k} = (k' + ik'')\mathbf{n}$, met $\mathbf{n}$ een eenheidsvector. De golf (9.3.52) heeft dus de vorm:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tfrac{1}{2}e^{-k''\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}\, e^{ik'\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}\, E(\mathbf{k})\, \mathbf{e} + c.c. \quad . \tag{9.3.54}$$

De golf plant zich voort in de richting $\mathbf{n}$ en is *gedempt*. Wegens de transversaliteit staat $\mathbf{n}$ loodrecht op de polarisatievector $\mathbf{e}$. De *fasesnelheid* wordt gegeven door $v = \omega/k'$. De karakteristieke afstand waarover de demping plaats vindt is de *indringdiepte* $d = 1/k''$. Men definieert ook wel de *absorptiecoëfficiënt* $\alpha = 2k''$, waarbij de factor 2 is toegevoegd omdat de intensiteit van de golf evenredig is met het kwadraat van $\mathbf{E}$. Het magnetische veld van de monochromatische golf wordt wegens de wet van Faraday gegeven door

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{k' + ik''}{2\omega}e^{-k''\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}\, e^{ik'\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}\, E(\mathbf{k})\, \mathbf{n} \wedge \mathbf{e} + c.c. \quad . \tag{9.3.55}$$

De tijdgemiddelde energiedichtheid wordt gegeven door (cf. (9.3.32)):

$$\left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{k'^2 + k''^2}{4\mu\omega^2}\right)\, |E(\mathbf{k})|^2\ e^{-2k''\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}} = \frac{k'^2}{2\mu\omega^2}\,|E(\mathbf{k})|^2\ e^{-2k''\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}} \quad , \tag{9.3.56}$$

Hierbij werd gebruikt dat uit het reële deel van (9.3.53) volgt dat geldt $-k'^2 + k''^2 + \varepsilon\mu\omega^2 = 0$. De tijdgemiddelde energiestroomdichtheid is evenzo

$$\frac{k' + ik''}{4\mu\omega}\,|E(\mathbf{k})|^2\ e^{-2k''\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}\ \mathbf{n} + c.c. = \frac{k'}{2\mu\omega}\,|E(\mathbf{k})|^2\ e^{-2k''\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}\ \mathbf{n} \quad . \tag{9.3.57}$$

De energiestroomdichtheid scheelt een factor $\omega/k'$ met de energiedichtheid, zoals verwacht.

De absorptie in een geleider is consistent met het behoud van energie, daar de uit de golf verdwijnende energie wordt omgezet in Joule-warmte.

### Reflectie en transmissie aan het oppervlak van een geleider

Net als bij het grensoppervlak tussen twee lineaire polariseerbare en magnetiseerbare media treedt ook reflectie en transmissie op als een vlakke golf vanuit een lineair medium, met brekingsindex $n_1$, invalt op een geleider. Voor loodrechte inval zijn de velden op te schrijven analoog aan (9.3.35):

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_I(\mathbf{r},t) &= \tfrac{1}{2}e^{ik_I\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_I\,\mathbf{e}_I + c.c. \quad , \quad \mathbf{B}_I(\mathbf{r},t) = \frac{n_1}{2c}\, e^{ik_I\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} E_I\,\mathbf{n}\wedge\mathbf{e}_I + c.c. \quad , \\
\mathbf{E}_R(\mathbf{r},t) &= \tfrac{1}{2}e^{-ik_R\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_R\,\mathbf{e}_R + c.c.\ , \ \mathbf{B}_R(\mathbf{r},t) = -\frac{n_1}{2c}\, e^{-ik_R\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} E_R\,\mathbf{n}\wedge\mathbf{e}_R + c.c.\ , \\
\mathbf{E}_T(\mathbf{r},t) &= \tfrac{1}{2}e^{-k''_T\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}\, e^{ik'_T\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\, E_T\,\mathbf{e}_T + c.c. \quad , \\
\mathbf{B}_T(\mathbf{r},t) &= \frac{k'_T + ik''_T}{2\omega}\, e^{-k''_T\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}\, e^{ik'_T\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} E_T\,\mathbf{n}\wedge\mathbf{e}_T + c.c. \quad .
\end{aligned} \tag{9.3.58}$$

Hierbij is $\mathbf{n}$ de normaal op het oppervlak (naar de geleider toe wijzend). Voorts geldt $k_I = k_R = n_1\omega/c$, terwijl $k'_T$ en $k''_T$ volgen uit (9.3.53). De randcondities (9.3.34) geven nu (cf. (9.3.36)–(9.3.37)):

$$E_I\,\mathbf{e}_I + E_R\,\mathbf{e}_R = E_T\,\mathbf{e}_T \quad , \quad \frac{n_1}{\mu_1 c}(E_I\,\mathbf{e}_I - E_R\,\mathbf{e}_R) = \frac{k'_T + ik''_T}{\mu_2\omega} E_T\,\mathbf{e}_T \quad . \tag{9.3.59}$$

Hierbij is gebruikt dat in een *niet-ideale* geleider geen oppervlaktestromen kunnen optreden (dat kan alleen in een *ideale* geleider). Terzijde merken we op dat wegens de vorm van de oplossing (9.3.58) ook geen oppervlaktelading aanwezig is; immers, de electrische velden hebben geen componenten loodrecht op het opppervlak.

De polarisatievectoren staan blijkbaar weer parallel, en kunnen dus alleen een teken schelen. Als ze gelijk worden gekozen, dan volgt door oplossen opnieuw (9.3.39), met nu $\beta$ gedefinieerd als (cf. IEF(9.146)):

$$\beta = \frac{c\mu_1}{n_1}\,\frac{k'_T + ik''_T}{\mu_2\omega} \quad , \tag{9.3.60}$$

zodat $\beta$ nu complex is.

Het reflectievermogen volgt dan analoog aan (9.3.40):

$$R = \left|\frac{1-\beta}{1+\beta}\right|^2 \quad . \tag{9.3.61}$$

Voor een (bijna) ideale geleider gaan $k'_T$ en $k''_T$ beide naar $\infty$, zoals uit (9.3.53) volgt. Dan gaat dus $|\beta|$ naar $\infty$, en dus $R$ naar 1: een (bijna) ideale geleider is een (bijna) ideale reflector. Voor zilver vindt men (zie IEV9.21) een reflectievermogen van 0.93 in het optische gebied (als althans geen rekening wordt gehouden met dispersie).

### Dispersie

De materiaalconstanten $\varepsilon$, $\mu$ en $\sigma$ die een homogeen isotroop geleidend lineair medium karakteriseren hangen alle af van de frequentie $\omega$. Voor de diëlectrische constante $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e)$ van een medium met geïnduceerde dipolen volgt dit uit de frequentie-afhankelijkheid van de moleculaire polariseerbaarheid $\alpha$, die aan de susceptibiliteit $\chi_e$ ten grondslag ligt (zie (4.3.21)). Deze frequentie-afhankelijkheid is eenvoudig vast te stellen voor een simpel model, waarin het molecuul wordt gezien als een kern met een enkel electron, dat zich gedraagt als een *gedreven gedempte harmonische oscillator* (zie IEP400). Men vindt dan dat de Fourier-componenten van het moleculaire dipoolmoment en van het electrische veld samenhangen volgens

$$\mathbf{p}(\omega) = \alpha(\omega)\mathbf{E}(\omega) \quad , \tag{9.3.62}$$

met de complexe frequentie-afhankelijke polariseerbaarheid (cf. IEF(9.158)):

$$\boxed{\alpha(\omega) = \frac{e^2}{m}\,\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}} \quad . \tag{9.3.63}$$

Hierbij is $\omega_0$ de resonantie-frequentie van de oscillator en $\gamma$ de dempingscoëfficiënt; voorts zijn $e$ en $m$ de lading en de massa van het electron. Een nette quantummechanische berekening van de polariseerbaarheid van een molecuul in de grondtoestand levert een slechts weinig verschillende uitdrukking op:

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{m}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \quad , \tag{9.3.64}$$

met rechts een som over alle moleculaire aangeslagen toestanden $j$, met $\hbar\omega_j$ het verschil tussen de energieën van de aangeslagen toestand en de grondtoestand, en met $\gamma_j$ een maat voor de inverse levensduur van de aangeslagen toestand. Tenslotte is de *oscillatorsterkte* $f_j$ evenredig met het kwadraat van een "overgangsmatrix-element", d.i. het matrix-element van de dipool-operator tussen aangeslagen toestand en grondtoestand. Een formule van dezelfde structuur wordt ook gevonden in een klassiek model van een stelsel gekoppelde oscillatoren, met eigenfrequenties $\omega_j$ (cf. IEF(9.159)).

De polariseerbaarheid $\alpha(\omega)$ is door het optreden van de demping *complex*. Als gevolg daarvan zijn ook $\chi_e(\omega)$ en $\varepsilon(\omega)$ complex. Het gevolg is dat ook voor een niet-geleidend medium (met $\sigma = 0$, en voor het gemak $\mu = \mu_0$) een zich voortplantende golf gedempt is, net als in (9.3.54):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tfrac{1}{2}e^{-k''\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}\; e^{ik'\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}\; E(\mathbf{k})\;\mathbf{e} + c.c. \quad , \tag{9.3.65}$$

met $k'$ en $k''$ volgend uit de *dispersierelatie* (cf. (9.3.53)):

$$-(k' + ik'')^2 + \varepsilon(\omega)\mu_0\omega^2 = 0 \quad . \tag{9.3.66}$$

Opnieuw geeft $k''$ de *absorptiecoëfficiënt* volgens $\alpha = 2k''$. De fasesnelheid $v$ wordt gegeven door het reële deel $k'$ volgens $v = \omega/k'$. De *brekingsindex* $n \equiv c/v$ is dan $n = ck'/\omega$. Vaak definieert men ook een complexe brekingsindex $c(k' + ik'')/\omega$. Een karakteristieke frequentie-afhankelijkheid van de brekingsindex en de absorptiecoëfficiënt is gegeven in figuur 9.22 op IEP403.

## Geleide golven

Electromagnetische golven planten zich niet alleen voort in de oneindige uitgestrekte ruimte, maar kunnen zich ook voortplanten binnen een beperkt gebied, zoals een *golfgeleider* of een *coaxiale kabel*. In beide gevallen is de ruimte waar de golven zich voortplanten omsloten door een *ideale* geleider. Bij het oplossen van de Maxwell-vergelijkingen moet men nu rekening houden met de randcondities bij het oppervlak van deze ideale geleider. Volgens (7.3.26) geven deze in het bijzonder dat het electrische veld parallel aan het oppervlak, en het magnetische veld loodrecht op het oppervlak continu zijn. Omdat de velden in een *ideale* geleider 0 zijn (in een *niet-ideale* geleider hoeft dit niet zo te zijn, zoals we eerder zagen), volgt dat juist buiten de geleider moet gelden:

$$\mathbf{E}_{\parallel} = 0 \quad , \quad \mathbf{B}_{\perp} = 0 \quad . \tag{9.3.67}$$

De andere componenten van de velden kunnen discontinu zijn, als er een oppervlaktelading of een oppervlaktestroom aanwezig is. Over hun waarden net buiten de geleider is daarom a priori niets te zeggen.

Voor een holle cylindrische pijp (van nog willekeurig gevormde doorsnede) kan een algemene oplossing worden gezocht van de vorm

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \tfrac{1}{2}\mathbf{E}_0(x,y)e^{ikz-i\omega t} + c.c. \quad , \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \tfrac{1}{2}\mathbf{B}_0(x,y)e^{ikz-i\omega t} + c.c. \quad , \tag{9.3.68}$$

waar we de as van de cylinder parallel aan de $z$-as hebben gekozen. De voorfactoren $\mathbf{E}_0$ en $\mathbf{B}_0$ moeten nog worden bepaald uit de Maxwell-vergelijkingen en de randcondities. Allereerst vindt men eenvoudig uit de Maxwell-vergelijkingen dat de componenten $E_{0,x}$, $E_{0,y}$, $B_{0,x}$, $B_{0,y}$ kunnen worden uitgedrukt in $E_{0,z}$ en $B_{0,z}$ (zie IEF(9.180)). Voor de laatste vindt men dan golfvergelijkingen:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) E_{0,z} = 0 \quad , \tag{9.3.69}$$

en een zelfde vergelijking voor $B_{0,z}$. Golven waarvoor $E_{0,z} = 0$, dus waarvoor het electrische veld in de richting van de golfpijp nul is, heten *TE-golven*, en golven waarvoor $B_{0,z} = 0$ evenzo *TM-golven*. In een golfpijp is het niet mogelijk zowel $E_{0,z}$ als $B_{0,z}$ gelijk aan nul te kiezen, dit kan wel in een coaxiale kabel.

De precieze vorm van TE-golven in een golfpijp volgt door een oplossing van (9.3.69) (met $B_{0,z}$ in plaats van $E_{0,z}$) te bepalen die aan de randcondities (9.3.67) voldoet. Voor een rechthoekige golfpijp leidt dat via de methode van de scheiding van variabelen tot een oplossing van de vorm:

$$B_{0,z}(x,y) = f_1(x)\, f_2(y) \quad , \tag{9.3.70}$$

met nog nader te bepalen functies $f_1$, $f_2$, die voldoen aan de differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} = c_1\, f_1 \quad , \quad \frac{d^2 f_2}{dy^2} = c_2\, f_2 \quad . \tag{9.3.71}$$

De constanten moeten voldoen aan $c_1 + c_2 + \omega^2/c^2 = k^2$ opdat de oplossing (9.3.70) inderdaad aan een vergelijking van de vorm (9.3.69) voldoet. De gevolgen van de randcondities volgen nu door inspectie van IEF(9.180), waar nu steeds $E_{0,z} = 0$ kan worden ingevuld. Men vindt dan, in de geometrie van de figuur van IEP408, dat moet gelden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{0,z}}{\partial x} &= 0 \text{ voor } x = 0 \text{ en } x = a \quad , \\ \frac{\partial B_{0,z}}{\partial y} &= 0 \text{ voor } y = 0 \text{ en } y = b \quad , \end{aligned} \tag{9.3.72}$$

ofwel

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dx} &= 0 \text{ voor } x = 0 \text{ en } x = a \quad , \\ \frac{df_2}{dy} &= 0 \text{ voor } y = 0 \text{ en } y = b \quad . \end{aligned} \tag{9.3.73}$$

De oplossingen van (9.3.71) die aan deze randcondities voldoen zijn eenvoudige cosinusfuncties, die nog afhangen van gehele getallen $m, n$. De de dispersierelatie wordt:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \quad . \tag{9.3.74}$$

Men ziet dat er een ondergrens is aan de frequentie van de golven die door de golfpijp kunnen worden gestuurd:

$$\omega_{min} = \min\left(\frac{c\pi}{a}, \frac{c\pi}{b}\right) \quad . \tag{9.3.75}$$

Dit kan worden begrepen door te bedenken dat de golven van lage frequentie een lange golflengte hebben. Als de golflengte te lang wordt dan passen de golven niet meer in de golfpijp.

## 9.4 Samenvatting van belangrijke resultaten

### Golfvergelijking

- Scalaire golfvergelijking in één dimensie: (9.3.1)
- Scalaire golfvergelijking in drie dimensies: (9.3.5)
- Fourier-ontwikkeling: (9.3.4), (9.3.6)
- Polarisatievectoren: (9.3.10), (9.3.12)

### Electromagnetische golven in vacuum

- Golfvergelijkingen voor velden: (9.3.14), IEF(9.41)
- Verband electrische en magnetische veld: (9.3.17)
- Monochromatische golf: (9.3.26)
- Energiedichtheid en energiestroom: (9.3.27), (9.3.28)

### Electromagnetische golven in niet-geleidende media

- Brekingsindex: (9.3.29)
- Monochromatische golf: (9.3.31)
- Verband electrische en magnetische veld: (9.3.30)
- Wet van Snellius: (9.3.45)
- Fresnel-relaties: (9.3.39), (9.3.46), (9.3.48)

### Golven in geleiders

- Gedempte golfvergelijking in een geleider: (9.3.51)
- Dispersierelatie in geleider: (9.3.53)

### Dispersie

- Frequentie-afhankelijke polariseerbaarheid: (9.3.63)

# Hoofdstuk 10

# Potentialen en velden

## 10.1 Kernbegrippen

### Potentialen

Scalaire potentiaal en vectorpotentiaal. IJktransformaties. Coulomb-ijking en Lorentz-ijking. Lorentz-kracht in potentiaalvorm. Kanonieke impuls. Lagrange- en Hamilton-formulering.

### Geretardeerde potentialen en velden

Green-functie van de golfvergelijking. Geretardeerde potentialen.

### Straling van puntlading

Potentialen van Liénard en Wiechert. Velden van een bewegende puntlading.

## 10.2 Notaties

Er worden geen nieuwe van IE afwijkende notaties ingevoerd.

## 10.3 Addenda

### Potentialen

Aan de homogene Maxwell-vergelijkingen wordt voldaan als het electrische en het magnetische veld worden geschreven in termen van een scalaire en een vectorpotentiaal (zie IEF(10.2–10.3)):

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}} \quad . \tag{10.3.1}$$

Anders dan in de electrostatica hangt het electrische veld nu ook van de vectorpotentiaal af, als gevolg van de inductie-wet van Faraday.

De potentialen zijn niet eenduidig bepaald, omdat er nog een *ijkvrijheid* is. Als we in plaats van $\varphi$ en $\mathbf{A}$ nieuwe potentialen $\varphi'$ en $\mathbf{A}'$ kiezen volgens (cf. IEF(10.7)):

$$\boxed{\varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi} \quad , \tag{10.3.2}$$

met willekeurige $\psi$, dan beschrijven deze dezelfde velden. We kunnen dit gebruiken om een geschikte *ijking* te kiezen.

Door invullen van de uitdrukkingen voor de velden in de inhomogene Maxwell-vergelijkingen vinden we dat de potentialen voldoen aan de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \\ \left(\Delta\mathbf{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) &= -\mu_0\mathbf{J} \quad . \end{aligned} \tag{10.3.3}$$

Deze vergelijkingen zien er beroerd uit. Echter, we hebben nog de ruimte een geschikte ijking te kiezen. Er zijn twee ijkingen die veel worden gebruikt:

1. de *Coulomb-ijking* of *stralingsijking*:

   $$\nabla\cdot\mathbf{A} = 0 \quad , \tag{10.3.4}$$

   die we in de magnetostatica al tegen kwamen, en die nuttig is bij het quantiseren van de theorie;

2. de *Lorentz-ijking*:

   $$\nabla\cdot\mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad , \tag{10.3.5}$$

   die bijzondere voordelen heeft voor tijdafhankelijke velden en in het bijzonder ook handig is bij het bestuderen van de covariantie van de electrodynamica, d.i. het gedrag onder relativistische Lorentz-transformaties (zie Hoofdstuk 12).

De vergelijkingen (10.3.3) reduceren tot verschillende vormen voor de twee ijkingen. In de Coulomb-ijking ontstaat (zie IEF(10.9) en IEF(10.11)):

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad , \tag{10.3.6}$$

$$\Delta\mathbf{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \varepsilon_0\mu_0\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\mu_0\mathbf{J} \quad . \tag{10.3.7}$$

De eerste vergelijking (10.3.6) is dezelfde als in de electrostatica; ook de oplossing, dus de scalaire potentiaal, is gelijk aan die uit de electrostatica. De potentiaal wordt 'instantaan' bepaald door de ladingsverdeling, net als in de electrostatica.

De tweede vergelijking (10.3.7) blijft ongelukkig. Echter, we kunnen de vergelijking iets vereenvoudigen door apart te kijken naar het longitudinale en het transversale deel van linker- en rechterlid. Omdat de vectorpotentiaal puur transversaal is in de Coulomb-ijking, zijn de eerste twee termen uit (10.3.7) puur transversaal, en de derde is puur longitudinaal.

Als we het transversale deel van de stroomdichtheid noteren als $\mathbf{J}_T$, zoals al in Hoofdstuk 1 gebeurde, dan vinden we voor het transversale deel van (10.3.7):

$$\boxed{\Delta\mathbf{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{J}_T} \quad . \tag{10.3.8}$$

De vectorpotentiaal voldoet aan een inhomogene *golfvergelijking*, met de transversale stroomdichtheid als bron. Het golfkarakter geeft aanleiding tot een 'retardatie-effect': de vectorpotentiaal wordt bepaald door de transversale stroomdichtheid op een eerder tijdstip, zoals we in de volgende Hoofdstukken nog nader zullen zien.

Het longitudinale deel van (10.3.7), dat volgt door de divergentie van de vergelijking te nemen, leert niets nieuws. Immers, er komt dan *rechts*, wegens de continuïteitsvergelijking voor de stroom-ladingsverdeling juist $\mu_0\partial\rho/\partial t$, dus afgezien van een triviale factor de tijdafgeleide van het rechterlid van (10.3.6). Voorts ontstaat *links* in (10.3.7) na het nemen van de divergentie de tijdafgeleide van het linkerlid van (10.3.6). Blijkbaar is het longitudinale deel van (10.3.7) equivalent met (10.3.6).

In de *Lorentz-ijking* worden de vergelijkingen beide direct van het type van een inhomogene golfvergelijking (zie IEF(10.16)):

$$\boxed{\Delta\varphi - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \Delta\mathbf{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{J}} \quad . \tag{10.3.9}$$

In beide potentialen treden nu retardatie-effecten op.

Het is belangrijk op te merken dat het verschillende gedrag van de potentialen in de twee ijkingen *geen* fysische betekenis heeft. De potentialen zijn slechts hulpgrootheden. Alleen de velden hebben fysische betekenis. De consequenties van de hier gevonden eigenschappen van de potentialen voor de velden zullen later worden bekeken.

### Lorentz-kracht in termen van de potentialen; Lagrange- en Hamilton-formalisme

De bewegingsvergelijking van Newton voor een geladen deeltje in een willekeurig plaats- en tijdafhankelijk electromagnetisch veld is te schrijven als

$$\begin{aligned} m\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= e(\mathbf{E} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{B}) \\ &= -e\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - e\nabla\varphi + e\mathbf{v}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{A}) \\ &= -e\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - e\nabla\varphi + e(\nabla\mathbf{A})\cdot\mathbf{v} - e\mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{A}) \quad . \end{aligned} \tag{10.3.10}$$

Na introductie van de *convectieve tijdafgeleide* of *meebewogen tijdafgeleide* volgens

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{A} \tag{10.3.11}$$

ontstaat:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v} + e\mathbf{A}) = -\nabla(e\varphi - e\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) \quad . \tag{10.3.12}$$

Deze bewegingvergelijking is te zien als een Lagrange-vergelijking:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \quad , \tag{10.3.13}$$

met de Lagrange-functie

$$\boxed{L \equiv T - U = \tfrac{1}{2}mv^2 - e(\varphi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})} \quad . \tag{10.3.14}$$

De kinetische energie $T$ heeft de bekende vorm, terwijl de potentiaalfunctie

$$U = e(\varphi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) \tag{10.3.15}$$

afhankelijk is van de positie en de snelheid van het deeltje. Dit is toegestaan in het Lagrange-formalisme.

Uit het Lagrange-formalisme kan men op de standaardwijze een Hamilton-formalisme afleiden. We voeren eerst de *kanonieke impuls* $\mathbf{p}_c$ in door:

$$\boxed{\mathbf{p}_c = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}} \quad . \tag{10.3.16}$$

De notatie $\mathbf{p}_c$ wordt hier gebruikt om een onderscheid te maken met de mechanische impuls $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$ van het deeltje. Vervolgens definiëren we de Hamiltoniaan $H$ als:

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{p}_c - L = \mathbf{v}\cdot\mathbf{p}_c - \tfrac{1}{2}mv^2 + e(\varphi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) \\ &= \frac{1}{m}(\mathbf{p}_c - e\mathbf{A})\cdot\mathbf{p}_c - \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_c - e\mathbf{A})^2 + e\varphi - \frac{e}{m}(\mathbf{p}_c - e\mathbf{A})\cdot\mathbf{A} \quad , \end{aligned} \tag{10.3.17}$$

waar we $\mathbf{v}$ elimineerden ten gunste van $\mathbf{p}_c$, zoals bij de overgang naar het Hamilton-formalisme noodzakelijk is. We vinden tenslotte:

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_c - e\mathbf{A})^2 + e\varphi} \quad . \tag{10.3.18}$$

Men controleert eenvoudig dat is voldaan aan de Hamilton-vergelijkingen die luiden:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_c} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{d\mathbf{p}_c}{dt} \quad . \tag{10.3.19}$$

Het Hamilton-formalisme is essentieel voor het quantiseren van een systeem van een of meer geladen deeltjes in een uitwendig electromagnetisch veld (dus bij voorbeeld voor de quantisatie van een atoom in een extern magneetveld).

## Green-functie en geretardeerde potentialen

Uit de Maxwell-vergelijkingen voor het electromagnetische veld in vacuum in aanwezigheid van een stroom-ladingsverdeling volgt dat de potentialen in de Lorentz-ijking voldoen aan de inhomogene golfvergelijkingen (10.3.9):

$$\begin{aligned} \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \\ \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0\mathbf{J} \quad . \end{aligned} \tag{10.3.20}$$

Hierbij gebruikten we dat geldt $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$.

Om deze vergelijkingen op te lossen zoeken we een integraalrepresentatie, die de potentialen uitdrukt in de bronnen. In de electrostatica vonden we dat de oplossing van de inhomogene Laplace-vergelijking (de Poisson-vergelijking)

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \tag{10.3.21}$$

wordt gegeven door de representatie (2.3.13):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \, \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0} \quad . \tag{10.3.22}$$

Deze representatie wordt gekarakteriseerd door de integraalkern

$$G_{\text{stat}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad . \tag{10.3.23}$$

Deze integraalkern voldoet aan de vergelijking (1.3.21):

$$\Delta G_{\text{stat}}(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}) \quad , \tag{10.3.24}$$

en wordt daarom de *Green-functie* van de Laplace-vergelijking genoemd.

Dezelfde techniek van integraalrepresentaties en Green-functies kan ook worden gebruikt voor het oplossen van de inhomogene golfvergelijking. De Green-functie van de golfvergelijking hangt af van plaats en tijd, en voldoet aan de definiërende vergelijking:

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\mathbf{r},t) = -\delta(\mathbf{r})\;\delta(t)} \quad . \tag{10.3.25}$$

Als deze Green-functie eenmaal bekend is dan kunnen de algemene oplossingen van de inhomogene golfvergelijking worden geschreven als

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r},t) &= \int d\mathbf{r}'dt' \; G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') \; \frac{\rho(\mathbf{r}',t')}{\varepsilon_0} \quad , \\ \mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \int d\mathbf{r}'dt' \; G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') \; \mu_0\mathbf{J}(\mathbf{r}',t') \quad , \end{aligned} \tag{10.3.26}$$

zoals na invullen in (10.3.20) blijkt.

De oplossing van de vergelijking (10.3.25) voor de Green-functie $G(\mathbf{r},t)$ van de golfvergelijking luidt:

$$\boxed{G(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi r}\;\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)} \quad , \tag{10.3.27}$$

met $r = |\mathbf{r}|$. Het bewijs volgt door eerst de werking van de Laplace-operator op $G$ te onderzoeken:

$$\Delta G(\mathbf{r},t) = \left(\Delta\frac{1}{4\pi r}\right)\delta\left(t-\frac{r}{c}\right) + 2\left(\nabla\frac{1}{4\pi r}\right)\cdot\nabla\delta\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{4\pi r}\Delta\delta\left(t-\frac{r}{c}\right) \quad . \tag{10.3.28}$$

De eerste term rechts is wegens (10.3.24) gelijk aan

$$-\delta(\mathbf{r})\,\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)=-\delta(\mathbf{r})\,\delta(t)\quad . \tag{10.3.29}$$

De tweede term rechts in (10.3.28) krijgt, na gebruik van de kettingregel voor het differentiëren van de delta-functie volgens

$$\nabla\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)=-\frac{\mathbf{r}}{rc}\,\frac{\partial}{\partial t}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)\quad , \tag{10.3.30}$$

de vorm:

$$-2\left(\nabla\frac{1}{4\pi r}\right)\cdot\frac{\mathbf{r}}{rc}\,\frac{\partial}{\partial t}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)=\frac{2}{4\pi r^2 c}\,\frac{\partial}{\partial t}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)\quad . \tag{10.3.31}$$

De derde term rechts in (10.3.28) tenslotte geeft door herhaald (10.3.30) te gebruiken:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4\pi r}\nabla\cdot\left[\frac{\mathbf{r}}{rc}\,\frac{\partial}{\partial t}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] &= -\frac{1}{4\pi r}\left[\frac{2}{rc}\,\frac{\partial}{\partial t}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\mathbf{r}}{rc}\cdot\nabla\frac{\partial}{\partial t}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\\ &= -\frac{2}{4\pi r^2 c}\frac{\partial}{\partial t}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{1}{4\pi r c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)\end{aligned} \tag{10.3.32}$$

waar we in de eerste regel gebruikten dat geldt $\nabla\cdot(\mathbf{r}/r)=2/r$.

Bij optellen van (10.3.31) en (10.3.32) vallen de termen met de enkele tijdafgeleide van de delta-functie tegen elkaar weg. Er blijft over

$$\Delta G(\mathbf{r},t)=-\delta(\mathbf{r})\,\delta(t)+\frac{1}{4\pi r c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)\quad , \tag{10.3.33}$$

zodat inderdaad aan (10.3.25) is voldaan. De hier gegeven afleiding is equivalent aan die van IEP424, waar niet naar de Green-functie, maar naar de scalaire potentiaal wordt gekeken.

De oplossingen van de inhomogene golfvergelijkingen (10.3.20) volgen nu uit (10.3.26), ofwel expliciet, na uitvoeren van de integraties over de tijd $t'$:

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r},t)&=\int d\mathbf{r}'\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\quad ,\\ \mathbf{A}(\mathbf{r},t)&=\int d\mathbf{r}'\,\frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\quad .\end{aligned}} \tag{10.3.34}$$

De potentialen, die equivalent zijn met IEF(10.19), zijn *geretardeerd*: ze worden bepaald door de stroom-ladingsverdeling op de geretardeerde tijdstippen $t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$. Een voorbeeld van een berekening van de potentialen met deze formules is gegeven in Voorbeeld 2, IEP425. Uit de uitdrukkingen voor de potentialen kunnen de velden worden bepaald. Men vindt de vergelijkingen IEF(10.29) en IEF(10.31).

### Potentialen van een bewegende puntlading

De geretardeerde potentialen gegenereerd door een stroom-ladingsverdeling zijn gegeven door (10.3.26). Na substitutie van (10.3.27) en uitvoeren van de integraties over de tijd volgde daaruit (10.3.34).

De potentialen van een bewegende puntlading met lading $e$, positie $\mathbf{r}_0(t)$ en snelheid $\mathbf{v}_0(t)$ volgen uit (10.3.26) door te substitueren (zie ook (5.3.3)–(5.3.4)):

$$\rho(\mathbf{r},t) = e\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)) \quad , \quad \mathbf{J}(\mathbf{r},t) = e\,\mathbf{v}_0(t)\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)) \quad . \tag{10.3.35}$$

De scalaire potentiaal wordt dan

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r},t) &= \frac{e}{\varepsilon_0}\int d\mathbf{r}'dt'\;G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\delta\left(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0(t')\right) \\ &= \frac{e}{\varepsilon_0}\int dt'\;G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t'),t-t') \\ &= \frac{e}{\varepsilon_0}\int dt'\;\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}\;\delta\left(t-t'-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}{c}\right) \quad , \end{aligned} \tag{10.3.36}$$

waar we, anders dan in (10.3.34), de plaatsintegratie als eerste hebben uitgevoerd, en nog niet de tijdintegratie.

De tijdintegratie in (10.3.36) is nu uit te voeren, omdat voor een functie $f(x)$, die precies één nulpunt $x_0$ heeft, geldt:

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|df(x)/dx|_{x=x_0}}\;\delta(x-x_0) \quad . \tag{10.3.37}$$

Het bewijs van deze hulprelatie voor de delta-functie van een functie volgt door de integraal van het product van deze delta-functie en een willekeurige functie $\psi(x)$, dus

$$\int dx\;\psi(x)\;\delta(f(x)) \tag{10.3.38}$$

te berekenen. Door de nieuwe integratievariabele $y = f(x)$ in te voeren vindt men voor deze integraal

$$\int dy\;|dx/dy|\;\psi(x(y))\;\delta(y) = |dx/dy|_{y=0}\;\psi(x(y=0)) = \frac{1}{|df/dx|_{x=x_0}}\;\psi(x_0) \quad , \tag{10.3.39}$$

waar we gebruikten dat $y = 0$ correspondeert met $x = x_0$. Anderzijds vindt men bij integratie van het rechterlid van (10.3.37):

$$\int dx\;\psi(x)\;\frac{1}{|df(x)/dx|_{x=x_0}}\;\delta(x-x_0) = \psi(x_0)\;\frac{1}{|df(x)/dx|_{x=x_0}} \quad , \tag{10.3.40}$$

hetgeen inderdaad gelijk is aan het rechterlid van (10.3.39). Omdat de functie $\psi(x)$ willekeurig is gekozen, is daarmee de hulprelatie (10.3.37) bewezen.

Pas nu (10.3.37) toe in (10.3.36). Gebruik daarbij dat de vergelijking

$$t - t' - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}{c} = 0 \tag{10.3.41}$$

precies één oplossing voor $t'$ heeft, die we $t_r$ noemen. Als de puntlading een lichtsignaal uitzendt op dit tijdstip $t_r$ (de puntlading is dan op de plaats $\mathbf{r}_0(t_r)$), dan arriveert dit licht juist op het tijdstip $t$ op de plaats $\mathbf{r}$. Dat er maar één tijdstip $t_r$ is met deze eigenschap volgt uit het feit dat de snelheid van de puntlading kleiner is dan de lichtsnelheid. De in (10.3.37) optredende afgeleide is nu

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left[t - t' - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}{c}\right] = -1 + \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}\cdot \mathbf{v}_0(t') \quad , \tag{10.3.42}$$

waarbij nog de absolute waarde moet worden genomen (dit is eenvoudig omdat $|\mathbf{v}_0|$ kleiner is dan $c$). Als voorts $t' = t_r$ wordt ingevuld, dan komt er uit (10.3.36):

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_r)|}\,\frac{1}{1 - c^{-1}\mathbf{v}_0(t_r)\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_r))\,/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_r)|} \quad . \tag{10.3.43}$$

Analoog vindt men voor de vectorpotentiaal:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0 e\mathbf{v}_0(t_r)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_r)|}\,\frac{1}{1 - c^{-1}\mathbf{v}_0(t_r)\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_r))\,/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_r)|} \quad . \tag{10.3.44}$$

Eenvoudiger vormen ontstaan door een eenheidsvector $\mathbf{n}(\mathbf{r},t)$ in te voeren volgens

$$\mathbf{n}(t_r) = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_r)|} \quad , \tag{10.3.45}$$

met $t_r(\mathbf{r},t)$ de oplossing van (10.3.41) als tevoren. Deze eenheidsvector wijst van de positie van de puntlading (op het geretardeerde tijdstip $t_r$) naar het waarnemingspunt $\mathbf{r}$. Dan worden (10.3.43) en (10.3.44):

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r},t) &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,\frac{1}{1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c} \quad , \\ \mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \frac{\mu_0 e\mathbf{v}_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,\frac{1}{1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c} \quad , \end{aligned}} \tag{10.3.46}$$

waarbij steeds $\mathbf{r}_0$ en $\mathbf{v}_0$ op het geretardeerde tijdstip $t_r$ moeten worden ingevuld. Dit zijn de potentialen van *Liénard en Wiechert* (cf. IEF(10.39)–(10.40)). De hier gegeven afleiding is analytisch. Een iets andere afleiding, die gebruik maakt van geometrische argumenten, is gegeven in IEP430–432. In Voorbeeld 3, IEP433, wordt de scalaire potentiaal van een met constante snelheid bewegende puntlading bepaald.

### Velden van een bewegende puntlading

Om de velden te berekenen zijn de plaats- en tijdafgeleiden nodig van de potentialen. Expliciet komt alleen $\mathbf{r}$ voor in (10.3.46). Impliciet komen beide voor, want $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_0$ hangen via $t_r$ af van $\mathbf{r}$ en $t$. Ook $\mathbf{n}$ hangt volgens (10.3.45) expliciet van $\mathbf{r}$, en impliciet via $t_r$ van $\mathbf{r}$ en $t$ af. Het is nu nodig de afgeleiden van de drie grootheden $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_0$ en $\mathbf{n}$ naar plaats en tijd te berekenen.

Vooraf moeten allereerst de afgeleiden van $t_r$ naar plaats en tijd worden bepaald. De definiërende relatie voor $t_r$ is volgens (10.3.41):

$$t - t_r - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_r)|}{c} = 0 \quad . \tag{10.3.47}$$

Differentieer deze relatie partieel naar $t$, met gebruik van de kettingregel:

$$1 - \frac{\partial t_r}{\partial t} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_r)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_r)|} \cdot \mathbf{v}_0(t_r)\, \frac{\partial t_r}{\partial t} = 0 \quad . \tag{10.3.48}$$

Dit geeft, na invoeren van de afkorting (10.3.45):

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}/c} \quad , \tag{10.3.49}$$

waar we het argument $t_r$ van $\mathbf{v}_0$ weglieten, als tevoren. Evenzo ontstaat door differentiatie naar $\mathbf{r}$ uit (10.3.47):

$$-\nabla t_r + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_r)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_r)|} \cdot \mathbf{v}_0(t_r)\, \nabla t_r - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_r)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_r)|} = 0 \quad , \tag{10.3.50}$$

en dus (cf. IEF(10.61)):

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c}\, \frac{\mathbf{n}}{1 - \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}/c} \quad . \tag{10.3.51}$$

Nu we de afgeleiden van $t_r$ kennen, is het niet moeilijk om de afgeleiden van $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_0$ en $\mathbf{n}$ te bepalen.

- De afgeleide van $\mathbf{r}_0(t_r)$ naar $t$ is:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}_0(t_r) = \frac{\partial t_r}{\partial t}\, \mathbf{v}_0(t_r) = \frac{1}{1 - \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}/c}\, \mathbf{v}_0 \quad , \tag{10.3.52}$$

  opnieuw met weglaten van het argument $t_r$.

- De afgeleide van $\mathbf{r}_0(t_r)$ naar $\mathbf{r}$ is:

$$\nabla \mathbf{r}_0(t_r) = [\nabla t_r]\, \mathbf{v}_0(t_r) = -\frac{1}{c}\, \frac{\mathbf{n}}{1 - \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}/c}\, \mathbf{v}_0 \quad , \tag{10.3.53}$$

  waar de volgorde van de twee vectoren natuurlijk van belang is!

- Analoog is de afgeleide van $\mathbf{v}_0(t_r)$ naar $t$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_0(t_r) = \frac{\partial t_r}{\partial t}\, \mathbf{a}_0(t_r) = \frac{1}{1 - \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}/c}\, \mathbf{a}_0 \quad , \tag{10.3.54}$$

  met $\mathbf{a}(t_r)$ de versnelling van de puntlading op het geretardeerde tijdstip.

- Voorts is de afgeleide van $\mathbf{v}_0(t_r)$ naar $\mathbf{r}$:

$$\nabla \mathbf{v}_0(t_r) = [\nabla t_r]\, \mathbf{a}_0(t_r) = -\frac{1}{c}\, \frac{\mathbf{n}}{1 - \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}/c}\, \mathbf{a}_0 \quad . \tag{10.3.55}$$

- De afgeleide van $\mathbf{n}$ naar $t$ is:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{n}(t_r) &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_r)|} \\ &= \frac{\partial t_r}{\partial t}\left[-\frac{\mathbf{v}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}+\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{v}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\right] \\ &= -\frac{1}{1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c}\,\frac{(\mathsf{U}-\mathbf{nn})\cdot\mathbf{v_0}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad . \end{aligned} \tag{10.3.56}$$

- Tenslotte de afgeleide van $\mathbf{n}$ naar $\mathbf{r}$:

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{n}(t_r) &= \nabla\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_r)|} \\ &= \frac{\mathsf{U}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}+\nabla t_r\left[-\frac{\mathbf{v}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}+\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{v}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\right] \\ &= \frac{\mathsf{U}-\mathbf{nn}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}+\frac{1}{c}\,\frac{\mathbf{n}}{1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c}\,\frac{(\mathsf{U}-\mathbf{nn})\cdot\mathbf{v_0}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad . \end{aligned} \tag{10.3.57}$$

Nu we alle afgeleiden kennen is het differentiëren van de potentialen in principe eenvoudig. Voor de gradiënt van de potentiaal geldt:

$$\begin{aligned}\nabla\varphi &= -\frac{e\mathbf{n}}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}\,\frac{1}{1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c}+[\nabla\mathbf{r}_0(t_r)]\cdot\frac{e\mathbf{n}}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}\,\frac{1}{1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c} \\ &\quad+\frac{e}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,[\nabla\mathbf{v}_0(t_r)]\cdot\frac{\mathbf{n}/c}{(1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c)^2}+\frac{e}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,(\nabla\mathbf{n})\cdot\frac{\mathbf{v}_0/c}{(1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c)^2} \quad . \end{aligned} \tag{10.3.58}$$

Invullen van (10.3.53), (10.3.55) en (10.3.57) geeft ‘na enig rekenen’ (controleer dit!):

$$\nabla\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2(1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c)^3}\left[\frac{\mathbf{v}_0}{c}\left(1-\frac{\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}}{c}\right)-\left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)\mathbf{n}-\mathbf{n}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\,\frac{\mathbf{a}_0}{c^2}\cdot\mathbf{n}\right] \quad , \tag{10.3.59}$$

hetgeen overeenkomt met IEF(10.62).

Een analoge berekening kan worden uitgevoerd voor $\partial\mathbf{A}/\partial t$, door eerst te schrijven:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{\mu_0 e}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,\frac{1}{1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c}\,\frac{\partial\mathbf{v}_0(t_r)}{\partial t}+\frac{\mu_0 e\mathbf{v}_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}\,\frac{1}{1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c}\,\mathbf{n}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_0(t_r)}{\partial t} \\ &\quad+\frac{\mu_0 e\mathbf{v}_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,\frac{1}{(1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c)^2}\,\frac{\mathbf{n}}{c}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}_0(t_r)}{\partial t}+\frac{\mu_0 e\mathbf{v}_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,\frac{1}{(1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c)^2}\,\frac{\mathbf{v}_0}{c}\cdot\frac{\partial\mathbf{n}(t_r)}{\partial t} \quad . \end{aligned} \tag{10.3.60}$$

Invullen van (10.3.52), (10.3.54) en (10.3.56) geeft nu, opnieuw ‘na enig rekenen’ (cf. IEF(10.63)):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{\mu_0 e c^2}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2(1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c)^3} \\ &\quad\times\left[\frac{\mathbf{v}_0}{c}\left(\frac{\mathbf{v}_0}{c}\cdot\mathbf{n}-\frac{v_0^2}{c^2}\right)+\frac{\mathbf{a}_0}{c^2}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\,\left(1-\frac{\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}}{c}\right)+\frac{\mathbf{v}_0}{c}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\,\frac{\mathbf{a}_0}{c^2}\cdot\mathbf{n}\right] . \end{aligned} \tag{10.3.61}$$

Door optellen van (10.3.59) en (10.3.61) wordt tenslotte het electrische veld van een bewegende puntlading gevonden (cf. IEF(10.65)):

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2(1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c)^3}\left\{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\wedge\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}_0}{c}\right)\wedge\frac{\mathbf{a}_0}{c^2}\right]+\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}_0}{c}\right)\left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)\right\}} . \tag{10.3.62}$$

Voor het magnetische veld moet $\nabla\wedge\mathbf{A}$ worden bepaald. De berekening verloopt analoog aan de uitwerking van (10.3.58). Er komt tenslotte:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2(1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c)^3} \\ &\quad\times\mathbf{n}\wedge\left\{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\wedge\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}_0}{c}\right)\wedge\frac{\mathbf{a}_0}{c^2}\right]-\frac{\mathbf{v}_0}{c}\left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)\right\} .\end{aligned} \tag{10.3.63}$$

Door vergelijken met (10.3.62) volgt eenvoudig (cf. IEF(10.66)):

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{1}{c}\mathbf{n}\wedge\mathbf{E}} . \tag{10.3.64}$$

De hier gevonden uitdrukkingen voor de velden van een bewegende puntlading zijn aanzienlijk ingewikkelder dan die van een stilstaande puntlading. Dan is het electrische veld immers het Coulomb-veld, en het magneetveld is 0. Men controleert eenvoudig dat deze velden worden teruggevonden uit (10.3.62) en (10.3.64). In het algemeen worden de velden bepaald door de plaats, de snelheid en de versnelling op het geretardeerde tijdstip $t_r$. In Voorbeeld 4 op IEP439 worden de velden voor een eenparig bewegende puntlading berekend.

## 10.4 Samenvatting van belangrijke resultaten

### Potentialen

- Verband tussen velden en potentialen: (10.3.1)
- IJktransformaties: (10.3.2)
- Potentiaalvergelijkingen in Coulomb- en Lorentz-ijking: (10.3.6), (10.3.8), (10.3.9)
- Lagrange-functie: (10.3.14)
- Kanonieke impuls: (10.3.16)
- Hamiltoniaan: (10.3.18)

### Geretardeerde potentialen en velden

- Definitie Green-functie: (10.3.25)
- Green-functie: (10.3.27)
- Integraalrepresentaties voor de geretardeerde potentialen: (10.3.34)
- Integraalrepresentaties voor de geretardeerde velden: IEF(10.29), IEF(10.31)

### Potentialen en velden van een bewegende puntlading

- Potentialen van Liénard en Wiechert: (10.3.46)
- Velden van een bewegende puntlading: (10.3.62), (10.3.64)
- Velden van eenparig bewegende puntlading: IEF(10.68)–(10.69)

# Hoofdstuk 11

# Straling

## 11.1 Kernbegrippen

### Dipoolstraling

Multipool-ontwikkeling. Potentialen en velden van tijdafhankelijke electrische en magnetische dipool. Verre velden. Uitgestraald vermogen.

### Straling van puntlading

Formule van Larmor voor uitgestraald vermogen.

## 11.2 Notaties

Er worden geen nieuwe van IE afwijkende notaties ingevoerd.

## 11.3 Addenda

### Multipool-ontwikkeling van de geretardeerde potentialen

In het vorige hoofdstuk zijn de algemene uitdrukkingen voor de potentialen die worden gegenereerd door een willekeurige plaats- en tijdafhankelijke stroomladingsverdeling afgeleid:

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r},t) &= \int d\mathbf{r}'\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) \quad ,\\ \mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \int d\mathbf{r}'\,\frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) \quad .\end{aligned}} \tag{11.3.1}$$

Net als in de electrostatica en de magnetostatica kan ook hier een multipool-ontwikkeling worden gemaakt van de potentialen. Daarbij wordt een positie $\mathbf{r}_0$ midden in de stroom-ladingsverdeling gekozen. De potentialen worden dan geschreven als een ontwikkeling in electrische en magnetische multipolen van de stroom-ladingsverdeling ten opzichte van $\mathbf{r}_0$.

Bij de afleiding van de multipool-ontwikkeling voor de geretardeerde potentialen worden twee veronderstellingen gemaakt:

- de stroom-ladingsverdeling is gelocaliseerd in de buurt van $\mathbf{r}_0$, en het punt van waarneming is ver weg van $\mathbf{r}_0$, zodanig dat in de integralen in (11.3.1) alleen posities $\mathbf{r}'$ van belang zijn waarvoor $|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0| \ll |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|$; deze veronderstelling werd ook gemaakt bij het afleiden van de multipool-ontwikkeling in de electrostatica en de magnetostatica, en is essentieel voor de convergentie van de ontwikkelingen;

- de stroom-ladingsverdeling verandert langzaam in de tijd op een tijdschaal $|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0|/c$; deze laatste tijd is de tijd nodig voor een electromagnetisch signaal om de gehele stroom-ladingsverdeling te doorkruisen; deze veronderstelling heeft geen analogon in de eerder besproken statische multipool-ontwikkelingen.

Onder de gegeven veronderstellingen kunnen de verschillende factoren in de integraal-representatie voor de scalaire potentiaal als volgt worden ontwikkeld:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + (\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\cdot\nabla_0\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \ldots \quad , \tag{11.3.2}$$

$$\begin{aligned}\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) &= \rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\\ &- \frac{1}{c}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\cdot[\nabla_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|]\,\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right) + \ldots ,\end{aligned} \tag{11.3.3}$$

met $\nabla_0 = \partial/\partial\mathbf{r}_0$. Invullen in de eerste formule van (11.3.1) geeft:

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{r}'\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\int d\mathbf{r}'\ (\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\cdot\left[\nabla_0\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\right]\ \rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\\
&-\frac{1}{c}\int d\mathbf{r}'\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\ (\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\cdot[\nabla_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|]\ \frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\\
&+\dots\quad . \qquad (11.3.4)
\end{aligned}
$$

Nu is de totale lading $Q$ van de ladingsverdeling gegeven door

$$Q=\int d\mathbf{r}'\ \rho(\mathbf{r}',t)\quad . \qquad (11.3.5)$$

Wegens ladingsbehoud mag hier $t$ worden vervangen door $t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|/c$, zoals in de eerste regel van (11.3.4). Voorts is het electrische dipoolmoment op het tijdstip $t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|/c$ gegeven door

$$\mathbf{p}\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)=\int d\mathbf{r}'\ (\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\ \rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\quad . \qquad (11.3.6)$$

De eerste termen van de multipool-ontwikkeling voor de scalaire potentiaal zijn nu dus gevonden als:

$$
\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r},t)\ &=\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}-\mathbf{p}\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\cdot\nabla\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\\
&+\frac{1}{c}\ [\nabla|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|]\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}+\dots\quad , \qquad (11.3.7)
\end{aligned}
$$

waar we gebruikten dat $\nabla_0=-\nabla$ als de operatoren werken op een functie die alleen afhangt van $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$. Als we de oorsprong op de plaats $\mathbf{r}_0$ leggen en de differentiaties uitvoeren dan wordt dit:

$$\boxed{\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot\frac{\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}+\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\cdot\frac{\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2 c}+\dots}\quad . \qquad (11.3.8)$$

Deze formule is equivalent met IEF(11.51).

Een analoge ontwikkeling van de tweede formule van (11.3.1) geeft in plaats van (11.3.4):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\ &=\ \int d\mathbf{r}'\ \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\ \mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\\
&+\int d\mathbf{r}'\ (\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\cdot\left[\nabla_0\frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\right]\ \mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\\
&-\frac{1}{c}\int d\mathbf{r}'\ \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\ (\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\cdot[\nabla_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|]\ \left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\right]\\
&+\dots\quad . \qquad (11.3.9)
\end{aligned}
$$

De eerste term rechts is uit te werken in termen van het electrische dipoolmoment, door (7.3.29) te gebruiken. Het resultaat is:

$$\frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\quad . \qquad (11.3.10)$$

In de tweede en de derde termen rechts kunnen we met behulp van (5.3.43) een antisymmetrisering in de tensorindices van de integraal over het product van de factoren $\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0$ en $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c)$ uitvoeren. De tweede term wordt dan:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\int d\mathbf{r}'\ (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)\cdot\left[\nabla_0\frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\right]\ \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\\
&-\tfrac{1}{2}\int d\mathbf{r}'\ \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\cdot\left[\nabla_0\frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\right]\ (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)\\
&= \tfrac{1}{2}\int d\mathbf{r}'\ \left[(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)\wedge\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\right]\wedge\left[\nabla_0\frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\right]\\
&= \mathbf{m}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\wedge\left[\nabla_0\frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\right] \quad , \qquad (11.3.11)
\end{aligned}$$

waar we het magnetische dipoolmoment op het tijdstip $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$ invoerden volgens (5.3.46):

$$\mathbf{m}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right) = \tfrac{1}{2}\int d\mathbf{r}'\ \left[(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)\wedge\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\right] \quad . \qquad (11.3.12)$$

Hierbij moet worden opgemerkt dat net als in hoofdstuk 7 (zie de opmerking onder (7.3.30)) termen met de tijdafgeleide van het electrische quadrupoolmoment zijn weggelaten bij het antisymmetriseren.

De derde term van het rechterlid van (11.3.9) kan op analoge wijze worden omgewerkt. Er komt na antisymmetrisering:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2c}\int d\mathbf{r}'\ \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\ (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)\cdot[\nabla_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|]\ \left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\right]\\
&+\frac{1}{2c}\int d\mathbf{r}'\ \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\ \left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\right]\cdot[\nabla_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|]\ (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)\\
&= -\frac{1}{2c}\int d\mathbf{r}'\ \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\ \left\{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)\wedge\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\right]\right\}\wedge[\nabla_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|]\\
&= -\frac{1}{c}\ \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\ \left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{m}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\right]\wedge[\nabla_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|] \quad . \qquad (11.3.13)
\end{aligned}$$

De eerste termen uit de multipool-ontwikkeling voor de vectorpotentiaal zijn nu dus gevonden als:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \ =\ & \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\\
&-\mathbf{m}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\wedge\left[\nabla\frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\right]\\
&+\frac{1}{c}\ \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\ \left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{m}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)\right]\wedge[\nabla|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|] + \ldots \quad , (11.3.14)
\end{aligned}$$

waar we weer $\nabla_0 = -\nabla$ gebruikten. Als we de oorsprong weer in $\mathbf{r}_0$ leggen en de differentiaties uitvoeren, dan vinden we tenslotte:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\ \frac{1}{4\pi r} + \mu_0 \mathbf{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\wedge\frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3} \\ +\mu_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\wedge\frac{\mathbf{r}}{4\pi r^2 c}+\ldots\end{aligned}} \quad . \qquad (11.3.15)$$

De bijdrage van de electrische dipool is equivalent met IEF(11.54).

De uitdrukkingen (11.3.8) en (11.3.15) zijn de gezochte multipool-ontwikkelingen voor de geretardeerde potentialen. De scalaire potentiaal (11.3.8) is een generalisatie van de monopool- en dipooltermen uit (3.2.8). Er zijn enkele verschillen te constateren:

- de potentiaal wordt bepaald door het tijdafhankelijke electrische dipoolmoment op een 'globaal' geretardeerd tijdstip, dat afhangt van de afstand tussen het waarnemingspunt en de oorsprong;

- er is een extra bijdrage met de de tijdafgeleide van het electrische dipoolmoment; deze bijdrage is een gevolg van de variaties in retardatietijd die optreden bij het doorlopen van de ladingsverdeling.

Evenzo is de vectorpotentiaal (11.3.15) een generalisatie van (7.3.30), die zelf een generalisatie van (5.3.45) was. Opnieuw zijn er verschillen: door de 'globale' retardatietijd, en door de variaties in retardatietijd bij het doorlopen van de stroomverdeling.

### 'Verre' electromagnetische velden van electrische en magnetische dipolen

Het electromagnetische veld dat wordt opgewekt door een electrische of een magnetische dipool in de oorsprong volgt uit de hierboven afgeleide uitdrukkingen (11.3.8) en (11.3.15) voor de potentialen. Voor het electrische veld van een *electrische* dipool vindt men:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\nabla\varphi(\mathbf{r},t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\ &= -\nabla\left[\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot\frac{\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right] - \nabla\left\{\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\cdot\frac{\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2 c}\right\} \\ &\quad -\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\ \frac{1}{4\pi r} \quad , \end{aligned} \qquad (11.3.16)$$

en voor het magnetische veld:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \nabla\wedge\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mu_0\nabla\wedge\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\ \frac{1}{4\pi r}\right] \quad . \qquad (11.3.17)$$

Als de differentiaties worden uitgevoerd dan ontstaan bijdragen die op grote afstanden evenredig zijn met $1/r$, met $1/r^2$ en met $1/r^3$. Ver van de oorsprong zijn alleen de bijdragen van het eerste type van belang. De uitdrukkingen die ontstaan door alleen deze bijdragen mee te nemen heten de *verre* electromagnetische velden. Men vindt het verre electrische veld uit de tweede en de derde term van (11.3.16). In de tweede term moet daarbij de electrische dipool $\mathbf{p}(t-r/c)$ volgens de kettingregel naar $\mathbf{r}$ worden gedifferentieerd, niet de andere factoren (die leiden tot termen evenredig met $1/r^2$). Het verre magnetische veld volgt uit (11.3.17) door opnieuw alleen de electrische dipool te differentiëren. Er komt (cf. IEF(11.56)–(11.57)):

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}_{ver}(\mathbf{r},t) &= -\frac{\mu_0}{4\pi r}\left(\mathsf{U}-\frac{\mathbf{rr}}{r^2}\right)\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right) \quad , \\ \mathbf{B}_{ver}(\mathbf{r},t) &= -\frac{\mu_0}{4\pi r^2 c}\mathbf{r}\wedge\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right) \quad . \end{aligned}} \tag{11.3.18}$$

Evenzo vindt men voor het electrische veld dat wordt opgewekt door een *magnetische* dipool in de oorsprong uit (11.3.15):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\mu_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\wedge\frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3} - \mu_0\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\wedge\frac{\mathbf{r}}{4\pi r^2 c} \quad , \tag{11.3.19}$$

en voor het magnetische veld:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0\nabla\wedge\left[\mathbf{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\wedge\frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3}\right] + \mu_0\nabla\wedge\left\{\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\wedge\frac{\mathbf{r}}{4\pi r^2 c}\right\} \quad . \tag{11.3.20}$$

De verre velden volgen weer door alleen de bijdragen mee te nemen die evenredig zijn met $1/r$. Deze volgen uit de laatste termen van (11.3.19) en (11.3.20), waarbij in (11.3.20) de magnetische dipool moet worden gedifferentieerd. Er komt:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}_{ver}(\mathbf{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2 c}\mathbf{r}\wedge\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{m}\left(t-\frac{r}{c}\right) \quad , \\ \mathbf{B}_{ver}(\mathbf{r},t) &= -\frac{\mu_0}{4\pi r c^2}\left(\mathsf{U}-\frac{\mathbf{rr}}{r^2}\right)\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{m}\left(t-\frac{r}{c}\right) \quad , \end{aligned}} \tag{11.3.21}$$

waar bij het uitwerken van het magnetische veld werd gebruikt dat voor een willekeurige vector $\mathbf{a}$ geldt $\mathbf{r}\wedge[\mathbf{a}\wedge\mathbf{r}] = (r^2\mathsf{U}-\mathbf{rr})\cdot\mathbf{a}$. Duidelijk is de fraaie analogie te zien tussen de verre velden van een electrische en van een magnetische dipool. We zien dat de verre velden steeds loodrecht op $\mathbf{r}$ staan, en ook onderling orthogonaal zijn (ga dit na!). Verder worden ze bepaald door de tweede tijdafgeleide van het dipoolmoment op het door de retardatie bepaalde tijdstip.

De *energiestroomdichtheid* die is geassocieerd met de verre velden volgt door berekening van de Poynting-vector $\mathbf{S} = \mathbf{E}\wedge\mathbf{B}/\mu_0$. Voor de *electrische* dipool vindt men uit (11.3.18):

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 r^3 c}\,\mathbf{r}\,\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\cdot\left(\mathsf{U}-\frac{\mathbf{rr}}{r^2}\right)\cdot\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] \quad . \tag{11.3.22}$$

Voor de *magnetische* dipool is de uitdrukking analoog, met $\mathbf{p}$ vervangen door $\mathbf{m}/c^2$. De energiestroomdichtheid is blijkbaar evenredig met $1/r^2$ en is radieel gericht.

De *totale energie* $P(t)$ die per tijdseenheid stroomt door het oppervlak van een grote bol met straal om de oorsprong wordt gevonden door de integraal $\int d\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}$ te berekenen. Wegens de juist gevonden evenredigheid van $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$ met $1/r^2$ is deze integraal onafhankelijk van de straal van de bol. Men vindt door de integraal over de gehele ruimtehoek $\Omega$ te bepalen:

$$\begin{aligned} P(t) &= \int d\Omega\, r^2\, |\mathbf{S}| \\ &= \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \int d\Omega \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \cdot \left(\mathsf{U} - \frac{\mathbf{rr}}{r^2}\right) \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \quad . \end{aligned} \tag{11.3.23}$$

We gebruiken nu dat voor een willekeurige vector $\mathbf{a}$ geldt

$$\int d\Omega\, \mathbf{a} \cdot \left(\mathsf{U} - \frac{\mathbf{rr}}{r^2}\right) \cdot \mathbf{a} = \frac{8\pi}{3} a^2 \quad , \tag{11.3.24}$$

zoals gemakkelijk wordt bewezen door de vector $\mathbf{a}$ parallel aan de $z$-as te kiezen, zodat de integrand gelijk aan $a^2 \sin^2\theta$ wordt. We vinden dan tenslotte voor de totale per tijdseenheid naar oneindig ontsnappende energie van een electrische dipool (het naar oneindig *uitgestraalde vermogen*):

$$\boxed{P(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right|^2} \tag{11.3.25}$$

(cf. IEF(11.60)). Voor het door een *magnetische* dipool uitgestraalde vermogen geldt een analoge uitdrukking.

### Potentialen en 'verre' velden van oscillerende dipolen

De uitdrukkingen (11.3.8) en (11.3.15) voor de potentialen vereenvoudigen als de tijdafhankelijkheid van de dipolen harmonisch is, en als de richting van de oscillerende dipolen vast is. Als we de $z$-as langs deze richting kiezen dan kunnen we schrijven:

$$\mathbf{p}(t) = p_0\, \cos(\omega t)\, \mathbf{e}_z \quad , \quad \mathbf{m}(t) = m_0\, \cos(\omega t)\, \mathbf{e}_z \quad . \tag{11.3.26}$$

Als we nu bolcoördinaten invoeren, en gebruiken dat geldt $\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_\varphi \sin\theta$, dan vinden we voor de dipoolbijdrage tot de scalaire potentiaal:

$$\boxed{\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, \cos\theta\, \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] - \frac{p_0\omega}{4\pi\varepsilon_0 r c}\, \cos\theta\, \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]} \quad , \tag{11.3.27}$$

en voor de vectorpotentiaal:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r}\, \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\, \mathbf{e}_z + \frac{\mu_0 m_0}{4\pi r^2}\, \sin\theta\, \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\, \mathbf{e}_\varphi \\ -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi r c}\, \sin\theta\, \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\, \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}} \quad . \tag{11.3.28}$$

De bijdragen van de electrische dipool komen overeen met IEF(11.12) en IEF(11.17), die van de magnetische dipool met IEF(11.33).

Ook de uitdrukkingen voor de velden vereenvoudigen als de tijdafhankelijkheid van de dipool harmonisch is, en als de richting van de oscillerende dipool vast is. Als we weer bolcoördinaten invoeren, en gebruiken dat geldt $(\mathsf{U} - \mathbf{rr}/r^2) \cdot \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_\theta \sin\theta$ en $\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_\varphi \sin\theta$, als tevoren, dan vinden we voor de 'verre' velden van een oscillerende *electrische* dipool (cf. IEF(11.18)–(11.19)):

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \sin\theta \ \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \mathbf{e}_\theta \quad , \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r c} \sin\theta \ \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \mathbf{e}_\varphi \quad . \end{aligned}} \tag{11.3.29}$$

Voor de 'verre' velden van een oscillerende *magnetische* dipool vinden we analoog (cf. IEF(11.36)–(11.37)):

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi r c} \sin\theta \ \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \mathbf{e}_\varphi \quad , \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi r c^2} \sin\theta \ \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \mathbf{e}_\theta \quad . \end{aligned}} \tag{11.3.30}$$

Uit deze uitdrukkingen is opnieuw duidelijk te zien dat de verre velden loodrecht op $\mathbf{r}$ (of $\mathbf{e}_r$) staan en ook onderling orthogonaal zijn. De velden zijn het sterkst in het equatoriale vlak, dus voor $\theta = \pi/2$.

De *energiestroomdichtheid* die door een oscillerende *electrische* dipool parallel aan de $z$-as wordt gegenereerd luidt voor grote $r$:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 r^2 c} \sin^2\theta \ \cos^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \mathbf{e}_r \tag{11.3.31}$$

(cf. IEF(11.20)). De energiestroomdichtheid is het grootste in het equatoriale vlak, zie ook Fig 11.4 op IEP448.

Het totale *uitgestraalde vermogen* volgt als

$$P(t) = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{6\pi c} \ \cos^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \quad . \tag{11.3.32}$$

Het tijdgemiddelde van dit uitgestraalde vermogen is (cf. IEF(11.22)):

$$\boxed{\langle P(t)\rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}} \quad . \tag{11.3.33}$$

De uitdrukkingen voor de energiestroomdichtheid van een oscillerende *magnetische* dipool zijn geheel analoog, namelijk:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{16\pi^2 r^2 c^3} \sin^2\theta \ \cos^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \mathbf{e}_r \quad , \tag{11.3.34}$$

en

$$\boxed{\langle P(t)\rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}} \tag{11.3.35}$$

(cf. IEF(11.40)).

De uitgestraalde vermogens van zowel de oscillerende electrische als de oscillerende magnetische dipool zijn evenredig met de vierde macht van de frequentie. De snelle toename van het uitgestraalde vermogen van een electrische dipool als functie van de frequentie is verantwoordelijk voor het blauw van de hemel, en voor het rood van de opgaande en de ondergaande zon, zie ook de discussie in Voorbeeld 11.1 op IEP449.

De verhouding tussen de uitgestraalde vermogens van een electrische en een magnetische dipool kan eenvoudig worden afgeschat (zie IEF(11.41)–(11.42)). Men vindt dat het vermogen van een magnetische dipool in het algemeen veel geringer is dan dat van een electrische dipool.

### Verre velden van bewegende puntlading

De uitdrukkingen (10.3.62) en (10.3.63) voor de velden van een willekeurige bewegende puntlading zijn tamelijk ingewikkeld, zoals we zagen. Eenvoudiger vormen ontstaan als we weer alleen kijken naar de zogenaamde 'verre' velden. Voor grote afstanden tussen de waarnemer en de puntlading worden de velden bij benadering gegeven door de termen in (10.3.62) en (10.3.63) die het langzaamste afvallen. Men ziet snel dat dit de termen evenredig met de versnelling zijn. Deze vallen af evenredig met $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|$. Ze luiden (cf. IEF(11.62)):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|(1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c)^3}\,\mathbf{n}\wedge\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}_0}{c}\right)\wedge\frac{\mathbf{a}_0}{c^2}\right] \quad ,\\
\mathbf{B} &= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|(1-\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}/c)^3}\,(\mathsf{U}-\mathbf{nn})\cdot\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}_0}{c}\right)\wedge\frac{\mathbf{a}_0}{c^2}\right] \quad . \qquad (11.3.36)
\end{aligned}
$$

Deze uitdrukkingen kunnen ook direct uit de potentialen (10.3.46) worden gevonden door te bedenken dat bij het nemen van afgeleiden alleen dan termen evenredig met $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|$ ontstaan als de snelheid $\mathbf{v}_0$ wordt gedifferentieerd, en de overige grootheden ($\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{n}$) ongemoeid worden gelaten. Dan zijn dus alleen (10.3.54) en (10.3.55) nodig.

De uitdrukkingen (11.3.36) voor de verre velden zijn alleen ongelijk nul als de versnelling van de puntlading (op het geretardeerde tijdstip) van nul verschilt. Alleen door een *versnellende puntlading* wordt electromagnetische straling (beschreven door de verre velden) gegenereerd. Deze verre velden (of 'stralingsvelden') krijgen een eenvoudige vorm als de snelheid van de puntlading op het geretardeerde tijdstip nul is. Dan komt er (IEF(11.68)):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,(\mathsf{U}-\mathbf{nn})\cdot\frac{\mathbf{a}_0}{c^2} \quad ,\\
\mathbf{B} &= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,\mathbf{n}\wedge\frac{\mathbf{a}_0}{c^2} \quad . \qquad (11.3.37)
\end{aligned}
$$

De energiestroomdichtheid is nu (cf. IEF(11.69)):

$$
\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\wedge\mathbf{B} = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}\,[a_0^2-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}_0)^2]\,\mathbf{n} \quad . \qquad (11.3.38)
$$

De energiestroomdichtheid valt af omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tussen waarneempunt en geretardeerde positie van de puntlading. De richting van $\mathbf{S}$ wordt bepaald door de eenheidsvector $\mathbf{n}$, die wijst van de geretardeerde positie naar het punt van waarneming. Tenslotte is de grootte van $\mathbf{S}$ evenredig met $\sin^2\theta$, met $\theta$ de hoek tussen de versnelling $\mathbf{a}_0$ en de eenheidsvector $\mathbf{n}$.

Het totaal uitgestraalde vermogen $P$ volgt in het geval van een op het geretardeerde tijdstip stilstaande lading door integratie van $|\mathbf{S}|$ over een boloppervlak:

$$P = \int d\Omega\, |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2\, |\mathbf{S}| = \frac{e^2 a_0^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \int d\Omega\, \sin^2\theta \quad , \tag{11.3.39}$$

en dus na uitvoeren van de integratie (cf. IEF (11.70)):

$$\boxed{P = \frac{e^2 a_0^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}} \quad . \tag{11.3.40}$$

Dit is de *Larmor-formule* voor het uitgestraalde vermogen van een momentaan stilstaande puntlading.

Als de puntlading niet in rust is dan bevat $P$ ook termen die afhangen van de snelheid op het geretardeerde tijdstip. De resulterende formule IEF(11.73) is de *Liénard-formule* voor het uitgestraalde vermogen van een bewegende puntlading. In Voorbeeld 11.3, IEP463, wordt de zogenaamde *remstraling* berekend voor een puntlading met parallelle snelheid en versnelling. Een ander voorbeeld is de *synchrotron-straling* van een in een cirkelbaan bewegende puntlading, zie IEV 11.16.

Een electromagnetisch veld heeft een impulsdichtheid en een energiedichtheid, zoals we in Hoofdstuk 8 hebben gezien. Bij integratie over de gehele ruimte volgt daaruit de totale impuls en de totale energie die in het veld zijn opgeslagen. In het bijzonder dragen ook de door een bewegende puntlading gegenereerde velden een totale impuls en een totale energie met zich mee. Deze impuls en deze energie zijn onttrokken aan de puntlading. Het gevolg is dat de impuls en de energie van de puntlading verandert tijdens het genereren van het veld: de puntlading ondervindt een *stralingsreactie*. De bijbehorende *stralingsreactiekracht* is voor het eerst onderzocht door Abraham en Lorentz. De theorie wordt kort besproken op IEP465–472. Omdat deze theorie nog steeds aanleiding tot controverses geeft, vormt het geen onderdeel van de stof van Electrodynamica B.

## 11.4 Samenvatting van belangrijke resultaten

### Dipoolstraling

- Multipool-ontwikkeling voor de geretardeerde potentialen: (11.3.8), (11.3.15)
- Potentialen van oscillerende dipolen: (11.3.27)–(11.3.28)
- Verre potentialen van oscillerende dipolen: IEF(11.14), IEF(11.17), IEF(11.35)
- Verre velden van electrische en magnetische dipolen: (11.3.18), (11.3.21)
- Uitgestraald vermogen van een electrische dipool: (11.3.25)
- Verre velden van oscillerende dipolen: (11.3.29), (11.3.30)
- Tijdgemiddelde van uitgestraald vermogen van oscillerende dipolen: (11.3.33), (11.3.35)

### Straling van puntlading

- Formule van Larmor voor uitgestraald vermogen: (11.3.40)

# Hoofdstuk 12

# Relativiteitstheorie en electrodynamica

## 12.1 Kernbegrippen

### Speciale relativiteitstheorie

Galilei-transformaties. Invariantie van de lichtsnelheid. Relativiteit van gelijktijdigheid. Lorentz-transformaties. Tijddilatatie. Lengtecontractie. Optellen van snelheden. Structuur van ruimte en tijd. Contravariante en covariante vectoren. Inwendig product. Invariante intervallen. Tijd-achtige, ruimte-achtige en licht-achtige intervallen. Wereldlijnen. Voorwaartse en achterwaartse lichtkegel.

### Relativistische mechanica

Eigentijd. Viersnelheid. Vierimpuls. Minkowski-kracht.

### Relativistische electrodynamica

Ladingsdichtheid en stroomdichtheid van puntlading. Viervector van ladings- en stroomdichtheid. Vierpotentiaal. Veldtensor. Transformatie van electromagnetische velden. Veldvergelijkingen. Lorentz-kracht.

## 12.2 Notaties

De Minkowski-kracht wordt genoteerd als $F^\mu$, niet als $K^\mu$, zoals in IE.

## 12.3 Addenda

### Galilei-transformaties

We bezien een bewegend massapunt met plaats $\mathbf{r}_0(t)$, snelheid $\mathbf{v}_0(t)$ en versnelling $\mathbf{a}_0(t)$. Een tweede waarnemer, die met een constante snelheid $\mathbf{v}$ ten opzichte van ons beweegt, zal vaststellen dat de plaats en de snelheid van het massapunt anders zijn. Ze worden voor deze waarnemer gegeven door $\mathbf{r}'_0(t) = \mathbf{r}_0(t) - \mathbf{v}t$ en $\mathbf{v}'_0(t) = \mathbf{v}_0(t) - \mathbf{v}$, indien we aannemen dat die waarnemer op $t = 0$ van onze plaats vertrekt. De versnelling is voor beide waarnemers gelijk, dus $\mathbf{a}'_0(t) = \mathbf{a}_0(t)$. De wet van Newton heeft daarom dezelfde vorm voor beide waarnemers.

Bovenstaande verbanden tussen de posities van het massapunt drukken uit dat de coördinatenstelsels van de twee waarnemers zijn verbonden door een zogenaamde *Galilei-transformatie*:

$$\boxed{\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \quad , \quad t' = t} \quad . \tag{12.3.1}$$

Volgens de eerste relatie beweegt de oorsprong van het tweede coördinatenstelsel met een snelheid $\mathbf{v}$ ten opzichte van het eerste. De tweede (triviale) relatie drukt uit dat de tijd in beide coördinatenstelsels dezelfde is. Alleen de ruimtelijke coördinaten worden getransformeerd.

Een ander voorbeeld waar de Galilei-transformaties kunnen worden gebruikt is bij de voortplanting van *geluidsgolven*. Een geluidsgolf is een zich voortplantende verstoring in de dichtheid van het medium, bij voorbeeld de lucht. Kies voor het gemak een geluidsbron in rust in het medium en veronderstel dat ook de eerste waarnemer in rust is. De amplitude van de dichtheidsfluctuatie is dan evenredig met $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t)$ (in feite met het reële deel hiervan). Neem voorts aan dat de voortplantingsrichting evenredig is met de $x$-as, dan is dus $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_x$. In het coördinatenstelsel van de eerste waarnemer wordt dan de fasefactor $\exp(ikx - \omega t)$. Voor een tweede waarnemer die met een snelheid $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ ten opzichte van de eerste beweegt, wordt de amplitude evenredig met $\exp[ik(x'+vt') - i\omega t'] = \exp[ikx' - i(\omega - kv)t']$. De hoekfrequentie en de golfvector zijn blijkbaar verbonden volgens de relaties $\omega' = \omega - kv$ en $k' = k$. Dit is het bekende *Doppler-effect*, volgens welke de toonhoogte van geluid verschillend is voor twee waarnemers die ten opzichte van elkaar bewegen. Ook de geluidsnelheid (de fasesnelheid van de golf) $c_s = \omega/k$ is voor de twee waarnemers verschillend. Er geldt:

$$\frac{\omega'}{k'} = \frac{\omega}{k} - v \quad \text{of} \quad c'_s = c_s - v \quad . \tag{12.3.2}$$

Dit verband is geheel analoog aan dat voor de snelheid van een puntdeeltje, zoals we hierboven hebben gezien.

We kunnen, voor het geval van één ruimtelijke dimensie, het gedrag van de geluidsgolven in de tijd voor de beide waarnemers eenvoudig schetsen, door in een $x$-$t$-diagram alle punten met een fasefactor 1, dus met $kx - \omega t$ gelijk aan 0 met elkaar te verbinden. Als we ook de punten met gelijke fase in een in tegengestelde richting lopende golf (dus waarvoor

$kx + \omega t = 0$) verbinden ontstaat een symmetrisch diagram. Voor de tweede waarnemer is het diagram asymmetrisch. Uit de symmetrie of asymmetrie van een diagram is blijkbaar direct te zien of een waarnemer beweegt of niet: de beweging van de waarnemers ten opzichte van het medium is ondubbelzinnig vast te stellen.

### Invariantie van de lichtsnelheid

Hierboven zagen we dat bij geluidsvoortplanting de beweging van een waarnemer ten opzichte van het medium is vast te stellen door de geluidsnelheid van een naar links lopende en een naar rechts lopende golf te vergelijken, of door het hierboven beschreven $x$-$t$-diagram te inspecteren.

Bij de voortplanting van *licht* door het vacuum is niet duidelijk wat het 'medium' is, wwaardoor dit licht zich voortplant. Toch nam men aanvankelijk aan dat ook hier een medium aanwezig was, namelijk de zogenaamde 'ether'. Op grond van die hypothese verwachtte men dat net als bij het geluid de beweging van een waarnemer ten opzichte van deze ether zou blijken bij meting van de lichtsnelheid. Net als bij geluid zou het diagram waarin punten van gelijke $kx \pm \omega t$ worden verbonden asymmetrisch worden bij beweging van de waarnemer ten opzichte van de ether.

Door Michelson en Morley werd echter in 1887 vastgesteld dat de lichtsnelheid *niet* wordt beïnvloed door de beweging van de waarnemer: de lichtsnelheid is voor alle waarnemers gelijk. Het hierboven genoemde $x$-$t$-diagram is *symmetrisch* voor *elke* waarnemer. Bij meer recente proeven (bv. bij CERN in 1964) is dit resultaat met grote nauwkeurigheid bevestigd. Blijkbaar geldt voor de voortplanting van licht in vacuum:

$$c' = c \quad . \tag{12.3.3}$$

Deze relatie staat in contrast tot (12.3.2).

Het gevolg van de invariantie van de lichtsnelheid is dat bij voortplanting in één ruimtelijke dimensie de fasefactor kan worden geschreven als

$$\exp(ikx - i\omega t) = \exp\left[ik\,(x - ct)\right] \quad . \tag{12.3.4}$$

voor de ene waarnemer, en in precies dezelfde vorm, met geaccentueerde variabelen $x'$, $t'$ en $k'$, voor een tweede waarnemer die zich beweegt ten opzichte van de eerste. Omdat de fasefactor bij de transformatie van de ene waarnemer naar de andere invariant moet blijven, moet in het bijzonder een punt met $x - ct = 0$ overgaan in een punt met $x' - ct' = 0$. Ook bij voortplanting in de negatieve $x$-richting moet dit het geval zijn, zodat de eis wordt dat punten met $x^2 - c^2t^2 = 0$ overgaan in punten met $x'^2 - c^2t'^2 = 0$. Voor drie-dimensionale golfvoorplanting volgt analoog dat punten met $r^2 - c^2t^2 = 0$ overgaan in punten met $r'^2 - c^2t'^2 = 0$, waarbij $r = |\mathbf{r}|$ en $r' = |\mathbf{r}'|$. Met drukt dit wel uit door te zeggen dat punten op de *lichtkegel* voor de ene waarnemer moeten transformeren naar punten op de lichtkegel voor de tweede waarnemer. Anders gezegd, de lichtkegel is *invariant*. Deze invariantie moet gelden voor een willekeurige onderlinge snelheid van de twee waarnemers.

De invariantie van de lichtkegel geldt duidelijk niet als de transformatie van de coördinaten wordt gegeven door (12.3.1). Immers, Galilei-transformaties laten de lichtkegel niet invariant, en zijn dus in strijd met de waargenomen invariantie van de lichtsnelheid. De transformatie moet dus anders zijn.

### Relativiteit van gelijktijdigheid

De invariantie van de lichtsnelheid heeft als consequentie dat – anders dan in de Galilei-transformatie het geval is – de tijdcoördinaat $t$ niet langer dezelfde is voor elke waarnemer. In het bijzonder behoeven twee gebeurtenissen, die voor de ene waarnemer gelijktijdig plaats vinden, voor een ten opzichte van de eerste waarnemer bewegende tweede waarnemer niet langer gelijktijdig te zijn. Men ziet dit in door bij voorbeeld naar de lichtvoortplanting in een rijdende treinwagon te kijken. Een met de trein meereizende waarnemer zal vaststellen dat een door een lamp in het midden van de wagon uitgezonden lichtflits de voor- en achterzijde op eenzelfde tijd zal bereiken, daar immers de afgelegde afstanden gelijk zijn. Een waarnemer op de grond zal vaststellen dat de twee gebeurtenissen (het aankomen van de lichtflits bij voor- en achterzijde) niet gelijktijdig kunnen zijn omdat het licht voor hem wegens de beweging van de trein twee onderling verschillende afstanden heeft afgelegd, en dus, wegens de gepostuleerde invariantie van de lichtsnelheid, komt het licht bij de achterzijde van de wagon eerder aan dan bij de voorzijde. De conclusie is dus inderdaad: gelijktijdigheid van gebeurtenissen is een relatief begrip in een wereld met een constante lichtsnelheid. We kunnen daarom verwachten dat de transformatie van de coördinaten anders dan (12.3.1) zal zijn, omdat niet alleen de ruimtelijke coördinaat, maar ook de tijdcoördinaat zal moeten veranderen.

### Lorentz-transformaties

Voor de bepaling van de correcte transformatie volgen we de methode van Einstein uit 1905. We kiezen $\mathbf{v}$ parallel aan de $x$-as, zodat $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ met nog te kiezen teken voor $v$. Veronderstellend dat de transformatie lineair is, vinden we dan:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}ct \quad , \quad ct' = a_{21}x + a_{22}ct \quad , \\ y' &= y \quad , \quad z' = z \quad , \end{aligned} \tag{12.3.5}$$

met coëfficiënten $a_{ij}$ die afhangen van $v$. Uit de invariantie van de lichtkegel volgt dan dat $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ moet impliceren:

$$(a_{11}x + a_{12}ct)^2 + y^2 + z^2 - (a_{21}x + a_{22}ct)^2 = 0 \quad . \tag{12.3.6}$$

Hieruit volgt dat moet gelden:

$$a_{11}^2 - a_{21}^2 = 1 \quad , \quad a_{22}^2 - a_{12}^2 = 1 \quad , \quad a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} = 0 \quad . \tag{12.3.7}$$

Uit de eerste twee relaties volgen de parametriseringen:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cosh\theta \quad , \quad a_{21} = \sinh\theta \quad , \\ a_{22} &= \cosh\theta' \quad , \quad a_{12} = \sinh\theta' \quad , \end{aligned} \tag{12.3.8}$$

met nog onbepaalde $\theta$ en $\theta'$. Uit de derde relatie van (12.3.7) volgt dan $\sinh(\theta - \theta') = 0$, zodat $\theta = \theta'$. Gevonden is nu dus:

$$x' = x\cosh\theta + ct\sinh\theta \quad , \quad ct' = x\sinh\theta + ct\cosh\theta \quad , \quad y' = y \quad , z' = z \quad . \tag{12.3.9}$$

De oorsprong van het tweede coördinatenstelsel wordt gegeven door $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$. In het eerste coördinatenstelsel is dit punt dan bepaald door $x = -ct \tanh\theta$, $y = 0$, $z = 0$. Blijkbaar is $v/c = -\tanh\theta$, zodat er tenslotte ontstaat:

$$\boxed{x' = \gamma(x - vt) \quad , \quad t' = \gamma(t - vx/c^2) \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z} \quad . \tag{12.3.10}$$

waar we definieerden $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, zodat geldt $\gamma = \cosh\theta$ en $\gamma v/c = -\sinh\theta$. Dit is de *Lorentz-transformatie*, cf. IEF(12.18). Deze werd door Lorentz in 1904 opgesteld. De volledige consequenties voor de structuur van ruimte en tijd werden voor het eerst door Einstein in 1905 gegeven.

De *relativiteit van gelijktijdigheid* is aan de Lorentz-transformatie eenvoudig te controleren. Veronderstel eens dat twee gebeurtenissen 1 en 2 voor de waarnemer in het $(\mathbf{r}, t)$-stelsel op dezelfde tijd plaats vinden, dus $t_1 = t_2$, maar dat de $x$-coördinaat van de plaatsen van de gebeurtenissen verschillend zijn, dus $x_1 \neq x_2$. Uit de Lorentz-transformatie volgt dan direct dat voor de waarnemer in het $(\mathbf{r}', t')$-stelsel de gebeurtenissen 1 en 2 niet langer gelijktijdig zijn, dus $t'_1 \neq t'_2$.

Er is ook een *relativiteit van gelijke plaats*: als twee gebeurtenissen 1 en 2 in het $(\mathbf{r}, t)$-stelsel op posities met dezelfde $x$-coördinaat plaats vinden, maar op verschillende tijden (dus $x_1 = x_2$ en $t_1 \neq t_2$), dan vinden deze gebeurtenissen in het $(\mathbf{r}', t')$-stelsel niet op posities met dezelfde $x'$-coördinaat plaats (dus $x'_1 \neq x'_2$). Deze relativiteit van de plaats is echter een triviaal ervaringsfeit dat al bij de Galilei-transformaties voorkomt.

## Tijddilatatie

De transformatie van de tijd volgens de Lorentz-transformatie heeft belangrijke gevolgen voor de tijdafhankelijkheid van fysische grootheden. Veronderstel, dat een waarnemer (met coördinatenstelsel $(\mathbf{r}, t)$) de tijdevolutie van een fysische grootheid op een vaste plaats meet. Hij doet dat door de waarde van die grootheid vast te stellen op opeenvolgende tijdstippen $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ (dus met $t_1 < t_2 < \ldots$). De posities zijn steeds hetzelfde, dus $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \ldots \equiv x_0$ (en analoog voor de $y$- en $z$-coördinaat). Zo'n serie metingen aan een tijdafhankelijke grootheid vindt bij voorbeeld plaats bij het bepalen van de levensduur van een instabiel deeltje, dat na verloop van tijd uiteen valt. Zulke deeltjes komen in de atoom- of kernfysica, en in de fysica van elementaire deeltjes veel voor. De tijdafhankelijke grootheid is dan de status ('uiteengevallen' of 'niet-uiteengevallen') van het deeltje.

Een tweede waarnemer die ten opzichte van de eerste beweegt met een snelheid $v$ in de $x$-richting, en dus met coördinatenstelsel $(\mathbf{r}', t')$, kan het proces alleen volgen door te meten op posities met telkens verschillende $x'$-coördinaten, die worden gegeven door $x'_n = \gamma(x_0 - vt_n)$. Hij moet immers de overeenkomstige gebeurtenissen in de tijdevolutie van het proces vastleggen. Als het de desintegratie van een deeltje betreft is hij gedwongen met het deeltje 'mee te rennen'. Niet alleen de plaatsen, ook de tijden van waarneming zijn anders voor de bewegende waarnemer: $t'_n = \gamma(t_n - vx_0/c^2)$. De tijd die voor deze waarnemer verloopt tussen de metingen 1 en 2 wordt gegeven door $t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1)$. Algemeen geldt voor de relatie van tijdverschillen in de twee coördinatenstelsels:

$$\boxed{\Delta t' = \gamma \Delta t} \quad . \tag{12.3.11}$$

(cf. IEF(12.5)). Omdat geldt $\gamma > 1$, duurt de tijdevolutie voor de bewegende waarnemer langer: het fysisch proces verloopt voor de bewegende waarnemer trager. Anders gezegd: er vindt *tijddilatatie* plaats. Voor een instabiel deeltje betekent dit dat het deeltje een langere levensduur heeft voor een waarnemer die ten opzichte van het deeltje beweegt. Dit verschijnsel van tijddilatatie wordt dagelijks waargenomen bij deeltjesversnellers en in kosmische stralen, waar de deeltjessnelheden vaak dicht bij de lichtsnelheid liggen.

Een ander voorbeeld van een fysisch proces waarbij de tijddilatatie is te zien is een tussen twee spiegels heen en weer kaatsende lichtpuls, zoals besproken op IEP485-489. Ook de bekende tweelingparadox berust op het verschijnsel van de tijddilatatie, zie IEP488.

### Lengtecontractie

De transformatie van de tijd, en de daaruit voortvloeiende relativiteit van gelijktijdigheid, heeft ook een belangrijke consequentie voor de meting van lengten. Bij de lengtebepaling van een stok vergelijkt men de coördinaten van de uiteinden van de stok. Als de stok niet in rust is, maar bij voorbeeld eenparig beweegt, dan worden deze coördinaten op gelijke tijden gemeten. Op die manier worden de triviale effecten van de beweging in de uitkomst van de lengtemeting geëlimineerd. Volgens de relativiteitstheorie is 'gelijktijdig' echter voor onderling bewegende waarnemers niet hetzelfde. Daarom kan worden verwacht dat de uitkomst van de lengtemeting voor onderling bewegende waarnemers verschillend is. Dat dit inderdaad zo is ziet men het eenvoudigste door de lengtemeting van twee waarnemers te vergelijken, namelijk die van een waarnemer in rust ten opzicht van de stok, en van een waarnemer die beweegt ten opzichte van de stok.

Voor een waarnemer die in rust is ten opzichte van de stok worden de uiteinden in geschikte cartesische coördinaten gegeven door $x_1 = 0$ en $x_2 = \ell$, voor elke tijd $t$. De lengte van de stok is blijkbaar $\ell$. Voor een waarnemer die met een snelheid $v$ (parallel aan de $x$-richting) beweegt ten opzichte van de stok, zijn de coördinaten van de uiteinden gegeven door:

$$x'_i = \gamma(x_i - vt_i) \quad , \quad t'_i = \gamma(t_i - vx_i/c^2) \quad , \tag{12.3.12}$$

met in het algemeen ongelijke $t_1$ en $t_2$. Als de coördinaten op gelijke tijden $t'_1 = t'_2 = t'$ moeten worden vergeleken, dan moet worden gekozen: $t_1 = t_2 - v\ell/c^2$. Voor het coördinatenverschil vindt men dan:

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(\ell - vt_2 + vt_1) = \gamma(\ell - v^2\ell/c^2) = \gamma^{-1}\ell \quad . \tag{12.3.13}$$

Blijkbaar is voor de bewegende waarnemer, die netjes volgens het voorschrift van gelijktijdigheid meet, de lengte van de stok gegeven door

$$\boxed{\ell' = \gamma^{-1}\ell} \quad . \tag{12.3.14}$$

(cf. IEF(12.9)). De stok is voor de bewegende waarnemer korter: er heeft een *lengtecontractie* plaatsgevonden. Deze contractie werd voor het eerst ingevoerd door Lorentz in 1892 (en onafhankelijk ook door FitzGerald).

De lengtecontractie en de tijddilatatie zijn met elkaar verbonden omdat ze beide uit de Lorentz-transformatie volgen. Bij meting van lengtes door uitwisseling van lichtsignalen spelen beide effecten een rol, zie IEP489.

### Optellen van snelheden

Volgens de Galilei-transformatie heeft een bewegend massapunt met snelheid $\mathbf{v}_0$ voor de ene waarnemer een andere snelheid $\mathbf{v}_0' = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}$ voor een tweede waarnemer die ten opzichte van de eerste waarnemer met een snelheid $\mathbf{v}$ beweegt. Als rekening wordt gehouden met de relatviteitstheorie dan verandert dit eenvoudige verband.

We bezien weer voor de eenvoud alleen eenparige bewegingen parallel aan de $x$-as. Voor de eerste waarnemer is de plaats van het massapunt gegeven door $x_0(t) = v_0 t + d$, met $d$ de positie op $t = 0$. Voor de tweede waarnemer volgt uit de Lorentz-transformatie:

$$x_0'(t') = \gamma[x_0(t) - vt] = \gamma(v_0 - v)t + \gamma d \quad , \quad t' = \gamma[t - vx_0(t)/c^2] = \gamma t(1 - vv_0/c^2) - \gamma vd/c^2 \quad . \tag{12.3.15}$$

De verandering van de plaats als functie van de tijd $t'$ is dus gegeven door:

$$x_0'(t') = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v/c^2}\, t' + d' \quad , \tag{12.3.16}$$

met $d'$ de positie van het deeltje op $t' = 0$. (Men verifieert dat geldt $d' = \gamma^{-1} d/(1 - v_0 v/c^2)$.) De snelheid van het deeltje voor de tweede waarnemer is nu gevonden als:

$$\boxed{v_0' = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v/c^2}} \quad . \tag{12.3.17}$$

Dit gaat voor lage snelheden over in de eenvoudige vorm van Galilei: $v_0' = v_0 - v$. Voor hoge snelheden treden afwijkingen op. In het bijzonder volgt voor $v_0 \to c$ dat ook geldt: $v_0' \to c$, voor elke waarde van $v$ die kleiner is dan $c$. Als een deeltje met (vrijwel) de lichtsnelheid beweegt voor de ene waarnemer dan zal dit ook het geval zijn voor elke andere waarnemer (tenzij de relatieve snelheid van de waarnemers ten opzichte van elkaar vrijwel de lichtsnelheid is).

### Structuur van ruimte en tijd

Een gebeurtenis (of *event*) in ruimte en tijd wordt gedefinieerd door een plaatsvector $\mathbf{x}$ en een tijd $t$. De plaats-tijd-viervector van deze gebeurtenis wordt genoteerd als $x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) = (ct, \mathbf{x})$.

Onder een Lorentz-transformatie, met transformatie-matrix $\Lambda^\mu_\nu$, wordt de ruimte-tijd-viervector getransformeerd volgens

$$\boxed{(x^\mu)' = \Lambda^\mu_\nu \, x^\nu} \quad , \tag{12.3.18}$$

(cf. IEF(12.25)). Hierbij werd de sommatieconventie van Einstein gebruikt (zie Hoofdstuk 1), ditmaal voor indices die van 0 tot 3 lopen. Een voorbeeld van een transformatie-matrix is (cf. IEF(12.24)):

$$\boxed{\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad , \tag{12.3.19}$$

met $\beta = v/c$ en $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$. De door deze matrix gegeven transformatie (een 'boost' met een snelheid $v$ in de $x$-richting) is dezelfde als die in (12.3.10).

De plaats-tijd-viervector $x^\mu$ is een voorbeeld van een *contravariante* viervector $a^\mu$. Deze transformeren alle op de manier van (12.3.18). Een *covariante* viervector $a_\mu$ ontstaat uit een contravariante viervector $a^\mu$ door het teken van de 0-component om te keren.

Het *inwendig product* van twee viervectoren $a^\mu$ en $b^\mu$ is gedefinieerd als de relativistisch invariante scalair $a_\mu b^\mu = -a^0 b^0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Het verschil tussen twee plaats-tijd-viervectoren behorend bij de gebeurtenissen $A$ en $B$ is $\Delta x^\mu = x^\mu_A - x^\mu_B$. Hieruit kan het *invariante interval* tussen $A$ en $B$ worden geconstrueerd volgens $\Delta x_\mu \ \Delta x^\mu$. Positieve intervallen heten *ruimte-achtig*, negatieve intervallen *tijd-achtig* en intervallen die juist 0 zijn heten *licht-achtig*.

Als de beweging van een puntdeeltje in de tijd wordt gevolgd dan kan men in een ruimte-tijd-diagram de baan teken als een *wereldlijn*. Voor elk punt van de wereldlijn kan men een *voorwaartse* en een *achterwaartse lichtkegel* construeren, zie IEP504, Figuur 12.22. De wereldlijn verloopt binnen deze twee lichtkegels. Het invariante interval tussen twee punten op de wereldlijn is steeds tijd-achtig.

### Relativistische mechanica

Langs de wereldlijn van een puntdeeltje kan men een eigentijd $\tau$ definiëren. Voor twee dicht bij elkaar liggende punten op de wereldlijn is het verschil in eigentijd $\Delta\tau$ gegeven door $(-\Delta x_\mu \ \Delta x^\mu)^{1/2}/c$. Uit deze definitie volgt dat de eigentijd onafhankelijk is van het coördinatenstelsel, en dus een scalair is. Het verschil in eigentijd tussen twee dicht bij elkaar liggende punten op de wereldlijn is gelijk aan het 'gewone' tijdverschil in het *momentane ruststelsel* van het deeltje. In een ander coördinatenstelsel, waarin de momentane snelheid van het deeltje $v = c\beta$ is, is het verband $\Delta\tau = \gamma^{-1} \ \Delta t$, met $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ als tevoren. Er treedt tijddilatatie op, want er geldt $\Delta t > \Delta\tau$.

De *viersnelheid* van een puntdeeltje wordt gegeven door $u^\mu = dx^\mu/d\tau$. De componenten van de viersnelheid zijn $(\gamma c, \gamma\mathbf{v})$. Omdat $\tau$ een invariante scalair is, transformeert de viersnelheid als een (contravariante) viervector.

De *vierimpuls* is gedefinieerd als $p^\mu = m \ u^\mu$, met $m$ de invariante massa van het puntdeeltje. De componenten van de vierimpuls zijn $(m\gamma c, m\gamma\mathbf{v})$. De tijd-component van de vierimpuls is de energie van het deeltje, afgezien van een factor $c$, dus $E = m\gamma c^2 = mc^2/(1-v^2/c^2)^{1/2}$. Een deeltje in rust heeft *rustenergie* $mc^2$, een deeltje in beweging heeft daarnaast ook *kinetische energie* $E - mc^2$. De ruimte-component van $p^\mu$ is de impuls $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$. De invariant $p_\mu \ p^\mu$, die uit de vierimpuls kan worden gevormd, heeft de waarde $-m^2c^2$.

Fotonen hebben een invariante massa $m$ gelijk aan 0, zodat $p_\mu \ p^\mu = 0$. De tijd-component en de ruimte-component van de vierimpuls hangen daarom samen volgens $E = |\mathbf{p}|c$, met willekeurige richting voor $\mathbf{p}$. De snelheid van de fotonen is $c$, zodat geldt $\gamma = \infty$. De viersnelheid heeft daarom voor fotonen zijn betekenis verloren. De in de vorige alinea gegeven uitdrukkingen voor $p^\mu$, $E$ en $\mathbf{p}$ zijn evenmin bruikbaar.

Bij (elastische) botsingen tussen deeltjes is de totale vierimpuls behouden. Dit kan worden gebruikt bij de analyse van zulke botsingsprocessen. Voor Compton-verstrooiing wordt dit getoond op IEP514.

De afgeleide van de vierimpuls naar de eigentijd wordt bepaald door de op het puntdeeltje werkende krachten. De relativistische wet van Newton luidt (cf. IEF(12.69)):

$$\boxed{dp^\mu/d\tau = F^\mu} \quad , \tag{12.3.20}$$

met $F^\mu$ de *Minkowski-kracht*. Deze kracht transformeert als een (contravariante) viervector.

### Relativistische electrodynamica

In de Hoofdstukken 2 (in (2.3.3)) en 5 (in (5.3.4)) schreven we de ladingsdichtheid en de stroomdichtheid van een collectie puntladingen met ladingen $e_i$, posities $\mathbf{r}_i$ en snelheden $\mathbf{v}_i$ als

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r},t) &= \sum_i e_i\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t)) \quad , \\ \mathbf{J}(\mathbf{r},t) &= \sum_i e_i\, \mathbf{v}_i(t)\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t)) \quad . \end{aligned} \tag{12.3.21}$$

In het algemeen hangen deze dichtheden af van de plaats $\mathbf{r}$ en van de tijd $t$, omdat de posities en de snelheden van de puntladingen van de tijd afhangen. In relativistische notatie volgt dan dat de dichtheden afhangen van $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$, met $\mathbf{x} = \mathbf{r}$.

Als de wereldlijn van de puntlading $i$ wordt gegeven door de viervector $x_i^\mu(\tau)$, dan kunnen we de ladingsdichtheid ter plekke $x^\mu$ herschrijven als:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r},t) &= \sum_i e_i \int dt_i\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t_i))\, \delta(t-t_i) \\ &= \sum_i e_i \int d\tau_i\, \frac{dt_i}{d\tau_i}\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(\tau_i))\, \delta(t-t_i(\tau_i)) \\ &= c\sum_i e_i \int d\tau_i\, \frac{dt_i}{d\tau_i}\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(\tau_i))\, \delta(ct-ct_i(\tau_i)) \\ &= c\sum_i e_i \int d\tau_i\, \frac{dt_i}{d\tau_i}\, \delta(x^\mu - x_i^\mu(\tau_i)) \\ &= \sum_i e_i \int d\tau_i\, \frac{dx_i^0}{d\tau_i}\, \delta(x^\mu - x_i^\mu(\tau_i)) \quad , \end{aligned} \tag{12.3.22}$$

waar we (10.3.37) gebruikten en vervolgens een vierdimensionale delta-functie $\delta(x^\mu - x_i^\mu)$ invoerden (zie onder). Evenzo kunnen we voor de stroomdichtheid schrijven:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r},t) &= \sum_i e_i \int dt_i\, \mathbf{v}_i(t_i)\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t_i))\, \delta(t-t_i) \\ &= \sum_i e_i \int d\tau_i\, \frac{dt_i}{d\tau_i}\, \frac{d\mathbf{r}_i}{dt_i}\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(\tau_i))\, \delta(t-t_i(\tau_i)) \\ &= c\sum_i e_i \int d\tau_i\, \frac{d\mathbf{r}_i}{d\tau_i}\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(\tau_i))\, \delta(ct-ct_i(\tau_i)) \\ &= c\sum_i e_i \int d\tau_i\, \frac{d\mathbf{x}_i}{d\tau_i}\, \delta(x^\mu - x_i^\mu(\tau_i)) \quad . \end{aligned} \tag{12.3.23}$$

De twee gevonden uitdrukkingen hebben een analoge vorm, en kunnen worden samengevoegd tot $J^\mu = (c\rho, \mathbf{J})$ volgens:

$$J^\mu(x^\mu) = c\sum_i e_i \int d\tau_i \, \frac{d\mathbf{x}_i^\mu}{d\tau_i} \, \delta(x^\mu - x_i^\mu(\tau_i)) \quad , \tag{12.3.24}$$

of

$$\boxed{J^\mu(x^\mu) = c\sum_i e_i \int d\tau_i \, u_i^\mu(\tau_i) \, \delta(x^\mu - x_i^\mu(\tau_i))} \quad , \tag{12.3.25}$$

met de viersnelheid $u_i^\mu$, die als een (contravariante) viervector transformeert.

De vierdimensionale delta-functie $\delta(x^\mu - x_i^\mu)$ is een scalair. Dit ziet men in door voor een willekeurige viervector $w^\mu$, die transformeert volgens (12.3.18) met (12.3.19), de getransformeerde te bepalen:

$$\begin{aligned}
\delta\left((w^\mu)'\right) &= \delta(\gamma w^0 - \gamma\beta w^1) \, \delta(-\gamma\beta w^0 + \gamma w^1) \, \delta(w^2) \, \delta(w^3) \\
&= \delta(\gamma w^0 - \gamma\beta^2 w^0) \, \delta(-\gamma\beta w^0 + \gamma w^1) \, \delta(w^2) \, \delta(w^3) \\
&= \delta(\gamma^{-1} w^0) \, \delta(-\gamma\beta w^0 + \gamma w^1) \, \delta(w^2) \, \delta(w^3) \\
&= \gamma \, \delta(w^0) \, \delta(-\gamma\beta w^0 + \gamma w^1) \, \delta(w^2) \, \delta(w^3) \\
&= \gamma \, \delta(w^0) \, \delta(\gamma w^1) \, \delta(w^2) \, \delta(w^3) \\
&= \delta(w^0) \, \delta(w^1) \, \delta(w^2) \, \delta(w^3) = \delta(w^\mu) \quad .
\end{aligned} \tag{12.3.26}$$

Omdat de eigentijd $\tau_i$ ook een scalair is, en dus ook de integraal over de eigentijd, volgt dat het rechterlid van (12.3.25) een viervector is. Blijkbaar transformeren dus $c\rho$ en $\mathbf{J}$ onderling als een viervector. Dit is niet onverwacht: een puntlading heeft in het momentane ruststelsel een stroomdichtheid 0; vanuit een bewegend coördinatenstelsel is de stroomdichtheid echter van 0 verschillend.

De continuïteitsvergelijking (5.3.8), die de ladingsdichtheid en de stroomdichtheid verbindt, kan worden geschreven als (cf. IEF(12.125)):

$$\boxed{\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu J^\mu = 0} \quad , \tag{12.3.27}$$

waar we de vierdimensionale afgeleide $\partial/\partial x^\mu$ noteerden als $\partial_\mu$. Deze set van vier afgeleiden transformeert als een *covariante* viervector; evenzo transformeert de set $\partial/\partial x_\mu = \partial^\mu$ als een *contravariante* viervector (ga dit na, zie ook IEV12.55).

In de Lorentz-ijking voldoen de scalaire potentiaal en de vectorpotentiaal aan de vergelijkingen (10.3.9):

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \\
\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0\mathbf{J} \quad .
\end{aligned} \tag{12.3.28}$$

De hier optredende combinatie van afgeleiden kan worden geschreven als

$$\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial_\mu\partial^\mu \quad , \tag{12.3.29}$$

hetgeen een scalaire differentiaaloperator is. Na introduceren van $J^\mu$ kunnen de vergelijkingen worden geschreven als

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \frac{\varphi}{c} &= -\mu_0 J^0 \quad , \\ \partial_\mu \partial^\mu \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J} \quad . \end{aligned} \tag{12.3.30}$$

De rechterleden vormen samen een viervector. De vergelijkingen zijn daarom te herschrijven als (cf. IEF(12.136)):

$$\boxed{\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = -\mu_0 J^\mu} \quad , \tag{12.3.31}$$

met de vierpotentiaal $A^\mu = (\varphi/c, \mathbf{A})$. De vergelijking heeft in elk coördinatenstelsel dezelfde vorm als $A^\mu$ transformeert als een viervector. De voorwaarde (10.3.5) die de Lorentz-ijking definieert is dan ook in elk coördinatenstelsel dezelfde, aangezien deze is te herschrijven als

$$0 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} \quad , \tag{12.3.32}$$

en dus als (cf. IEF(12.135)):

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0} \quad . \tag{12.3.33}$$

De velden volgen uit de potentialen door differentiatie. Voor de componenten van het electrische veld vindt men

$$E^i = -c\, \partial^i A^0 + c\, \partial^0 A^i \quad , \tag{12.3.34}$$

met $\partial^i = \partial/\partial x_i = \partial/\partial x^i$ en $\partial^0 = \partial/\partial x_0 = -\partial/\partial x^0$. Het magnetische veld volgt als

$$B_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial^j A^k \quad , \tag{12.3.35}$$

met $\varepsilon_{ijk}$ de Levi-Civita-tensor (1.3.3). De twee relaties zijn samen te voegen als (cf. IEF(12.132)):

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu} \quad . \tag{12.3.36}$$

Hierbij is $F^{\mu\nu}$ een antisymmetrische tensor met twee indices. De componenten van deze veldtensor luiden (cf. IEF(12.118)):

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & c^{-1}E^1 & c^{-1}E^2 & c^{-1}E^3 \\ -c^{-1}E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -c^{-1}E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -c^{-1}E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}} \quad . \tag{12.3.37}$$

De veldtensor transformeert als een contravariante tensor, dus bij overgang naar een ander coördinatenstelsel geldt (vergelijk (12.3.18)):

$$(F^{\mu\nu})' = \Lambda^\mu_\rho\, \Lambda^\nu_\sigma\, F^{\rho\sigma} \tag{12.3.38}$$

(zie IEF(12.114)). Het electrische en het magnetische veld transformeren dus onderling. Met de 'boost' (12.3.19) vindt men voor de velden parallel aan en loodrecht op de snelheid (cf. IEF(12.108)):

$$\boxed{\begin{aligned} E'_\parallel = E_\parallel \quad , \quad \mathbf{E}'_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad , \\ B'_\parallel = B_\parallel \quad , \quad \mathbf{B}'_\perp = \gamma(\mathbf{B}_\perp - c^{-2}\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}) \quad , \end{aligned}} \tag{12.3.39}$$

zoals men controleert door (12.3.19) in (12.3.38) in te vullen. Een voorbeeld van de transformatie van de velden is gegeven in IEP527, Voorbeeld 12.13, en in IEP532, Voorbeeld 12.14, waar het electrische en het magnetische veld van een eenparig bewegende puntlading door transformatie vanuit het ruststelsel worden bepaald.

De Maxwell-vergelijkingen zijn nu ook in relativistische vorm te schrijven. De Gausswet $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ wordt

$$\partial_\mu F^{0\mu} = \frac{1}{\varepsilon_0 c}\rho = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} J^0 = \mu_0 J^0 \quad . \tag{12.3.40}$$

Ook de Ampère-Maxwell-wet $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$ is op deze manier om te schrijven. De eerste component van het linkerlid wordt

$$\partial^2 B^3 - \partial^3 B^2 = \partial^2 F^{12} - \partial^3 F^{31} = \partial^2 F^{12} + \partial^3 F^{13} = \partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} \quad . \tag{12.3.41}$$

Voorts wordt de eerste component van het rechterlid

$$\mu_0 J^1 + \frac{1}{c}\frac{\partial E^1}{\partial x^0} = \mu_0 J^1 + \partial_0 F^{01} = \mu_0 J^1 - \partial_0 F^{10} \quad . \tag{12.3.42}$$

Door gelijkstellen van de twee leden ontstaat

$$\partial_\mu F^{1\mu} = \mu_0 J^1 \quad , \tag{12.3.43}$$

waar we gebruikten dat $F^{11} = 0$. De andere componenten gaan net zo, en er komt voor $i = 1, 2, 3$:

$$\partial_\mu F^{i\mu} = \mu_0 J^i \quad . \tag{12.3.44}$$

Vergelijken met (12.3.40) geeft tenslotte (cf. IEF(12.126)):

$$\boxed{\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu} \quad . \tag{12.3.45}$$

Men controleert eenvoudig dat door substitutie van (12.3.36) en gebruiken van de Lorentzconditie (12.3.33) de vergelijking (12.3.31) wordt teruggevonden. Ook de continuïteitsvergelijking (12.3.27) volgt snel door de operator $\partial_\mu$ op (12.3.45) te laten inwerken.

De homogene Maxwell-vergelijkingen volgen door eerst de covariante tensor $F_{\mu\nu}$ in te voeren volgens $F_{0i} = -F^{0i}$, $F_{ij} = F^{ij}$, met $i$ en $j$ ruimtelijke indices (dus $1, 2, 3$). Net als bij een viervector slaat het teken om als een tijd-index van boven naar beneden verhuist, en blijft het teken gelijk als een ruimtelijke index van boven naar beneden gaat. De duale veldtensor $G^{\mu\nu}$ wordt nu ingevoerd volgens

$$G^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad . \tag{12.3.46}$$

Hierbij is de vierdimensionale Levi-Civita tensor gedefinieerd als de volledig antisymmetrische tensor met vier indices waarvoor $\varepsilon^{0123} = 1$. Men vindt voor de duale tensor (cf. IEF(12.119)):

$$\boxed{G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B^1 & B^2 & B^3 \\ -B^1 & 0 & -c^{-1}E^3 & c^{-1}E^2 \\ -B^2 & c^{-1}E^3 & 0 & -c^{-1}E^1 \\ -B^3 & -c^{-1}E^2 & c^{-1}E^1 & 0 \end{pmatrix}} \quad . \tag{12.3.47}$$

Men controleert eenvoudig dat dit opnieuw een contravariante tensor is.

De homogene Maxwell-vergelijkingen volgen nu als (cf. IEF(12.126)):

$$\boxed{\partial_\nu G^{\mu\nu} = 0} \quad . \tag{12.3.48}$$

Ter controle kan men de operator $\partial_\mu$ laten inwerken. Het linkerlid wordt dan identiek nul, zoals volgt uit de antisymmetrie van de duale veldtensor. Een andere vorm voor de homogene Maxwell-vergelijkingen luidt (zie ook IEF(12.129)):

$$\boxed{\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0} \quad , \tag{12.3.49}$$

zoals men door invullen verifieert. Hierbij is $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ de covariante vorm van de contravariante $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, die we eerder invoerden. In het bijzonder is $\varepsilon_{0123} = -1$.

Tenslotte wordt ook de Lorentz-kracht in relativistische vorm geschreven. Voor de eerste component van de Lorentz-kracht vindt men

$$\begin{aligned} E^1 + v^2B^3 - v^3B^2 &= cF^{01} + v^2F^{12} + v^3F^{13} = \gamma^{-1}u^0F^{01} + \gamma^{-1}u^2F^{12} + \gamma^{-1}u^3F^{13} \\ &= \gamma^{-1}\left(u_0F^{10} + u_2F^{12} + u_3F^{13}\right) = \gamma^{-1}u_\nu F^{1\nu} \quad . \end{aligned} \tag{12.3.50}$$

Algemeen vindt men voor $i = 1, 2, 3$:

$$(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})^i = \gamma^{-1}F^{i\nu}u_\nu \quad . \tag{12.3.51}$$

De nonrelativistische bewegingsvergelijking luidt nu

$$\frac{dp^i}{dt} = e\gamma^{-1}F^{i\nu}u_\nu \quad , \tag{12.3.52}$$

ofwel in termen van de eigentijd $\tau$:

$$\frac{dp^i}{d\tau} = eF^{i\nu}u_\nu \quad . \tag{12.3.53}$$

Hierbij moet worden bedacht dat in (12.3.52) de nonrelativistische impuls $mv^i$ optreedt, *niet* de ruimtelijke component $m\gamma v^i$ van de relativistische impuls. Het linkerlid is daarom *niet* een viervector, terwijl het rechterlid dat wel is. De bewegingsvergelijking (12.3.53) heeft dus nog niet de gezochte relativistische vorm. Een relativistische bewegingsvergelijking ontstaat door het linkerlid van (12.3.53) anders te lezen, namelijk door $p^i$ op te vatten als de ruimtelijke component van de *relativistische* impuls.

Door beide leden van (12.3.53) te vermenigvuldigen met $u_i$ ontstaat

$$u_i\frac{dp^i}{d\tau} = eu_iF^{i\nu}u_\nu \quad . \tag{12.3.54}$$

Nu geldt voorts

$$u_\mu dp^\mu/d\tau = m^{-1}p_\mu dp^\mu/d\tau = \tfrac{1}{2}m^{-1}d(p_\mu p^\mu)/d\tau = 0 \quad , \tag{12.3.55}$$

en ook wegens de antisymmetrie van de veldtensor:

$$u_\mu F^{\mu\nu}u_\nu = 0 \quad , \tag{12.3.56}$$

zodat de identiteit ontstaat:

$$u_\mu \frac{dp^\mu}{d\tau} = e u_\mu F^{\mu\nu} u_\nu \quad . \tag{12.3.57}$$

Door hiervan (12.3.54) af te trekken vindt men dat ook geldt:

$$u_0 \frac{dp^0}{d\tau} = e u_0 F^{0\nu} u_\nu \quad . \tag{12.3.58}$$

Na deling door $u_0$ vindt men juist de bij (12.3.53) behorende tijd-component. In totaal is dus gevonden voor de relativistische bewegingsvergelijking:

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = e F^{\mu\nu} u_\nu} \quad . \tag{12.3.59}$$

Blijkbaar is het rechterlid de Minkowski-kracht op een puntlading in een electromagnetisch veld.

## 12.4 Samenvatting van belangrijke resultaten

### Speciale relativiteitstheorie

- Definitie Galilei-transformatie: (12.3.1)
- Definitie Lorentz-transformatie: (12.3.10)
- Tijddilatatie: (12.3.11)
- Lengtecontractie: (12.3.14)
- Optellen van snelheden: (12.3.17)
- Viervectorvorm Lorentz-transformatie: (12.3.18)
- Transformatie-matrix voor 'boost': (12.3.19)

### Relativistische mechanica

- Componenten van de relativistische impuls: IEF(12.46), (12.50)
- Invariante lengte van de relativistische impuls: IEF(12.55)
- Relativistische bewegingsvergelijking: (12.3.20)

### Relativistische electrodynamica

- Viervector van ladingsdichtheid-stroomdichtheid: (12.3.25)
- Continuïteitsvergelijking: (12.3.27)
- Vergelijking voor de potentialen: (12.3.31)
- Conditie voor de Lorentz-ijking: (12.3.33)
- Verband potentialen en velden: (12.3.36)
- Veldtensor: (12.3.37)
- Transformatie van de velden: (12.3.39)
- Inhomogene Maxwell-vergelijkingen: (12.3.45)
- Duale veldtensor: (12.3.47)
- Homogene Maxwell-vergelijkingen: (12.3.48), (12.3.49)
- Relativistische bewegingsvergelijking: (12.3.59)