

MAGNETOHYDRODYNAMICA

L.G. Suttorp
Instituut voor Theoretische Fysica
Universiteit van Amsterdam

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
1.1	Plasma's	1
1.2	Plasmatheorie	1
2	Basisvergelijkingen	5
2.1	Inleiding	5
2.2	Materievergelijkingen	5
2.3	Veldvergelijkingen	7
2.4	Vereenvoudigde MHD-vergelijkingen	8
3	Eigenschappen van de MHD vergelijkingen	11
3.1	Inleiding	11
3.2	Dynamica van het magnetische veld	11
3.3	Dynamica van de materie	16
4	Statische en stationaire oplossingen	19
4.1	Inleiding	19
4.2	Statische oplossingen: pinch-ontladingen	19
4.3	Stationaire krachtenvrije oplossingen	23
5	Golfverschijnselen	29
5.1	Inleiding	29
5.2	Golfvergelijkingen voor ideaal-geleidende plasma's	29
5.3	Golven in ideaal-geleidende plasma's	31
5.3.1	Geluidsgolven	31
5.3.2	Alfvén-golven	31
5.3.3	Golven in de richting van het magneetveld	34
5.3.4	Magneto-acoustische golven	34
5.4	Demping van golven	36

Literatuur

- H. Alfvén, Cosmic plasma
- T.G. Cowling, Magnetohydrodynamics
- V.C.A. Ferraro en C. Plumpton, An introduction to magneto-fluid mechanics
- A. Jeffrey, Magnetohydrodynamics
- N.G. van Kampen en B.U. Felderhof, Theoretical methods in plasma physics
- N.A. Krall en A.W. Trivelpiece, Principles of plasma physics

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Plasma's

Een plasma is een hoeveelheid materie bestaande uit moleculen waarvan een niet te verwaarlozen deel geïoniseerd is. Door de aanwezigheid van de ionen en elektronen zijn de eigenschappen van een plasma wezenlijk anders dan die van materie bestaande uit neutrale moleculen. Het woord “plasma” (afkomstig van het Griekse *το πλάσμα*) is voor het eerst in deze betekenis gebruikt door Langmuir (1928).

Plasma's komen zeer veel voor in de natuur. Volgens schattingen van astrofysici is meer dan 95 % van de materie in het heelal in de plasma-toestand. De nadruk in de experimentele en theoretische fysica op de eigenschappen van gassen, vloeistoffen en vaste stoffen is ingegeven door de lokale omstandigheden op aarde. Voor het begrip van fysische verschijnselen in de rest van de wereld is een gedetailleerde kennis van deze drie agregatietoestanden slechts van beperkte betekenis.

Onder aardse omstandigheden komen plasma's voor in de natuur (in de ionosfeer, in bliksemschichten) en in het laboratorium (in gasontladingen, in vloeibare metalen, in kernfusie-experimenten). De eerste interesse in de eigenschappen van plasma's is ontstaan door het in het begin van de eeuw opkomend radioverkeer. Het onderzoek van de ionosfeer heette aanvankelijk dan ook “radiofysica”. Later, in de twintiger jaren, werd onderzoek naar de eigenschappen van gasontladingen van belang wegens de commerciële toepassingen van gasontladingsbuizen. Langmuir werkte bij General Electric aan oscillaties in gasontladingen, toen hij het woord plasma in de natuurkunde introduceerde. Na de tweede wereldoorlog heeft het onderzoek naar de mogelijkheid van gecontroleerde kernfusie geleid tot een enorme uitbreiding van onze kennis van plasma's.

De plasma's die in de natuur en in het laboratorium voorkomen hebben onderling zeer verschillende dichtheid en temperatuur, zoals uit tabel 1.1 blijkt.

1.2 Plasmatheorie

Ter beschrijving van plasma's worden verschillende theoretische modellen gebruikt. De keus van het model hangt af van de plasma-eigenschappen die men wil beschrijven en van de grootte van bepaalde hieronder nog nader te specificeren fysische

System	T (K)	n (m^{-3})
Kwik	10^2	10^{29}
Ionosfeer	10^2	10^{19}
Gasontlading	10^4	10^{22}
Fotosfeer zon	10^4	10^{20}
Interstellair H	10^4	10^6
Corona zon	10^6	10^{12}
Thermonucleair plasma	10^8	10^{22}

Tabel 1.1: Waarden van temperatuur T en deeltjesdichtheid n voor enkele plasma's.

parameters die het plasma karakteriseren. Een belangrijk onderscheid is dat tussen een *macroscopische* en een *statistische* theorie.

Als men alleen geïnteresseerd is in langzame verschijnselen, die zich op grote ‘macroscopische’ schaal in de ruimte afspelen dan kan men een puur macroscopische theorie proberen te gebruiken. Dat is alleen dan zinvol als de verschijnselen inderdaad voldoende langzaam zijn en de ruimtelijke schaal voldoende groot is. We kunnen deze vereisten preciseren door een karakteristieke afstand L in te voeren waarover de macroscopische fysische grootheden aanzienlijk veranderen, en voorts een karakteristieke tijd T met een analoge betekenis. ‘Voldoende langzaam’ betekent dan dat T groot moet zijn ten opzichte van de gemiddelde tijd tussen opeenvolgende botsingen van de plasmadeeltjes. ‘Voldoend grote schaal in de ruimte’ betekent dat de gemiddelde vrije weglengte tussen botsingen klein is ten opzichte van L . Noodzakelijk maar niet voldoende voor het laatste is dat de gemiddelde onderlinge afstand tussen de deeltjes klein is ten opzichte van L . Als aan beide vereisten is voldaan dan kan men een macroscopische theorie gebruiken die analoog is aan de hydrodynamica en de aerodynamica voor vloeistoffen en gassen van neutrale deeltjes. Omdat in plasma's de materie gekoppeld is aan het electromagnetische veld kan in het algemeen niet de gewone hydrodynamica worden gebruikt. De theorie moet eerst worden uitgebreid tot de zogenaamde *magnetohydrodynamica*.

In het tegenovergestelde geval van snelle verschijnselen of verschijnselen op kleine schaal is een magnetohydrodynamische beschrijving niet adequaat. In dat geval moeten de bewegingen van de individuele deeltjes in het plasma met behulp van statistische methoden in rekening worden gebracht. Dat kan gebeuren door bij voorbeeld *kinetische vergelijkingen* te gebruiken. Deze zijn vergelijkbaar met, maar anders dan de bekende Boltzmann-vergelijking voor neutrale gassen.

Voor de in tabel 1.1 genoemde plasma's zijn in tabel 1.2 de waarden van de gemiddelde vrije weglengte λ_f en de gemiddelde tijd tussen opeenvolgende botsingen t_f gegeven. We zien uit die tabel dat voor de meeste daar genoemde plasma's een magnetohydrodynamische beschrijving nuttig kan zijn.

Voor echt snelle verschijnselen schiet een magnetohydrodynamische benadering altijd tekort. De snelle plasma-oscillaties in een gasontlading die Langmuir indertijd onderzocht kunnen beslist niet met magnetohydrodynamische methoden worden beschreven. Men is gedwongen voor zulke verschijnselen een statistische (kinetische) theorie te gebruiken. Om de daarmee samenhangende complicaties te vermijden

System	$\lambda_f (m)$	$t_f (s)$
Kwik	10^{-10}	10^{-12}
Ionosfeer	10^{-4}	10^{-5}
Gasontlading	10^{-4}	10^{-8}
Fotosfeer zon	10^{-2}	10^{-6}
Interstellair H	10^8	10^4
Corona zon	10^3	10^{-2}
Thermonucleair plasma	1	10^{-6}

Tabel 1.2: Waarden van de gemiddelde vrije weglengte λ_f en de tijd tussen opeenvolgende botsingen t_f voor enkele plasma's.

wordt in dat geval ook wel gewerk met een hybride van de magnetohydrodynamische en de statistische theorie, namelijk het zogenaamde *twee-fluïda model* (ook wel de *twee-componententheorie* genoemd).

In het vervolg zullen we ons uitsluitend bezig houden met de magnetohydrodynamica. De statistische theorieën en het twee-fluïda-model zullen wegens de beperkte ruimte niet aan de orde komen.

Hoofdstuk 2

De basisvergelijkingen van de magnetohydrodynamica

2.1 Inleiding

In de magnetohydrodynamica wordt een plasma beschreven als een lading- en stroomdragende macroscopische vloeistof. Naast de reeds voor een vloeistof bekende massadichtheid en (hydrodynamische) snelheid treden als nieuwe onafhankelijke grootheden de elektrische ladingsdichtheid en de elektrische stroomdichtheid op. Door deze laatste is de materie gekoppeld aan het elektrische en het magnetische veld.

De tijdontwikkeling van het systeem bestaande uit het plasma en het elektromagnetische veld wordt gegeven door de bewegingsvergelijkingen voor de materie, waarin de elektromagnetische velden optreden via de op de materie uitgeoefende krachten, en de veldvergelijkingen, waarin de materie optreedt via de brontermen. De bewegingsvergelijkingen en de veldvergelijkingen vormen samen een gekoppeld stel differentiaalvergelijkingen.

In dit hoofdstuk zullen we de precieze vorm van de bewegingsvergelijkingen en de veldvergelijkingen afleiden. In het bijzonder zullen we daarbij enige veelgebruikte benaderingen bespreken. In de volgende hoofdstukken zullen we enkele algemene eigenschappen van de vergelijkingen bekijken en vervolgens een aantal oplossingen van de vergelijkingen gaan bestuderen.

2.2 Materievergelijkingen

Net als in de hydrodynamica is voor het vastleggen van de toestand van de materie kennis van een beperkt aantal macroscopische, van plaats en tijd afhankelijke, grootheden voldoende. Deze grootheden voldoen aan een aantal eerste-orde differentiaalvergelijkingen die de tijdontwikkeling bepalen. We zullen deze materiële grootheden en de bijbehorende vergelijkingen nu achtereenvolgens gaan bekijken.

Een eerste belangrijke materiële grootheid is de massadichtheid $\rho(\mathbf{r}, t)$. De tijdontwikkeling van ρ wordt bepaald door de continuïteitsvergelijking, die uitdrukt dat

er geen materie verloren kan gaan. Deze vergelijking luidt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad , \quad (2.2.1)$$

waarbij $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ de hydrodynamische snelheid van het plasma is. De vergelijking heeft de vorm van een *locale behoudswet*. Zo'n wet geeft de tijdafgeleide van een grootheid als (minus) de divergentie van de bijbehorende stroom. Bij integratie over de gehele ruimte volgt uit een locale behoudswet een *globale behoudswet*, als de stroom voldoende snel naar nul gaat voor posities ver van de oorsprong. Een globale behoudswet zegt dat de integraal van een grootheid over de gehele ruimte onafhankelijk van de tijd is.

Een andere vorm voor de continuïteitsvergelijking ontstaat door de “meebewogen afgeleide” d/dt te definiëren als

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad . \quad (2.2.2)$$

Dan kan (2.2.1) worden herschreven als

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad . \quad (2.2.3)$$

Terzijde merken we op dat uit (2.2.1) en (2.2.2) een nuttige relatie volgt die voor elke van plaats en tijd afhankelijke grootheid $a(\mathbf{r}, t)$ geldig is:

$$\rho \frac{da}{dt} = \frac{\partial(a\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (a\rho \mathbf{v}) \quad . \quad (2.2.4)$$

De tijdontwikkeling van de hydrodynamische snelheid wordt bepaald door de bewegingsvergelijking. Deze geeft $\rho d\mathbf{v}/dt$ als de som van twee termen, namelijk een term met de gradiënt van de druk en een bronterm die de op de materie uitgeoefende kracht (per volume-eenheid) bevat:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{F} \quad . \quad (2.2.5)$$

Hierbij is de druk p de hydrostatische druk. Visceuze bijdragen tot de druk (die evenredig zijn met de viscositeit η) zijn weggelaten omdat deze in de magnetohydrodynamica zelden een rol spelen. Om die reden heeft de bewegingsvergelijking de vorm van de *Euler-vergelijking*, met uiteraard een andere krachtdichtheid dan voor een gewone vloeistof. Deze krachtdichtheid \mathbf{F} wordt bepaald door de Lorentz-krachten die werken op de elektrische ladingsdichtheid ρ^e en de elektrische stroomdichtheid \mathbf{j}^e . Er geldt:

$$\mathbf{F} = \rho^e \mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{j}^e \wedge \mathbf{B} \quad , \quad (2.2.6)$$

met \mathbf{E} en \mathbf{B} het elektrische en het magnetische veld. We gebruiken hier en in het vervolg de Lorentz-Heaviside conventies voor electromagnetische grootheden. Zowel de elektrische als de magnetische permeabiliteit van het vacuum kunnen dan gelijk aan 1 worden gesteld.

De vergelijking (2.2.5) kan iets anders worden geschreven door de relatie (2.2.4) te gebruiken:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v} + p\mathbf{U}) + \mathbf{F} \quad , \quad (2.2.7)$$

met \mathbf{U} de eenheidstensor. In deze vorm is de bewegingsvergelijking een balansvergelijking: de locale impulsdichtheid $\rho\mathbf{v}$ verandert in de tijd om twee redenen: ten eerste doordat impuls wegstroomt (de impulsstroomdichtheid is $\rho\mathbf{v}\mathbf{v} + p\mathbf{U}$) en ten tweede doordat het electromagnetische veld een krachtdichtheid produceert, die als bronterm in de vergelijking fungeert. Als \mathbf{F} nul is (bij voorbeeld als er geen electromagnetisch veld is) dan is het plasma krachtenvrij; de vergelijking wordt dan een echte behoudswet, net zo als (2.2.1) dat is.

De bewegingsvergelijking is alleen nuttig als de druk als functie van de dichtheid bekend is, met andere woorden als we de toestandsvergelijking

$$p = p(\rho) \quad (2.2.8)$$

kennen. Opgemerkt moet worden dat de druk in het algemeen van meer parameters dan alleen de massadichtheid ρ afhangt, bij voorbeeld van de temperatuur. Vaak is het een goede benadering om te veronderstellen dat die andere parameters overal in het plasma dezelfde waarden hebben en dat die waarden bovendien in de tijd niet veranderen. Het is duidelijk dat dan alleen de druk voor die vaste parameterwaarden een rol speelt, zodat dan de vorm (2.2.8) voor de toestandsvergelijking voldoende is. Een meer algemene beschrijving volgt door ook een plaats- en tijdafhankelijke temperatuur te introduceren. In dat geval is het nodig ook de balansvergelijking voor de inwendige energie van het plasma (zoals bepaald door de thermodynamica) uit te werken. Dat zullen we hier niet doen.

2.3 Veldvergelijkingen

De tijdontwikkeling van de electromagnetische velden \mathbf{E} en \mathbf{B} wordt bepaald door de twee Maxwell-vergelijkingen:

$$\begin{aligned} c^{-1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \nabla \wedge \mathbf{B} - c^{-1} \mathbf{j}^e \quad , \\ c^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \wedge \mathbf{E} \quad . \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Deze vergelijkingen worden gecompleteerd door de twee tijdonafhankelijke Maxwell-vergelijkingen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho^e \quad , \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Uit de eerste van deze twee vergelijkingen volgt dat de ladingsdichtheid ρ^e vastligt zodra het elektrisch veld \mathbf{E} bekend is. De ladingsdichtheid is dus geen onafhankelijke grootte.

Uit de Maxwell-vergelijkingen volgt op een bekende manier het behoud van lading in de vorm van de behoudswet:

$$\frac{\partial \rho^e}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}^e \quad . \quad (2.3.3)$$

De stroomdichtheid \mathbf{j}^e bestaat uit twee bijdragen. Allereerst treedt een triviale bijdrage $\rho^e \mathbf{v}$ op. Deze is een gevolg van het feit dat de geladen materie, met de ladingsdichtheid ρ^e , voorbij stroomt met de hydrodynamische snelheid \mathbf{v} . Een interessantere bijdrage is die van de echte geleidingsstroomdichtheid \mathbf{i}^e . Deze is volgens de wet van Ohm evenredig met het elektrische veld, zoals dat door een met de materie meebewegende waarnemer wordt gezien. Dit laatste veld heeft de vorm $\mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, als relativistische correcties worden verwaarloosd. We kunnen dus schrijven

$$\mathbf{i}^e \equiv \mathbf{j}^e - \rho^e \mathbf{v} = \sigma (\mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad , \quad (2.3.4)$$

waar we het geleidingsvermogen σ introduceerden. Uit deze vergelijking volgt dat ook de stroomdichtheid geen onafhankelijke grootheid is: zodra \mathbf{E} en \mathbf{B} bekend zijn volgt niet alleen ρ^e maar ook \mathbf{i}^e en dus \mathbf{j}^e .

De complete set vergelijkingen van de magnetohydrodynamica is nu gegeven door:

- de continuïteitsvergelijking (2.2.1);
- de bewegingsvergelijking (2.2.7) met (2.2.6);
- de toestandsvergelijking (2.2.8);
- de Maxwell-vergelijkingen (2.3.1) en (2.3.2);
- de wet van Ohm (2.3.4).

De vergelijkingen (2.2.1), (2.2.7) en (2.3.1) zijn eerste-orde differentiaalvergelijkingen in de tijd voor ρ , \mathbf{v} , \mathbf{E} en \mathbf{B} . De rechterleden van deze vergelijkingen zijn in deze zelfde onafhankelijke grootheden uit te drukken. Als de beginvoorwaarden op een tijdstip t_0 bekend zijn (voor alle \mathbf{r}), dan volgen de waarden voor elk later tijdstip t .

2.4 Vereenvoudigde MHD-vergelijkingen

De hiervoor beschreven vergelijkingen gelden onder zeer algemene voorwaarden. Ze zijn echter moeilijk op te lossen. Gelukkig is het in de praktijk meestal mogelijk gebruik te maken van een tweetal benaderingen, die de structuur van de vergelijkingen enigszins vereenvoudigen. We zullen deze benaderingen en de redenen voor hun geldigheid achtereenvolgens bespreken.

De eerste benadering is het eenvoudigst. Uit de eerste vergelijking van het stel (2.3.1) volgt dat de rotatie van het magnetisch veld \mathbf{B} wordt bepaald door de som van twee termen, namelijk de elektrische stroomdichtheid \mathbf{j}^e en de term $\partial \mathbf{E} / \partial t$, die door Maxwell de “verplaatsingsstroom” werd genoemd. Een indruk van de relatieve grootte van deze termen ontstaat door de wet van Ohm te gebruiken om \mathbf{j}^e te vervangen door $\sigma \mathbf{E}$ plus een aantal andere termen. Nu is σ voor een plasma meestal

zeer groot, bv. van de orde van 10^{14} s^{-1} . De verplaatsingsstroom is voor een tijdafhankelijk elektrisch veld dat verandert op een tijdschaal T die wordt bepaald door een hoekfrequentie $\omega = T^{-1}$ ruwweg van de orde van $\omega \mathbf{E}$. Dan volgt direkt dat voor alle verschijnselen die gekarakteriseerd worden door een frequentie ω die klein is ten opzichte van 10^{14} s^{-1} de verplaatsingsstroom kan worden verwaarloosd ten opzichte van \mathbf{j}^e . Dit zullen wij in het vervolg vrijwel steeds doen. Alleen bij zeer snelle verschijnselen (waarvoor de MHD aanpak meestal überhaupt geen zin heeft), moet de verplaatsingsstroom in rekening worden gebracht.

De tweede benadering heeft betrekking op de ladingsdichtheid ρ^e . We zagen dat deze geen onafhankelijke grootte is, maar via de eerste vergelijking van (2.3.2) wordt bepaald door het elektrische veld \mathbf{E} . Die ladingsdichtheid komt verder op twee plaatsen voor, namelijk in de wet van Ohm (2.3.4) en in de Lorentz-kracht (2.2.6). We bekijken beide uitdrukkingen nu iets preciezer.

De wet van Ohm luidt na invullen van de uit de Maxwell-vergelijkingen volgende uitdrukkingen voor ρ^e en \mathbf{j}^e

$$\mathbf{E} + \frac{1}{\sigma} \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{E} = -c^{-1} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} + \frac{c}{\sigma} \nabla \wedge \mathbf{B} \quad . \quad (2.4.1)$$

Een schatting van de relatieve grootte van de termen ontstaat door (analoog aan de invoering van ω hierboven) een golfgetal k in te voeren zodanig dat de plaatsafgeleide van een grootte kan worden vervangen door k maal die grootte. Blijkbaar is $k = L^{-1}$, met L een karakteristieke afstand waarover de macroscopische grootheden aanzienlijk veranderen (zo iets als een golflengte). Dan is de verhouding van de twee termen links bepaald door $kv/\sigma = [v/c] \times [c/(\sigma L)]$. In de praktijk blijken beide factoren uit dit produkt klein te zijn, de eerste factor omdat de snelheden nonrelativistisch zijn, en de tweede omdat het geleidingsvermogen zo groot is. De tweede term links in (2.4.1) is dus verwaarloosbaar vergeleken met de eerste term. Dit is juist de term die is ontstaan uit $\rho^e \mathbf{v}$. Blijkbaar kunnen we die term in de wet van Ohm laten vervallen, zodat deze wet wordt

$$\mathbf{j}^e = \sigma(\mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad . \quad (2.4.2)$$

De tweede plek waar ρ^e optreedt is de Lorentz-kracht (2.2.6). Invullen van de uit de Maxwell-vergelijkingen volgende uitdrukkingen voor ρ^e en \mathbf{j}^e geeft hier

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} + (\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} \quad . \quad (2.4.3)$$

De verhouding tussen de twee termen is blijkbaar E^2/B^2 . Uit (2.4.1) (met weglating van de tweede term links) volgt dat deze verhouding opnieuw bepaald wordt door de factoren v/c en $c/(\sigma L)$. Het klein zijn van die factoren impliceert dat E^2/B^2 zeer klein is, en dus dat de eerste term in (2.4.3) verwaarloosbaar is vergeleken met de tweede. Opnieuw speelt dus de term afkomstig van ρ^e geen rol.

Uit het bovenstaande volgt dat zowel in de wet van Ohm als in de uitdrukking voor de Lorentz-kracht de bijdrage van de elektrische ladingsdichtheid kan worden weggelaten. Het plasma gedraagt zich effectief als neutraal, alsof ρ^e gelijk aan nul is. Toch hoeft ρ^e niet echt nul te zijn, zoals men ziet als in een concreet geval de divergentie van \mathbf{E} wordt berekend. Men zegt dat het plasma “quasi-neutraal” is.

Na gebruikmaking van de twee hierboven genoemde benaderingen kunnen we het stelsel van magnetohydrodynamische vergelijkingen als volgt schrijven

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad , \quad (2.4.4)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} = -\nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p(\rho) \mathbf{U}] + (\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} \quad , \quad (2.4.5)$$

$$c^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \wedge \left(c^{-1} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} - \frac{c}{\sigma} \nabla \wedge \mathbf{B} \right) \quad . \quad (2.4.6)$$

Dit zijn zeven vergelijkingen voor de tijdafgeleiden van de massadichtheid ρ , de componenten van de snelheid \mathbf{v} en van het magnetische veld \mathbf{B} . Ook de rechterleden hangen alleen van deze grootheden af. Het elektrisch veld \mathbf{E} , de elektrische ladingsdichtheid ρ^e en de elektrische stroomdichtheid \mathbf{j}^e zijn systematisch geëlimineerd. Ze kunnen worden teruggevonden met behulp van de relaties

$$\mathbf{E} = -c^{-1} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} + \frac{c}{\sigma} \nabla \wedge \mathbf{B} \quad , \quad (2.4.7)$$

$$\rho^e = -c^{-1} \nabla \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad , \quad (2.4.8)$$

$$\mathbf{j}^e = c \nabla \wedge \mathbf{B} \quad . \quad (2.4.9)$$

De vergelijkingen (2.4.4)-(2.4.6) kunnen worden opgelost als begincondities voor ρ , \mathbf{v} en \mathbf{B} op $t = t_0$ worden gegeven. De beginconditie voor \mathbf{B} moet daarbij voldoen aan de relatie

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad . \quad (2.4.10)$$

Uit (2.4.6) volgt dat deze relatie dan voor alle latere tijden blijft gelden.

De hier afgeleide basisvergelijkingen van de magnetohydrodynamica kunnen onder bepaalde voorwaarden worden opgelost. Met behulp van die oplossingen kunnen een aantal in aardse en astrofysische plasma's optredende verschijnselen worden beschreven. Voor we die oplossingen gaan bekijken zullen we eerst in het volgende hoofdstuk een aantal algemene eigenschappen van de magnetohydrodynamische basisvergelijkingen onder de loupe nemen.

Hoofdstuk 3

Algemene eigenschappen van de magnetohydrodynamische vergelijkingen

3.1 Inleiding

De vergelijkingen van de magnetohydrodynamica, zoals gegeven in het vorige hoofdstuk, zijn een stelsel van zeven gekoppelde eerste-orde differentiaalvergelijkingen, waaruit de tijdevolutie van velden en materie in principe kan worden bepaald. Omdat de vergelijkingen niet-lineair zijn is het echter in het algemeen niet eenvoudig om oplossingen te vinden. Het blijkt echter in de praktijk dat voor (astro)fysische systemen additionele benaderingen kunnen worden gemaakt omdat bepaalde dimensieloze parameters zodanige waarden hebben dat sommige termen in de magnetohydrodynamische vergelijkingen belangrijker zijn dan andere. Deze enigszins vage uitspraak zal in dit hoofdstuk duidelijker worden gemaakt door de dynamica van het magnetische veld en van de materie nader te beschouwen.

3.2 Dynamica van het magnetische veld

De tijdontwikkeling van het magnetische veld \mathbf{B} wordt bepaald door (2.4.6). Door uitwerken van de dubbele rotatie en gebruik maken van (2.4.10) volgt een iets overzichtelijker vorm van deze vergelijking:

$$c^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c}{\sigma} \Delta \mathbf{B} + c^{-1} \nabla \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad . \quad (3.2.1)$$

De twee termen in het rechterlid zijn in competitie voor de bepaling van de tijdafgeleide van het magnetische veld. Welke van de twee termen daarbij wint kan worden vastgesteld door, net als tevoren, een lengtemaat L te introduceren, zodanig dat een aanzienlijke verandering in \mathbf{v} en \mathbf{B} pas begint op te treden over afstanden van de orde van L . De verhouding van de twee termen wordt dan gegeven door de verhouding van twee dimensieloze parameters, die we al in paragraaf 2.4 tegenkwamen, namelijk v/c en $c/(\sigma L)$. Beide parameters zijn klein voor de ons interesserende

System	v/c	$c/(\sigma L)$	R_M
Kwik	10^{-8}	10^{-8}	1
Ionosfeer	10^{-6}	10^{-5}	10^{-1}
Gasontlading	10^{-3}	10^{-6}	10^3
Fotosfeer zon	10^{-5}	10^{-13}	10^8
Interstellair H	10^{-6}	10^{-25}	10^{19}
Corona zon	10^{-5}	10^{-16}	10^{11}

Tabel 3.1: Waarden van v/c , $c/(\sigma L)$ en R_M voor een aantal systemen.

fysische systemen, maar hun verhouding

$$\frac{v/c}{c/(\sigma L)} = \frac{\sigma Lv}{c^2} \equiv R_M \quad , \quad (3.2.2)$$

die het *magnetische Reynolds-getal* wordt genoemd, kan allerlei waarden aannemen. (Er is een analogie met het gewone Reynolds-getal $R = \rho Lv/\eta$ uit de hydrodynamica, die voor een visceuze vloeistof, met viscositeit η , aangeeft wanneer de overgang van laminaire naar turbulente stroming optreedt; we gaan hier niet verder op in.) Waarden van de twee zojuist genoemde dimensieloze parameters en van het magnetische Reynolds-getal voor een aantal systemen zijn gegeven in tabel 3.1.

Het belang van het magnetische Reynolds-getal voor het gedrag van het magnetisch veld volgt direct uit (3.2.1). Als R_M klein is dan domineert de eerste term in het rechterlid van (3.2.1), als R_M groot is dan is juist de tweede term het belangrijkste. We bekijken beide gevallen na elkaar.

Voor *kleine* waarden van R_M krijgt (3.2.1) de vorm

$$c^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c}{\sigma} \Delta \mathbf{B} \quad . \quad (3.2.3)$$

Dit is een vergelijking die voor elke cartesische component van het magnetisch veld dezelfde vorm heeft. De componenten zijn bovendien niet met elkaar gekoppeld, en ook niet meer met het snelheidsveld \mathbf{v} . (Koppeling van de componenten van \mathbf{B} via (2.4.10) blijft onverkort gehandhaafd; zoals we reeds opmerkten is die nevenconditie echter vanzelf gegarandeerd vervuld als de beginwaarden van \mathbf{B} eraan voldoen.) De vergelijking heeft de vorm van een diffusievergelijking. Zulke vergelijkingen beheersen ook warmtegeleiding en diffusie in gassen en vloeistoffen. De eigenschappen van de diffusievergelijking zijn welbekend. Elke in het algemeen non-uniforme beginverdeling $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0)$ van het magnetisch veld op het tijdstip t_0 relaxeert naar een ruimtelijk uniforme verdeling. De karakteristieke relaxatietijd wordt gegeven door $\sigma L^2/c^2$. Voor laboratoriumexperimenten met kwik is die relaxatietijd bij voorbeeld van de orde 10^{-2} s. Voor de ionosfeer vindt men ongeveer 10 s. Een fysische interpretatie van dit relaxatie-effect volgt door te kijken naar de uit (3.2.3) met (2.4.10) volgende vergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} B^2 \right) = \frac{c^2}{\sigma} \nabla \cdot [\mathbf{B} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B})] - \frac{c^2}{\sigma} (\nabla \wedge \mathbf{B})^2 \quad . \quad (3.2.4)$$

Het linkerlid geeft de tijdafgeleide van de magnetische energie. De eerste term rechts is de divergentie van een energiestroomdichtheid, die transport van magnetische energie van de plaats \mathbf{r} naar naburige plaatsen beschrijft. Door gebruik van (2.4.7), waarin de eerste term rechts geen rol speelt voor kleine R_M , ziet men dat deze energiestroomdichtheid juist de bekende Poynting-vector $c\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ is. De laatste term in (3.2.4) is een bronterm die zorgt voor het lokaal verdwijnen van magnetische energie, zonder transport naar de omgeving. Deze term is in feite, zoals blijkt uit (2.4.7) en (2.4.9), een dissipatie-term door gegenereerde Joule-warmte, van de vorm $-\mathbf{j}^e \cdot \mathbf{E}$. Deze Joule-dissipatie doet de lokale magnetische energie voortdurend slinken tot het magneetveld uniform is geworden.

Het geval van klein magnetisch Reynolds-getal is tamelijk bijzonder omdat het dynamisch gedrag van het magneetveld ontkoppeld raakt van het snelheidsveld. De tijdontwikkeling van het magneetveld is daarom nogal eenvoudig geworden. De situatie is heel anders voor het tegenovergestelde geval van *grote* waarden van R_M . Dan krijgt (3.2.1) de vorm

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad . \quad (3.2.5)$$

Door de meebewogen afgeleide (2.2.2) te introduceren vindt men hieruit, met gebruik van (2.2.3) en (2.4.10):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot (\nabla \mathbf{v}) \quad . \quad (3.2.6)$$

Dit heet de vergelijking van Walén.

Om deze vergelijking te interpreteren bewijzen we eerst een hulprelatie voor vloeistofstroming in het algemeen. Bezien eens twee punten \mathbf{r} en $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ in de vloeistof. Als deze punten met de vloeistof meebewegen dan zijn ze een tijdje dt later gearriveerd op de plekken $\mathbf{r} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)dt$ en $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r} + \mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t)dt$, zodat hun verschilvector is geworden

$$\mathbf{r} + \delta\mathbf{r} + \mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t)dt - \mathbf{r} - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)dt = \delta\mathbf{r} + \delta\mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{v})dt \quad . \quad (3.2.7)$$

De verschilvector is dus in de tijd dt toegenomen met een waarde gegeven door de laatste term in het rechterlid. Blijkbaar is de meebewogen tijdafgeleide van $\delta\mathbf{r}$ gegeven door

$$\frac{d}{dt} \delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{v}) \quad . \quad (3.2.8)$$

We bekijken nu eens *drie* punten dicht bij elkaar in de vloeistof, gegeven door \mathbf{r} , $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}_1$ en $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}_2$. De verschilvectoren $\delta\mathbf{r}_i$ veranderen dan in de tijd volgens (3.2.8). Deze twee verschilvectoren spannen samen een klein parallelogram op met een oppervlak en een normaalvector, die worden bepaald door het uitproduct $\delta\mathbf{r}_1 \wedge \delta\mathbf{r}_2 \equiv \delta\mathbf{S}$. De normaal op het oppervlakje is parallel aan $\delta\mathbf{S}$, terwijl de grootte van het oppervlakje wordt gegeven door de lengte van $\delta\mathbf{S}$. Als de vloeistof stroomt en de punten meebewegen dan verandert $\delta\mathbf{S}$ in grootte en in richting. De meebewogen tijdafgeleide van $\delta\mathbf{S}$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta\mathbf{S} &= \frac{d}{dt} (\delta\mathbf{r}_1 \wedge \delta\mathbf{r}_2) = \delta\mathbf{r}_1 \cdot (\nabla \mathbf{v}) \wedge \delta\mathbf{r}_2 - \delta\mathbf{r}_2 \cdot (\nabla \mathbf{v}) \wedge \delta\mathbf{r}_1 = \\ &= (\delta\mathbf{r}_1 \wedge \delta\mathbf{r}_2) \nabla \cdot \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v}) \cdot (\delta\mathbf{r}_1 \wedge \delta\mathbf{r}_2) = \\ &= \delta\mathbf{S} \nabla \cdot \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{S} \quad . \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Met gebruik van de continuïteitsvergelijking in de vorm (2.2.3) kunnen we dit schrijven als

$$\frac{d}{dt}(\rho\delta\mathbf{S}) = -\rho(\nabla\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{S} \quad . \quad (3.2.10)$$

We gaan nu de relaties (3.2.8) en (3.2.10), die waar zijn voor elke stroming waarin massabehoud geldt, toepassen op de stroming van het magnetohydrodynamische plasma met groot magnetisch Reynolds-getal. Door combineren van de twee vergelijkingen (3.2.8) en (3.2.10) met de Walén-vergelijking (3.2.6) kunnen we een paar conclusies trekken.

Allereerst zien we door vergelijken van (3.2.6) en (3.2.8) dat $\rho^{-1}\mathbf{B}$ en $\delta\mathbf{r}$ aan dezelfde vergelijking voldoen. Hun evolutie in de tijd verloopt dus analoog. In het bijzonder volgt dat als op tijdstip t de vector $\delta\mathbf{r}$ parallel is aan het ter plekke aanwezige magneetveld, dan is dat op elk later tijdstip ook het geval. Anders gezegd, als twee naburige punten in het plasma op zeker moment op dezelfde magnetische veldlijn liggen dan is dit voor alle latere (en eerdere) tijden ook zo. De veldlijnen worden als het ware meegenomen met de plasmastroming.

We zien dit nog duidelijker door gebruik van (3.2.10). In combinatie met (3.2.6) geeft deze vergelijking:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{S}) = 0 \quad . \quad (3.2.11)$$

Hier staat dat de door een oppervlakje $\delta\mathbf{S}$ gaande magnetische flux niet verandert als het oppervlakje door de plasmastroming wordt meegenomen. Door integratie vinden we

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad , \quad (3.2.12)$$

met $S(t)$ een met het plasma meebewegend oppervlak. Opnieuw blijkt dat de veldlijnen door de plasmastroming worden meegenomen. Men zegt ook wel: “het magnetische veld is ingevroren” of “de magnetische flux is ingevangen door het plasma”. Deze eigenschap van een plasma met groot magnetisch Reynolds-getal heet de *stelling van Alfvén*. De beweging van een buis van veldlijnen is schematisch weergegeven in figuur 3.1. Terzijde merken we op dat het niet juist is uit het ingevroren zijn van de veldlijnen te concluderen dat de plasmastroming langs de veldlijnen plaatsvindt; \mathbf{v} en \mathbf{B} behoeven niet parallel te zijn (zie opnieuw figuur 3.1).

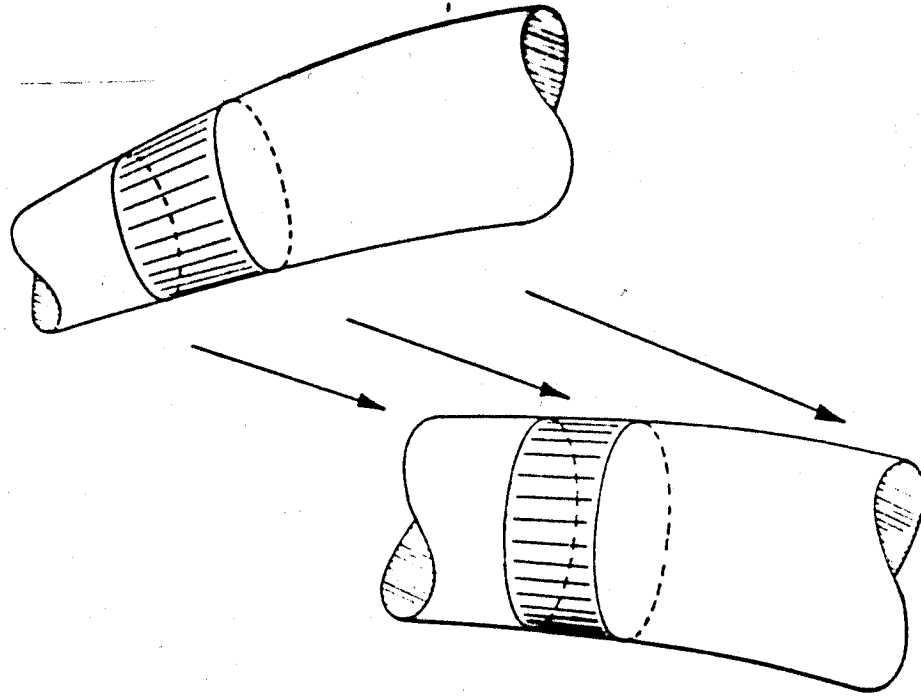
De invriezing van het magnetische veld in een plasma met groot magnetisch Reynolds-getal heeft een analogon in het zogenaamde wervelbehoud in een incompressibele vloeistof zonder viscositeit en zonder uitwendige krachten. Voor zo'n vloeistof luidt de bewegingsvergelijking (vergelijk (2.2.5)):

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \quad . \quad (3.2.13)$$

Hieruit volgt door de rotatie te nemen en de zogenaamde vorticeit $\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{v}$ te introduceren:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \wedge (\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}) \quad . \quad (3.2.14)$$

Deze vergelijking heeft dezelfde vorm als (3.2.5). Net als \mathbf{B} is ook $\boldsymbol{\omega}$ divergentievrij. Het analogon van (3.2.12) is de *circulatiestelling van Thomson* over wervelbehoud



Figuur 3.1: Tijdevolutie van een buis van veldlijnen in een plasma met groot magnetisch Reynolds-getal.

in een ideale incompressibele vloeistof. Deze luidt

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \oint_{R(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad , \quad (3.2.15)$$

waar we de stelling van Stokes gebruikten om de flux van $\boldsymbol{\omega}$ door het met de vloeistof meebewegend oppervlak $S(t)$ te schrijven als een kringintegraal over de rand $R(t)$ van dit oppervlak. Het lijn-element langs deze rand is aangegeven door de vector $d\mathbf{s}$. De stelling van Thomson drukt uit dat in een ideale incompressibele vloeistof wervels nooit verloren gaan. Als op een zeker moment de kringintegraal van de snelheid \mathbf{v} langs een gesloten pad ongelijk nul is en er dus een wervelachtige beweging in de vloeistof optreedt, dan blijft zo'n wervelbeweging in de vloeistof aanwezig. Immers, als we het gesloten pad met de vloeistof laten meebewegen dan houdt op elk later tijdstip de kringintegraal van de snelheid langs dat bewegende pad dezelfde waarde ongelijk nul.

Tot nu toe hebben we alleen naar de dynamica van het magnetische veld gekeken in de twee extreme gevallen van zeer klein of zeer groot magnetisch Reynolds-getal R_M . Het magnetische veld gedraagt zich in die twee gevallen zeer verschillend. Voor kleine R_M bleek de dynamica van het magneetveld ontkoppeld te zijn van de materiële stroming; non-uniformiteiten in het magneetveld sterven dan snel uit

tengevolge van Joule-dissipatie. In het andere uiterste van grote R_M was het magneetveld juist sterk gekoppeld aan de materiële stroming; de magnetische veldlijnen zitten dan “vastgebakken” aan de materie. Het is duidelijk dat in het algemene geval van willekeurige waarden van R_M de beschrijving ingewikkelder wordt. Gelukkig blijkt uit tabel 3.1 dat in de natuur juist de gevallen van hetzij zeer grote of zeer kleine waarde van R_M vaak zijn gerealiseerd.

3.3 Dynamica van de materie

In de vorige paragraaf hebben we ons bezig gehouden met de dynamica van het magnetische veld. Nu willen we ook kijken naar de dynamica van de materie. Deze wordt bepaald door de vergelijkingen (2.4.4) en (2.4.5). De koppeling van de materie met het veld vindt plaats door de Lorentz-kracht in (2.4.5) die we hebben geschreven als $(\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}$. Door gebruik te maken van het divergentievrije karakter van \mathbf{B} kunnen we deze Lorentz-kracht schrijven als

$$\mathbf{F} = c^{-1} \mathbf{j}^e \wedge \mathbf{B} = (\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2}B^2\mathbf{U}) = \nabla \cdot \mathbb{T} \quad . \quad (3.3.1)$$

De Lorentz-kracht is de divergentie van de voor het eerst door Maxwell ingevoerde “spanningstensor”

$$\mathbb{T} \equiv \mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2}B^2\mathbf{U} \quad . \quad (3.3.2)$$

De tensor \mathbb{T} is diagonaal in een coördinatenstelsel waarin één der assen parallel aan het magneetveld is. In de richting parallel aan het veld is de component $T_{\parallel,\parallel}$ positief, met waarde $\frac{1}{2}B^2$, corresponderend met een echte trekspanning. Loodrecht op het veld zijn de diagonaalcomponenten van de spanningstensor negatief, met waarde $-\frac{1}{2}B^2$, zodat er in feite geen trekspanning, maar een druk tengevolge van het magneetveld ontstaat. Anders gezegd, de veldlijnen zijn net elastiekjes, die ieder proberen zo kort mogelijk te worden, en elkaar afstoten. Een voorbeeld is het magneetveld van twee parallelle stroomdraden. Deze knijpen in hun poging zo kort mogelijk te worden de stroomdraden naar elkaar toe. Een ander voorbeeld is een als een solenoïde gewikkelde stroomdraad. De er in opgesloten veldlijnen stoten elkaar met kracht af en trachten aldus de solenoïde open te drukken.

De evolutie van het materiële snelheidsveld wordt via de Lorentz-kracht mede bepaald door het magneetveld. De dynamica van dat magneetveld hangt, zoals we in de vorige paragraaf zagen, op cruciale wijze af van het magnetische Reynolds-getal R_M . Voor kleine R_M wordt het magneetveld zeer snel uniform, onafhankelijk van het snelheidsveld. Aangezien voor een uniform magneetveld de Lorentz-kracht nul is, is de evolutie van het snelheidsveld in het plasma dan dezelfde als voor een neutrale vloeistof: de magnetohydrodynamica reduceert dan tot de gewone hydrodynamica. Echte magnetohydrodynamische verschijnselen ontstaan in het geval van grote R_M . Daarom zullen we ons in het volgende veelal beperken tot het geval van grote R_M .

Als we (3.3.1) invullen in (2.4.5) dan krijgt de bewegingsvergelijking de vorm van een echte behoudswet, namelijk

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v} + p\mathbf{U} - \mathbb{T}) \quad . \quad (3.3.3)$$

System	B (tesla)	\mathcal{L}
Kwik	10^{-1}	10
Ionosfeer	10^{-5}	10^{-2}
Gasontlading	10^{-1}	10^2
Fotosfeer zon	10^{-2}	10^8
Interstellair H	10^{-9}	10^{21}
Corona zon	10^{-4}	10^{14}

Tabel 3.2: Waarden van het magneetveld en het Lundquist-getal voor enkele systemen.

Het rechterlid is de divergentie van de totale impulsstroomdichtheidstensor, die de som is van een materiëel en een veldafhankelijk deel. Duidelijk zien we dat de invloed van de door het veld veroorzaakte trekspanningen en druk alleen van wezenlijk belang is als B^2 vergelijkbaar in grootte is met p en met ρv^2 . Als we de afschatting $v \simeq B/\sqrt{\rho}$ invullen in het magnetisch Reynolds-getal R_M , dan zien we dat voor plasma's met grote R_M de magnetische krachten alleen van belang zijn als het magneetveld voldoet aan de sterke ongelijkheid

$$\frac{\sigma LB}{c^2 \sqrt{\rho}} \gg 1 \quad . \quad (3.3.4)$$

Het linkerlid heet wel het *Lundquist-getal* \mathcal{L} . Net als het magnetische Reynolds-getal is ook het Lundquist-getal evenredig met de karakteristieke afmeting van het systeem. Het is dan ook niet verbazingwekkend dat voor astrofysische systemen het Lundquist-getal meestal zeer hoog uitvalt, ook al is het magneetveld zelf helemaal niet zo groot. In tabel 3.2 staan enkele voorbeelden.

Samenvattend kunnen we zeggen dat typische magnetohydrodynamische verschijnselen optreden als aan twee condities is voldaan. Allereerst moet het magnetisch Reynolds-getal R_M groot zijn, zodat de magnetische veldlijnen ingevroren zijn. In het tegenovergestelde geval van kleine R_M sterven inhomogeniteiten in het magneetveld snel uit, zodat de door het magneetveld op de materie uitgeoefende Lorentz-krachten spoedig verwaarloosbaar klein worden. Naast R_M moet ook het Lundquist-getal \mathcal{L} groot zijn, omdat anders de Lorentz-krachten in het niet zinken bij de materiële krachten die ontstaan door gradiënten in de druk en in het snelheidsveld.

Hoofdstuk 4

Statische en stationnaire oplossingen van de MHD vergelijkingen

4.1 Inleiding

In de vorige twee hoofdstukken hebben we de vergelijkingen van de magnetohydrodynamica afgeleid en vervolgens in algemene termen besproken. In de nu volgende hoofdstukken zullen we in concreto naar oplossingen van de MHD vergelijkingen gaan zoeken. We zullen ons daarbij beperken tot enkele belangrijke speciale gevallen, waarvoor de vergelijkingen zozeer vereenvoudigen dat analytische oplossingen kunnen worden gevonden. In meer algemene gevallen zijn alleen numerieke oplossingen mogelijk.

Een aanzienlijke vereenvoudiging treedt op door naar *tijdsonafhankelijke* oplossingen te kijken. In dat geval kunnen alle tijdsafgeleiden in de MHD vergelijkingen nul gesteld worden. Er resteren dan een stel gekoppelde differentiaalvergelijkingen voor de dichtheid, het snelheidsveld en het magneetveld als functies van de plaats. Een verdere vereenvoudiging ontstaat door aan te nemen dat de materie niet beweegt, dus dat de snelheid overal nul is. Dan blijven alleen vergelijkingen voor de dichtheid en het magneetveld over. Door die op te lossen ontstaat een *statische* oplossing van de MHD vergelijkingen. In het meer algemene geval van een eendig snelheidsveld spreekt men van een *stationnaire* oplossing. In de nu volgende paragrafen zullen we enkele voorbeelden van statische en stationnaire oplossingen bespreken.

4.2 Statische oplossingen: pinch-ontladingen

Statische oplossingen van de magnetohydrodynamische vergelijkingen voldoen aan een stel vergelijkingen dat ontstaat uit (2.4.4)–(2.4.6) door de tijdsafgeleiden en het snelheidsveld nul te stellen. De continuïteitsvergelijking (2.4.4) vervalt dan geheel,

terwijl (2.4.5) en (2.4.6) worden

$$-\nabla p + (\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} = 0 \quad , \quad (4.2.1)$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) = 0 \quad . \quad (4.2.2)$$

Voorts moet het magneetveld voldoen aan (2.4.10), dus

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad . \quad (4.2.3)$$

Het magnetisch Reynolds-getal R_M , gedefinieerd in (3.2.2), is gelijk aan 0, omdat immers v gelijk aan nul is. In overeenstemming met (3.2.3) voldoet het magnetisch veld aan de uit (4.2.2) en (4.2.3) volgende vergelijking

$$\Delta \mathbf{B} = 0 \quad . \quad (4.2.4)$$

Als we op fysische gronden eisen dat het magneetveld nergens oneindig groot wordt (ook niet voor $\mathbf{r} \rightarrow \infty$) dan is de enige oplossing een uniform veld: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$. In dat geval is zowel aan (4.2.2) als aan (4.2.3) op triviale wijze voldaan, terwijl uit (4.2.1) dan volgt dat ook de druk p uniform moet zijn. Dit is een weinig interessante oplossing van de statische MHD vergelijkingen. Bovendien is de oplossing nogal onfysisch, omdat er voor nodig is dat het plasma een oneindige uitgebreidheid heeft. We zijn meer geïnteresseerd in oplossingen die corresponderen met een plasma van eindige afmetingen.

Als het plasma een eindige uitgebreidheid heeft dan is de druk p slechts van nul verschillend in een eindig deel van de ruimte. Daarbuiten voldoet het magneetveld aan de eenvoudige vergelijkingen

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = 0 \quad , \quad (4.2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad (4.2.6)$$

die direct uit de Maxwell-vergelijkingen (2.3.1)–(2.3.2) voor het statische geval volgen. Aan het oppervlak van het plasma moet het magneetveld voldoen aan de bekende randcondities uit de Maxwell-theorie, die gelden aan de grenslaag tussen twee media 1 en 2:

$$\mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}^{(2)} \cdot \mathbf{n} \quad , \quad \mathbf{B}^{(1)} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{B}^{(2)} \wedge \mathbf{n} + c^{-1} \mathbf{j}^{e,opp} \quad , \quad (4.2.7)$$

met \mathbf{n} de normaal op het oppervlak (wijzend van medium 1 naar medium 2) en waar $\mathbf{j}^{e,opp}$ een langs het oppervlak lopende oppervlaktestroomdichtheid is. Zulke oppervlaktestromen kunnen alleen optreden als het elektrisch geleidingsvermogen van het plasma zeer groot (eigenlijk zelfs oneindig groot) is. Voor eindige waarden van σ zijn de oppervlaktestromen nul. We zullen ze daarom in het vervolg verwaarlozen. De condities (4.2.7) impliceren dan dat het magneetveld continu is aan het oppervlak van het plasma.

We zullen nu de oplossingen van (4.2.1)–(4.2.3) en (4.2.5)–(4.2.6) gaan bekijken voor het fysisch belangrijke geval van een cilindervormige plasmakolom. We zullen ons voor de eenvoud beperken tot oplossingen die zelf ook cilindrsymmetrisch zijn, zodat het magneetveld en de druk alleen afhangen van de afstand r tot de as van

de cylinder en niet van de andere twee cylindercoördinaten, namelijk de azimuthale hoek θ en de component z van de plaatsvector \mathbf{r} langs de cylinder-as.

Het is nuttig de vergelijkingen uit te schrijven in cylindercoördinaten. Een vector \mathbf{A} , die in cylindercoördinaten de componenten (A_r, A_θ, A_z) heeft, kan worden geschreven als:

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_z \mathbf{e}_z \quad , \quad (4.2.8)$$

met \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ en \mathbf{e}_z eenheidsvectoren in de richting van toenemende r , θ en z . De divergentie van \mathbf{A} is dan

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad . \quad (4.2.9)$$

De rotatie van \mathbf{A} is evenzo te schrijven als

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z \quad . \quad (4.2.10)$$

Een cylindersymmetrische oplossing voldoet dan wegens (4.2.1)–(4.2.3) voor $r < R$ (met R de straal van de plasmakolom) aan de vergelijkingen

$$-\frac{dp}{dr} - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} B_\theta^2 + \frac{1}{2} B_z^2 \right) - \frac{1}{r} B_\theta^2 = 0 \quad , \quad (4.2.11)$$

$$\frac{d}{dr} (r B_\theta) B_r = 0 \quad , \quad (4.2.12)$$

$$\frac{dB_z}{dr} B_r = 0 \quad , \quad (4.2.13)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\theta) \right] = 0 \quad , \quad (4.2.14)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dB_z}{dr} \right) = 0 \quad , \quad (4.2.15)$$

$$\frac{d}{dr} (r B_r) = 0 \quad . \quad (4.2.16)$$

Voor $r > R$ voldoen de componenten van het magneetveld aan de vergelijkingen

$$\frac{dB_z}{dr} = 0 \quad , \quad (4.2.17)$$

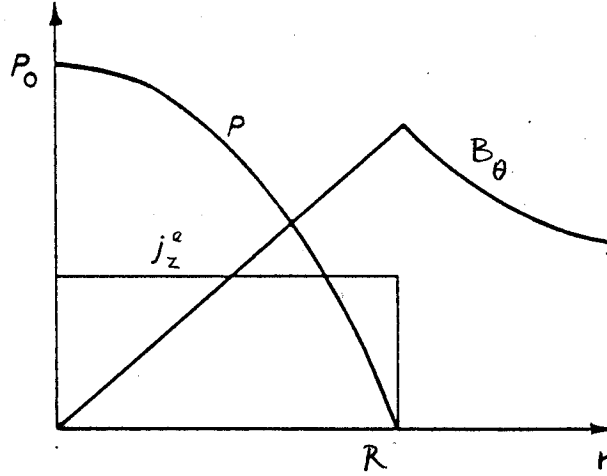
$$\frac{d}{dr} (r B_\theta) = 0 \quad , \quad (4.2.18)$$

$$\frac{d}{dr} (r B_r) = 0 \quad . \quad (4.2.19)$$

Voor $r = R$ moeten B_r , B_θ en B_z voldoen aan (4.2.7).

Uit (4.2.16) volgt dat $B_r = 0$ voor alle $r < R$, daar B_r niet mag divergeren op de as. Dan is ook aan (4.2.12) en (4.2.13) voldaan. Ook voor $r > R$ is nu, wegens (4.2.19) en de randconditie (4.2.7) voor $r = R$, steeds $B_r = 0$. Voorts is, wegens (4.2.14), (4.2.18) en de randconditie (4.2.7)

$$B_\theta = Cr \quad (\text{voor } r < R) \quad , \quad B_\theta = C \frac{R^2}{r} \quad (\text{voor } r > R) \quad , \quad (4.2.20)$$



Figuur 4.1: Het verloop van B_θ , p en j_z^e als functie van r in de pinch-ontlading.

met constante C . Vervolgens volgt wegens (4.2.15), (4.2.17) en de randconditie (4.2.7)

$$B_z = C' \quad (\text{voor alle } r) \quad , \quad (4.2.21)$$

met constante C' . De verdeling van de druk in de plasmakolom volgt tenslotte uit (4.2.11)

$$p = C'^2(R^2 - r^2) + p_{atm} \quad , \quad (4.2.22)$$

met p_{atm} een constante, die de druk buiten de plasmakolom geeft.

Meer inzicht ontstaat door ook de elektrische stroomdichtheid $\mathbf{j}^e = c\nabla \wedge \mathbf{B}$ in het gebied $r < R$ te berekenen. We vinden

$$j_r^e = j_\theta^e = 0 \quad , \quad j_z^e = 2cC' \quad (\text{voor } r < R) \quad . \quad (4.2.23)$$

Door de plasmakolom stroomt blijkbaar een uniforme elektrische stroom. Het verloop van B_θ , p en j_z^e als functie van r is geschetst in figuur 4.1.

De totale stroom I door de plasmakolom wordt gegeven door

$$I = \pi R^2 j_z^e = 2\pi R^2 cC' \quad , \quad (4.2.24)$$

We kunnen deze relatie gebruiken om overall C' te elimineren ten gunste van I . De druk wordt dan

$$p = \frac{I^2}{4\pi^2 R^4 c^2} (R^2 - r^2) + p_{atm} \quad , \quad (4.2.25)$$

De druk p_0 op de as van de plasmakolom wordt dus gegeven door

$$p_0 = \frac{I^2}{4\pi^2 R^2 c^2} + p_{atm} \quad , \quad (4.2.26)$$

Men gaat eenvoudig na dat de gemiddelde druk $\langle p \rangle$ in de plasmakolom de helft hiervan is. Dit wordt ook wel uitgedrukt door de *Bennett-relatie*:

$$(\langle p \rangle - p_{atm})S = \frac{I^2}{8\pi c^2} \quad , \quad (4.2.27)$$

waar $S = \pi R^2$ de doorsnede van de kolom is. Een druk p_0 van bij voorbeeld 1 atmosfeer wordt bij een straal van 10 cm gegenereerd door een stroom van omstreeks 2×10^5 Ampère. De stromen worden snel enorm groot!

Het beeld van de hier gevonden statische MHD oplossing is nu dus als volgt. Door een cilindervormige plasmakolom loopt een uniforme elektrische stroom parallel aan de as. Het hierdoor veroorzaakte magneetveld tracht de kolom samen te knijpen (het zogenaamde *pinch-effect*). Om die reden spreekt men van een *pinch-ontlading*. (Iets preciezer: een *z-pinch*, er bestaat ook een *θ-pinch*.) De plasmakolom weerstaat deze magnetische krachten door een druk op te bouwen, die een kwadratische functie van de afstand tot de as is (zie (4.2.22)). Een manier om een plasma met een hoge inwendige druk te genereren is dus er een krachtige stroom door te laten lopen. Omdat aan de rand van de kolom de druk veel lager is dan in het hart werkt deze methode van drukopbouw ook als het plasma zich in vacuum bevindt, zodat $p_{atm} = 0$. De drukopbouw vindt ten duidelijkst heel anders plaats dan in een neutraal gas, waar contact met de wand nodig is om een druk te genereren. Zulk wandcontact is bij een plasma soms ongewenst, bij voorbeeld als het plasma zeer heet is. Bij kernfusie-onderzoek werkt men met plasma's van miljoenen graden, dan is de hier beschreven *magnetische opsluiting* van het plasma de enige mogelijkheid om het plasma vrij van de wand te houden. In plaats van een cilindervormige configuratie werkt men daarbij met een toroïdale opstelling. De torus kan men ontstaan denken door de cylinder te buigen en de einden op elkaar aan te sluiten. Het voordeel van de torus is duidelijk: de voor het pinch-effect nodige elektrische stroom kan nu rondlopen in de torus.

4.3 Stationnaire krachtenvrije oplossingen

Een stationnaire magnetohydrodynamische configuratie is een tijdonafhankelijke oplossing van de vergelijkingen (2.4.4)–(2.4.6), met een snelheidsveld ongelijk aan nul. De linkerleden van de vergelijkingen moeten weer, zoals tevoren, gelijk aan nul worden gesteld, zodat de vergelijkingen worden:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad , \quad (4.3.1)$$

$$-\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \mathbf{U}) + (\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} = 0 \quad , \quad (4.3.2)$$

$$\nabla \wedge \left(c^{-1} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} - \frac{c}{\sigma} \nabla \wedge \mathbf{B} \right) = 0 \quad . \quad (4.3.3)$$

Het magnetisch veld moet voorts voldoen aan de conditie (2.4.10):

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad . \quad (4.3.4)$$

In het vervolg van deze paragraaf zullen we ons beperken tot systemen met hoog magnetisch Reynolds-getal. In dat geval wordt vergelijking (4.3.3) eenvoudig:

$$\nabla \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = 0 \quad . \quad (4.3.5)$$

Voorts zullen we voor de eenvoud aannemen dat het plasma incompressibel is. Dat betekent dat de druk p een zeer steile functie van ρ is. Effectief is ρ dan vrijwel constant (onafhankelijk van de plaats), terwijl de druk p wel allerlei verschillende waarden op verschillende plaatsen kan hebben. De vergelijkingen (4.3.1) en (4.3.2) worden dan

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad , \quad (4.3.6)$$

$$-\rho \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) - \nabla p + (\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} = 0 \quad . \quad (4.3.7)$$

Vergelijking (4.3.7) drukt uit dat de mechanische krachten, veroorzaakt door de druk p en de snelheid \mathbf{v} , juist worden gecompenseerd door de Lorentz-krachten. Een ruwe schatting (zoals in het vorige hoofdstuk gebruikt bij de introductie van het Lundquist-getal) leert dat de Lorentz-krachten kunnen worden gecompenseerd door de mechanische krachten als B^2 van de orde is van ρv^2 en van p . Deze schatting is inderdaad ruw omdat geen rekening wordt gehouden met het vectorkarakter van de termen. Zo kan de Lorentz-kracht tengevolge van een sterk magneetveld toch heel klein zijn indien de vectoren $\nabla \wedge \mathbf{B}$ en \mathbf{B} vrijwel in dezelfde richting staan. Als ze precies parallel zijn dan is de Lorentz-kracht zelfs identiek nul, hoe sterk het veld ook is. Men noemt configuraties waarbij overal (dus voor alle \mathbf{r}) de Lorentz-krachten verwaarloosbaar klein zijn *krachtenvrije* configuraties. Zulke configuraties treden op in allerlei astrofysische systemen.

Een krachtenvrije configuratie wordt gekarakteriseerd door de vergelijking

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \kappa \mathbf{B} \quad , \quad (4.3.8)$$

waar de scalair κ afhankelijk van de plaats \mathbf{r} kan zijn. Steeds moet ook aan (4.3.4) zijn voldaan. Als \mathbf{B} uit deze vergelijkingen is bepaald volgt \mathbf{v} uit (4.3.5), (4.3.6) en de uit (4.3.7) voor het krachtenvrije geval ontstaande vergelijking

$$\rho \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) + \nabla p = 0 \quad . \quad (4.3.9)$$

We zullen nu proberen oplossingen van de vergelijking (4.3.8) met (4.3.4) te vinden. Dat blijkt niet erg moeilijk te zijn: er zijn zeer veel oplossingen. De complete set van oplossingen is nog niet in kaart gebracht. Wij zijn in verband met de toepassingen speciaal geïnteresseerd in oplossingen met een cilindrsymmetrie.

Cylindersymmetrische oplossingen van (4.3.8) met (4.3.4) kunnen worden gevonden door deze vergelijkingen eerst in cilindercoördinaten (r, θ, z) uit te schrijven en vervolgens aan te nemen dat \mathbf{B} en κ alleen van r afhangen. Dan volgt uit (4.3.8):

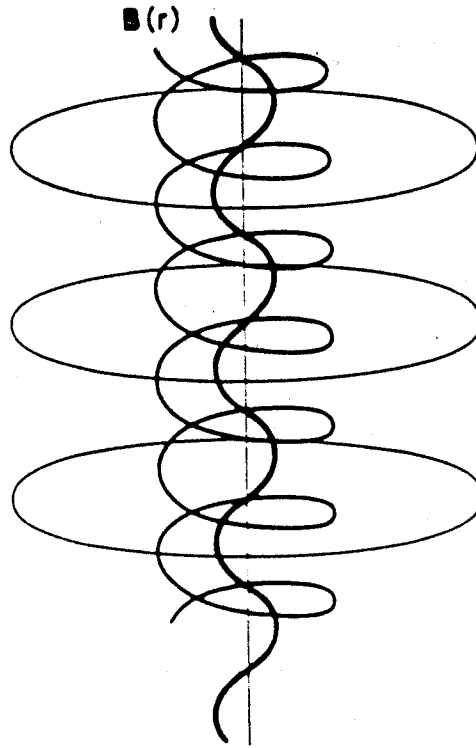
$$\kappa B_r = 0 \quad , \quad (4.3.10)$$

$$\frac{dB_z}{dr} = -\kappa B_\theta \quad , \quad (4.3.11)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\theta) = \kappa B_z \quad , \quad (4.3.12)$$

Voorts ontstaat uit (4.3.4):

$$\frac{d}{dr} (r B_r) = 0 \quad . \quad (4.3.13)$$



Figuur 4.2: Veldlijnen in een krachtenvrije stationnaire cilindrische configuratie.

Uit vergelijking (4.3.10) volgt dat $B_r = 0$ voor alle r waarvoor $\kappa \neq 0$ is. Daarmee is dan ook aan (4.3.13) voldaan. Door eliminatie van κ tussen (4.3.11) en (4.3.12) vindt men dat B_θ en B_z beide uitgedrukt kunnen worden in termen van de magnetische energiedichtheid $u(r) = \frac{1}{2}(B_\theta^2 + B_z^2)$:

$$\begin{aligned} B_\theta &= \left[-r \frac{du(r)}{dr} \right]^{1/2}, \\ B_z &= \left[r \frac{du(r)}{dr} + 2u(r) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

De functie $u(r)$ dient zo te worden gekozen dat de argumenten van de wortels in (4.3.14) positief zijn, maar is overigens vrij. We hebben dus een hele collectie van cilindrische oplossingen van (4.3.8) gevonden. De functie $\kappa(r)$ volgt éénduidig uit $u(r)$ door substitutie van (4.3.14) in (4.3.11) of (4.3.12). Omdat B_θ en B_z voor vaste r constant zijn, terwijl B_r steeds 0 is, hebben de veldlijnen de vorm van spiralen om de cylinder-as, zoals getekend in figuur 4.2. De spoed van deze spiralen varieert met r en kan in principe alle waarden tussen $-\infty$ en ∞ aannemen. Als de spoed $\pm\infty$ is, dan degenereren de veldlijnen tot lijnen parallel aan de as. Als de spoed 0 is dan worden de veldlijnen cirkels.

Een speciale oplossing van (4.3.8) met (4.3.4) ontstaat door voor κ een constante onafhankelijk van r te nemen. In dat geval kan het stelsel (4.3.10)–(4.3.12) het beste worden opgelost door de derde vergelijking te differentiëren naar r en het resultaat in te vullen in de tweede vergelijking. Men vindt dan

$$r^2 \frac{d^2 B_\theta}{dr^2} + r \frac{dB_\theta}{dr} + (\kappa^2 r^2 - 1) B_\theta = 0 \quad . \quad (4.3.15)$$

Dit is de Bessel-vergelijking, waarvan de voor $r = 0$ reguliere oplossing de Bessel-functie van de eerste orde is:

$$B_\theta = B_0 J_1(\kappa r) \quad , \quad (4.3.16)$$

met een willekeurige constante B_0 . Gebruikmakend van de differentiatierelaties voor de Bessel-functies van orde 0 en 1, namelijk

$$\frac{d}{dz} J_0(z) = -J_1(z) \quad , \quad \frac{d}{dz} J_1(z) = J_0(z) - \frac{1}{z} J_1(z) \quad , \quad (4.3.17)$$

volgt dan

$$B_z(r) = B_0 J_0(\kappa r) \quad . \quad (4.3.18)$$

Door substitutie vindt men dan voor de magnetische energie

$$u(r) = \frac{1}{2} B_0^2 [J_0(\kappa r)]^2 + \frac{1}{2} B_0^2 [J_1(\kappa r)]^2 \quad . \quad (4.3.19)$$

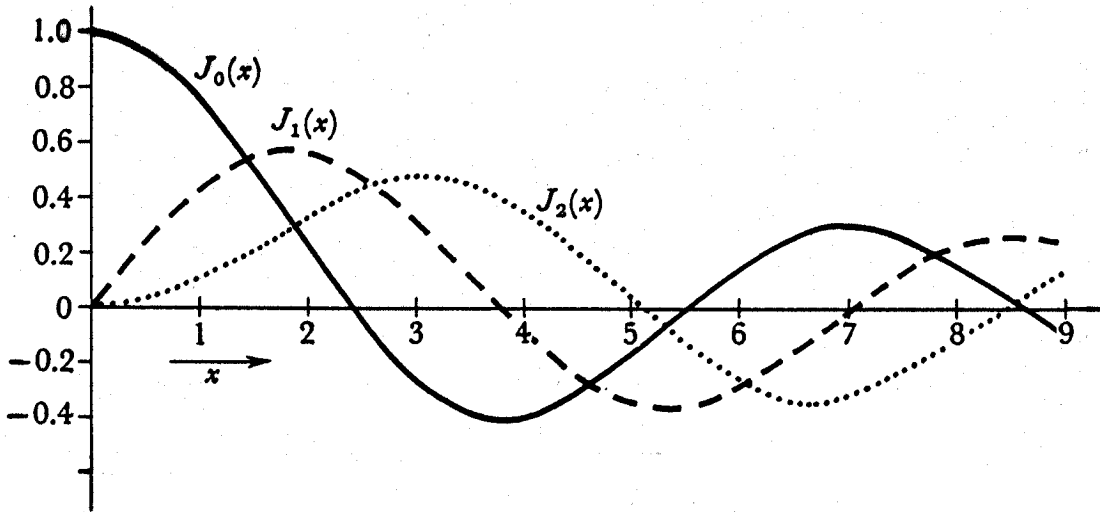
Uiteraard vindt men (4.3.16) en (4.3.18) terug door (4.3.19) te substitueren in (4.3.14). (Ga dit na !)

De zojuist gegeven cilindrsymmetrische oplossing van (4.3.8) met constante κ is voor het eerst opgeschreven door Lundquist. De structuur van de magnetische veldlijnen is tamelijk subtiel, zoals men ziet na bestudering van de in figuur 4.3 gegeven grafieken van de Bessel-functies. Zoals al eerder is opgemerkt zijn de veldlijnen in het algemeen spiralen, met een spoed die afhangt van r . De precieze waarde van r waarvoor de spiralen degenereren tot cirkels of tot lijnen parallel aan de as wordt bepaald door de nulpunten van de Bessel-functies. Men denkt dat de Lundquist-oplossing van de krachtenvrije stationnaire MHD vergelijkingen voor incompressibele plasma's met hoog magnetisch Reynolds-getal een beschrijving kan geven van sommige astrofysische situaties (zon-protuberansen, supernova-resten enz.).

Een complete cilindrsymmetrische oplossing van de krachtenvrije stationnaire MHD vergelijkingen volgt door, gewapend met de kennis van \mathbf{B} , over te gaan tot het bepalen van \mathbf{v} met behulp van (4.3.5), (4.3.6) en (4.3.9). Wegens de cilindrsymmetrie hangt ook \mathbf{v} alleen af van r . Door systematisch uitschrijven van de vergelijkingen in cylindercoördinaten vindt men dat de component $v_r(r)$ identiek nul moet zijn. Voorts moet $v_\theta(r)$ voldoen aan de vergelijking

$$\rho v_\theta^2 = r \frac{dp}{dr} \quad . \quad (4.3.20)$$

Tenslotte is $v_z(r)$ geheel willekeurig te kiezen. De stroomlijnen (die \mathbf{v} bepalen net zoals de veldlijnen dat voor \mathbf{B} doen) zijn dus net als de veldlijnen spiralen om de



Figuur 4.3: Bessel-functies van orde 0, 1 en 2.

cylinder-as. De spoed kan nu echter willekeurige waarden aannemen. Men ziet eenvoudig in dat de combinatie van de hier gevonden patronen voor de magnetische veldlijnen en de stroomlijnen een mooie illustratie is van het fenomeen van het invriezen van de veldlijnen, dat immers algemeen optreedt als het magnetisch Reynolds-getal hoog is.

We kunnen de hier gevonden oplossing verder completeren door het elektrisch veld \mathbf{E} , de elektrische ladingsdichtheid ρ^e en de elektrische stroomdichtheid \mathbf{j}^e te berekenen met behulp van (2.4.7)–(2.4.9), waarbij moet worden bedacht dat voor hoog magnetisch Reynolds-getal de tweede term in het rechterlid van (2.4.7) mag worden verwaarloosd. Omdat zowel de veldlijnen als de stroomlijnen op cilindervormige mantel staan, en dus radieel gericht is. De elektrische stroomdichtheid is volgens (2.4.9) en (4.3.8) overal parallel aan het magnetische veld, zodat ook de elektrische stroomlijnen spiraalvormig zijn.

Hoofdstuk 5

Golfverschijnselen in de magnetohydrodynamica

5.1 Inleiding

In het vorige hoofdstuk hebben we gekeken naar tijdonafhankelijke oplossingen van de magnetohydrodynamische vergelijkingen. Het bleek niet eenvoudig om algemene oplossingen te vinden. We hebben ons daarom beperkt tot statische en krachtenvrije stationaire oplossingen met een speciale symmetrie (cylindersymmetrie). Het vinden van tijdafhankelijke oplossingen van de MHD vergelijkingen is nog aanzienlijk lastiger. In de praktijk beperkt men zich meestal tot het overigens belangrijke geval van tijdafhankelijke oplossingen die slechts weinig afwijken van een statische oplossing. De deviatiefuncties die de verschillen tussen de tijdafhankelijke oplossingen en de bekende tijdonafhankelijke oplossing beschrijven kunnen dan als klein worden beschouwd. Daarom kunnen deze deviatiefuncties worden gevonden uit een gelineariseerde versie van de MHD vergelijkingen. Het is duidelijk dat door dit lineariseren het zoeken naar oplossingen op cruciale wijze wordt vereenvoudigd. Het zal dan ook niet moeilijk blijken te zijn om die oplossingen te vinden. We zullen zien dat deze oplossingen golfverschijnselen beschrijven.

5.2 Golfvergelijkingen voor ideaal-geleidende plasma's

We gaan uit van de MHD vergelijkingen (2.4.4)–(2.4.6) met (2.4.10). Als het geleidingsvermogen σ zeer groot is dan kunnen we de laatste term van (2.4.6) weglaten. De vergelijkingen luiden dan dus

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad , \quad (5.2.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} = -\nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p(\rho) \mathbf{U}] + (\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} \quad , \quad (5.2.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad , \quad (5.2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad . \quad (5.2.4)$$

De druk p is een functie $p(\rho)$ van de dichtheid ρ . (We zullen hier *niet* veronderstellen dat het plasma incompressibel is.) Als hieruit ρ , \mathbf{v} en \mathbf{B} opgelost zijn dan kunnen \mathbf{E} , ρ^e en \mathbf{j}^e worden gevonden uit (2.4.7)–(2.4.9).

We willen nu kijken naar tijdafhankelijke oplossingen in de buurt van een statische oplossing. Zo'n statische oplossing moet voldoen aan (5.2.1)–(5.2.4) met alle tijdafgeleiden nul en bovendien $\mathbf{v} = 0$. In het vorige hoofdstuk zagen we dat de statische oplossingen een eenvoudige vorm hebben als we eisen dat het plasma zich over de gehele ruimte uitstrekt en dat het magneetveld nergens (ook niet op grote afstanden van de oorsprong) oneindig groot wordt. Men vindt dan namelijk dat \mathbf{B} en p , en dus ook ρ , uniform zijn, terwijl \mathbf{v} identiek nul is. Er geldt dus

$$\rho = \rho_0 \quad , \quad p = p_0 \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \quad , \quad \mathbf{v} = 0 \quad . \quad (5.2.5)$$

Uit (2.4.7)–(2.4.9) volgt dan (voor σ groot) dat \mathbf{E} , ρ^e en \mathbf{j}^e alle nul zijn.

Een tijdafhankelijke oplossing die slechts weinig van deze statische oplossing afwijkt heeft de vorm

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \delta\rho \quad , \quad p = p_0 + \frac{dp_0}{d\rho_0} \delta\rho \quad , \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{v} = \delta\mathbf{v} \quad . \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Door invullen van deze uitdrukkingen in (5.2.1)–(5.2.4) en verwaarlozen van alle termen van tweede of hogere orde in $\delta\rho$, $\delta\mathbf{B}$ en $\delta\mathbf{v}$ vinden we

$$\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \delta\mathbf{v} \quad , \quad (5.2.7)$$

$$\rho_0 \frac{\partial(\delta\mathbf{v})}{\partial t} = -\frac{dp_0}{d\rho_0} \nabla(\delta\rho) + (\nabla \wedge \delta\mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}_0 \quad , \quad (5.2.8)$$

$$\frac{\partial(\delta\mathbf{B})}{\partial t} = \nabla \wedge (\delta\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0) \quad , \quad (5.2.9)$$

$$\nabla \cdot \delta\mathbf{B} = 0 \quad . \quad (5.2.10)$$

De vergelijkingen (5.2.7)–(5.2.9) zijn zeven lineaire partiële differentiaalvergelijkingen voor de zeven deviaties $\delta\rho$, $\delta\mathbf{B}$ en $\delta\mathbf{v}$. De conditie (5.2.10) behoeft slechts op één begintijd te worden geverifieerd; op latere tijden wordt er dan vanzelf aan voldaan, zoals uit (5.2.9) volgt. De deviaties $\delta\mathbf{E}$, $\delta\rho^e$ en $\delta\mathbf{j}^e$ worden bepaald door de uit (2.4.7)–(2.4.9) volgende relaties

$$\delta\mathbf{E} = -c^{-1} \delta\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0 \quad , \quad (5.2.11)$$

$$\delta\rho^e = \nabla \cdot \delta\mathbf{E} \quad , \quad (5.2.12)$$

$$\delta\mathbf{j}^e = c \nabla \wedge \delta\mathbf{B} \quad . \quad (5.2.13)$$

De vergelijkingen (5.2.7)–(5.2.10) kunnen het eenvoudigste worden opgelost door op Fourier-taal over te gaan. We schrijven

$$\delta\rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} d\omega e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \delta\rho(\mathbf{k}, \omega) \quad , \quad (5.2.14)$$

en analoog voor de andere deviatiefuncties. We zullen alleen kijken naar componenten met ω en \mathbf{k} van nul verschillend. De vergelijkingen voor de getransformeerden worden algebraïsche relaties:

$$\omega \delta\rho = \rho_0 \mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v} \quad , \quad (5.2.15)$$

$$\rho_0 \omega \delta\mathbf{v} = \frac{dp_0}{d\rho_0} \mathbf{k} \delta\rho - (\mathbf{k} \wedge \delta\mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}_0 \quad , \quad (5.2.16)$$

$$\omega \delta\mathbf{B} = -\mathbf{k} \wedge (\delta\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0) \quad . \quad (5.2.17)$$

De uit (5.2.10) volgende conditie $\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{B} = 0$ kan worden weggelaten omdat deze (voor $\omega \neq 0$) volgt uit (5.2.17). De hier gevonden homogene algebraïsche vergelijkingen hebben alleen een niet-triviale oplossing als de determinant van de coëfficiëntenmatrix nul is. Die coëfficiënten hangen nog af van ω en \mathbf{k} . Het nulstellen van de determinant leidt tot een relatie tussen ω en \mathbf{k} , de zogenaamde *dispersierelatie*.

5.3 Golven in ideaal-geleidende plasma's

5.3.1 Geluidsgolven

Voor we oplossingen van de golfvergelijkingen (5.2.15)–(5.2.17) gaan afleiden bekijken we eerst het eenvoudige geval dat er geen statisch magneetveld \mathbf{B}_0 aanwezig is. Dan volgt uit (5.2.17) dat ook $\delta\mathbf{B} = 0$. Er blijven dan alleen (5.2.15)–(5.2.16) over. Contractie van de tweede vergelijking met \mathbf{k} en invullen in de eerste geeft dan alleen een niet-triviale oplossing, met $\delta\rho \neq 0$ en $\delta\mathbf{v} \neq 0$, als ω en \mathbf{k} voldoen aan de relatie

$$\omega^2 = \frac{dp_0}{d\rho_0} k^2 \equiv c_s^2 k^2 \quad . \quad (5.3.1)$$

De verhouding tussen hoekfrequentie ω en golfgetal k is dus een constante c_s . De deviaties zijn lineaire superposities van elementaire golven die alle dezelfde fase-snelheid c_s hebben. Deze fase-snelheid wordt bepaald door de afgeleide van de druk p_0 naar de dichtheid ρ_0 . De hier gevonden golven zijn de welbekende geluidsgolven die zich in een (compressibel) plasma net zoals in een (compressibele) vloeistof kunnen voortplanten. We merken op dat de snelheidsdeviatie $\delta\mathbf{v}$ in een geluidsgolf wegens (5.2.15)–(5.2.16) gegeven wordt door

$$\delta\mathbf{v} = \frac{c_s^2}{\rho_0 \omega} \delta\rho \mathbf{k} \quad , \quad (5.3.2)$$

zodat $\delta\mathbf{v}$ steeds in de richting van de golfvector \mathbf{k} staat. Met andere woorden: geluid is een longitudinale trillingsvorm.

5.3.2 Alfvén-golven

Het oplossen van de golfvergelijkingen (5.2.15)–(5.2.17) voor het algemene geval met $\mathbf{B}_0 \neq 0$ is een stuk ingewikkelder. Er zijn nu twee richtingen in het spel, namelijk die van \mathbf{B}_0 en van \mathbf{k} . De precieze vorm van de golfverschijnselen hangt af van de hoek tussen deze twee vectoren. In principe kan het oplossen gebeuren door de bij

het stelsel (5.2.15)–(5.2.17) behorende 7×7 coëfficiëntendeterminant nul te stellen. Dat levert dan een vergelijking voor de verhouding ω/k op. Een wat overzichtelijker wijze van oplossen gaat als volgt.

Uit (5.2.15) kunnen we $\delta\rho$ vinden als functie van $\delta\mathbf{v}$. Evenzo volgt uit (5.2.17) een uitdrukking voor $\delta\mathbf{B}$ als functie van $\delta\mathbf{v}$. We substitueren nu beide uitdrukkingen in (5.2.16) en introduceren de afkortingen $c_s^2 \equiv dp_0/d\rho_0$, zoals te voren, en $c_A^2 \equiv B_0^2/\rho_0$. (Ook deze laatste uitdrukking heeft de dimensie van de tweede macht van een snelheid, zoals men nagaat.) Na uitwerken van enkele vectorprodukten ontstaat dan uit (5.2.16):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\omega^2}{k^2} - c_A^2 (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)^2 \right] \delta\mathbf{v} = \\ & = (c_s^2 + c_A^2) (\hat{\mathbf{k}} \cdot \delta\mathbf{v}) \hat{\mathbf{k}} - c_A^2 (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \left[(\hat{\mathbf{k}} \cdot \delta\mathbf{v}) \hat{\mathbf{B}}_0 + (\hat{\mathbf{B}}_0 \cdot \delta\mathbf{v}) \hat{\mathbf{k}} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Hierbij voerden we eenheidsvectoren $\hat{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{k}/k$ en $\hat{\mathbf{B}}_0 \equiv \mathbf{B}_0/B_0$ in de richting van de golfvector en het statische magneetveld in.

De vergelijking (5.3.3) lijkt lastig, maar heeft toch een overzichtelijke structuur. Links staat, afgezien van een factor, de vector $\delta\mathbf{v}$, die we uit deze vergelijking moeten vinden. Rechts staat een lineaire combinatie van de vectoren $\hat{\mathbf{k}}$ en $\hat{\mathbf{B}}_0$. De coëfficiënten in die lineaire combinatie zijn zelf lineair in de, alleen in inprodukten met het zelfde tweetal $\hat{\mathbf{k}}$ en $\hat{\mathbf{B}}_0$ voorkomende, vector $\delta\mathbf{v}$. Hoe lossen we nu deze vergelijking op?

Een mogelijke oplossing ontstaat door te eisen dat $\delta\mathbf{v}$ loodrecht op zowel $\hat{\mathbf{k}}$ als $\hat{\mathbf{B}}_0$ staat, dus door te stellen dat $\delta\mathbf{v}$ evenredig is met het uitproduct $\hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{B}}_0$. Dan is het rechterlid van (5.3.3) identiek gelijk aan nul. Aan de vergelijking is dan te voldoen door de factor voor $\delta\mathbf{v}$ in het linkerlid ook gelijk aan nul te stellen. Dat geeft de simpele dispersierelatie

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c_A^2 \cos^2 \theta \quad , \quad (5.3.4)$$

met θ de hoek tussen golfvector en statisch magneetveld, zodat $\cos \theta = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0$. De hierbij horende uitdrukkingen voor $\delta\mathbf{v}$, $\delta\mathbf{B}$ en $\delta\rho$ zijn, afgezien van een gemeenschappelijke voorfactor (die een maat is voor de amplitude van de golf):

$$\delta\mathbf{v} = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{B}}_0 \quad , \quad (5.3.5)$$

$$\delta\mathbf{B} = -B_0 \cos \theta \hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{B}}_0 \quad , \quad (5.3.6)$$

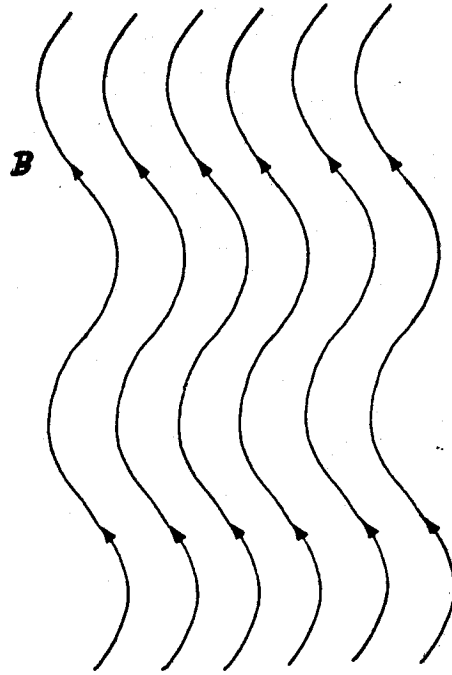
$$\delta\rho = 0 \quad . \quad (5.3.7)$$

Tenslotte leidt invullen in de Fourier-getransformeerden van (5.2.11)–(5.2.13) tot:

$$\delta\mathbf{E} = \frac{\omega}{kc} B_0 (\hat{\mathbf{k}} - \cos \theta \hat{\mathbf{B}}_0) \quad , \quad (5.3.8)$$

$$\delta\rho^e = \frac{i\omega}{c} B_0 \sin^2 \theta \quad , \quad (5.3.9)$$

$$\delta\mathbf{j}^e = ickB_0 \cos \theta (\hat{\mathbf{B}}_0 - \cos \theta \hat{\mathbf{k}}) \quad . \quad (5.3.10)$$



Figuur 5.1: Trillende veldlijnen in een Alfvén-golf.

De hier gevonden magnetohydrodynamische golven heten *Alfvén-golven*. Uit (5.3.6) volgt dat de veranderingen in het magneetveld \mathbf{B} loodrecht op het statische magneetveld staan. De magnetische veldlijnen gedragen zich dus als trillende snaren, zoals getekend in figuur 5.1. In die figuur wijst het statische magneetveld \mathbf{B}_0 in het vlak van de tekening naar boven, terwijl de golfvector \mathbf{k} in het vlak ligt, dat is bepaald door het statische magneetveld en de normaal op het tekenvlak. De golflengte langs de veldlijnen in het vlak van tekening is gegeven door $\lambda/\cos\theta$, met $\lambda = 2\pi/k$ de golflengte van de Alfvén-golf.

Uit (5.3.5) volgt dat de snelheidsdeviaties evenredig zijn met de velddeviaties. Dit is een direct gevolg van het ingevroren zijn van de veldlijnen in een plasma met oneindig geleidingsvermogen: de veldlijnen worden meegenomen door de oscillerende materie. Omdat de snelheidsdeviaties loodrecht op de golfvector staan zijn er geen veranderingen in de dichtheid (zie ook (5.3.7)). De Alfvén-golven gedragen zich in dit opzicht geheel anders dan gewone geluidsgolven. Geluidsgolven komen tot stand door coöperatieve *longitudinale* snelheidsoscillaties in de vloeistof. Longitudinaal wil hier zeggen: in de richting van de golfvector. Alfvén-golven treden op door *transversale* snelheidsoscillaties, in een richting loodrecht op de golfvector. Alleen longitudinale snelheidsoscillaties gaan gepaard met dichtheidsveranderingen.

Alfvén-golven zijn experimenteel onderzocht, onder meer door Lundquist in kwik (1949), door Lehnert in vloeibaar natrium (1954), door Wilcox in geïoniseerd waterstofgas (1959).

5.3.3 Golven in de richting van het magneetveld

De zojuist afgeleide uitdrukkingen (5.3.5)–(5.3.10) voor de Alfvén-golven hangen af van de hoek θ tussen de golfvector en het statische magneetveld. Ze zijn geldig voor alle waarden van θ verschillend van 0. Deze laatste voorwaarde is noodzakelijk, omdat de gevolgde weg van oplossen van (5.3.3) niet geheel correct is als $\theta = 0$, dus als de vectoren $\hat{\mathbf{k}}$ en $\hat{\mathbf{B}}_0$ parallel staan. Immers, dan is hun uitproduct nul, zodat (5.3.5)–(5.3.6) triviaal nul worden. Echter, voor $\theta = 0$ krijgt (5.3.3) de eenvoudige vorm:

$$\left(\frac{\omega^2}{k^2} - c_A^2\right) \delta\mathbf{v} = (c_s^2 - c_A^2) (\hat{\mathbf{k}} \cdot \delta\mathbf{v}) \hat{\mathbf{k}} . \quad (5.3.11)$$

Er zijn nu twee mogelijkheden: de eerste factor links is nul of ongelijk nul. In het eerste geval (dus $\omega^2/k^2 = c_A^2$) volgt uit het nul zijn van het rechterlid dat $\delta\mathbf{v}$ loodrecht op $\hat{\mathbf{k}}$ staat, en dus evenredig is aan een willekeurig te kiezen eenheidsvector \mathbf{e} in het vlak loodrecht op $\hat{\mathbf{k}}$. Dan volgt uit (5.2.17) dat ook $\delta\mathbf{B}$ parallel is aan \mathbf{e} . We vinden (afgezien van een willekeurige voorfactor)

$$\delta\mathbf{v} = \frac{\omega}{k} \mathbf{e} , \quad (5.3.12)$$

$$\delta\mathbf{B} = -B_0 \mathbf{e} , \quad (5.3.13)$$

waaruit met (5.2.15) volgt dat $\delta\rho = 0$. We hebben hier ten duidelijkste weer Alfvén-golven gevonden. Voor het hier bekeken speciale geval $\theta = 0$ zijn er twee onafhankelijke polarisatie-richtingen voor die golven mogelijk, zodat het aantal oplossingen van het Alfvén-type verdubbeld is.

Terugkerend naar (5.3.11) bezien we nu de tweede mogelijkheid, namelijk dat de eerste factor links ongelijk nul is. In dat geval moet $\delta\mathbf{v}$ parallel zijn aan $\hat{\mathbf{k}}$. Vervolgens is dan alleen aan de vergelijking te voldoen door te nemen $\omega^2/k^2 = c_s^2$. Uit (5.2.17) volgt nu dat $\delta\mathbf{B} = 0$. We vinden hier de gewone geluidsgolven terug, die in dit speciale geval van $\theta = 0$ ook bestaan als er een statisch magneetveld is. De reden daarvan is duidelijk. Als de materie trilt in een richting parallel aan het statische magneetveld, dan zijn de Lorentz-krachten nul, zodat het magneetveld niet “gevoeld” wordt. Het plasma gedraagt zich dan net als een neutrale vloeistof.

Voor het speciale geval van voortplanting parallel aan het magneetveld hebben we nu vergelijking (5.3.3) compleet opgelost. Naast de Alfvén-golven bleken ook andere oplossingen (gewone geluidsgolven) te bestaan. Ook in het algemene geval $\theta \neq 0$ moeten er natuurlijk meer oplossingen zijn. Die zullen we nu gaan bekijken.

5.3.4 Magneto-acoustische golven

Voor algemene waarden van θ zijn naast de Alfvén-golven andere oplossingen van (5.3.3) te vinden door inspectie van beide leden van de vergelijking. Bij vergelijking van linker- en rechterlid ziet men dat er oplossingen zijn te verwachten waarvoor $\delta\mathbf{v}$ een lineaire combinatie van $\hat{\mathbf{k}}$ en $\hat{\mathbf{B}}_0$ is. Inderdaad vinden we zulke oplossingen door te substitueren

$$\delta\mathbf{v} = \alpha \hat{\mathbf{k}} + \beta \hat{\mathbf{B}}_0 \quad (5.3.14)$$

en de coëfficiënten van de vectoren $\hat{\mathbf{k}}$ en $\hat{\mathbf{B}}_0$ links en rechts aan elkaar gelijk te stellen. Dat geeft twee vergelijkingen:

$$\left(\frac{\omega^2}{k^2} - c_s^2 - c_A^2\right) \alpha - c_s^2 \cos \theta \beta = 0 \quad , \quad (5.3.15)$$

$$c_A^2 \cos \theta \alpha + \frac{\omega^2}{k^2} \beta = 0 \quad . \quad (5.3.16)$$

Deze twee vergelijkingen voor α en β hebben een oplossing als hun determinant (nu slechts 2×2 in plaats van 7×7 , zoals eerder!) nul is. Dat geeft een vierkantsvergelijking voor ω^2/k^2 , waaruit ontstaat

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{2} (c_s^2 + c_A^2) \pm \frac{1}{2} \left[(c_s^2 + c_A^2)^2 - 4c_s^2 c_A^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2} . \quad (5.3.17)$$

Dit is de bij deze oplossing behorende dispersierelatie. Er zijn twee takken, corresponderend met de twee keuzes voor het teken voor de wortel. Voor we de oplossingen nader gaan bekijken schrijven we eerst weer op hoe de uitdrukkingen voor $\delta \mathbf{v}$, $\delta \mathbf{B}$ en $\delta \rho$ worden. Afgezien van een gemeenschappelijke voorfactor komt er nu

$$\delta \mathbf{v} = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{k}} - c_A^2 \frac{k}{\omega} \cos \theta \hat{\mathbf{B}}_0 \quad , \quad (5.3.18)$$

$$\delta \mathbf{B} = B_0 \left(\hat{\mathbf{B}}_0 - \cos \theta \hat{\mathbf{k}} \right) \quad , \quad (5.3.19)$$

$$\delta \rho = \rho_0 \left(1 - c_A^2 \frac{k^2}{\omega^2} \cos^2 \theta \right) \quad . \quad (5.3.20)$$

Voorts geeft substitutie in de Fourier-getransformeerden van (5.2.11)–(5.2.13):

$$\delta \mathbf{E} = -\frac{\omega}{kc} B_0 \hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{B}}_0 \quad , \quad (5.3.21)$$

$$\delta \rho^e = 0 \quad , \quad (5.3.22)$$

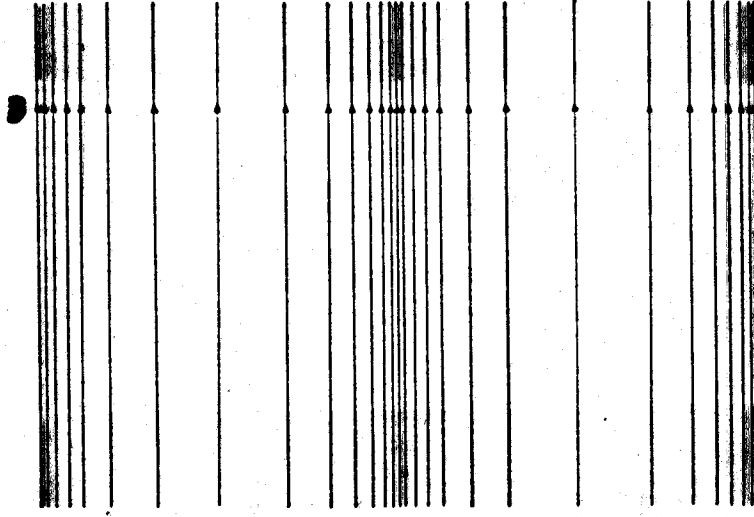
$$\delta \mathbf{j}^e = ick B_0 \hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{B}}_0 \quad . \quad (5.3.23)$$

De zojuist gevonden golfoplossingen zijn gezien de dispersierelatie (5.3.17) door de aanwezigheid van het magneetveld gemodificeerde geluidsgolven. Ze worden daarom *magneto-acoustische golven* of ook *magneto-sonische golven* genoemd. Uit de dispersierelatie bewijst men eenvoudig dat de fasesnelheid $|\omega/k|$ van de ene tak (die met het plusteken) groter is dan de geluidssnelheid c_s (of net gelijk) en die van de andere tak (met het minteken) kleiner is dan c_s (of weer net gelijk), voor alle waarden van θ . De met deze twee takken corresponderende golven heten daarom respectievelijk *versnelde* en *vertraagde* magneto-acoustische golven.

Het patroon van de golfbeweging voor de verschillende variabelen in een algemene magneto-acoustische golf is tamelijk ingewikkeld, zoals uit (5.3.18)–(5.3.23) blijkt. Een eenvoudiger beeld ontstaat als we naar speciale gevallen kijken, namelijk de gevallen $\theta = 0$ en $\theta = \pi/2$. Het eerste geval kennen we al: dan zijn er Alfvén-golven en gewone geluidsgolven. Interessanter is het geval $\theta = \pi/2$.

Voor $\theta = \pi/2$ ontstaat uit (5.3.17):

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c_s^2 + c_A^2 \quad , \quad (5.3.24)$$



Figuur 5.2: De magnetische veldlijnen in een magneto-acoustische golf die zich in een richting loodrecht op het statische magneetveld voortplant.

waar we alleen het bovenste teken van (5.3.17) beschouwen, omdat we de discussie willen beperken tot echte golven met frequentie $\omega \neq 0$. Ook (5.3.18)–(5.3.20) worden aanzienlijk eenvoudiger:

$$\delta \mathbf{v} = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{k}} \quad , \quad (5.3.25)$$

$$\delta \mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{B}}_0 \quad , \quad (5.3.26)$$

$$\delta \rho = \rho_0 \quad . \quad (5.3.27)$$

Blijkbaar is de snelheidsdeviatie parallel aan de golfvector: de magneto-sonische golven zijn in dit speciale geval puur longitudinaal. De golven lijken dus in dit opzicht op de gewone geluidsgolven. Door de aanwezigheid van het magnetische veld is de snelheid van voortplanting echter groter dan c_s geworden. Men kan zeggen dat het magneetveld effectief voor een additionele “stijfheid” heeft gezorgd, waardoor de snelheid van de golven is vergroot. Die stijfheid ontstaat doordat de veldlijnen ingevroren zijn en dus bij de mechanische trilling van het plasma moeten worden meegesleept. De deviaties in het magneetveld zijn evenwijdig aan het statische magneetveld. Het magneetveld oscilleert dus niet in richting (zoals in een Alfvén-golf) maar alleen in grootte. De veldlijnen blijven recht, alleen hun dichtheid (die immers een maat voor de intensiteit van het veld is) varieert in de golf, zoals getekend in figuur 5.2.

5.4 Damping van golven

De hierboven afgeleide golven in ideaal-geleidende plasma’s zijn alle ongedempt. Een eenmaal ontstaan golfverschijnsel plant zich voor onbepaalde lange tijd zonder uit

te sterven voort. Dit kan in werkelijkheid niet het geval zijn. Elke hydrodynamische golf zal, net als geluid in een neutrale vloeistof, na verloop van tijd uitdempen. De reden dat we deze demping tot nog toe niet hebben gevonden is de aanname dat het plasma ideaal geleidend is, dus dat het elektrische geleidingsvermogen σ oneindig groot is. Omdat dissipatie ten gevolge van Ohmse warmte-ontwikkeling dan niet kan optreden blijven de golven ongedempt. Als het geleidingsvermogen eindig is dan moeten we in (5.2.3) een extra term, zoals in (2.4.6), opnemen. Dan worden de golfvergelijkingen (5.2.15)–(5.2.17) in Fourier-taal:

$$\omega \delta \rho = \rho_0 \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v} \quad , \quad (5.4.1)$$

$$\rho_0 \omega \delta \mathbf{v} = \frac{d\rho_0}{d\rho_0} \mathbf{k} \delta \rho - (\mathbf{k} \wedge \delta \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}_0 \quad , \quad (5.4.2)$$

$$\omega \delta \mathbf{B} = -\mathbf{k} \wedge (\delta \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0) - \frac{ic^2}{\sigma} k^2 \delta \mathbf{B} \quad . \quad (5.4.3)$$

In plaats van de vergelijking (5.3.3) komt er dan:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\omega^2}{k^2} - c_{A,\sigma}^2 (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)^2 \right] \delta \mathbf{v} = \\ & = (c_s^2 + c_{A,\sigma}^2) (\hat{\mathbf{k}} \cdot \delta \mathbf{v}) \hat{\mathbf{k}} - c_{A,\sigma}^2 (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \left[(\hat{\mathbf{k}} \cdot \delta \mathbf{v}) \hat{\mathbf{B}}_0 + (\hat{\mathbf{B}}_0 \cdot \delta \mathbf{v}) \hat{\mathbf{k}} \right] , \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

met de complexe, van ω en k afhankende, functie

$$c_{A,\sigma}^2 = \frac{c_A^2}{1 + ic^2 k^2 / (\sigma \omega)} \quad . \quad (5.4.5)$$

Deze vergelijking kan analoog aan (5.3.3) worden opgelost. Voor de dispersierelatie van de Alfvén-golven vinden we in plaats van (5.3.4) nu

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c_{A,\sigma}^2 \cos^2 \theta \quad , \quad (5.4.6)$$

en dus na oplossen van een vierkantsvergelijking voor ω :

$$\omega = -\frac{ic^2}{2\sigma} k^2 \pm k \left(c_A^2 \cos^2 \theta - \frac{c^4}{4\sigma^2} k^2 \right)^{1/2} \quad . \quad (5.4.7)$$

Duidelijk zien we dat, vergeleken met het eerder besproken geval van een ideaal geleidend plasma, de frequentie ω nu een negatief imaginair deel heeft gekregen, en tevens dat de fasesnelheid $|\omega/k|$ kleiner is geworden. Bij invullen in (5.2.14) zien we dat dit negatieve imaginaire deel een demping van de golf teweeg brengt. Deze demping verdwijnt juist als het geleidingsvermogen van het plasma oneindig groot wordt. Men kan nagaan dat ook de magneto-acoustische golven gedempt raken zodra het plasma niet meer een ideale geleider is.