

QUANTUMOPTICA

L.G. Sutorp
Instituut voor Theoretische Fysica
Universiteit van Amsterdam

Inhoudsopgave

1	Quantumelectrodynamica	1
1.1	Longitudinale en transversale velden; potentialen	1
1.2	Quantisatie van het vrije electromagnetische veld	4
1.3	Hamilton-formalisme voor deeltjes in klassiek veld	7
1.4	Quantisatie van deeltjes en velden	8
1.5	Aanwijzingen voor de uitwerking van de opgaven	10
2	Coherent, chaotisch en geperst licht	19
2.1	Coherente fotontoestanden	19
2.2	Chaotische fotontoestanden	22
2.3	Geperst licht	23
2.3.1	Inleiding	23
2.3.2	Kwadratuur-operatoren	23
2.3.3	Geperste toestanden	25
2.3.4	Verdeling van het fotontal in een geperste toestand	27
2.4	Aanwijzingen voor de uitwerking van de opgaven	29
3	Absorptie, emissie en verstrooiing	39
3.1	Absorptie en emissie	39
3.2	Rayleigh- en Raman-verstrooiing	42
3.3	Aanwijzingen voor de uitwerking van de opgaven	45
4	Dynamica van atomair verval	53
4.1	Inleiding	53
4.2	De theorie van Weisskopf en Wigner	54
4.3	Jaynes-Cummings-model	57
4.4	Superfluorescentie	60
4.4.1	Afleiding van de bewegingsvergelijkingen	60
4.4.2	De Hartree-Fock-benadering	62
4.5	Aanwijzingen voor de uitwerking van de opgaven	66
5	Gestimuleerde emissie in lasers	73
5.1	Inleiding	73
5.2	Coherentie en chaos bij absorptie en emissie	74
5.2.1	Dynamica van het gemiddeld fotonaantal	74
5.2.2	Statistiek van de fotonen	75

5.3	Model voor een laser met variabele populaties	76
5.3.1	Beschrijving van het model	76
5.3.2	Dynamica van het fotonaantal en van de atomaire populatie .	77
5.3.3	Fotonstatistiek	78
5.4	Aanwijzingen voor de uitwerking van de opgaven	82

Literatuur

- R. Loudon, The Quantum Theory of light
- L. Mandel en E. Wolf, Optical Coherence and Quantum Optics
- P. Meystre en M. Sargent III, Elements of Quantum Optics
- P.W. Milonni en J.H. Eberly, Lasers
- E.A. Power, Introductory Quantum Electrodynamics
- M.O. Scully en M.S. Zubairy, Quantum Optics
- A.E. Siegman, Lasers
- D.F. Walls en G.J. Milburn, Quantum optics

Hoofdstuk 1

Quantumelectrodynamica

1.1 Longitudinale en transversale velden; potentialen

De (klassieke) Maxwell-vergelijkingen voor electromagnetische velden \mathbf{E}, \mathbf{B} in aanwezigheid van een stel puntladingen luiden:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \quad , & -c^{-1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{B} &= c^{-1} \mathbf{j} \quad , \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad , & c^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{E} &= 0 \quad ,\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

met de bronnen:

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_i e_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \quad , \\ \mathbf{j} &= \sum_i e_i \mathbf{v}_i(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \quad .\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

De lading- en stroomdichtheid voldoen aan ladingbehoud.

Volgens de stelling van von Helmholtz is elk vectorveld \mathbf{V} (dat voldoende snel afvalt op oneindig) te splitsen in een longitudinaal en een transversaal deel: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_T$. Deze stelling passen we toe op de Maxwell-velden \mathbf{E}, \mathbf{B} en op de stroomdichtheid \mathbf{j} . Dan kunnen de Maxwell-vergelijkingen worden gesplitst in twee longitudinale vergelijkingen:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_L = \rho \quad , \quad \mathbf{B}_L = 0\tag{1.1.3}$$

en twee transversale vergelijkingen:

$$-c^{-1} \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{B}_T = c^{-1} \mathbf{j}_T \quad , \quad c^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}_T}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{E}_T = 0 \quad .\tag{1.1.4}$$

Deze twee sets zijn ontkoppeld: de longitudinale en transversale velden zijn *onafhankelijk*. Ze voldoen bovendien aan bewegingsvergelijkingen die zeer verschillend zijn.

Omdat elk longitudinaal veld is te schrijven als $\nabla \psi$, met scalaire ψ , terwijl elk transversaal veld is te schrijven als $\nabla \wedge \mathbf{Z}$, met een transversaal te kiezen vectorveld \mathbf{Z} , kunnen we de longitudinale en transversale elektrische en magnetische velden

beschrijven met twee potentialen: een scalaire potentiaal φ en een (transversaal te kiezen) vectorpotentiaal $\mathbf{A} = \mathbf{A}_T$, zodanig dat geldt:

$$\mathbf{E}_L = -\nabla\varphi \quad , \quad \mathbf{E}_T = -c^{-1}\frac{\partial\mathbf{A}_T}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{B}_T = \nabla \wedge \mathbf{A}_T \quad . \quad (1.1.5)$$

De vergelijkingen waaraan deze potentialen voldoen luiden:

$$\Delta\varphi = -\rho \quad , \quad \left(\Delta - \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\right)\mathbf{A}_T = -c^{-1}\mathbf{j}_T \quad . \quad (1.1.6)$$

De eerste vergelijking is statisch, de tweede is dynamisch: hij hangt van de tijd af.

De algemene oplossing van de potentiaalvergelijkingen in termen van de bronnen volgt het eenvoudigste door eerst op Fourier-getransformeerden over te gaan. Na terugtransformeren komt er:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}', t) \quad , \quad (1.1.7)$$

en

$$\mathbf{A}_T(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} c^{-1}\mathbf{j}_T(\mathbf{r}', t - c^{-1}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad . \quad (1.1.8)$$

Duidelijk zien we dat de scalaire potentiaal, en dus het longitudinale elektrische veld, afhangt van de bron (de ladingsdichtheid) op hetzelfde moment, terwijl de vectorpotentiaal, en dus het transversale elektrische en het magnetische veld, afhangt van de bron (de transversale stroomdichtheid) op een eerder (geretardeerd) tijdstip.

Opgave 1 : Longitudinale en transversale velden

- a. Leid de Fourier-representatie van de Maxwell-vergelijkingen (1.1.1) af door elk veld V te schrijven als:

$$V(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\mathbf{k}d\omega}{(2\pi)^4} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} V(\mathbf{k}, \omega) \quad . \quad (1.1.9)$$

- b. Bewijs de stelling van von Helmholtz volgens welke elk voldoende snel afvallend vectorveld is te schrijven als $\mathbf{V}_L + \mathbf{V}_T$, met $\nabla \wedge \mathbf{V}_L = 0$ en $\nabla \cdot \mathbf{V}_T = 0$. Laat voorts zien dat een veld \mathbf{V} , waarvoor geldt $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, puur transversaal is, en dat een veld \mathbf{V} , waarvoor geldt $\nabla \wedge \mathbf{V} = 0$, puur longitudinaal is.
- c. Leid de gesplitste longitudinale en transversale Maxwell-vergelijkingen (1.1.3)–(1.1.4) af. Discussieer waarom het longitudinale deel van de stroomdichtheid niet in de vergelijkingen voorkomt.
- d. Laat zien aan welke tweede-orde differentiaalvergelijkingen \mathbf{E}_L , \mathbf{E}_T en \mathbf{B}_T voldoen; bespreek het karakter van deze vergelijkingen.

Opgave 2 : Potentialen

- a. Geef aan hoe uitgaande van de opsplitsing in longitudinale en transversale velden de scalaire potentiaal φ en de vectorpotentiaal \mathbf{A} op een systematische wijze kunnen worden geïntroduceerd. Leid (1.1.5) af.
- b. Bewijs de bewegingsvergelijkingen (1.1.6) voor de potentialen en bespreek het resultaat.
- c. Los de bewegingsvergelijkingen voor de potentialen op en bewijs (1.1.7) en (1.1.8).

1.2 Quantisatie van het vrije electromagnetische veld

Bezie een vrij electromagnetisch veld in een kubus met volume V . Dan zijn de velden puur transversaal (waarom?). Neem periodieke randvoorwaarden aan. Dan is de vectorpotentiaal:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} c_{\mathbf{k}\lambda} \left[a_{\mathbf{k}\lambda}(t) \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{c.c.} \right] \quad , \quad (1.2.1)$$

met golfvectoren, die volgens periodieke randvoorwaarden in V passen. Voorts zijn $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$ twee onderling loodrechte eenheidsvectoren die loodrecht op de golfvector \mathbf{k} staan ($\lambda = 1, 2$). Conventioneel kiezen we $c_{\mathbf{k}\lambda} = c_k = [\hbar c / (2V k)]^{\frac{1}{2}}$. De complexe coëfficiënten $a_{\mathbf{k}\lambda}$ zijn willekeurig; ze bepalen de amplitude van elk der “modes” van het veld. Hun tijdafankelijkheid wordt bepaald door de golfvergelijking voor \mathbf{A} .

Men berekent eenvoudig de uitdrukkingen voor \mathbf{E} en \mathbf{B} , en daaruit ook de totale energie (de Hamiltoniaan) van het veld:

$$H = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d\mathbf{r} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar \omega_k |a_{\mathbf{k}\lambda}|^2 \quad (\omega_k \equiv ck) \quad . \quad (1.2.2)$$

Voer nu in de reële coëfficiënten:

$$q_{\mathbf{k}\lambda} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda}^*) \quad , \quad p_{\mathbf{k}\lambda} = -i \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} (a_{\mathbf{k}\lambda} - a_{\mathbf{k}\lambda}^*) \quad , \quad (1.2.3)$$

dan wordt de Hamiltoniaan een som van harmonische oscillatoren (voor elke mode één). Als we $q_{\mathbf{k}\lambda}$ en $p_{\mathbf{k}\lambda}$ opvatten als kanoniek toegevoegde coördinaten en impulsen, dan blijken de Hamilton-vergelijkingen juist te leiden tot de bewegingsvergelijkingen voor $a_{\mathbf{k}\lambda}$ en $a_{\mathbf{k}\lambda}^*$. Blijkbaar hebben we het vrije electromagnetische veld nu in een Hamiltons jasje gestoken.

Hamiltonse systemen zijn eenvoudig te quantiseren, door $p_{\mathbf{k}\lambda}$ en $q_{\mathbf{k}\lambda}$ op te vatten als operatoren met standaard commutatierelaties en de Hamiltoniaan als een operator op te vatten. Hieruit volgen dan ook de commutatierelaties voor de operatoren $a_{\mathbf{k}\lambda}$ en $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ (die samenhangen met de operatoren $p_{\mathbf{k}\lambda}$ en $q_{\mathbf{k}\lambda}$ volgens (1.2.3), met $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ i.p.v. $a_{\mathbf{k}\lambda}^*$) en voorts de uitdrukking voor H in termen van $a_{\mathbf{k}\lambda}$ en $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$.

De quantisatie van het vrije electromagnetische veld is nu voltooid. De interpretatie van $a_{\mathbf{k}\lambda}$ en $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ volgt door na te gaan dat $a_{\mathbf{k}\lambda}$ en $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ ladderoperatoren zijn, en dat $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda}$ een bezettingsoperator is. Blijkbaar is $a_{\mathbf{k}\lambda}$ de *annihilatie-operator* voor een foton met golfvector \mathbf{k} en polarisatie λ . Evenzo is $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ de *creatie-operator* van zo'n foton. De matrix-elementen van deze operator tussen toestanden met een vast fotontal zijn snel af te leiden. Tenslotte ziet men in dat een algemene toestand met een gespecificeerd aantal fotonen in elk der modes $\mathbf{k}\lambda$ wordt gegeven door een juiste hoeveelheid creatie-operatoren te laten werken op het vacuüm.

Opgave 3 : Quantisatie van het vrije electromagnetische veld

- Laat zien waarom een vrij veld puur transversaal is.

- b. Bepaal de tijdafhankelijkheid van de coëfficiënten $a_{\mathbf{k}\lambda}$ in (1.2.1).
- c. Bepaal de uitdrukkingen voor \mathbf{E} , \mathbf{B} en H in termen van $a_{\mathbf{k}\lambda}$ en $a_{\mathbf{k}\lambda}^*$ (aanwijzing: let op de orthogonaliteitscondities voor de polarisatievectoren bij contractie en voor de exponentiaalfuncties bij integreren).
- d. Laat zien dat bij invoeren van $p_{\mathbf{k}\lambda}$ en $q_{\mathbf{k}\lambda}$ volgens (1.2.3) de Hamiltoniaan (1.2.2) de vorm krijgt van een stel harmonische oscillatoren. Check dat aan de Hamilton-vergelijkingen is voldaan.
- e. Schrijf de complete set standaard commutatierelaties voor $p_{\mathbf{k}\lambda}$ en $q_{\mathbf{k}\lambda}$ op. Voer dan $a_{\mathbf{k}\lambda}$ en $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ in en bereken de commutatierelaties voor deze operatoren. Bepaal de uitdrukking voor H in termen van $a_{\mathbf{k}\lambda}$ en $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$.
- f. Leid het ladderoperator-formalisme voor het gequantiseerde electromagnetische veld af. Bezie daartoe eerst slechts één mode. Bezie een genormeerde eigenket $|n\rangle$ van de éénmode-Hamiltoniaan, met eigenwaarde E_n . Laat zien dat dan de ket $a|n\rangle$ ook een eigenket is met andere energie, en evenzo dat $a^\dagger|n\rangle$ een eigenket is. Bewijs dat het energiespectrum uit equidistante niveaus bestaat. Geef aan door welke conditie de grondtoestand is gekarakteriseerd. Maak plausibel, lettend op de waarde van de energieën van de verschillende niveaus, waarom de hierboven gegeven interpretatie van de operatoren a en a^\dagger redelijk is. Laat zien waarom het redelijk is $a^\dagger a$ te beschouwen als de teloperator voor fotonen.
- g. Bereken de matrix-elementen van a en a^\dagger tussen genormeerde toestanden met scherp fotontal (beperk de discussie voor het gemak weer tot één mode).
- h. Laat zien hoe een algemene fotontoestand, met n fotonen, is te verkrijgen uit de vacuümtoestand met nul fotonen door n creatie-operatoren successievelijk te laten werken. Let op met de normering, d.w.z. zorg er voor dat de toestand $|n\rangle$ die wordt opgeschreven netjes op 1 is genormeed. (Beperk opnieuw de discussie tot één mode).
- i. Geef tenslotte aan hoe een algemene toestand van het electromagnetische veld, met $n_{\mathbf{k}\lambda}$ fotonen in mode $\mathbf{k}\lambda$, wordt verkregen uit het vacuüm waarin geen enkel foton aanwezig is.

Opgave 4 : De uitdrukkingen voor het gequantiseerde electromagnetische veld

- a. Schrijf, naar analogie met (1.2.1) en Opgave 3c de uitdrukkingen voor de operatoren $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ op in termen van $a_{\mathbf{k}\lambda}$ en $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$.
- b. Gebruik de commutatierelaties van $a_{\mathbf{k}\lambda}$ en $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ om te bewijzen dat $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ onderling commuteren. Bewijs hetzelfde voor $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ en $\mathbf{B}(\mathbf{r}')$.
- c. Bewijs voorts:

$$\left[E^i(\mathbf{r}), B^j(\mathbf{r}') \right] = -i\hbar c \varepsilon^{ijm} \nabla_m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad , \quad (1.2.4)$$

met ε^{ijm} de Levi-Civita-tensor (hoe is die gedefinieerd?). Blijkbaar commuteren $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ niet. Dit heeft verstrekende gevolgen in verband met de gelijktijdige meetbaarheid van deze grootheden (welke?).

- d. Bepaal de commutatoren van de Hamiltoniaan met $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en met $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Hoe luidt de interpretatie van deze resultaten, als men de tijdafgeleide van de verwachtingswaarden van het elektrische en het magnetische veld beziet?
- e. Voer het Heisenberg-beeld in en bespreek de hierboven gevonden resultaten.

1.3 Hamilton-formalisme voor klassieke geladen puntdeeltjes in een klassiek electromagnetisch veld

De bewegingsvergelijking van Newton voor een geladen puntdeeltje in een electromagnetisch veld bevat de bekende Lorentz-kracht. De Lorentz-kracht is te schrijven als

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \quad . \quad (1.3.1)$$

met de potentiaal V :

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = e \left[\varphi(\mathbf{r}, t) - c^{-1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right] \quad , \quad (1.3.2)$$

waar \mathbf{r} de positie en \mathbf{v} de snelheid van het deeltje is. Voorts zijn φ en \mathbf{A} de potentialen van het electromagnetische veld. De Lagrangeaan $L = T - V$ voor een geladen deeltje in een veld, met T de kinetische energie, is dan direkt op te schrijven. Volgens de standaardmethode volgt dan ook de Hamiltoniaan van één deeltje en door direkte generalisatie ook van een set deeltjes. Men vindt dan dat deze Hamiltoniaan uit de vrije Hamiltoniaan van een set deeltjes volgt door een term met de scalaire potentiaal toe te voegen en voorts de impulsen te vervangen volgens de regel:

$$\mathbf{p} \longrightarrow \mathbf{p} - c^{-1} e \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad . \quad (1.3.3)$$

Dit voorschrift heet: “minimale substitutie”, de koppeling van de geladen deeltjes met het electromagnetische veld heet de “minimale koppeling” (er is een verband met de algemene zogenaamde “ijktheorieën”, daar gaan we niet op in).

Opgave 5 : Hamilton-formalisme voor klassieke geladen puntdeeltjes in een klassiek electromagnetisch veld

- a. Bewijs (1.3.1).
- b. Schrijf de Lagrangeaan op voor een geladen puntdeeltje in een klassiek electromagnetisch veld. Check expliciet de Lagrange-vergelijkingen.
- c. Definieer de kanonieke impuls als afgeleide van de Lagrangeaan. Hoe luidt de algemene uitdrukking die de Hamiltoniaan geeft als de Lagrangeaan bekend is?
- d. Leid de Hamiltoniaan af voor een geladen puntdeeltje in een klassiek electromagnetisch veld. Generaliseer het resultaat voor een set geladen deeltjes en bewijs aldus (1.3.3). Controleer de Hamilton-vergelijkingen.

1.4 Quantisatie van een systeem van geladen puntdeeltjes en electromagnetische velden

We weten nu hoe we een vrij veld quantiseren. Zo'n veld is puur transversaal. Ook is volgens de standaard quantumtheorie bekend hoe we een systeem van vrije puntdeeltjes quantiseren. Zelfs weten we hoe we een stel puntdeeltjes met wisselwerking door het longitudinale electromagnetische veld moeten quantiseren. Immers, dat is niets anders dan het quantiseren van geladen puntdeeltjes met Coulomb-wisselwerking. We doen nu beide tegelijk en wel als volgt.

Schrijf de Hamiltoniaan op van een aantal geladen deeltjes met Coulomb-wisselwerking:

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i,j(i \neq j)} \frac{e_i e_j}{8\pi |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad . \quad (1.4.1)$$

Door de Coulomb-wisselwerking is dan rekening gehouden met het longitudinale veld. Koppel de deeltjes ook aan het transversale veld door een minimale substitutie. Schrijf de transversale vectorpotentiaal in termen van de coëfficiënten $a_{\mathbf{k}\lambda}$ en $a_{\mathbf{k}\lambda}^*$. Vervang de deeltjes-coördinaten en de deeltjes-impulsen door operatoren en vervang a en a^* door de foton creatie- en annihilatie-operatoren. Eis de standaard commutatierelaties voor de deeltjes-operatoren onderling en voor de foton-operatoren onderling. Neem aan dat de deeltjes-operatoren vrij commuteren met de foton-operatoren. Voeg tenslotte de Hamiltoniaan toe van het vrije electromagnetische veld in termen van de creatie- en annihilatie-operatoren van de fotonen. Aldus is een volledig gequantiseerd systeem ontstaan. Deze theorie heet de (non-relativistische) *quantumelectrodynamica* (QED). De complete Hamiltoniaan is:

$$H = H_{\text{rad}} + H_{\text{mat}} + H_{\text{int}} \quad , \quad (1.4.2)$$

met

$$H_{\text{rad}} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad (1.4.3)$$

$$H_{\text{mat}} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i,j(i \neq j)} \frac{e_i e_j}{8\pi |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad , \quad (1.4.4)$$

$$H_{\text{int}} = - \sum_i \frac{e_i}{m_i c} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) + \sum_i \frac{e_i^2}{2m_i c^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)^2 \quad . \quad (1.4.5)$$

Hierbij moet de ontwikkeling voor \mathbf{A} in termen van a en a^\dagger worden ingevuld. De commutatierelaties luiden:

$$[\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_j] = \frac{\hbar}{i} \delta_{ij} \mathbf{U} \quad , \quad [\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j] = [\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j] = 0 \quad , \quad (1.4.6)$$

$$[a_{\mathbf{k}\lambda}, a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad , \quad [a_{\mathbf{k}\lambda}, a_{\mathbf{k}'\lambda'}] = [a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger, a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] = 0 \quad , \quad (1.4.7)$$

$$[\mathbf{p}_i, a_{\mathbf{k},\lambda}] = [\mathbf{p}_i, a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger] = [\mathbf{r}_i, a_{\mathbf{k},\lambda}] = [\mathbf{r}_i, a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger] = 0 \quad . \quad (1.4.8)$$

Opgave 6 : Quantisatie van een systeem van geladen puntdeeltjes en electromagnetische velden

- a. Geef, door gebruik te maken van de standaardontwikkeling van \mathbf{A} , de uitdrukking voor H_{int} in termen van de creatie- en annihilatie-operatoren.
- b. Bepaal de ontwikkeling voor de operator van het transversale elektrische veld \mathbf{E}_T in termen van de foton creatie- en annihilatie-operatoren. Gebruik daarbij dat per definitie geldt:

$$\mathbf{E}_T = -c^{-1} \frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{A}] \quad (1.4.9)$$

(Dit is de Heisenberg-beeld-achtige generalisatie van de klassieke relatie tussen \mathbf{A} en \mathbf{E}_T .)

- c. Bewijs de “Maxwell-vergelijkingen”:

$$\frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{B}_T] = -c \nabla \wedge \mathbf{E}_T \quad (1.4.10)$$

$$\frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{E}_T] = c \nabla \wedge \mathbf{B}_T - \mathbf{j}_T \quad (1.4.11)$$

Geef de uitdrukking voor \mathbf{j}_T in termen van de deeltjes-operatoren \mathbf{r}_i en $\mathbf{v}_i = m_i^{-1} [\mathbf{p}_i - c^{-1} e_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)]$.

(Aanwijzing: Fourier-transformaties kunnen nuttig zijn!)

1.5 Aanwijzingen voor de uitwerking van de opgaven

Opgave 1

a. De Fourier-representatie van de Maxwell-vergelijkingen luidt:

$$\begin{aligned} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) &= \rho(\mathbf{k}, \omega) \quad , \quad \frac{i\omega}{c} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) + i\mathbf{k} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = c^{-1} \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) \quad , \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) &= 0 \quad , \quad -\frac{i\omega}{c} \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) + i\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

b. Schrijf het veld \mathbf{V} in Fourier-taal en splits dan als volgt:

$$\mathbf{V}_T(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \left(\mathbf{U} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \right) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}) \quad , \quad (1.5.2)$$

$$\mathbf{V}_L(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}) \quad . \quad (1.5.3)$$

Duidelijk is te zien dat $\nabla \cdot \mathbf{V}_T = 0$ en $\nabla \wedge \mathbf{V}_L = 0$. Als een veld \mathbf{V} voldoet aan $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, dan geldt voor de Fourier-getransformeerde dat $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V} = 0$, zodat de longitudinale component volgens (1.5.3) gelijk 0 is. Analoog volgt voor een veld dat voldoet aan $\nabla \wedge \mathbf{V} = 0$, dus in Fourier-taal $\mathbf{k} \wedge \mathbf{V} = 0$, dat de transversale component volgens (1.5.2) gelijk 0 is. Bedenk dat men steeds kan schrijven: $(\mathbf{U} - \mathbf{k}\mathbf{k}/k^2) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{k} \wedge (\mathbf{V} \wedge \mathbf{k})/k^2$.

c. De longitudinale Maxwell-vergelijkingen luiden:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_L = \rho \quad , \quad \mathbf{B}_L = 0 \quad . \quad (1.5.4)$$

De ook uit de Maxwell-vergelijkingen volgende relatie:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t} = -\mathbf{j}_L \quad (1.5.5)$$

kan worden weggelaten, omdat uit de eerste vergelijking van (1.5.4) in combinatie met ladingbehoud reeds volgt: $\nabla \cdot (\partial \mathbf{E}_L / \partial t + \mathbf{j}_L) = 0$, hetgeen juist (1.5.5) oplevert. De transversale Maxwell-vergelijkingen zijn:

$$-c^{-1} \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{B}_T = c^{-1} \mathbf{j}_T \quad , \quad c^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}_T}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{E}_T = 0 \quad . \quad (1.5.6)$$

d. Uit de longitudinale vergelijking (1.5.4) volgt, aangezien $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}_L) = 0$ direkt:

$$\Delta \mathbf{E}_L = \nabla \rho \quad . \quad (1.5.7)$$

Voorts volgt door eliminatie van telkens een der velden uit (1.5.6):

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right) \mathbf{E}_T = c^{-2} \frac{\partial \mathbf{j}_T}{\partial t} \quad , \quad \left(\Delta - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right) \mathbf{B}_T = -c^{-1} \nabla \wedge \mathbf{j}_T \quad . \quad (1.5.8)$$

Men merkt op dat (1.5.7) een statische vergelijking is, waarin de tijd alleen als parameter optreedt. De oplossing is afhankelijk van de bron op hetzelfde tijdstip; de invloed van de bron is dus instantaan merkbaar. Anderzijds is (1.5.8) een dynamische vergelijking, waarin de tijd ook in de differentiaaloperatoren voorkomt. De oplossing hangt af van de bron op een eerder tijdstip; de invloed van de bron is dus slechts geretardeerd merkbaar. Dit zullen we straks nog iets beter zien.

Opgave 2

- a. Omdat \mathbf{E}_L puur longitudinaal is, en omdat $\mathbf{B} = \mathbf{B}_T$ puur transversaal is, kan men schrijven:

$$\mathbf{E}_L = -\nabla\varphi \quad , \quad \mathbf{B}_T = \nabla \wedge \mathbf{A}_T \quad , \quad (1.5.9)$$

met een scalaire potentiaal φ en een (transversaal te kiezen) vectorpotentiaal $\mathbf{A} = \mathbf{A}_T$. Uit de transversale Maxwell-vergelijkingen volgt dan direct dat het transversale deel van \mathbf{E} luidt:

$$\mathbf{E}_T = -c^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}_T}{\partial t} \quad . \quad (1.5.10)$$

- b. De vergelijkingen waaraan φ en \mathbf{A}_T voldoen zijn:

$$\Delta\varphi = -\rho \quad , \quad \left(\Delta - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right) \mathbf{A}_T = -c^{-1} \mathbf{j}_T \quad , \quad (1.5.11)$$

zoals direct volgt door invullen van (1.5.9) en (1.5.10) in de Maxwell-vergelijkingen (1.1.3) en (1.1.4). Opnieuw is te zien dat de eerste een statische vergelijking is en de tweede een dynamische.

- c. Om de eerste vergelijking in (1.5.11) op te lossen voeren we eerst een Fourier-transformatie uit naar de plaats. Dat geeft

$$\varphi = \frac{\rho}{k^2} \quad . \quad (1.5.12)$$

Om terug te transformeren gebruiken we de relatie

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2} = \frac{1}{4\pi r} \quad . \quad (1.5.13)$$

Om dit te bewijzen gebruiken we in het linkerlid bolcoördinaten, met een poolas wijzend in de richting van \mathbf{r} . Na uitvoeren van de integratie over de azimuthale hoek volgt dan

$$\begin{aligned} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \, k^2 \int_{-1}^1 dt \frac{e^{ikrt}}{k^2} \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dk \frac{1}{k} \left(e^{ikr} - e^{-ikr} \right) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dk \frac{\sin(kr)}{k} = \frac{1}{4\pi r} \quad , \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

waar we gebruikten dat geldt $\int_0^\infty dx \sin x/x = \pi/2$. Met gebruik van (1.5.13) wordt de inverse Fourier-getransformeerde van (1.5.12) gevonden als een convolutie-integraal van de vorm van (1.1.7).

Evenzo lossen we de tweede vergelijking in (1.5.11) op door Fourier-transformatie naar ruimte en tijd. Dat geeft

$$\mathbf{A}_T = \frac{c\mathbf{j}_T}{k^2c^2 - (\omega + i0)^2} \quad . \quad (1.5.15)$$

Let hierbij op het poolvoorschrift: dit leidt tot een puur getardeerde oplossing (andere poolvoorschriften geven oplossingen die deels of volledig geavanceerd zijn). Om terug te transformeren hebben we nu nodig:

$$\int \frac{d\mathbf{k}d\omega}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}}{k^2c^2 - (\omega + i0)^2} = c^{-2} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|} \delta(t - c^{-1}|\mathbf{r}|) \quad . \quad (1.5.16)$$

Voor het bewijs hiervan schrijven we de integraal over ω als

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2c^2 - (\omega + i0)^2} = \frac{1}{2kc} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \left[\frac{1}{kc - (\omega + i0)} + \frac{1}{kc + \omega + i0} \right] \quad . \quad (1.5.17)$$

De integraal voeren we uit met complexe contour-integratie. Voor $t < 0$ sluiten we daartoe de integraal bovenlangs, daar de bijdrage van een grote halve cirkel in het bovenhalfvlak dan 0 is. Omdat de integrand geen singulariteiten in het bovenhalfvlak heeft, is de uitkomst dan 0. Voor $t > 0$ sluiten we de integraal onderlangs. De bijdragen van de polen in het onderhalfvlak geven dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2c^2 - (\omega + i0)^2} = -\frac{\pi i}{kc} \left(e^{ikct} - e^{-ikct} \right) \quad . \quad (1.5.18)$$

Invullen in het linkerlid van (1.5.16) geeft nu

$$\begin{aligned} \int \frac{d\mathbf{k}d\omega}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}}{k^2c^2 - (\omega + i0)^2} &= -i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{2kc} \left(e^{ikct} - e^{-ikct} \right) \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^1 du \frac{e^{ikru}}{2kc} \left(e^{ikct} - e^{-ikct} \right) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2rc} \int_0^\infty dk \left(e^{ikr} - e^{-ikr} \right) \left(e^{ikct} - e^{-ikct} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi^2rc} \int_{-\infty}^\infty dk \left(e^{ikr-ikct} - e^{ikr+ikct} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi rc} [\delta(r - ct) - \delta(r + ct)] \\ &= \frac{1}{4\pi rc^2} \delta(t - r/c) \quad , \end{aligned} \quad (1.5.19)$$

waar we in de laatste regel opnieuw gebruikten dat $t > 0$ is, zodat de tweede delta-functie niet kan bijdragen. Met gebruik van (1.5.16) vinden we uit (1.5.15) na terugtransformatie weer een convolutie, namelijk

$$\mathbf{A}_T(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' dt' \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t - t' - c^{-1}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) c^{-1} \mathbf{j}_T(\mathbf{r}', t') \quad , \quad (1.5.20)$$

hetgeen na integratie over t' direct (1.1.8) oplevert. Duidelijk zien we de retardatie ontstaan.

Opgave 3

- a. Het vrije veld is puur transversaal omdat de oplossing van (1.5.7) voor $\rho = 0$ luidt: $\mathbf{E}_L = 0$ (mits het veld op oneindig voldoende snel afvalt).
- b. De tijdafhankelijkheid van de coëfficiënten volgt direct door invullen van de reeksontwikkeling (1.2.1) in de evolutievergelijking (1.5.11) voor \mathbf{A} , namelijk:

$$a_{\mathbf{k}\lambda}(t) = e^{-i\omega_k t} a_{\mathbf{k}\lambda}(0) \quad . \quad (1.5.21)$$

Hierbij is als conventie een minteken in de exponent gekozen; de termen met het andere teken staan in de c.c. termen van (1.2.1).

- c. De ontwikkelingen van het transversale elektrische en van het magnetische veld volgen direct door het nemen van de afgeleide naar tijd en plaats (zie (1.5.9) en (1.5.10)) van de ontwikkeling (1.2.1) met (1.5.21).

Er komt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} c_k \left(ik \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{c.c.} \right) \quad , \quad (1.5.22)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} c_k \left(i\mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{c.c.} \right) \quad . \quad (1.5.23)$$

De ontwikkeling voor de totale Hamiltoniaan die is gedefinieerd als de totale electromagnetische energie in het volume V (zie het tweede lid van (1.2.2)) volgt door substitueren van (1.5.22) en (1.5.23). Men moet vervolgens gebruiken dat de exponentiaalfuncties $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ orthogonaal zijn:

$$\frac{1}{V} \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad . \quad (1.5.24)$$

Met de vector-identiteit $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ en de orthogonaliteit van de polarisatievectoren:

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (1.5.25)$$

ontstaat dan het derde lid van (1.2.2).

- d. Na invullen van (1.2.3) in de Hamiltoniaan wordt deze:

$$H = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{2} \left(p_{\mathbf{k}\lambda}^2 + \omega_k^2 q_{\mathbf{k}\lambda}^2 \right) \quad . \quad (1.5.26)$$

Dit is de Hamiltoniaan voor een stel (ongekoppelde) harmonische oscillatoren, met massa $m = 1$ en veerconstante $k = \omega_k^2$. Men controleert eenvoudig de Hamilton-vergelijkingen, daar immers geldt:

$$\frac{\partial H}{\partial p_{\mathbf{k}\lambda}} = p_{\mathbf{k}\lambda} = \dot{q}_{\mathbf{k}\lambda} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial q_{\mathbf{k}\lambda}} = \omega_k^2 q_{\mathbf{k}\lambda} = -\dot{p}_{\mathbf{k}\lambda} \quad , \quad (1.5.27)$$

zoals volgt uit (1.2.3) en (1.5.21).

e. De standaard commutatierelaties voor de operatoren (1.2.3) luiden:

$$[p_{\mathbf{k}\lambda}, q_{\mathbf{k}'\lambda'}] = \frac{\hbar}{i} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad , \quad \text{rest } 0 \quad . \quad (1.5.28)$$

Daaruit volgen de commutatierelaties voor de operatoren $a_{\mathbf{k}\lambda}$ en $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$, door de inverse van (1.2.3) te nemen, namelijk:

$$[a_{\mathbf{k}\lambda}, a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad , \quad [a_{\mathbf{k}\lambda}, a_{\mathbf{k}'\lambda'}] = [a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger, a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] = 0 \quad , \quad (1.5.29)$$

Invullen van (1.2.3) in de vorm (1.5.26) voor de Hamiltoniaan geeft tenslotte:

$$H = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_k \left(a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad . \quad (1.5.30)$$

f. Bezie één mode $\mathbf{k}\lambda$ apart. Laat $|n\rangle$ een eigentoestand zijn van de operator $\hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$, met energie E_n . Men controleert dan snel, met de commutatierelaties (1.5.29), dat $a^\dagger|n\rangle$ ook een eigentoestand is, met de eigenwaarde $E_n + \hbar\omega$. Voorts is ook $a|n\rangle$ een eigentoestand met eigenwaarde $E_n - \hbar\omega$. Door iteratie vindt men dat algemeen $(a^\dagger)^k|n\rangle$ en $a^m|n\rangle$ eigentoestanden zijn met eigenwaarde $E_n + k\hbar\omega$ en $E_n - m\hbar\omega$, respectievelijk. Aldus gaat men omhoog en omlaag langs een ladder van equidistant liggende eigenwaarden en de bijbehorende eigentoestanden. Nu ziet men in dat de operator $a^\dagger a$ alleen niet-negatieve eigenwaarden kan hebben; immers, voor een willekeurige toestand geldt dat $\langle\psi|a^\dagger a|\psi\rangle$ niet-negatief is. Blijkbaar moet men bij het omlaag gaan langs de ladder op zeker moment op een niet-normeerbare toestand stuiten. Dat betekent dat voor de (normeerbare) eigentoestand $|0\rangle$ met de laagste eigenwaarde moet gelden: $a|0\rangle = 0$. Blijkbaar is dan voor die toestand de eigenwaarde $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Het complete spectrum is dan gegeven door $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, met eigentoestanden $|n\rangle$. De operator a maakt nu uit een toestand $|n\rangle$ met energie E_n een toestand $|n-1\rangle$ met een energie die $\hbar\omega$ lager is. Dan is het redelijk om te zeggen dat a een annihilatie-operator is voor een quantum (een foton) met energie $\hbar\omega$. Evenzo is dan a^\dagger een creatie-operator van een foton met energie $\hbar\omega$. De operator $a^\dagger a$, die in de één-mode Hamiltoniaan voorkomt geeft bij inwerking op $|n\rangle$ juist n ; het is blijkbaar een tel-operator die het aantal fotonen in de toestand telt.

g. Omdat $a|n\rangle$ een eigentoestand van de tel-operator is met eigenwaarde $(n-1)$ is blijkbaar $a|n\rangle$ evenredig met $|n-1\rangle$. Uit de normering van $|n\rangle$ volgt dan

$$\langle n|a^\dagger a|n\rangle = n \quad (1.5.31)$$

en dus (als we een willekeurige fasefactor gelijk 1 stellen):

$$|n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a|n\rangle \quad . \quad (1.5.32)$$

Evenzo volgt dan ook:

$$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} a^\dagger|n\rangle \quad , \quad (1.5.33)$$

zodat de niet verdwijnende matrix-elementen van a en a^\dagger zijn:

$$\langle n-1|a|n\rangle = \sqrt{n} \quad , \quad \langle n+1|a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1} \quad . \quad (1.5.34)$$

- h. Een fotontoestand met n fotonen (in één vast gekozen mode, als te voren) is te verkrijgen uit de vacuümtoestand $|0\rangle$ door herhaald inwerken van a^\dagger . De normering is in orde als men schrijft:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad . \quad (1.5.35)$$

- i. Een algemene fotontoestand, met fotonen in elke mode heeft de vorm:

$$|\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle = \frac{1}{(\prod_{\mathbf{k}\lambda} n_{\mathbf{k}\lambda}!)^{1/2}} \prod_{\mathbf{k}\lambda} (a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}\lambda}} |0\rangle \quad . \quad (1.5.36)$$

Opgave 4

- a. De uitdrukkingen voor de operatoren \mathbf{A} , \mathbf{E} en \mathbf{B} van het gequantiseerde veld volgen uit (1.2.1), (1.5.22) en (1.5.23) door de getallen $a_{\mathbf{k}\lambda}$ en $a_{\mathbf{k}\lambda}^*$ te vervangen door de operatoren $a_{\mathbf{k}\lambda}$ en $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$, respectievelijk.
- b. Invullen van de in a. opgeschreven ontwikkelingen en gebruik van de commutatierelaties van $a_{\mathbf{k}\lambda}$ en $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ geeft:

$$[E^i(\mathbf{r}), E^j(\mathbf{r}')] = \sum_{\mathbf{k}\lambda} c_k^2 k^2 e_{\mathbf{k}\lambda}^i e_{\mathbf{k}\lambda}^j [e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} - \text{c.c.}] \quad . \quad (1.5.37)$$

Gebruik nu de relatie:

$$\sum_{\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} = \mathbf{U} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \quad , \quad (1.5.38)$$

die volgt uit de orthonormaliteit van het drietal vectoren $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}$, $\mathbf{e}_{\mathbf{k}2}$ en \mathbf{k}/k (bewijs dit!). Invullen in (1.5.37) leidt tot een uitdrukking die een sommand bevat die antisymmetrisch is onder verwisseling van \mathbf{k} en $-\mathbf{k}$. Blijkbaar is het resultaat dus 0; de elektrische veld-operatoren op positie \mathbf{r} en \mathbf{r}' commuteren dus. Het bewijs voor het magnetisch veld gaat zeer analoog. Men heeft nu nodig:

$$\sum_{\lambda} (\mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}) (\mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}) = k^2 \left(\mathbf{U} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \right) \quad , \quad (1.5.39)$$

(controleer dit).

- c. Bezie tenslotte de commutator van het elektrische en het magnetische veld. Na invullen van de ontwikkelingen ontstaat:

$$[E^i(\mathbf{r}), B^j(\mathbf{r}')] = \sum_{\mathbf{k}\lambda} c_k^2 k e_{\mathbf{k}\lambda}^i (\mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda})^j [e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} - \text{c.c.}] \quad . \quad (1.5.40)$$

Gebruik nu de hulprelatie:

$$\sum_{\lambda} e_{\mathbf{k}\lambda}^i (\mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda})^j = \varepsilon^{ijm} k_m \quad , \quad (1.5.41)$$

(bewijs dit), dan komt er:

$$\left[E^i(\mathbf{r}), B^j(\mathbf{r}') \right] = \varepsilon^{ijm} \sum_{\mathbf{k}} c_k^2 k_m \left[e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} - \text{c.c.} \right] . \quad (1.5.42)$$

Vul nu de uitdrukking in voor de coëfficiënt c_k en gebruik de relatie

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \quad (1.5.43)$$

die de “inverseis van (1.5.24), dan ontstaat (1.2.4). Omdat de componenten van het elektrische en het magnetische veld niet alle met elkaar commuteren, zijn ze niet tegelijk scherp meetbaar: in het bijzonder zijn bijvoorbeeld E_x en B_y niet tegelijk te meten.

- d. Door invullen van de ontwikkelingen van H en \mathbf{E} in termen van de operatoren a en a^\dagger en gebruik van de commutatierelaties ontstaat:

$$\frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{E}] = \sum_{\mathbf{k}\lambda} c_k \omega_k k \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \left[a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \text{h.c.} \right] . \quad (1.5.44)$$

Hetzelfde resultaat wordt gevonden bij berekening van $c\nabla \wedge \mathbf{B}$. Evenzo bewijst men een uitdrukking voor de commutator van H met \mathbf{B} ; deze hangt samen met $c\nabla \wedge \mathbf{E}$. Er wordt gevonden:

$$\frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{E}] = c\nabla \wedge \mathbf{B} , \quad \frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{B}] = -c\nabla \wedge \mathbf{E} . \quad (1.5.45)$$

Door de verwachtingswaarden te nemen voor een willekeurige toestand ontstaan hieruit de Maxwell-vergelijkingen.

- e. In het Heisenberg-beeld hangen operatoren van de tijd af en zijn de toestanden tijdonafhankelijk. De velden voldoen dan aan operator-Maxwell-vergelijkingen:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\nabla \wedge \mathbf{B} , \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \wedge \mathbf{E} . \quad (1.5.46)$$

Bedenk dat de velden steeds puur transversaal zijn.

Opgave 5

- a. De twee termen van \mathbf{F} luiden, na invullen van (1.3.2):

$$-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = -e\nabla\varphi + c^{-1}e(\nabla\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} \quad , \quad (1.5.47)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}} = -c^{-1}e \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - c^{-1}e\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} \quad , \quad (1.5.48)$$

waar is gebruikt dat de totale tijdafgeleide d/dt gelijk is aan $\partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$. Optellen van de twee bijdragen geeft de uitdrukking voor de Lorentz-kracht:

$$\mathbf{F} = -e\nabla\varphi - c^{-1}e \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + c^{-1}e\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = e \left(\mathbf{E} + c^{-1}\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) \quad . \quad (1.5.49)$$

- b. Omdat $L = T - V$, met $T = (1/2)mv^2$ volgt na invullen van (1.3.1) onmiddellijk de Newton-vergelijking, met kracht \mathbf{F} gegeven door (1.5.49).
- c. De kanonieke impuls is $\mathbf{p} = \partial L / \partial \mathbf{v} = m\mathbf{v} + c^{-1}e\mathbf{A}$. De Hamiltoniaan H is per definitie gelijk aan $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L$.
- d. De Hamiltoniaan als functie van \mathbf{r} en \mathbf{p} volgt uit c. door elimineren van \mathbf{v} . De Hamilton-vergelijkingen blijken zoals verwacht equivalent te zijn met de Lagrange-vergelijkingen. De generalisatie tot een collectie puntdeeltjes is triviaal.

Opgave 6

- a. Door invullen van de standaardontwikkeling van de vectorpotential in $a_{\mathbf{k}\lambda}$ en $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ ontstaat:

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} &= - \sum_i \frac{e_i}{m_i c} \sum_{\mathbf{k}\lambda} c_k \left(a_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{p}_i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} + \text{h.c.} \right) \\ &+ \sum_i \frac{e_i^2}{2m_i c^2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sum_{\mathbf{k}'\lambda'} c_k c_{k'} \\ &\times \left(a_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} + \text{h.c.} \right) \cdot \left(a_{\mathbf{k}'\lambda'} \mathbf{e}_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_i} + \text{h.c.} \right) \quad . \quad (1.5.50) \end{aligned}$$

- b. De commutator van de Hamiltoniaan met \mathbf{A} levert alleen een bijdrage voor H_{rad} en voor H_{int} . De eerste geeft direkt met behulp van (1.4.3) en (1.4.7):

$$-c^{-1} \frac{i}{\hbar} [H_{\text{rad}}, \mathbf{A}] = i \sum_{\mathbf{k}\lambda} c_k k \left(a_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{h.c.} \right) \quad . \quad (1.5.51)$$

Om de commutator met H_{int} te bepalen is het het eenvoudigst om eerst te bewijzen dat de commutator van $\mathbf{A}_T(\mathbf{r})$ en $\mathbf{A}_T(\mathbf{r}')$ gelijk aan 0 is (dat volgt door invullen van de standaardontwikkeling en gebruiken van (1.4.7)). Het gevolg is dat de interactie-Hamiltoniaan géén bijdrage tot \mathbf{E}_T geeft, zodat (1.5.51) het eindantwoord is.

- c. Het bewijs van de eerste Maxwell-vergelijking (1.4.10) is triviaal nu in b. de commutator van H en \mathbf{A} is berekend. Voor de tweede Maxwell-vergelijking (1.4.11) splitsen we H weer in H_{rad} en H_{int} (H_{mat} draagt weer niet bij). De bijdrage van H_{rad} volgt net als in Opgave 4d, nl.:

$$\frac{i}{\hbar} [H_{\text{rad}}, \mathbf{E}_T] = c \nabla \wedge \mathbf{B}_T \quad . \quad (1.5.52)$$

Om de bijdrage van H_{int} te bepalen bewijst men eerst:

$$\left[E_T^i(\mathbf{r}), A^j(\mathbf{r}') \right] = i \hbar c \delta_T^{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad , \quad (1.5.53)$$

zoals volgt door invullen van de ontwikkelingen van \mathbf{E}_T en \mathbf{A} en gebruiken van de definitie:

$$\delta_T^{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad . \quad (1.5.54)$$

Dan luidt de commutator van H_{int} met \mathbf{E}_T :

$$\frac{i}{\hbar} [H_{\text{int}}, \mathbf{E}_T(\mathbf{r})] = - \sum_i \frac{e_i}{m_i} \left[\mathbf{p}_i - \frac{e_i}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \right] \cdot \delta_T(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad , \quad (1.5.55)$$

ofwel, door te bedenken dat $[\mathbf{p}_i - (e_i/c)\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)]/m_i$ is te interpreteren als de snelheidsoperator \mathbf{v}_i van deeltje i :

$$\frac{i}{\hbar} [H_{\text{int}}, \mathbf{E}_T(\mathbf{r})] = - \sum_i e_i \mathbf{v}_i \cdot \delta_T(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \equiv -\mathbf{j}_T(\mathbf{r}) \quad , \quad (1.5.56)$$

met $\mathbf{j}_T(\mathbf{r})$ de transversale elektrische stroomdichtheid-operator.

Hoofdstuk 2

Coherent, chaotisch en geperst licht

2.1 Coherente fotontoestanden

De operatoren voor het gequantiseerde elektromagnetische veld zijn lineaire combinaties van foton creatie- en annihilatie-operatoren. De verwachtingswaarden van deze velden voor toestanden met een scherp bepaald aantal fotonen in elke mode zijn 0, zodat bijvoorbeeld de verwachtingswaarden van de operator-Maxwell-vergelijkingen de triviale identiteit $0 = 0$ opleveren. Blijkbaar hebben de toestanden met scherp fotontal geen klassiek analogon. Om fotontoestanden op te sporen die wel een klassiek analogon hebben bekijken we nu slim gekozen lineaire combinaties van de toestanden met scherp fotontal: de coherente toestanden.

Bezie voorlopig één mode. Men controleert eenvoudig dat de toestand:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.1.1)$$

een eigentoestand is van de annihilatie-operator a , met eigenwaarde α . Bovendien is de toestand genormeerd. Deze toestanden, voor variabele (complexe) α , heten de coherente toestanden behorend bij de gekozen mode (Glauber, 1963).

De coherente toestanden zijn genormeerd, maar niet onderling orthogonaal voor verschillende α . Voorts voldoen ze aan een volledighedsrelatie. Elke fotontoestand (die op éénduidige wijze is te schrijven als een lineaire combinatie van toestanden met scherp fotontal) is daarom te schrijven als een lineaire combinatie van coherente toestanden. Deze combinatie van coherente toestanden is echter *niet* éénduidig: de coherente toestanden vormen een *overcomplete* set.

Een andere manier om een coherente toestand te schrijven maakt gebruik van de werking van creatie-operatoren:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha a^\dagger} |0\rangle \quad (2.1.2)$$

Door de zogenaamde Baker-Campbell-Hausdorff-relatie te gebruiken kan men dit in een symmetrische vorm gieten, namelijk:

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} |0\rangle \quad (2.1.3)$$

Een algemene coherente toestand met fotonen uit meer modes heeft een vorm die direkt uit (2.1.2) volgt:

$$|\{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle = e^{-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\lambda}|\alpha_{\mathbf{k}\lambda}|^2 + \sum_{\mathbf{k}\lambda}\alpha_{\mathbf{k}\lambda}a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger}|0\rangle \quad . \quad (2.1.4)$$

Men bewijst eenvoudig dat de verwachtingswaarden van de operatoren voor het elektrische en het magnetische veld voor een algemene coherente toestand ongelijk 0 zijn en een vorm hebben die zeer analoog is aan de klassieke uitdrukking voor de velden. De verwachtingswaarde van bijvoorbeeld het kwadraat van het elektrische veld is echter beslist *niet* gelijk aan de klassieke uitdrukking voor het kwadraat van het elektrische veld, dus:

$$\langle\{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\}|E_T^2|\{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle \neq [\langle\{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\}|\mathbf{E}_T|\{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle]^2 \quad . \quad (2.1.5)$$

Het is ook interessant om te kijken naar de verdelingsfunctie P_n voor de fotonantallen in een coherente toestand. Het blijkt dat de kans om in een (één-mode) coherente toestand bij meting precies n fotonen aan te treffen gegeven wordt door een Poisson-verdeling. Het gevolg is dat er een eenvoudig verband is tussen het gemiddelde van n en het gemiddelde van n^2 . Daaruit leidt men af dat voor een coherente toestand, die zodanig wordt gekozen dat het gemiddeld aantal fotonen zeer groot is ten opzichte van 1, de verdeling over de fotonen relatief scherp is (vergelijk dit bijvoorbeeld met de deeltjesaantal-verdeling in een grootkanoniek ensemble).

Voor een vrij electromagnetisch veld is de tijdontwikkeling van een coherente toestand zeer eenvoudig: het blijkt dat een coherente toestand coherent blijft op latere tijden, zij het met een steeds veranderende parameter. Coherente toestanden worden in de natuur (of in het laboratorium) onder meer gegenereerd in een laser die zich boven de drempel bevindt. Een (meer academisch) voorbeeld is de straling die wordt uitgezonden door een klassieke bron.

Opgave 7 : Coherente toestanden

- Leid af dat een eigentoestand van de foton annihilatie-operator (voor een vaste mode) de vorm heeft van (2.1.1) (dus niet alleen verifiëren, maar echt afleiden!). Controleer ook de normering van (2.1.1).
- Laat zien dat de foton creatie-operator geen normeerbare eigentoestanden heeft.
- Bereken het inproduct van twee coherente toestanden met verschillende parameters, en toon aan dat deze nooit orthogonaal kunnen zijn.
- Discussieer de volledigheid van de coherente toestanden door de integraal

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \quad |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (2.1.6)$$

te berekenen. Hierbij is $d^2\alpha = d\alpha'd\alpha''$, met $\alpha' = \text{Re } \alpha$ en $\alpha'' = \text{Im } \alpha$.

- e. Toon aan dat een willekeurige toestand altijd te ontwikkelen is als een lineaire combinatie van coherente toestanden, maar dat deze ontwikkeling niet éénduidig is (Aanwijzing: probeer eens om een willekeurige coherente toestand te ontwikkelen naar al zijn collega's).
- f. Bewijs de identiteit van Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \quad , \quad (2.1.7)$$

die geldt voor twee operatoren A en B , die elk commuteren met hun commutator $[A, B]$. (Aanwijzing: Bezie voor willekeurige reële λ de operatoren $\exp(\lambda A)B \exp(-\lambda A)$ en $\exp(\lambda A) \exp(\lambda B)$; leid differentiaalvergelijkingen af voor deze twee operatoren.)

- g. Gebruik de BCH-identiteit om te bewijzen dat een coherente toestand kan worden geschreven in de vorm (2.1.3).
- h. Generaliseer (2.1.3) voor een algemene coherente toestand door uit te gaan van (2.1.4).

Opgave 8 : Verwachtingswaarden van veld-operatoren; verdelingsfuncties; tijdontwikkeling van coherente toestanden van het vrije veld

- a. Bereken de verwachtingswaarde van de elektrische veld-operator en de magnetische veld-operator voor een algemene coherente toestand.
- b. Bepaal de verwachtingswaarde van het kwadraat van de elektrische veld-operator en van het kwadraat van de magnetische veld-operator voor een algemene coherente toestand. Hoe verschillen deze van de respectievelijke kwadraten van de verwachtingswaarden?
- c. Bereken de verwachtingswaarde van de integraal van $\frac{1}{2}(E_T^2 + B_T^2)$ over het volume V , voor een algemene coherente toestand. Vergelijk deze uitdrukking met de klassieke uitdrukking voor de totale energie van het electromagnetisch veld in het volume V .
- d. Toon aan dat de kans P_n om in een algemene coherente toestand precies n fotonen in een bepaalde mode aan te treffen gegeven wordt door een Poisson-verdeling. Bereken het gemiddelde van n en het gemiddelde van het kwadraat van n .
- e. Bewijs dat voor coherente toestanden waarin het gemiddelde fotontal zeer groot is de verdeling scherp gepiekt is (vergelijk daartoe de standaardafwijking met het gemiddelde fotontal).
- f. Laat zien dat een algemene coherente toestand van het vrije veld in de loop van de tijd coherent blijft. Geef aan hoe de parameters $\{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\}$ in de loop van de tijd veranderen.

2.2 Chaotische fotontoestanden

Coherente toestanden zijn, evenals toestanden met scherp fotontal, zuivere toestanden, beschreven door één toestandsvector in de Hilbert-ruimte. Daarnaast bestaan ook zogenaamde *gemengde* toestanden, die worden bepaald door een dichtheidsmatrix (-operator). Een dichtheidsoperator ρ , behorend bij een bepaalde gemengde toestand, is gedefinieerd door een (eindig of oneindig) aantal toestanden $|\phi_k\rangle$ te geven, en tevens daarbij gewichten P_k , die de statistische kans op het aantreffen van elk van deze toestanden geven. Het statistische gemiddelde van een operator A in de gemengde toestand met dichtheidsoperator ρ wordt gegeven door het spoor van het produkt van A en ρ . Men bewijst eenvoudig dat het berekenen van een spoor van een operator kan gebeuren met behulp van een willekeurig gekozen volledige orthonormale complete set $|\chi_l\rangle$ (verwar dit niet met de set $|\phi_k\rangle$), zonder dat het resultaat verandert. Voorts bewijst men dat voor een zuivere toestand geldt $\rho^2 = \rho$ en dat dan $\text{Tr}(\rho A)$ reduceert tot $\langle A \rangle$.

Een voorbeeld van een gemengde toestand is een “*thermisch mengsel*” voor een fotogas in thermisch evenwicht, bij een temperatuur T . We beperken ons weer eerst tot één mode. De toestanden $|\phi_k\rangle$ worden gekozen als de toestanden $|n\rangle$ met scherp fotontal. De gewichten P_n zijn evenredig met de Boltzmann-factor $\exp(-\beta n\hbar\omega)$, met $\beta = (kT)^{-1}$. De dichtheidsoperator is nu eenvoudig te berekenen:

$$\rho = \left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right) e^{-\beta\hbar\omega a^\dagger a} \quad . \quad (2.2.1)$$

Hieruit bepaalt men het gemiddelde van het fotontal en het gemiddelde van het kwadraat van het fotontal. Het blijkt dat de fotonverdeling een brede verdeling is (de standaardafwijking is van dezelfde orde van grootte als het gemiddeld fotontal). Om die reden spreekt men wel van een *chaotische toestand* van het fotonveld. De generalisatie tot een algemeen chaotische toestand, die fotonen in alle modes bevat, is eenvoudig te maken.

Opgave 9 : Chaotische toestanden

- Bewijs dat het spoor van een operator onafhankelijk is van de keus van de basis, waarmee het spoor wordt berekend.
- Laat zien dat voor een zuivere toestand geldt: $\rho^2 = \rho$ en dat dan $\text{Tr}(\rho A)$ reduceert tot $\langle A \rangle$.
- Bewijs (2.2.1); hoe wordt de dichtheidsoperator voor een algemene chaotische toestand waarbij alle modes zijn betrokken?
- Bereken het gemiddelde fotontal in elk der modes voor een algemene chaotische toestand. Bepaal voorts de standaardafwijking, en laat zien dat de verdeling breed is. Schrijf de verdelingsfunctie zelf (die de kans geeft om in een algemene chaotische toestand een gespecificeerd aantal fotonen in elk der modes aan te treffen) in een zodanige vorm dat als parameters alleen de gemiddelde fotontallen voorkomen (en niet de temperatuur bijvoorbeeld). Vergelijk de verdeling met de Poisson-verdeling die voor coherente toestanden geldt.

2.3 Geperst licht

2.3.1 Inleiding

In paragraaf 2.1 hebben we gekeken naar de quantummechanische beschrijving van coherent licht met behulp van coherente toestanden. Daar is gebleken dat de verdelingsfunctie voor het fotontal in een (één-mode) coherente toestand een Poissonverdeling is. Als gevolg daarvan is het kwadraat $(\Delta n)^2$ van de standaardafwijking gelijk aan het gemiddeld fotontal $\langle n \rangle$, zodat de relatieve standaardafwijking naar 0 gaat voor hoge intensiteit; bij benadering wordt de fotonverdeling dan scherp. Coherente toestanden kunnen betrekkelijk eenvoudig in experimentele situaties worden gegenereerd, bijvoorbeeld door een laser ver boven de drempel.

Hoewel de fotonverdeling van een coherente toestand aardig een scherpe verdeling benadert voor hoge intensiteit is er toch een effect van ruis: er zal een spreiding optreden bij meting van de licht-intensiteit (of het fotontal) door een fotoncel. Voor allerlei toepassingen zou het welkom zijn als deze ruis kon worden verminderd. Recent is het mogelijk gebleken dit inderdaad te bereiken en wel door het licht te “persen” en het in een “squeezed state” te brengen. Door geschikte keus van parameters kan men er dan voor zorgen dat de standaardafwijking in het fotontal lager wordt dan bij een coherente toestand; men zegt dan dat er “ontklitting” (“antibunching”) in de fotonverdeling plaats vindt. De eerste experimenten zijn gedaan in Bell Labs (door Slusher e.a., 1985), in IBM Research Labs (door Shelby e.a., 1986) en aan Texas University (door Wu e.a., 1986). De details van de experimenten zijn tamelijk ingewikkeld; hier zullen we ons alleen bezig houden met de theoretische beschrijving.

2.3.2 Kwadratuur-operatoren

Het vrije gequantiseerde elektrische veld luidt in het Heisenberg beeld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k V}} \left[i\omega_k a_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega_k t} + \text{h.c.} \right] . \quad (2.3.1)$$

Na introductie van de kwadratuur-operatoren $X_{\mathbf{k}\lambda} = (a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger)/2$ en $Y_{\mathbf{k}\lambda} = (a_{\mathbf{k}\lambda} - a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger)/(2i)$ wordt dit:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{2\hbar\omega_k}{V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} [X_{\mathbf{k}\lambda} \sin(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - Y_{\mathbf{k}\lambda} \cos(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] . \quad (2.3.2)$$

In het vervolg zullen we ons beperken tot de discussie van één mode; de veld-operator krijgt dan de vorm:

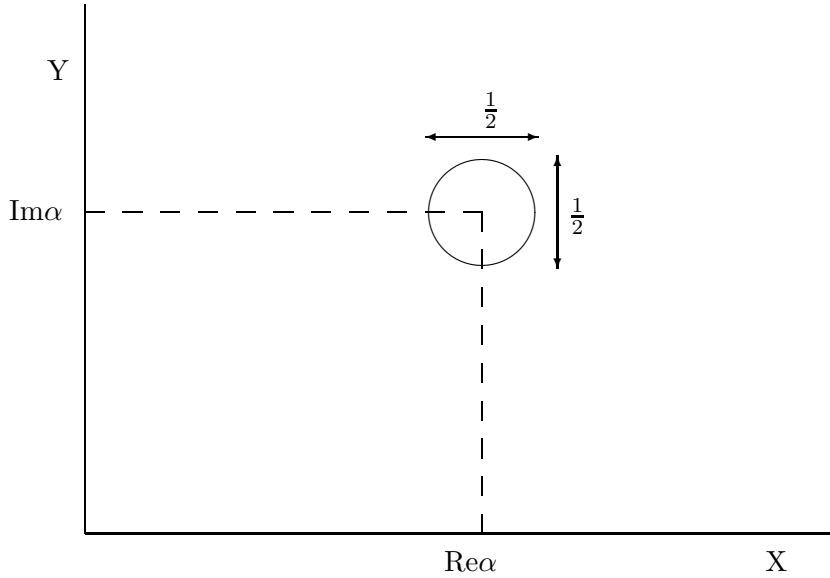
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{V}} \mathbf{e} [X \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - Y \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] . \quad (2.3.3)$$

De operatoren X en Y zijn hermitisch. Ze voldoen aan de commutatierelatie $[X, Y] = i/2$. Als twee hermitische operatoren A en B aan de commutatierelatie

$[A, B] = ic$, met c een reëel getal, voldoen, dan geldt voor de standaardafwijkingen ΔA en ΔB in een willekeurige toestand de onzekerheidsrelatie $\Delta A \Delta B \geq |c|/2$.

In het geval van X en Y luidt de onzekerheidsrelatie $\Delta X \Delta Y \geq 1/4$. Het gelijkteken geldt voor “*mus*”-toestanden (*minimal uncertainty states*). Voorbeelden daarvan zijn de coherente toestanden $|\alpha\rangle$. Voor coherente toestanden bewijst men dat de twee standaarddeviaties gelijk zijn en de minimale waarde $1/2$ hebben.

Een grafische representatie van de te verwachten meetwaarden van X en Y voor een coherente toestand is een cirkel met middelpunt in $\langle \alpha | X | \alpha \rangle = \text{Re } \alpha$ en $\langle \alpha | Y | \alpha \rangle = \text{Im } \alpha$. Omdat de onzekerheden ΔX en ΔY gelijk aan $1/2$ zijn representeren we het gebied van te verwachten waarden door een cirkel met diameter $1/2$.



In het vervolg is het nuttig om de “translatie-operator” $D(\alpha)$ te gebruiken. Dit is de unitaire operator die $|0\rangle$ overvoert in $|\alpha\rangle$. De uitdrukking is eerder reeds uitgewerkt in termen van a en a^\dagger , namelijk als $\exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$. In termen van de kwadratuur-operatoren vindt men:

$$D(\alpha) = e^{2i(X\text{Im}\alpha - Y\text{Re}\alpha)} \quad . \quad (2.3.4)$$

Men kan gemakkelijk bewijzen dat de translatie-operator de operatoren X en Y transleert over de afstanden $\text{Re } \alpha$ en $\text{Im } \alpha$:

$$D^{-1}(\alpha) X D(\alpha) = X + \text{Re } \alpha \quad , \quad D^{-1}(\alpha) Y D(\alpha) = Y + \text{Im } \alpha \quad . \quad (2.3.5)$$

De transformatie-eigenschappen van a en a^\dagger onder $D(\alpha)$ volgen hieruit direct.

Opgave 10 : Kwadratuur- en translatie-operatoren

- a. Bewijs voor twee hermitische operatoren A en B die aan de commutatierelatie $[A, B] = ic$ voldoen, met c een positief reëel getal, dat geldt voor de

standaardafwijkingen ΔA en ΔB in een willekeurige toestand

$$\Delta A \Delta B \geq c/2 \quad . \quad (2.3.6)$$

b. Bewijs dat voor coherente toestanden geldt:

$$\Delta X = \Delta Y = 1/2 \quad . \quad (2.3.7)$$

c. Bewijs (2.3.5).

2.3.3 Geperste toestanden

De coherente toestanden leiden tot gelijke onzekerheid voor de twee kwadratuur-operatoren; het onzekerheidsgebiedje is een cirkel. Toestanden met verschillende onzekerheid in X en Y ontstaan door getransformeerde operatoren $X_s = e^{-s}X$ en $Y_s = e^s Y$ in te voeren. Deze voldoen dan aan de commutatierelatie $[X_s, Y_s] = i/2$, net als X en Y zelf. Als we nu een getransformeerde (“geperste”) annihilatie- en creatie-operator definiëren door $a_s = X_s + iY_s$ en $a_s^\dagger = X_s - iY_s$ dan luidt de commutatierelatie voor a_s en a_s^\dagger opnieuw $[a_s, a_s^\dagger] = 1$, net als voor a en a^\dagger . Het verband tussen a_s, a_s^\dagger en a, a^\dagger luidt:

$$a_s = a \cosh s - a^\dagger \sinh s \quad , \quad a_s^\dagger = a^\dagger \cosh s - a \sinh s \quad . \quad (2.3.8)$$

De inverse relatie is:

$$a = a_s \cosh s + a_s^\dagger \sinh s \quad , \quad a^\dagger = a_s^\dagger \cosh s + a_s \sinh s \quad . \quad (2.3.9)$$

Met het ladder-formalisme bouwen we nu toestanden op die eigentoestanden zijn van de “geperste” tel-operator $a_s^\dagger a_s$, met als eigenwaarden de gehele niet-negatieve getallen. Met de eigenwaarde 0 correspondeert het “geperste” vacuüm: $|0, s\rangle$. Geperste coherente toestanden $|\alpha, s\rangle$ hebben de vorm:

$$|\alpha, s\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a_s^\dagger)^n |0, s\rangle = D_s(\alpha) |0, s\rangle \quad , \quad (2.3.10)$$

waar we de “geperste” translatie-operator

$$D_s(\alpha) = e^{2iX_s \text{Im}\alpha - 2iY_s \text{Re}\alpha} = e^{\alpha a_s^\dagger - \alpha^* a_s} \quad (2.3.11)$$

introduceerden. De geperste coherente toestanden (vaak geperste toestanden tout court genoemd) zijn dan eigentoestanden van a_s met eigenwaarde α .

Met een differentiatie-techniek, zoals we al gebruikten in paragraaf 2.1, kan men bewijzen dat de unitaire operator $S(s)$, gedefinieerd als:

$$S(s) = e^{\frac{1}{2}sa^2 - \frac{1}{2}sa^{\dagger 2}} \quad (2.3.12)$$

de overgang van a naar a_s en van a^\dagger naar a_s^\dagger genereert. Men vindt namelijk

$$S^{-1}(s)aS(s) = a \cosh s - a^\dagger \sinh s = a_s \quad . \quad (2.3.13)$$

De overgang van X naar X_s en van Y naar Y_s vindt op analoge manier plaats.

Het gevolg is dat het geperste vacuüm $|0, s\rangle$ gelijk is aan $S^{-1}(s)|0\rangle$. Immers, laat $S^{-1}(s) = S(-s)$ inwerken op het vacuüm $|0\rangle$ en vervolgens de operator a_s . Dan volgt met (2.3.13):

$$a_s S^{-1}(s)|0\rangle = S^{-1}(s)a|0\rangle = 0 \quad . \quad (2.3.14)$$

Blijkbaar is dus het geperste vacuüm $|0, s\rangle$ gegeven door $S^{-1}(s)|0\rangle$, omdat immers per definitie $|0, s\rangle$ een eigentoestand van a_s is met eigenwaarde 0. (Een eventuele fasefactor kiezen we 1.)

Een geschiktere vorm voor $|0, s\rangle$, met alleen creatie-operatoren werkend op het vacuüm $|0\rangle$, is:

$$|0, s\rangle = \frac{e^{\frac{1}{2} \tanh s a^\dagger{}^2}}{\sqrt{\cosh s}} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh s}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tanh s}{2} \right)^n \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} |2n\rangle \quad . \quad (2.3.15)$$

Net als voor coherente toestanden kan men de verwachtingswaarden van X en Y en de standaarddeviaties ΔX en ΔY voor een geperste toestand $|\alpha, s\rangle$ bepalen. De resultaten zijn:

$$\langle \alpha, s | X | \alpha, s \rangle = e^s \operatorname{Re} \alpha \quad , \quad \langle \alpha, s | Y | \alpha, s \rangle = e^{-s} \operatorname{Im} \alpha \quad , \quad (2.3.16)$$

$$\langle \alpha, s | X^2 | \alpha, s \rangle = e^{2s} \left[(\operatorname{Re} \alpha)^2 + \frac{1}{4} \right] \quad , \quad (2.3.17)$$

$$\langle \alpha, s | Y^2 | \alpha, s \rangle = e^{-2s} \left[(\operatorname{Im} \alpha)^2 + \frac{1}{4} \right] \quad . \quad (2.3.18)$$

Deze resultaten kunnen worden gebruikt om de te verwachten meetwaarden van X en Y in een grafiek uit te zetten, zoals in paragraaf 2.3.2 voor coherente toestanden is gedaan. Men vindt nu een onzekerheidsellips, in plaats van de onzekerheidskring van vroeger. Door α en s te variëren kan men bereiken dat de ellips zeer langgerekt wordt, zodat de onzekerheid in X bijvoorbeeld heel klein wordt. Anders gezegd: men kan de ruis in de verschillende componenten van het elektrisch veld op deze wijze naar believen instellen. Steeds is er echter een fundamentele complementariteit, gegeven door de onzekerheidsrelatie. Merk op dat indien α reëel wordt gekozen de standaarddeviatie ΔX een maat is voor de amplitude-variëaties van het veld, terwijl dan ΔY informatie geeft over fasefluctuaties. Door s te variëren kan men toestanden creëren met een grote onzekerheid in de veld-amplitude en een geringe onzekerheid in de fase, of vice versa. Het is duidelijk dat dit voor technologische toepassingen zeer interessant kan zijn.

Opgave 11 : Eigenschappen van geperste toestanden

- a. Bewijs (2.3.8) en (2.3.9).
- b. Bewijs (2.3.13) met (2.3.12).

c. Laat zien dat we $D_s(\alpha)$ ook kunnen schrijven als

$$D_s(\alpha) = e^{\alpha_{-s} a^\dagger - \alpha_{-s}^* a} = e^{2iX\text{Im}\alpha_{-s} - 2iY\text{Re}\alpha_{-s}} \quad , \quad (2.3.19)$$

met de afkortingen

$$\alpha_s = \alpha \cosh s - \alpha^* \sinh s \quad , \quad \alpha_s^* = \alpha^* \cosh s - \alpha \sinh s \quad . \quad (2.3.20)$$

d. Bewijs (2.3.15).

e. Bewijs de relaties (2.3.16)–(2.3.18).

2.3.4 Verdeling van het fotontal in een geperste toestand

Om het gemiddeld fotontal in een geperste toestand te berekenen kan men als volgt te werk gaan: druk a en a^\dagger uit in a_s en a_s^\dagger en gebruik de commutatierelaties om in de verwachtingswaarde een som van “normaalgeordende” producten (met a_s steeds rechts van a_s^\dagger) te verkrijgen. Gebruik dan de eigenwaarde-vergelijking. Een zelfde methode kan worden gebruikt om de standaarddeviatie van het fotontal te berekenen. Men vindt aldus:

$$\langle n \rangle = (\text{Re } \alpha)^2 e^{2s} + (\text{Im } \alpha)^2 e^{-2s} + \sinh^2 s \quad , \quad (2.3.21)$$

$$\begin{aligned} (\Delta n)^2 &= \langle n^2 \rangle - (\langle n \rangle)^2 = \\ &= (\text{Re } \alpha)^2 e^{4s} + (\text{Im } \alpha)^2 e^{-4s} + 2 \sinh^2 s \cosh^2 s \quad . \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Uit (2.3.21) en (2.3.22) vindt men een uitdrukking voor de grootheid $(\Delta n)^2 - \langle n \rangle$. Er komt:

$$(\Delta n)^2 - \langle n \rangle = (\text{Re } \alpha)^2 (e^{4s} - e^{2s}) + (\text{Im } \alpha)^2 (e^{-4s} - e^{-2s}) + \sinh^2 s (2 \cosh^2 s - 1) \quad . \quad (2.3.23)$$

Zoals men zich zal herinneren is de grootheid $(\Delta n)^2 - \langle n \rangle$ gelijk aan 0 voor elke coherente toestand (en positief voor een chaotische toestand). Hier komt er een uitdrukking die inderdaad weer 0 is voor $s = 0$. De uitdrukking kan echter ook wel negatief worden, als α en s geschikt worden gekozen. Als negatieve waarden worden bereikt dan spreekt men van “ontklitting” in de fotonverdeling. Als α reëel wordt gekozen dan treedt inderdaad ontclitting op voor negatieve s en voldoende grote α . Dit resultaat is in overeenstemming met het boven gevondene voor de kwadratuur-operatoren, als men bedenkt door welke kwadratuur-operator amplitude-fluctuaties worden bepaald. Onder de gekozen omstandigheden worden deze fluctuaties, en dus Δn , klein. Men gaat ook na dat voor het geperste vacuüm de grootheid $(\Delta n)^2 - \langle n \rangle$ altijd positief is, onafhankelijk van de keuze van s . Foton “ontklitting” treedt daar dus niet op. Dat is jammer omdat de experimentele realisatie van een geperste toestand het gemakkelijkste is voor juist het vacuüm geval.

Het is mogelijk de complete fotonverdeling P_n af te leiden. Deze geeft aan hoe groot de kans op n fotonen is in een geperste toestand. Om P_n te bepalen moet men het inproduct $\langle n | \alpha, s \rangle$ bepalen. Immers, er geldt

$$P_n = |\langle n | \alpha, s \rangle|^2 \quad . \quad (2.3.24)$$

We geven hier het resultaat van de (tamelijk ingewikkelde) berekening. Er komt:

$$P_n = \frac{1}{n! \cosh s} e^{-|\alpha|^2 - \operatorname{Re}(\alpha^2) \tanh s} \times \left| \frac{1}{2} \tanh s \right|^n \left| H_n \left(\frac{\alpha}{\sqrt{-2 \sinh s \cosh s}} \right) \right|^2, \quad (2.3.25)$$

met H_n Hermite polynomen (die bekend zijn uit de golffuncties voor de harmonische oscillator eigenfuncties). Men controleert eenvoudig dat deze uitdrukking overgaat in de verdeling voor een coherente toestand, als s gelijk aan 0 wordt gesteld.

De hier gevonden tamelijk ingewikkelde uitdrukking voor de fotonverdeling wordt eenvoudiger als we vragen naar de fotonverdeling voor het geperste vacuüm. Deze volgt door α gelijk aan 0 te stellen. Dan vindt men dat voor *even* n geldt:

$$P_n = \frac{1}{\cosh s} \left(\frac{\tanh s}{2} \right)^n \frac{n!}{\left[\left(\frac{1}{2} n \right)! \right]^2}, \quad (2.3.26)$$

terwijl voor *oneven* n wordt gevonden dat P_n gelijk aan 0 is. Deze resultaten kunnen natuurlijk veel sneller worden gevonden door direct naar (2.3.15) te kijken.

Opgave 12 : Eigenschappen van de fotonverdeling

- Bewijs (2.3.21) en (2.3.22) op de boven aangegeven wijze.
- Laat zien hoe (2.3.21) en (2.3.22) langs andere weg kunnen worden afgeleid. Ga daartoe uit van de formule $|\alpha, s\rangle = D_s(\alpha)S(-s)|0\rangle$. Een verwachtingswaarde voor een geperste toestand is aldus om te werken in een verwachtingswaarde van een getransformeerde operator voor de (gewone, ongeperste) vacuümtoestand. Als men nu eerst de transformatie-eigenschap van a onder $D_s(\alpha)$ en vervolgens onder $S(s)$ gebruikt, dan is de getransformeerde operator behorend bij n en n^2 eenvoudig te vinden. Aldus bewijst men weer (2.3.21) en (2.3.22).
- Bewijs (2.3.23). Wanneer kan ontklitting ontstaan? Wat vindt men voor het geperste vacuüm?
- Laat zien dat uit (2.3.25) volgt voor $s = 0$:

$$P_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (2.3.27)$$

- Bewijs (2.3.26).

2.4 Aanwijzingen voor de uitwerking van de opgaven

Opgave 7

- a. Door de gezochte eigentoestand te ontwikkelen naar de eigentoestanden $|n\rangle$ van de foton-tel-operator vindt men:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n a |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \sqrt{n+1} |n\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad , \quad (2.4.1)$$

waar (1.5.34) is gebruikt. Vergelijken van de coëfficiënten van $|n\rangle$ links en rechts geeft een recursierelatie voor c_n . Met de normering en na weglaten van een arbitraire fasefactor ontstaat (2.1.1).

- b. Als a. wordt herhaald voor de creatie-operator a^\dagger dan komt er:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n a^\dagger |n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} \sqrt{n} |n\rangle = \alpha^* \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad . \quad (2.4.2)$$

De toestand $|0\rangle$ komt alleen rechts voor, dus moet dan $c_0 = 0$ zijn (als de eigenwaarde 0 wordt gekozen dan moeten wegens het linkerlid direkt alle $c_n = 0$). Invullen links geeft dat ook $|1\rangle$ alleen rechts voorkomt, zodat $c_1 = 0$ enz.; men vindt dus $c_n = 0$ voor alle n : de toestand is niet normeerbaar.

- c. Het inproduct volgt door (2.1.1) te gebruiken en tevens de orthonormaliteit van $|n\rangle$:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^* \beta} \neq 0 \quad . \quad (2.4.3)$$

- d. Na invullen van (2.1.1) in (2.1.6) ontstaat

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \frac{1}{\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} |n\rangle \langle m| \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \int d^2\alpha e^{-|\alpha|^2} \alpha^n \alpha^{*m} \quad . \quad (2.4.4)$$

De integraal volgt door poolcoördinaten te gebruiken. De integraal over de hoek $\arg(\alpha)$ geeft dan alleen een bijdrage als $n = m$. De integraal over de absolute waarde $|\alpha|$ leidt tot een $n!/2$ (door partiële integratie te bewijzen). Aldus volgt:

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \sum_n |n\rangle \langle n| = 1 \quad , \quad (2.4.5)$$

waar in het rechterlid de eenheidsoperator in de Hilbert-ruimte staat.

- e. Een willekeurige toestand $|\psi\rangle$ is altijd te ontwikkelen, door (2.4.5) te gebruiken:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \langle \alpha | \psi \rangle |\alpha\rangle \quad . \quad (2.4.6)$$

In het bijzonder is dan voor een coherente toestand $|\beta\rangle$ ook:

$$|\beta\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^* \beta} |\alpha\rangle \quad . \quad (2.4.7)$$

Dit is een lineaire relatie tussen de set coherente toestanden. Het gevolg van deze identiteit is dat een ontwikkeling zoals (2.4.6) niet éénduidig is, omdat altijd een veelvoud van (2.4.7) er bij is op te tellen.

f. Als men definieert $f(\lambda) = \exp(\lambda A) B \exp(-\lambda A)$ dan volgt door differentiatie:

$$\frac{df}{d\lambda} = e^{\lambda A} (AB - BA) e^{-\lambda A} = [A, B] \quad . \quad (2.4.8)$$

Maar dan is dus blijkbaar $f = B + \lambda[A, B]$. Voorts volgt voor $g(\lambda) = \exp(\lambda A) \exp(\lambda B)$ door differentiatie:

$$\frac{dg}{d\lambda} = Ag(\lambda) + e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} g(\lambda) = (A + B + \lambda[A, B]) g(\lambda) \quad . \quad (2.4.9)$$

Daaruit volgt dan:

$$g(\lambda) = e^{\lambda(A+B) + \frac{1}{2}\lambda^2[A, B]} \quad (2.4.10)$$

en dus door $\lambda = 1$ te stellen ook de BCH-relatie.

g. Een coherente toestand $|\alpha\rangle$ is te schrijven als:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle \quad . \quad (2.4.11)$$

Omdat $\exp(-\alpha^* a)|0\rangle = |0\rangle$ volgt met de BCH-relatie:

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} |0\rangle \quad . \quad (2.4.12)$$

h. Een algemene coherente toestand heeft de vorm:

$$|\{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle = e^{\sum_{\mathbf{k}\lambda} (\alpha_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger - \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^* a_{\mathbf{k}\lambda})} |0\rangle \quad . \quad (2.4.13)$$

Opgave 8

- a. De verwachtingswaarden van het elektrische en het magnetische veld voor een algemene coherente toestand luiden:

$$\langle \{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\} | \mathbf{E}_T | \{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\} \rangle = \sum_{\mathbf{k}\lambda} c_k \left(ik\alpha_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{c.c.} \right) = \mathbf{E}_T^{cl} \quad , \quad (2.4.14)$$

$$\langle \{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\} | \mathbf{B}_T | \{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\} \rangle = \sum_{\mathbf{k}\lambda} c_k \left(\alpha_{\mathbf{k}\lambda} i\mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{c.c.} \right) = \mathbf{B}_T^{cl} \quad , \quad (2.4.15)$$

zoals direkt volgt door a “naar rechts” en a^\dagger “naar links” te laten werken.

- b. De berekening van de verwachtingswaarde van E_T^2 leidt tot verwachtingswaarden van aa , aa^\dagger , $a^\dagger a$ en $a^\dagger a^\dagger$. Voor de uitwerking van het tweede produkt gebruikt men eerst de standaard-commutatierelatie om dit te herleiden tot $a^\dagger a$. De commutator-bijdrage geeft aanleiding tot het verschil tussen $\langle \alpha | E_T^2 | \alpha \rangle$ en $\langle \alpha | E_T | \alpha \rangle^2$; er komt:

$$\langle \{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\} | E_T^2 | \{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\} \rangle = [\langle \{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\} | \mathbf{E}_T | \{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\} \rangle]^2 + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{2} \hbar \omega_k \quad . \quad (2.4.16)$$

Evenzo vindt men ook:

$$\langle \{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\} | B_T^2 | \{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\} \rangle = [\langle \{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\} | \mathbf{B}_T | \{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\} \rangle]^2 + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{2} \hbar \omega_k \quad . \quad (2.4.17)$$

- c. Optellen van de bijdragen (2.4.16) en (2.4.17) en integreren over het volume V geeft:

$$\frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \langle \{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\} | E_T^2 + B_T^2 | \{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\} \rangle = E_{cl} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar \omega_k \quad . \quad (2.4.18)$$

- d. De kans om precies n fotonen in een (één-mode) coherente toestand aan te treffen volgt uit (2.1.1) als:

$$P_n = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad . \quad (2.4.19)$$

Dit is een Poisson-verdeling. Het gemiddelde fotontal $\langle n \rangle$ volgt als:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{(n-1)!} = |\alpha|^2 \quad . \quad (2.4.20)$$

Het gemiddelde $\langle n^2 \rangle = \langle n(n-1) \rangle + \langle n \rangle$ is:

$$\langle n(n-1) \rangle + \langle n \rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{(n-2)!} + |\alpha|^2 = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 \quad . \quad (2.4.21)$$

e. De standaardafwijking wordt bepaald door $\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$. Men vindt:

$$\frac{\sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}}{\langle n \rangle} = \frac{\sqrt{|\alpha|^2}}{|\alpha|^2} = \frac{1}{|\alpha|} \quad . \quad (2.4.22)$$

Blijkbaar is de relatieve standaardafwijking gelijk aan $(\langle n \rangle)^{-1/2}$. Dit wordt klein voor grote $\langle n \rangle$.

f. De tijdontwikkeling van een coherente toestand volgt door in (2.1.1) de tijdontwikkeling van $|n\rangle$ te substitueren. Aangezien $|n\rangle$ een eigentoestand van de (vrije-veld) Hamiltoniaan is, is de tijdontwikkeling bepaald door een factor $\exp(-iE_n t/\hbar)$ toe te voegen. Dan wordt dus:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\alpha\rangle = e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} |n\rangle = e^{-\frac{i}{2}\omega t} |\alpha(t)\rangle \quad , \quad (2.4.23)$$

zodat een coherente toestand coherent blijft voor latere tijden, met een parameter

$$\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t} \quad . \quad (2.4.24)$$

Opgave 9

a. Gebruik voor de bases ψ_n en χ_n :

$$\begin{aligned} \text{Tr} A &= \sum_n \langle \psi_n | A | \psi_n \rangle = \sum_{n,m} \langle \psi_n | \chi_m \rangle \langle \chi_m | A | \psi_n \rangle \\ &= \sum_{n,m} \langle \chi_m | A | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \chi_m \rangle = \sum_m \langle \chi_m | A | \chi_m \rangle \quad . \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

b. Voor een zuivere toestand is:

$$\begin{aligned} \rho &= |\psi\rangle\langle\psi| \longrightarrow \rho^2 = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = \rho \quad , \\ \text{Tr}(\rho A) &= \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|A) = \langle\psi|A|\psi\rangle \quad . \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

c. Bezie allereerst één mode, zoals in (2.2.1). Dan is de kans P_n evenredig met de Boltzmann-factor $\exp[-\beta(n + 1/2)\hbar\omega]$. Wegens de normering van de kansen volgt dan:

$$P_n = (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) e^{-\beta n\hbar\omega} \quad . \quad (2.4.27)$$

De dichtheidsoperator wordt nu:

$$\rho = \sum_n P_n |n\rangle\langle n| = (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_n e^{-\beta n\hbar\omega} |n\rangle\langle n| \quad , \quad (2.4.28)$$

of, na introductie van de tel-operator, juist gelijk aan (2.2.1). Voor meer modes ontstaat analoog:

$$\rho = \prod_{\mathbf{k}\lambda} (1 - e^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}) e^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda}} \quad . \quad (2.4.29)$$

d. Het gemiddelde van het fotontal in mode $\mathbf{k}\lambda$ volgt als:

$$\langle n_{\mathbf{k}\lambda} \rangle = \text{Tr}(\rho a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda}) = (1 - e^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}) \text{Tr} \left[e^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda}} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} \right] \quad . \quad (2.4.30)$$

Bij het gemiddelde nemen doen duidelijk de andere modes niet mee. Uitwerken geeft:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_n n e^{-\beta\hbar\omega n} = \\ &= (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \frac{\partial}{\partial(-\beta\hbar\omega)} \sum_n e^{-\beta n\hbar\omega} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad . \end{aligned} \quad (2.4.31)$$

Analoog volgt voor het gemiddelde van $n_{\mathbf{k}\lambda}^2$:

$$\langle n^2 \rangle = \frac{e^{-\beta\hbar\omega} (1 + e^{-\beta\hbar\omega})}{(1 - e^{-\beta\hbar\omega})^2} = 2\langle n \rangle^2 + \langle n \rangle \quad . \quad (2.4.32)$$

Omdat nu $\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle$ is de relatieve standaardafwijking van de verdeling ongeveer 1 als $\langle n \rangle$ groot is. De verdeling is dus breed (anders dan

die van een coherente toestand). De verdeling is dan ook geheel anders dan een Poisson-verdeling. Als we $\hbar\omega$ elimineren uit P_n , ten gunste van $\langle n \rangle$ (voor één mode) dan komt er:

$$P_n = \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}} \quad . \quad (2.4.33)$$

Opgave 10

- a. Voor het bewijs introduceert men bij elke willekeurige, doch vast gekozen toestand $|\psi\rangle$ de operatoren $A_0 = A - \langle\psi|A|\psi\rangle$ en $B_0 = B - \langle\psi|B|\psi\rangle$. Dan is $(\Delta A)^2(\Delta B)^2 = \langle\psi|A_0^2|\psi\rangle\langle\psi|B_0^2|\psi\rangle$. Met de Schwarz ongelijkheid volgt dat dit groter of gelijk is aan $|\langle\psi|A_0B_0|\psi\rangle|^2$, en dat is weer groter of gelijk aan $[\text{Im} \langle\psi|A_0B_0|\psi\rangle]^2$. Nu is wegens de hermiticiteit van A_0 en B_0 en hun commutatierelatie eenvoudig te bewijzen dat $\text{Im} \langle\psi|A_0B_0|\psi\rangle = c/2$, zodat het bewijs is geleverd.
- b. Voor een coherente toestand $|\alpha\rangle$ geldt: $\langle\alpha|X|\alpha\rangle = \text{Re } \alpha$ en $\langle\alpha|X^2|\alpha\rangle = (1/4) \langle\alpha|(a + a^\dagger)(a + a^\dagger)|\alpha\rangle = (1/4) \langle\alpha|a^2 + a^{\dagger 2} + 2a^\dagger a + 1|\alpha\rangle = (\text{Re } \alpha)^2 + 1/4$, waar we de commutatierelatie van a en a^\dagger gebruikten, en voorts dat een coherente toestand een eigentoestand is van de annihilatie-operator. Blijkbaar is dus $(\Delta X)^2 = \langle\alpha|X^2|\alpha\rangle - (\langle\alpha|X|\alpha\rangle)^2 = 1/4$. Het bewijs voor ΔY verloopt geheel analoog.
- c. Omdat voor elke twee operatoren A en B met een commutator die commuteert met A geldt: $\exp(A)B\exp(-A) = B + [A, B]$ vinden we :

$$D^{-1}(\alpha)aD(\alpha) = a + [-\alpha a^\dagger + \alpha^* a, a] = a + \alpha \quad , \quad (2.4.34)$$

en een analoge relatie voor de getransformeerde van a^\dagger . Voor de getransformeerden van X en Y vinden we dus:

$$D^{-1}(\alpha)XD(\alpha) = X + \text{Re } \alpha \quad , \quad D^{-1}(\alpha)YD(\alpha) = X + \text{Im } \alpha \quad . \quad (2.4.35)$$

Opgave 11

- a. Het bewijs is triviaal.
- b. Schrijf $F(s) = \exp(sA)X \exp(-sA)$ met $A = -a^2/2 + a^\dagger^2/2$. Door differentiëren komt er

$$\frac{dF}{ds} = e^{sA} [A, X] e^{-sA} = -F \quad , \quad (2.4.36)$$

waar we de commutatierelatie $[A, X] = -X$ gebruikten. Nu volgt dat F de vorm $F(s) = e^{-s}F(0)$ heeft. Voor $s = 0$ is $F(s) = X$, zodat blijkbaar geldt:

$$S^{-1}(s)XS(s) = e^{-s}X = X_s \quad . \quad (2.4.37)$$

Evenzo bewijst men

$$S^{-1}(s)YS(s) = e^sY = Y_s \quad . \quad (2.4.38)$$

Door combinatie van deze twee relaties wordt dan (2.3.13) met (2.3.12) bewezen.

- c. De relatie (2.3.19) volgt door herschrijven van de exponent in (2.3.11) met behulp van (2.3.8).
- d. Het bewijs van (2.3.15) gaat door eerst de operator $S^{-1}(s)$ te herordenen met behulp van de identiteit:

$$\begin{aligned} S^{-1}(s) &= \exp\left(-\frac{1}{2}sa^2 + \frac{1}{2}sa^\dagger^2\right) \\ &= f(s) \exp\left(g_1(s)a^\dagger^2\right) : \exp\left(g_2(s)a^\dagger a\right) : \exp\left(g_3(s)a^2\right) \quad , \end{aligned} \quad (2.4.39)$$

met

$$\begin{aligned} f(s) &= [\cosh(s)]^{-1/2} \quad , \quad g_1(s) = -g_3(s) = \frac{1}{2} \tanh(s) \quad , \\ g_2(s) &= [\cosh(s)]^{-1} - 1 \quad . \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

We bewijzen deze identiteit door links en rechts te differentiëren naar s . Links vindt men dan:

$$\frac{d}{ds}S^{-1}(s) = \left[-\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^\dagger^2\right] S^{-1}(s) \quad . \quad (2.4.41)$$

Omdat $a_s = a \cosh s - a^\dagger \sinh s$ kunnen we schrijven

$$a^2 - a^\dagger^2 = -\frac{1}{\cosh^2 s}a^\dagger^2 + 2\frac{\sinh s}{\cosh^2 s}a^\dagger a_s + \frac{1}{\cosh^2 s}a_s^2 + \tanh s \quad . \quad (2.4.42)$$

We zorgden er voor dat het rechterlid uitgedrukt werd in a^\dagger en a_s , met bovendien a_s rechts van a^\dagger in het product van de twee. De reden daarvan is dat we dan bij invullen in (2.4.41) gebruik kunnen maken van (2.3.13). Als resultaat ontstaat dan:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}S^{-1}(s) &= \frac{1}{2\cosh^2 s}a^\dagger^2 S^{-1}(s) - \frac{\sinh s}{\cosh^2 s}a^\dagger S^{-1}(s)a \\ &\quad - \frac{1}{2\cosh^2 s}S^{-1}(s)a^2 - \frac{1}{2} \tanh s S^{-1}(s) \quad . \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

Door anderzijds het rechterlid van (2.4.39) te differentiëren vindt men:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(s)} \frac{df(s)}{ds} S^{-1}(s) + \frac{dg_1(s)}{ds} a^\dagger^2 S^{-1}(s) \\ + \frac{dg_2(s)}{ds} a^\dagger S^{-1}(s)a + \frac{dg_3(s)}{ds} S^{-1}(s) a^2 \quad . \end{aligned} \quad (2.4.44)$$

Door vergelijken van de twee uitdrukkingen ziet men dat de volgende differentiaalvergelijkingen moeten gelden:

$$\begin{aligned} \frac{df(s)}{ds} &= -\frac{1}{2} \tanh s f(s) \quad , \\ \frac{dg_1(s)}{ds} &= \frac{1}{2 \cosh^2 s} \quad , \\ \frac{dg_2(s)}{ds} &= -\frac{\sinh s}{\cosh^2 s} \quad , \\ \frac{dg_3(s)}{ds} &= -\frac{1}{2 \cosh^2 s} \quad . \end{aligned} \quad (2.4.45)$$

Oplossen van deze vergelijkingen, met de begincondities $f(0) = 1$, en $g_i(0) = 0$ voor $i = 1, 2, 3$, geeft dan inderdaad de uitdrukkingen (2.4.40).

Met gebruik van de zojuist bewezen herordeningsstelling is het afleiden van (2.3.15) heel eenvoudig. Immers, er geldt:

$$|0, s\rangle = S^{-1}(s)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh s}} \exp\left[\frac{1}{2} \tanh s a^\dagger^2\right] |0\rangle \quad , \quad (2.4.46)$$

omdat steeds $a|0\rangle = 0$ kan worden gebruikt. Uitwerken van de exponentiaalfunctie en gebruiken van $a^{\dagger 2n}|0\rangle = \sqrt{(2n)!} |2n\rangle$ geeft het laatste lid van (2.3.15).

- e. Omdat de toestanden $|\alpha, s\rangle$ eigentoestanden zijn van a_s met eigenwaarde α , volgt direkt $\langle \alpha, s | X_s | \alpha, s \rangle = \text{Re } \alpha$ en $\langle \alpha, s | Y_s | \alpha, s \rangle = \text{Im } \alpha$. De verwachtingswaarden van de oorspronkelijke kwadratuur-operatoren zijn dus:

$$\langle \alpha, s | X | \alpha, s \rangle = e^s \text{Re } \alpha \quad , \quad \langle \alpha, s | Y | \alpha, s \rangle = e^{-s} \text{Im } \alpha \quad . \quad (2.4.47)$$

Analoog volgen ook (2.3.17)–(2.3.18).

Men kan net als eerder de in (2.3.16)–(2.3.18) vervatte informatie gebruiken om de mogelijke meetwaarden van X en Y in een grafiek uit te zetten. Het onzekerheidsgebiedje is nu een uitgerekte, resp. ingedrukte cirkel, m.a.w. een ellips.

Opgave 12

- a. Ter berekening van het gemiddeld fotontal in een geperste toestand $|\alpha, s\rangle$ schrijven we met behulp van (2.3.9) en normaal-ordening:

$$\langle n \rangle = \langle \alpha, s | a_s^\dagger a_s (\sinh^2 s + \cosh^2 s) + (a_s^{\dagger 2} + a_s^2) \sinh s \cosh s + \sinh^2 s | \alpha, s \rangle . \quad (2.4.48)$$

Gebruik nu de eigenwaarde-vergelijking, dan komt er:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= |\alpha|^2 (\sinh^2 s + \cosh^2 s) + (\alpha^2 + \alpha^{*2}) \sinh s \cosh s + \sinh^2 s = \\ &= (\operatorname{Re} \alpha)^2 e^{2s} + (\operatorname{Im} \alpha)^2 e^{-2s} + \sinh^2 s . \end{aligned} \quad (2.4.49)$$

Evenzo vinden we voor de verwachtingswaarde van n^2 na invullen van (2.3.9), normaal-ordenen en gebruik van de eigenwaarde-vergelijking:

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= |\alpha|^4 (\sinh^4 s + 4 \sinh^2 s \cosh^2 s + \cosh^4 s) \\ &\quad + 2|\alpha|^2 (\alpha^2 + \alpha^{*2}) \sinh s \cosh s (\sinh^2 s + \cosh^2 s) \\ &\quad + (\alpha^4 + \alpha^{*4}) \sinh^2 s \cosh^2 s \\ &\quad + |\alpha|^2 (3 \sinh^4 s + 8 \sinh^2 s \cosh^2 s + \cosh^4 s) \\ &\quad + (\alpha^2 + \alpha^{*2}) \sinh s \cosh s (4 \sinh^2 s + 2 \cosh^2 s) \\ &\quad + \sinh^2 s (\sinh^2 s + 2 \cosh^2 s) . \end{aligned} \quad (2.4.50)$$

Na aftrekken van $[\langle \alpha, s | n | \alpha, s \rangle]^2$ ontstaat dan

$$\begin{aligned} (\Delta n)^2 &= |\alpha|^2 (8 \sinh^2 s \cosh^2 s + 1) \\ &\quad + 2 (\alpha^2 + \alpha^{*2}) \sinh s \cosh s (\sinh^2 s + \cosh^2 s) \\ &\quad + 2 \sinh^2 s \cosh^2 s = \\ &= (\operatorname{Re} \alpha)^2 e^{4s} + (\operatorname{Im} \alpha)^2 e^{-4s} + 2 \sinh^2 s \cosh^2 s . \end{aligned} \quad (2.4.51)$$

- b. Een andere manier om de resultaten te vinden volgt door te gebruiken:

$$S(s) D_s^{-1}(\alpha) a D_s(\alpha) S^{-1}(s) = a_{-s} + \alpha_{-s} , \quad (2.4.52)$$

zoals volgt uit (2.4.34) en (2.3.13). Omdat uit (2.3.10) volgt:

$$|\alpha, s\rangle = D_s(\alpha) S^{-1}(s) |0\rangle , \quad (2.4.53)$$

bewijst men aldus:

$$\langle \alpha, s | a^\dagger a | \alpha, s \rangle = |\alpha_{-s}|^2 + \sinh^2 s , \quad (2.4.54)$$

hetgeen equivalent is met (2.4.49). Ook (2.4.51) kan zo worden afgeleid.

- c. Gebruikmakend van (2.4.49) en (2.4.51) vinden we gemakkelijk (2.3.23) terug. Als s verschillend is van 0, dan kan (2.3.23) negatief worden, bijvoorbeeld door s negatief te kiezen en α positief reëel en voldoende groot. In dat geval ontstaat dus “ontklitting” (antibunching) van de fotonstatistiek.

Voor het geperste vacuüm, met $\alpha = 0$, reduceert (2.3.23) tot:

$$(\Delta n)^2 - \langle n \rangle = \sinh^2 s (2 \cosh^2 s - 1) = 2\langle n \rangle^2 + \langle n \rangle \quad . \quad (2.4.55)$$

Dit is altijd positief: het geperste vacuüm kent geen ontclitting.

- d. Dit volgt direct als we gebruiken dat de leidende term in $H_n(x)$ voor grote x luidt $(2x)^n$.
- e. Gebruik dat de Hermite-polynomen in de oorsprong de eigenschap hebben dat $H_{2n+1}(0) = 0$ en $H_{2n}(0) = (-1)^n(2n)!/n!$.

Hoofdstuk 3

Absorptie, emissie en verstrooiing van fotonen

3.1 Absorptie en emissie

Atomen of moleculen die zijn geplaatst in een stralingsveld kunnen fotonen emitteren of absorberen. De overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid voor zo'n proces kan worden bepaald met behulp van quantummechanische storingstheorie. We gaan uit van de "gouden regel" van Fermi voor de overgangswaarschijnlijkheid W per tijdseenheid onder invloed van een storingshamiltoniaan H_{int} van een toestand i (met energie E_i) naar een toestand f (met energie E_f):

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H_{\text{int}} | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i) \quad . \quad (3.1.1)$$

De deltafunctie drukt energiebehoud uit. Als de eindtoestand niet scherp is dan wordt de totale overgangswaarschijnlijkheid:

$$W_{i \rightarrow F} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H_{\text{int}} | i \rangle|^2 \rho_f(E_i) \quad , \quad (3.1.2)$$

met $\rho_f(E)$ de dichtheid van de toestanden $|f\rangle$ bij de energie E .

We kunnen dit formalisme gebruiken om de overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid te berekenen voor absorptie van een foton uit de mode $\mathbf{k}\lambda$ door een atoom (of molecuul) dat zich in de toestand $|i_{\text{at}}\rangle$ bevindt. In dipoolbenadering ontstaat:

$$W^{\text{abs}} = \frac{\pi}{3\hbar^2} |\langle f_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle|^2 e_v(\omega) \quad , \quad (3.1.3)$$

met $\boldsymbol{\mu}$ het elektrisch dipoolmoment van het atoom, $|f_{\text{at}}\rangle$ de atomaire eindtoestand en $e_v(\omega)$ de electromagnetische energie per volume-eenheid en per hoekfrequentie-eenheid. Bij de berekening van (3.1.3) is gemiddeld over alle mogelijke oriëntaties van het atoom. Meestal schrijft men (3.1.3), in navolging van Einstein, als

$$W^{\text{abs}} = B e_v(\omega) \quad , \quad (3.1.4)$$

met de Einstein B -coëfficiënt:

$$B = \frac{\pi}{3\hbar^2} |\langle f_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle|^2 \quad . \quad (3.1.5)$$

Evenzo kunnen we ook de overgangswaarschijnlijkheid voor emissie van een foton in aanwezigheid van een stralingsveld afleiden; het is de som van twee bijdragen: een bijdrage die evenredig is met de intensiteit van het stralingsveld (geïnduceerde emissie) en een bijdrage die daar onafhankelijk van is (spontane emissie). Voor de overgangswaarschijnlijkheid voor geïnduceerde emissie vinden we:

$$W^{\text{ind em}} = B e_\nu(\omega) \quad , \quad (3.1.6)$$

met dezelfde uitdrukking voor B als hierboven. De overgangswaarschijnlijkheid voor spontane emissie wordt:

$$W^{\text{sp em}} = A \quad , \quad (3.1.7)$$

met A gegeven door:

$$A = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} B \quad . \quad (3.1.8)$$

De coëfficiënten A en B heten de Einstein-coëfficiënten voor absorptie en emissie. Het verband (3.1.8) tussen beiden werd voor het eerst door Einstein in 1917 gevonden met behulp van een redenering die is gebaseerd op het evenwicht tussen emissie- en absorptieprocessen van een zwarte straler. De expliciete uitdrukking (3.1.5) kon uiteraard pas worden gevonden na de grondlegging van de quantummechanica in de twintiger jaren.

Spontane emissie treedt ook op als een atoom (of molecuul) alleen in de wereld is. De grootte van A bepaalt de levensduur van een atomair niveau i_{at} tengevolge van spontaan verval naar een lager gelegen niveau f_{at} , daar immers geldt:

$$\tau = \frac{1}{A} \quad . \quad (3.1.9)$$

Opgave 13 : Quantummechanische storingstheorie

- a. Veronderstel dat de Hamiltoniaan H de som is van een ongestoorde Hamiltoniaan H_0 en een langzaam aan te schakelen interactieterm $H_{\text{int}}(t)$. Laat de eigentoestanden van H_0 zijn $|n\rangle$, met eigenwaarden E_n . Ontwikkel een willekeurige toestand volgens

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |n\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \quad . \quad (3.1.10)$$

Bepaal de differentiaalvergelijking die de tijdontwikkeling geeft voor de ontwikkelingscoëfficiënten $c_n(t)$.

- b. Laat voor $t = -\infty$ het systeem in de toestand $|i\rangle$ zijn, dus $c_n(t) = \delta_{ni}$ voor $t = -\infty$. Om te bepalen hoe $c_n(t)$ er uit ziet voor latere tijden gebruiken we storingstheorie; we veronderstellen dat de interactie-Hamiltoniaan evenredig is met een klein te kiezen koppelingsconstante λ en nemen aan dat $c_n(t)$ te ontwikkelen is naar machten van λ . Leid de tijdontwikkeling af voor $c_f(t)$ in eerste orde.
- c. Bereken de overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid voor $t = 0$, eerst voor eindige ε en daarna in de limiet $\varepsilon \rightarrow 0$. Bewijs aldus de gouden regel van Fermi.

- d. Generaliseer de bovenstaande redenering tot tweede orde, en bewijs aldus:

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| -\langle f | H_{\text{int}} | i \rangle + \sum_m \frac{\langle f | H_{\text{int}} | m \rangle \langle m | H_{\text{int}} | i \rangle}{E_m - E_i} \right|^2 \delta(E_f - E_i) \quad (3.1.11)$$

waar is verondersteld dat geen der toestanden m dezelfde energie heeft als de initiële toestand i .

- e. Hoe worden de eerste- en tweede-orde formules als de eindtoestand deel uitmaakt van een continuum met een niet-scherp bepaalde energie?

Opgave 14 : Absorptie en emissie van straling

- a. Bewijs met eerste-orde storingstheorie voor de wisselwerkingshamiltoniaan, zoals gegeven in (1.4.5), dat de overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid voor absorptie door een atoom uit een stralingsveld met $n_{\mathbf{k}\lambda}$ fotonen in de mode $\mathbf{k}\lambda$ is gegeven door:

$$W_{i \rightarrow f}^{\text{abs}} = \frac{\pi n_{\mathbf{k}\lambda} \omega_k}{V} |\langle f_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}|^2 \delta(E_{f_{\text{at}}} - E_{i_{\text{at}}} - \hbar\omega_k) \quad (3.1.12)$$

Aanwijzing: gebruik de dipoolbenadering volgens welke de exponentiaalfunctie $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i)$ in het matrix-element vervangen kan worden door $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_0)$, met \mathbf{R}_0 de positie van de kern. Werk vervolgens het atomaire matrix-element om naar een matrix-element van de elektrische dipoolmoment-operator, door te gebruiken dat een deeltjes-impuls-operator is te schrijven als een commutator van de (ongestoorde) atomaire Hamiltoniaan en de deeltjes-positie-operator.

- b. Sommeer over de eindtoestanden, met variabele \mathbf{k} binnen een kleine ruimtehoek $\Delta\Omega$ en met vaste polarisatie-index λ . Bewijs dat dan de gesommeerde (of liever geïntegreerde) overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid wordt:

$$W^{\text{abs}} = \frac{\pi}{(2\pi)^3 \hbar^4 c^3} (E_{f_{\text{at}}} - E_{i_{\text{at}}})^3 n_{\mathbf{k}\lambda} |\langle f_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}|^2 \Delta\Omega \quad (3.1.13)$$

- c. Bewijs dat de energiedichtheid $e_v(\omega)$ per eenheid van hoekfrequentie ω , voor fotonen met golfvector \mathbf{k} binnen de ruimtehoek $\Delta\Omega$, luidt:

$$e_v(\omega) = \frac{\hbar\omega_k^3}{(2\pi)^3 c^3} n_{\mathbf{k}\lambda} \Delta\Omega \quad (3.1.14)$$

- d. Bewijs, door middelen over alle oriëntaties van het atoom, de uitdrukking (3.1.3).
- e. Herhaal de berekening voor een emissie-proces. Bewijs dat de geïnduceerde emissie wordt bepaald door dezelfde B -coëfficiënt.
- f. Geef tenslotte aan hoe de totale overgangswaarschijnlijkheid voor spontane emissie kan worden berekend. Bewijs het verband (3.1.8).
- g. Beredeneer de juistheid van (3.1.9).

3.2 Rayleigh- en Raman-verstrooiing

Verstrooiingsprocessen, waarbij fotonen elastisch (Rayleigh) of inelastisch (Raman) verstrooid worden kunnen evenzo berekend worden met storingstheorie toegepast op de nonrelativistische QED. Omdat nu twee fotonen een rol spelen, namelijk een inkomend foton en een verstrooid foton, is tweede-orde storingstheorie nodig, althans voor de bijdrage in de interactiehamiltoniaan die lineair is in het veld. Ook de kwadratische bijdrage in de wisselwerkingshamiltoniaan moet nu worden meegenomen (in eerste orde storingstheorie alleen).

Men vindt na enig rekenen (zie de vraagstukken) voor de overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid voor een proces waarbij vooraf n_{in} fotonen in een mode $\mathbf{k}\lambda$ tezamen met een atoom in de toestand $|i_{\text{at}}\rangle$ aanwezig zijn, en na afloop een verstrooid foton in mode $\mathbf{k}'\lambda'$ en $n_{\text{in}} - 1$ fotonen in de mode $\mathbf{k}\lambda$, en het atoom in de toestand $|f_{\text{at}}\rangle$:

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\hbar^2 \omega_{\text{in}} \omega_{\text{sc}}}{4V^2} n_{\text{in}} |M|^2 \delta(E_{f_{\text{at}}} - E_{i_{\text{at}}} + \hbar\omega_{\text{sc}} - \hbar\omega_{\text{in}}) \quad , \quad (3.2.1)$$

met de afkorting:

$$M = \sum_{m_{\text{at}}} \mathbf{e}_{\text{sc}} \cdot \left[\frac{\langle f_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | m_{\text{at}} \rangle \langle m_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle}{E_{i_{\text{at}}} + \hbar\omega_{\text{in}} - E_{m_{\text{at}}}} \right. \\ \left. + \frac{\langle f_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | m_{\text{at}} \rangle \langle m_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle}{E_{i_{\text{at}}} - \hbar\omega_{\text{sc}} - E_{m_{\text{at}}}} \right] \cdot \mathbf{e}_{\text{in}} \quad . \quad (3.2.2)$$

Hierbij zijn \mathbf{e}_{in} en \mathbf{e}_{sc} polarisatievectoren van inkomend en verstrooid foton, en ω_{in} en ω_{sc} de frequenties. Tenslotte is $|m_{\text{at}}\rangle$ een atomaire tussentoestand.

Hieruit volgt nu de Kramers-Heisenberg formule voor de werkzame doorsnede voor fotonverstrooiing aan een atoom:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\omega_{\text{in}} \omega_{\text{sc}}^3}{16\pi^2 c^4} \left| \sum_{m_{\text{at}}} \left[\frac{\langle f_{\text{at}} | \mathbf{e}_{\text{sc}} \cdot \boldsymbol{\mu} | m_{\text{at}} \rangle \langle m_{\text{at}} | \mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle}{E_{i_{\text{at}}} + \hbar\omega_{\text{in}} - E_{m_{\text{at}}}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\langle f_{\text{at}} | \mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\mu} | m_{\text{at}} \rangle \langle m_{\text{at}} | \mathbf{e}_{\text{sc}} \cdot \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle}{E_{i_{\text{at}}} - \hbar\omega_{\text{sc}} - E_{m_{\text{at}}}} \right] \right|^2 \quad . \quad (3.2.3)$$

Als de toestanden $|i_{\text{at}}\rangle$ en $|f_{\text{at}}\rangle$ gelijk zijn dan ontstaat de formule voor Rayleigh-verstrooiing. Na middelen over de atomaire oriëntaties blijkt dat de werkzame doorsnede evenredig is met het kwadraat van het inwendig product van de twee polarisatievectoren. Voorts is de werkzame doorsnede evenredig met de vierde macht van de frequentie van het verstrooide licht. Aldus ziet men in waarom de hemel op een zonnige dag blauw is en op een specifieke manier gepolariseerd (ga dit na, empirisch, maar vooral ook theoretisch!).

Voor ongelijke atomaire begin- en eindtoestanden spreekt men van Raman-verstrooiing. Men onderscheidt Stokes- en anti-Stokes-Raman-verstrooiing, al naar gelang de atomaire eindtoestand een hogere of een lagere energie heeft dan de atomaire begintoestand (en dus het verstrooide licht een lagere resp. een hogere frequentie heeft dan het inkomende licht). Anti-Stokes-Raman verstrooiing is lastiger waar te nemen (waarom?) en is pas in de afgelopen decennia goed onderzocht.

Opgave 15 : Rayleigh- en Raman-verstrooiing: overgangswaarschijnlijkheid

Om de uitdrukking (3.2.1) voor de overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid voor fotonverstrooiing door een atoom te berekenen wordt gebruik gemaakt van de in (3.1.11) afgeleide formule voor die waarschijnlijkheid in tweede orde. Achtereenvolgens worden de twee termen binnen de absoluut-strepen in (3.1.11) bepaald.

- Schrijf de toestanden $|i\rangle$ en $|f\rangle$ op voor een proces waarbij vooraf n fotonen aanwezig zijn en één daarvan verstrooid wordt naar een andere mode (zie ook het proza boven (3.2.1)). Laat zien welke bijdragen uit de wisselwerkingshamiltoniaan moeten worden ingevuld in de eerste en in de tweede term van (3.1.11) om consistent W in leidende orde uit te rekenen.
- Schrijf de bijdrage van de eerste term binnen de absoluut-strepen uit (3.1.11) op. Gebruik de dipoolbenadering en bewijs:

$$\langle f|H_{\text{int}}|i\rangle = \frac{\hbar e^2 Z}{2mV} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_0} \sqrt{\frac{n_{\text{in}}}{\omega_{\text{in}}\omega_{\text{sc}}}} \mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \mathbf{e}_{\text{sc}} \delta_{f_{\text{at}}, i_{\text{at}}} \quad , \quad (3.2.4)$$

waarbij \mathbf{R}_0 de positie van de kern van het atoom is, $\mathbf{q} = \mathbf{k}_{\text{in}} - \mathbf{k}_{\text{sc}}$ de impuls-overdracht en Z het aantal electronen (of het ladingsnummer van de kern).

- Werk de tweede bijdrage binnen de absoluut-strepen in (3.1.11) uit. Gebruik zoals eerder de dipoolbenadering en voer dipool-matrix-elementen in.
- Bewijs de “somregels”:

$$\sum_{m_{\text{at}}} [\langle f_{\text{at}}|\mathbf{e}_{\text{sc}} \cdot \boldsymbol{\mu}|m_{\text{at}}\rangle \langle m_{\text{at}}|\mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\mu}|i_{\text{at}}\rangle - \langle f_{\text{at}}|\mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\mu}|m_{\text{at}}\rangle \langle m_{\text{at}}|\mathbf{e}_{\text{sc}} \cdot \boldsymbol{\mu}|i_{\text{at}}\rangle] = 0 \quad , \quad (3.2.5)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m_{\text{at}}} [(E_{f_{\text{at}}} - E_{m_{\text{at}}}) \langle f_{\text{at}}|\mathbf{e}_{\text{sc}} \cdot \boldsymbol{\mu}|m_{\text{at}}\rangle \langle m_{\text{at}}|\mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\mu}|i_{\text{at}}\rangle \\ & + (E_{i_{\text{at}}} - E_{m_{\text{at}}}) \langle f_{\text{at}}|\mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\mu}|m_{\text{at}}\rangle \langle m_{\text{at}}|\mathbf{e}_{\text{sc}} \cdot \boldsymbol{\mu}|i_{\text{at}}\rangle] \\ & = -\frac{\hbar^2 e^2}{m} Z \mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \mathbf{e}_{\text{sc}} \delta_{f_{\text{at}}, i_{\text{at}}} \quad . \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

- Gebruik de somregels (3.2.5) en (3.2.6) om (3.2.1) met (3.2.2) te bewijzen.

Opgave 16 : Rayleigh- en Raman-verstrooiing : werkzame doorsnede

- Bereken uit (3.2.1) de gesommeerde overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid naar een groep eindtoestanden, met impuls van het verstrooide foton gelegen binnen een kleine ruimtehoek $\Delta\Omega_{\text{sc}}$, en met een niet scherp bepaalde energie voor het verstrooide foton.
- Definieer de werkzame doorsnede op de gebruikelijke manier en leg een verband met de zojuist bepaalde $W_{i \rightarrow F}$.

Aanwijzing: bij lichtverstrooiing is het gebruikelijk om de werkzame doorsnede in termen van deeltjesfluxen, dus niet in termen van energie-fluxen te definiëren.

- c. Werk (3.2.3) uit voor Rayleigh-verstrooiing. Middel over de oriëntaties van de atomaire tussentoestanden en bewijs dat de werkzame doorsnede evenredig is met $(\mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \mathbf{e}_{\text{sc}})^2$. Discussieer het resultaat i.v.m. de polarisatie van het hemelblauw.
- d. Waarom is de hemel blauw en de ondergaande zon rood?
- e. Bewijs dat voor hoge frequentie, dus $\omega \rightarrow \infty$, de werkzame doorsnede voor Rayleigh-verstrooiing wordt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi mc^2} \right)^2 (\mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \mathbf{e}_{\text{sc}})^2 . \quad (3.2.7)$$

Dit is de formule voor Thomson-verstrooiing aan electronen zonder structuur. Merk op dat elke verwijzing naar de atomaire structuur nu is verdwenen. Waarom is dat redelijk?

3.3 Aanwijzingen voor de uitwerking van de opgaven

Opgave 13

- a. Omdat de toestandsvector aan de Schrödinger-vergelijking voldoet, volgt voor de ontwikkelingscoëfficiënten $c_m(t)$ voor $t \leq 0$:

$$\dot{c}_m(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_n \langle m | H_{\text{int}} | n \rangle c_n(t) e^{\frac{i}{\hbar} E_{mn} t + \varepsilon t} \quad , \quad (3.3.1)$$

met de afkorting $E_m - E_n = E_{mn}$.

- b. In nulde orde is $c_n^{(0)}(t) = \delta_{ni}$ voor $t = -\infty$; volgens (3.3.1) geldt dan voor alle t : $c_n^{(0)}(t) = \delta_{ni}$. Invullen in het rechterlid van (3.3.1) geeft een differentiaalvergelijking voor de coëfficiënt $c_n^{(1)}(t)$ in eerste orde. Oplossen geeft, met de randconditie $c_n^{(1)}(t) = 0$ voor $t = -\infty$:

$$c_f^{(1)}(t) = - \langle f | H_{\text{int}} | i \rangle \frac{e^{\frac{i}{\hbar} E_{fi} t + \varepsilon t}}{E_{fi} - i\varepsilon \hbar} \quad . \quad (3.3.2)$$

- c. De overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid luidt voor $t = 0$:

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{d}{dt} \left| c_f^{(1)}(t) \right|^2 \quad . \quad (3.3.3)$$

Invullen van de oplossing (3.3.2) geeft:

$$W_{i \rightarrow f} = |\langle f | H_{\text{int}} | i \rangle|^2 \frac{2\varepsilon}{E_{fi}^2 + \varepsilon^2 \hbar^2} \quad . \quad (3.3.4)$$

Nu luidt een standaardrepresentatie van de deltafunctie:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \alpha}{x^2 + \alpha^2 \varepsilon^2} = \pi \delta(x) \quad , \quad (3.3.5)$$

zodat in de limiet $\varepsilon \rightarrow 0$ de gouden regel van Fermi wordt gevonden:

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H_{\text{int}} | i \rangle|^2 \delta(E_{fi}) \quad . \quad (3.3.6)$$

- d. In tweede orde vindt men met behulp van (3.3.1) en (3.3.2) ook een uitdrukking voor de tweede-orde coëfficiënt $c_n^{(2)}(t)$. De som van de eerste-orde en de tweede-orde coëfficiënten is dan:

$$\begin{aligned} c_f^{(1)} + c_f^{(2)} &= \\ &= \left[- \langle f | H_{\text{int}} | i \rangle \frac{e^{\varepsilon t}}{E_{fi} - i\varepsilon \hbar} + \sum_m \frac{\langle f | H_{\text{int}} | m \rangle \langle m | H_{\text{int}} | i \rangle e^{2\varepsilon t}}{(E_{mi} - i\varepsilon \hbar)(E_{fi} - 2i\varepsilon \hbar)} \right] \times \\ &\quad \times e^{\frac{i}{\hbar} E_{fi} t} \quad . \quad (3.3.7) \end{aligned}$$

We nemen aan dat geen der intermediaire toestanden $|m\rangle$ die in de som optreedt dezelfde energie heeft als $|i\rangle$. (In feite is dat een veronderstelling over de matrix-elementen van H_{int} waaraan vaak in praktische gevallen is voldaan.) Bij de berekening van de overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid voor $t = 0$ treden nu functies van de volgende vorm op:

$$\frac{\varepsilon(\alpha + \beta)}{(x + i\alpha\varepsilon)(x - i\beta\varepsilon)} \quad (3.3.8)$$

voor willekeurige positieve α en β . Door breuksplitsing en gebruik van de Plemelj-formule:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\varepsilon} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta(x) \quad , \quad (3.3.9)$$

met \mathcal{P} de hoofdwaaarde (“principal value”), ziet men snel dat (3.3.8) in de limiet $\varepsilon \rightarrow 0$ gelijk is aan $2\pi\delta(x)$, voor elke α en β . Aldus volgt (3.1.11).

- e. Als de eindtoestanden $|f\rangle$ deel uitmaken van een continuum, dan is men alleen geïnteresseerd in de som over alle eindtoestanden met vrijwel dezelfde energie als $|i\rangle$. Na sommatie over f (of beter integratie over E_f , met de toestandsdichtheid $\rho(E_f)$ als gewicht) ontstaan uit (3.1.1) en (3.1.11) formules voor $W_{i \rightarrow F}$, met de dichtheid $\rho(E_f)$ in plaats van de deltafunctie voor energiebehoud.

Opgave 14

- a. De begintoestand $|i\rangle$ van het systeem van atoom en stralingsveld is in dit geval $|i_{\text{at}}, \{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle$, de eindtoestand is bij een absorptieproces $|f_{\text{at}}, \{n'_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle$, met $n'_{\mathbf{k}\lambda} = n_{\mathbf{k}\lambda}$, behalve voor één mode $\mathbf{k}\lambda$, waarvoor geldt $n'_{\mathbf{k}\lambda} = n_{\mathbf{k}\lambda} - 1$. De wisselwerkingshamiltoniaan (1.4.5) is een som van een term lineair in creatie- en annihilatie-operatoren en een kwadratische term. Bij de één-foton-absorptie processen, die we hier bekijken, geeft alleen de lineaire term een bijdrage tot het overgangsmatrix-element $\langle f|H_{\text{int}}|i\rangle$. Het matrix-element wordt:

$$-\sum_j \frac{e_j}{m_j c} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k V}} \sqrt{n_{\mathbf{k}\lambda}} \langle f_{\text{at}} | \mathbf{p}_j e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_j} | i_{\text{at}} \rangle \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \quad , \quad (3.3.10)$$

waar we de expliciet bekende vorm van het matrix-element van de annihilatie-operator tussen toestanden met scherp fotontal gebruikten. In dipoolbenadering kunnen we de exponentiaalfunctie $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_j)$ vervangen door $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_0)$, met \mathbf{R}_0 een vaste positie binnen het atoom (bijvoorbeeld de positie van de kern). Omdat geldt $\mathbf{p}_j/m_j = (i/\hbar)[H_{\text{at}}, \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_0]$, met H_{at} de ongestoorde atomaire Hamiltoniaan, kunnen we het matrix-element $\langle f_{\text{at}} | \mathbf{p}_j | i_{\text{at}} \rangle$ omwerken naar een matrix-element van $\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_0$, en dus, met de som over de deeltjes j , tot een matrix-element van het elektrisch dipoolmoment $\boldsymbol{\mu} = \sum_j e_j(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_0)$. Aldus ontstaat:

$$\langle f|H_{\text{int}}|i\rangle = -i \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k V}} (E_{f_{\text{at}}} - E_{i_{\text{at}}}) \sqrt{n_{\mathbf{k}\lambda}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_0} \langle f_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \quad . \quad (3.3.11)$$

Met de Fermi gouden regel volgt dan voor de overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid de formule (3.1.12).

- b. Na integratie over alle eindtoestanden, met vrijwel dezelfde energie, die verschillen door een verschillende waarde van de mode-labels waaruit een foton mist in de toestand na absorptie, ontstaat:

$$\begin{aligned} W^{\text{abs}} &= \\ &= \frac{1}{8\pi^2 c^3 \hbar} \int d\omega_k \omega_k^3 \delta(\omega_k - \hbar^{-1} E_{f_{\text{at}}} + \hbar^{-1} E_{i_{\text{at}}}) \times \\ &\quad \times n_{\mathbf{k}\lambda} |\langle f_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}|^2 \Delta\Omega \quad , \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

als we veronderstellen dat zowel $n_{\mathbf{k}\lambda}$ als het matrix-element $\langle f_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle$ weinig variëren binnen de ruimtehoek $\Delta\Omega$, voor foton-energieën gelegen in de buurt van het energieverval tussen de atomaire begin- en eindtoestand. Uitvoeren van de integratie levert (3.1.13).

- c. De energiedichtheid van het electromagnetische veld, per eenheid van hoekfrequentie, voor fotonen met golfvector binnen $\Delta\Omega$, wordt gegeven door te vergelijken:

$$\int e_v(\omega_k) d\omega_k = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_k n_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{\hbar}{(2\pi)^3 c^3} \int d\omega_k \omega_k^3 n_{\mathbf{k}\lambda} \Delta\Omega \quad . \quad (3.3.13)$$

Men vindt aldus (3.1.14).

- d. Bij middelen over de oriëntaties van het atoom moet worden gemiddeld over de oriëntaties van de golfvectoren die de toestanden $|i_{\text{at}}\rangle$ en $|f_{\text{at}}\rangle$ beschrijven. Het product van de matrix-elementen van het dipoolmoment (dat een tensor met twee vectoriële indices is) wordt dan evenredig met de eenheidstensor \mathbf{U} :

$$\overline{\langle f_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle \langle i_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | f_{\text{at}} \rangle} = \lambda \mathbf{U} \quad . \quad (3.3.14)$$

De coëfficiënt voor de tensor volgt het snelst door het nemen van het spoor; aldus komt er:

$$\overline{\langle f_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle \langle i_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | f_{\text{at}} \rangle} = \frac{1}{3} \langle f_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle \cdot \langle i_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | f_{\text{at}} \rangle \mathbf{U} \quad . \quad (3.3.15)$$

Omdat de polarisatievector $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$ genormeerd is ontstaat dan met (3.1.14) ten slotte (3.1.3).

- e. Voor emissie vindt men analoog aan (3.1.12):

$$W_{i \rightarrow f}^{\text{em}} = \frac{\pi(n_{\mathbf{k}\lambda} + 1)\omega_k}{V} |\langle f_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}|^2 \delta(E_{f_{\text{at}}} - E_{i_{\text{at}}} + \hbar\omega_k) \quad . \quad (3.3.16)$$

De geïnduceerde emissie wordt bepaald door de term evenredig met het fotonantal $n_{\mathbf{k}\lambda}$. De overgangswaarschijnlijkheid wordt inderdaad door dezelfde coëfficiënt bepaald, namelijk door (3.1.5).

- f. De overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid voor spontane emissie wordt gegeven door de term in (3.3.16) die onafhankelijk is van het fotontal. Omdat opnieuw de mogelijke eindtoestanden een continuum vormen (bepaald door de mogelijke verschillende keuzen van de labels \mathbf{k} en λ van het uitgezonden foton), moet worden gekeken naar de som (of de integraal) van de overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid over alle mogelijke eindtoestanden, met variabele foton-energie, met variërende oriëntatie van de golfvector van het foton en met beide mogelijkheden voor de polarisatievector. Dat geeft:

$$W^{\text{sp.em}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int d\Omega_k d\omega_k \frac{\omega_k^2}{c^3} W_{i \rightarrow f}^{\text{sp.em}} \quad . \quad (3.3.17)$$

Dit heeft de vorm:

$$W^{\text{sp.em}} = A \quad , \quad (3.3.18)$$

met de Einstein A -coëfficiënt:

$$A = \frac{\omega^3}{3\pi\hbar c^3} |\langle i_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | f_{\text{at}} \rangle|^2 = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} B \quad , \quad (3.3.19)$$

zoals te voren.

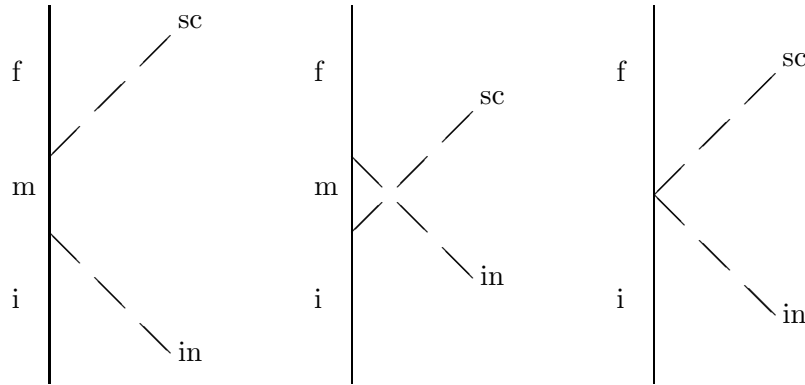
- g. Om de juistheid van (3.1.9) in te zien moet worden opgemerkt dat het aantal atomen N in een bepaalde atomaire toestand $|i_{\text{at}}\rangle$, die (met een overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid gelijk aan A) kan vervallen naar een lagere toestand $|f_{\text{at}}\rangle$, wordt bepaald door de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dN}{dt} = -AN \quad . \quad (3.3.20)$$

De oplossing is $N = N_0 \exp(-At)$; de levensduur τ wordt in het algemeen bij exponentieel verval gedefinieerd door de inverse van de coëfficiënt van t in de exponent, dus hier door (3.1.9).

Opgave 15

- a. De begin- en eindtoestanden zijn resp. $|i_{\text{at}}, \{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle$ en $|f_{\text{at}}, \{n'_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle$. Hierbij verschillen de sets $\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}$ en $\{n'_{\mathbf{k}\lambda}\}$ slechts voor twee modes, met de labels i_{in} en sc : $n_{i_{\text{in}}} = n'_{i_{\text{in}}} + 1$ en $n_{sc} = n'_{sc} - 1$. Omdat de twee toestanden op twee plaatsen in de aantallen fotonen verschillen kan de term in H_{int} die lineair in het stralingsveld is alleen in tweede-orde storingstheorie een bijdrage geven. De kwadratische term in H_{int} kan al in eerste-orde storingstheorie bijdragen. De diagrammen geven aan welke tussentoestanden in het tweede-orde proces kunnen bijdragen: het zijn er twee, namelijk één waarbij de tussentoestand van de inkomende toestand verschilt doordat het inkomende foton is ingeslikt door het atoom, terwijl het verstrooide foton nog niet is geproduceerd, en een tweede waarbij het inkomende foton nog niet is geabsorbeerd, maar het verstrooide foton al wel reeds door het atoom is uitgezonden.



- b. De bijdrage van de kwadratische term in H_{int} geeft in eerste-orde storingstheorie het matrix-element:

$$\begin{aligned} \langle f | H_{\text{int}} | i \rangle &= \frac{\hbar c^2}{2V \sqrt{\omega_{\text{in}} \omega_{\text{sc}}}} \sum_i \frac{e_i^2}{2m_i c^2} \times \\ &\times \langle f | e^{i\mathbf{k}_{\text{in}} \cdot \mathbf{R}_i - i\mathbf{k}_{\text{sc}} \cdot \mathbf{R}_i} (a_{\text{sc}}^\dagger a_{\text{in}} + a_{\text{in}} a_{\text{sc}}^\dagger) \mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \mathbf{e}_{\text{sc}} | i \rangle \quad . \quad (3.3.21) \end{aligned}$$

Gebruik nu de dipoolbenadering en voer in $\mathbf{q} = \mathbf{k}_{\text{in}} - \mathbf{k}_{\text{sc}}$. Veronderstel voorts dat voor verstrooiing nog geen fotonen in de “sc-mode” aanwezig zijn. Dan ontstaat uit (3.3.21) de uitdrukking in het rechterlid van (3.2.4).

- c. De bijdrage van de lineaire term in H_{int} in tweede-orde storingstheorie luidt:

$$\begin{aligned} &\sum_m \frac{\langle f | H_{\text{int}} | m \rangle \langle m | H_{\text{int}} | i \rangle}{E_{mi}} = \\ &= \frac{\hbar c^2 e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_0}}{2V \sqrt{\omega_{\text{in}} \omega_{\text{sc}}}} \sqrt{n_{\text{in}}} \sum_{ij} \frac{e_i e_j}{m_i m_j c^2} \sum_{m_{\text{at}}} \left[\frac{\langle f_{\text{at}} | \mathbf{e}_{\text{sc}} \cdot \mathbf{p}_i | m_{\text{at}} \rangle \langle m_{\text{at}} | \mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \mathbf{p}_j | i_{\text{at}} \rangle}{E_{mi}^{\text{at}} - \hbar \omega_{\text{in}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle f_{\text{at}} | \mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \mathbf{p}_j | m_{\text{at}} \rangle \langle m_{\text{at}} | \mathbf{e}_{\text{sc}} \cdot \mathbf{p}_i | i_{\text{at}} \rangle}{E_{mi}^{\text{at}} + \hbar \omega_{\text{sc}}} \right] \quad , \quad (3.3.22) \end{aligned}$$

waar weer de dipoolbenadering is gebruikt. Voorts gebruikten we de notatie $E_{mn}^{\text{at}} = E_{m_{\text{at}}} - E_{n_{\text{at}}}$. Na introductie van het elektrisch dipoolmoment, zoals in opgave 14, komt er:

$$\frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_0} \sqrt{n_{\text{in}}}}{2V \hbar \sqrt{\omega_{\text{in}} \omega_{\text{sc}}}} \sum_{m_{\text{at}}} E_{im}^{\text{at}} E_{fm}^{\text{at}} \left[\frac{\langle f_{\text{at}} | \mathbf{e}_{\text{sc}} \cdot \boldsymbol{\mu} | m_{\text{at}} \rangle \langle m_{\text{at}} | \mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle}{E_{mi}^{\text{at}} - \hbar \omega_{\text{in}}} + \frac{\langle f_{\text{at}} | \mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\mu} | m_{\text{at}} \rangle \langle m_{\text{at}} | \mathbf{e}_{\text{sc}} \cdot \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle}{E_{mi}^{\text{at}} + \hbar \omega_{\text{sc}}} \right]. \quad (3.3.23)$$

- d. De eerste somregel volgt direct door de volledighedsrelatie voor de toestanden $|m_{\text{at}}\rangle$ te gebruiken, daar het elektrisch dipoolmoment met zichzelf commuteert. Voor het bewijs van de tweede regel introduceert men eerst in twee van de vier matrix-elementen de impuls-operatoren, door te schrijven:

$$\sum_{m_{\text{at}}} \left[\frac{\hbar}{i} \langle f_{\text{at}} \left| \sum_i \frac{e_i \mathbf{P}_i}{m_i} \cdot \mathbf{e}_{\text{sc}} \right| m_{\text{at}} \rangle \langle m_{\text{at}} | \mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle - \frac{\hbar}{i} \langle f_{\text{at}} | \mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\mu} | m_{\text{at}} \rangle \langle m_{\text{at}} \left| \sum_i \frac{e_i \mathbf{P}_i}{m_i} \cdot \mathbf{e}_{\text{sc}} \right| i_{\text{at}} \rangle \right]. \quad (3.3.24)$$

Daarna wordt weer de som over m_{at} uitgevoerd en de resulterende commutator uitgewerkt. Aldus ontstaat het rechterlid van de tweede regel van (3.2.6).

- e. Gebruik in de eerste en de tweede term van (3.3.23) de identiteiten:

$$\begin{aligned} E_{im}^{\text{at}} E_{fm}^{\text{at}} &= (E_{im}^{\text{at}} + \hbar \omega_{\text{in}}) (E_{fm}^{\text{at}} - \hbar \omega_{\text{in}}) + \hbar^2 \omega_{\text{in}} \omega_{\text{sc}} \quad , \\ E_{im}^{\text{at}} E_{fm}^{\text{at}} &= (E_{im}^{\text{at}} + \hbar \omega_{\text{in}}) (E_{im}^{\text{at}} - \hbar \omega_{\text{sc}}) + \hbar^2 \omega_{\text{in}} \omega_{\text{sc}} \quad . \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Gebruik van de twee somregels leert dan dat een deel van het uit (3.3.23) ontstane resultaat precies wegvalt tegen (3.2.4). Wat overblijft leidt snel tot (3.2.1) met (3.2.2).

Opgave 16

- a. De overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid naar eindtoestanden met verstrooide fotonen binnen een ruimtehoek $\Delta\Omega_{\text{sc}}$ en met een niet scherp bepaalde energie van het verstrooide foton luidt:

$$\begin{aligned} W_{i \rightarrow F} &= \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{\Delta\Omega_{\text{sc}}}{\hbar c^3} \int d(\hbar\omega_{\text{sc}}) \omega_{\text{sc}}^2 W_{i \rightarrow f} \\ &= \frac{n_{\text{in}} \omega_{\text{in}} \omega_{\text{sc}}^3}{16\pi^2 V c^3} \Delta\Omega_{\text{sc}} |M|^2 \quad . \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

- b. De flux van de inkomende fotonen is $I_{\text{in}} = cn_{\text{in}}/V$. De flux I_{sc} van de verstrooide fotonen wordt gevonden door $W_{i \rightarrow F}$ te delen door de ruimtehoek $\Delta\Omega_{\text{sc}}$. De werkzame doorsnede is dan gegeven door het quotiënt van I_{sc} en I_{in} :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{I_{\text{sc}}}{I_{\text{in}}} = \frac{V}{cn_{\text{in}}} \frac{W_{i \rightarrow F}}{\Delta\Omega_{\text{sc}}} = \frac{\omega_{\text{in}} \omega_{\text{sc}}^3}{16\pi^2 c^4} |M|^2 \quad . \quad (3.3.27)$$

Dit leidt tot de formule van Kramers en Heisenberg (1925), die is gegeven in (3.2.3).

- c. Voor Rayleigh-verstrooiing is de atomaire toestand van het atoom voor en na de verstrooiing hetzelfde; het inkomend en het verstrooid foton hebben dan dezelfde energie (maar wel een verschillende oriëntatie van de golfvector: \mathbf{q} is ongelijk 0). Na middelen over de oriëntaties is het product van matrix-elementen in (3.2.3) weer te vervangen door $(1/3)\mathbf{U}$ maal het inwendig product van die matrix-elementen. Dan komt er:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\omega^4}{144\pi^2 c^4} (\mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \mathbf{e}_{\text{sc}})^2 \times \\ &\times \left| \sum_{m_{\text{at}}} | \langle i_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | m_{\text{at}} \rangle |^2 \left(\frac{1}{E_{\text{mi}}^{\text{at}} + \hbar\omega} + \frac{1}{E_{\text{mi}}^{\text{at}} - \hbar\omega} \right) \right|^2 \quad , \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

zodat de werkzame doorsnede evenredig is met $(\mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \mathbf{e}_{\text{sc}})^2$. Hieruit volgt dat ook ongepolariseerd invallend licht na verstrooiing gepolariseerd kan zijn. Men vindt uit eenvoudige geometrische beschouwingen dat bij middeling over de polarisatie van het inkomend licht geldt:

$$\overline{(\mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \mathbf{e}_{\text{sc}})^2} = \frac{1}{2} \left(\sin^2 \psi \cos^2 \theta + \cos^2 \psi \right) \quad , \quad (3.3.29)$$

met θ de verstrooiingshoek en ψ de azimuthale hoek van de polarisatievector van het verstrooide foton t.o.v. het verstrooiingsvlak. Voor loodrechte verstrooiing ($\theta = \pi/2$) is de werkzame doorsnede evenredig met $\cos^2 \psi$, zodat het verstrooide licht volledig gepolariseerd is.

- d. Omdat de werkzame doorsnede voor Rayleigh-verstrooiing evenredig is met de vierde macht van de frequentie van het verstrooide licht is speciaal verstrooiing van blauw licht een efficiënt proces.

- e. Voor hoge frequenties zijn de energie-noemers in (3.3.28) te ontwikkelen naar $1/\omega$. De som van de twee termen met energie-noemers wordt dan:

$$-2E_{mi}^{\text{at}}/(\hbar\omega)^2 \quad . \quad (3.3.30)$$

Na invullen in (3.3.28) kan dan de somregel uit (3.2.6) worden toegepast; dat geeft:

$$\sum_{m_{\text{at}}} E_{mi}^{\text{at}} \langle i_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | m_{\text{at}} \rangle \cdot \langle m_{\text{at}} | \boldsymbol{\mu} | i_{\text{at}} \rangle = \frac{3}{2} \hbar^2 Z e^2 / m \quad . \quad (3.3.31)$$

Invullen leidt tot de Thomson-formule (3.2.7). Als gewenst kan men de klassieke straal van het electron $r_e = e^2/(4\pi m c^2)$ invoeren. Dan wordt de Thomson-formule:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2 r_e^2 (\mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \mathbf{e}_{\text{sc}})^2 \quad . \quad (3.3.32)$$

Voor hoge frequenties hangt de werkzame doorsnede niet meer van de frequentie en ook niet meer van de structuur van het atoom af. In feite vindt verstrooiing effectief plaats aan een collectie losse electronen; de golflengte is zo kort dat de atomaire structuur door het licht niet meer wordt gezien. Merk op dat dit het geval is als de golflengte klein is vergeleken met die welke behoort bij een atomaire overgang. De golflengte is nog steeds groot vergeleken bij de afmeting van het atoom.

Hoofdstuk 4

Dynamica van atomair verval en spontane emissie

4.1 Inleiding

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat een atoom (of molecuul) in een aangeslagen toestand spontaan kan vervallen naar een lagere toestand onder uitzending van een foton. De overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid voor dit proces wordt gegeven door de A -coëfficiënt van Einstein. De berekening concentreerde zich op het gedrag van het atoom. Niet duidelijk werd in welke toestand het electromagnetisch veld terecht komt na het verval. Dat deze vraag een niet-triviaal antwoord heeft wordt duidelijk als we bedenken dat de eindige vervalstijd van een aangeslagen atoom impliceert dat de bijbehorende overgang een eindige lijnbreedte (de zgn. *natuurlijke lijnbreedte*) moet hebben, en een bijbehorend *lijnprofiel*. Om dit te onderzoeken is het nodig het vervalproces preciezer te beschrijven, met de volledige tijdsafhankelijkheid. Het bepalen van het tijdsafhankelijk verloop van vervalprocessen is het onderwerp van dit hoofdstuk. Voor een enkel aangeslagen atoom in vacuum is een goede beschrijving voor het eerst gegeven door *Weisskopf* en *Wigner* (1930). Uit die theorie volgen inderdaad gedetailleerde voorspellingen over de lijnbreedte en het lijnprofiel, die in goede overeenstemming zijn met de metingen. De Weisskopf-Wigner theorie zal worden besproken in paragraaf 4.2.

Het vervalproces van een aangeslagen atoom kan op verschillende manieren door de omgeving worden beïnvloed. Het spectrum van de ‘modes’ van het electromagnetische veld die aan het atoom zijn gekoppeld kan worden gewijzigd, bij voorbeeld door het atoom op te sluiten in een trillholte (een ‘cavity’, afgesloten door al of niet ideale spiegels). Het emissie-proces kan dan bij voorbeeld een oscillerend verloop hebben. Een bekend model ter beschrijving hiervan is het *Jaynes-Cummings-model* (1963).

Een andere manier waarop het vervalproces kan worden beïnvloed is door het aangeslagen atoom te plaatsen in de buurt van andere aangeslagen atomen. Als de atomen elkaar “voelen”, omdat ze zich dicht bij elkaar bevinden, dan treedt een coöperatief effect in het vervalproces op. Dit verschijnsel heet *superfluorescentie*. Het is reeds in 1954 voorspeld door Dicke. De eerste experimentele waarnemin-

gen vonden plaats in de zeventiger jaren. Sindsdien is het verschijnsel uitgebreid bestudeerd, zowel experimenteel als theoretisch.

4.2 De theorie van Weisskopf en Wigner

In paragraaf 3.1 is op basis van de quantumelectrodynamica aangetoond dat aangeslagen atomen kunnen vervallen naar een grondtoestand onder uitzending van een foton. Gebruik werd gemaakt van storingstheorie. Een dergelijke theorie geeft een uitdrukking voor de overgangswaarschijnlijkheid van de begintoestand van een systeem naar een zekere eindtoestand. Het is de bedoeling dat we nu de eigenlijke evolutie van de begintoestand gaan beschrijven.

Beschouw een systeem van een twee-niveau atoom in een stralingsveld. We nemen aan dat dit systeem in de volgende toestanden kan verkeren:

$$|0\rangle \equiv |e; \{0\}\rangle \quad , \quad \text{het atoom is in een aangeslagen toestand} \\ \text{en er zijn geen fotonen aanwezig;}$$

$$|1\rangle \equiv |g; \{1_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle \quad , \quad \text{het atoom is in de grondtoestand} \\ \text{en er is een foton aanwezig.}$$

Op tijdstip t laat de toestandsvektor van het systeem zich schrijven als

$$|\psi(t)\rangle = c_0(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t} |0\rangle + \sum_1 c_1(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t} |1\rangle \quad , \quad (4.2.1)$$

waar \sum_1 staat voor een som over alle modes van het stralingsveld en waar E_0, E_1 de energie-eigenwaarden zijn van het ongestoorde systeem.

De Hamiltoniaan van het systeem wordt gegeven door

$$H = H_0 + H_1 = H_{\text{at}} + H_{\text{rad}} + H_1 \quad , \quad (4.2.2)$$

waar H_1 de wisselwerking tussen atoom en stralingsveld in rekening brengt:

$$H_1 = - \sum_i \frac{e_i}{m_i c} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \quad . \quad (4.2.3)$$

De kwadratische term in H_1 is klein en dus verwaarloosd.

We eisen dat op tijdstip $t = 0$ het systeem zich in de toestand $|0\rangle$ bevindt. De evolutie van deze toestand wordt bepaald door de volgende vergelijkingen:

$$\frac{dc_0}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \sum_1 c_1 e^{\frac{i}{\hbar}(E_0-E_1)t} \langle 0|H_1|1\rangle \quad , \quad (4.2.4)$$

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{i}{\hbar} c_0 e^{\frac{i}{\hbar}(E_1-E_0)t} \langle 1|H_1|0\rangle \quad . \quad (4.2.5)$$

We gaan deze vergelijkingen oplossen met behulp van de Laplace-transformatie

$$\bar{c}_k(s) = \int_0^{\infty} dt e^{-st - \frac{i}{\hbar}E_k t} c_k(t) \quad , \quad \text{Re } s > 0 \quad , \quad k = 0, 1 \quad , \quad (4.2.6)$$

met inverse

$$c_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} ds e^{st + \frac{i}{\hbar} E_k t} \bar{c}_k(s) \quad , \quad \varepsilon > 0 \quad . \quad (4.2.7)$$

Na Laplace-transformatie luiden de vergelijkingen (4.2.4) en (4.2.5)

$$\left(s + \frac{i}{\hbar} E_0\right) \bar{c}_0 = 1 - \frac{i}{\hbar} \sum_1 \langle 0|H_1|1\rangle \bar{c}_1 \quad , \quad (4.2.8)$$

$$\left(s + \frac{i}{\hbar} E_1\right) \bar{c}_1 = -\frac{i}{\hbar} \langle 1|H_1|0\rangle \bar{c}_0 \quad . \quad (4.2.9)$$

Dit zijn algebraïsche vergelijkingen.

De oplossingen van (4.2.8) en (4.2.9) zijn eenvoudig te vinden. Na gebruik van de inverse Laplace-transformatie (4.2.7) ontstaat

$$c_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} ds \frac{e^{st + \frac{i}{\hbar} E_0 t}}{\Delta(s)} \quad , \quad (4.2.10)$$

$$c_1(t) = -\frac{1}{2\pi \hbar} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} ds \frac{e^{st + \frac{i}{\hbar} E_1 t}}{\Delta(s) \left(s + \frac{i}{\hbar} E_1\right)} \langle 1|H_1|0\rangle \quad . \quad (4.2.11)$$

Hierin is

$$\Delta(s) = s + \frac{i}{\hbar} E_0 + \frac{1}{2} \Gamma(s) \quad , \quad (4.2.12)$$

$$\frac{1}{2} \Gamma(s) = \frac{1}{\hbar^2} \sum_1 \frac{|\langle 0|H_1|1\rangle|^2}{s + \frac{i}{\hbar} E_1} \quad . \quad (4.2.13)$$

De integranden in (4.2.10) en (4.2.11) zijn analytisch voor $\text{Re } s > 0$ (ga dit na!).

We zijn nu in het bijzonder geïnteresseerd in het gedrag van $c_0(t)$ en $c_1(t)$ voor grote tijden. Immers, de leidende termen in $c_i(t)$ voor grote tijden geven informatie over het verval van het atoom. Hoe berekenen we nu $c_i(t)$ met behulp van (4.2.10) en (4.2.11) voor grote t ? Om dat te bepalen voor (4.2.10) verplaatsen we de contour geleidelijk naar links tot we op een nulpunt van de noemer $\Delta(s)$ stuiten. Als het nulpunt met het grootste reële deel zich bevindt bij s_0 dan kan de contour worden vervangen door een cirkeltje om s_0 heen en een lijn parallel aan de imaginaire as, maar nu links van s_0 lopend. Verder naar links verplaatsen van de contour kan dan gebeuren tot we een volgend nulpunt tegenkomen. Nu is voor grote t de bijdrage van s_i met het grootste reële deel (hier s_0) dominant over de bijdragen van alle meer naar links gelegen nulpunten, daar immers de bijdragen evenredig zijn met $\exp(s_i t)$. Alleen s_0 behoeft dus te worden bekeken, m.a.w. het nulpunt met het grootste reële deel van $\Delta(s)$.

Het nulstellen van (4.2.12) levert een transcendente vergelijking die niet eenvoudig is op te lossen. We bedenken nu echter dat $\Gamma(s)$ volgens (4.2.13) kwadratisch is in de wisselwerking, en dus als een kleine correctie in (4.2.12) mag worden beschouwd. Het nulpunt van $\Delta(s)$ ligt dus in de buurt van $-(i/\hbar)E_0$. Een goede benadering van

het nulpunt volgt door deze waarde in te vullen in de uitdrukking voor $\Gamma(s)$, dus door te vervangen:

$$\Gamma(s) \longrightarrow \Gamma\left(-\frac{i}{\hbar}E_0 + \varepsilon\right) \quad , \quad (4.2.14)$$

met kleine positieve ε ; deze is toegevoegd omdat anders $\Gamma(s)$ niet goed gedefinieerd is (de noemer zou nul kunnen worden). De hier gemaakte benadering om de functie $\Gamma(s)$ te vervangen door zijn waarde in een specifiek punt heet de *Weisskopf-Wigner-benadering*. De benadering is geoorloofd als de functie langzaam varieert, en als de resulterende functiewaarde klein is.

We bekijken nu het gedrag van $\Gamma(s)$ nader. De som over de toestanden 1 is een som over alle modes van het elektromagnetische veld met één foton. In feite is \sum_1 dus een integraal, zodat we kunnen schrijven

$$\frac{1}{2}\Gamma(s) = \frac{1}{\hbar^2} \int dE_1 g(E_1) \frac{|\langle 0|H_1|1\rangle|^2}{s + \frac{i}{\hbar}E_1} \quad . \quad (4.2.15)$$

De factor $g(E_1)$ brengt de mode-dichtheid in rekening. De berekening van $\Gamma(s)$ in de Weisskopf-Wigner-benadering kan nu eenvoudig gebeuren door de hulprelatie

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{x + i\varepsilon} = \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right) - i\pi\delta(x) \quad (4.2.16)$$

te gebruiken. Hierin is

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x} f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} dx \frac{1}{x} f(x) + \int_{\varepsilon}^{\infty} dx \frac{1}{x} f(x) \right] \quad . \quad (4.2.17)$$

We vinden nu dat $\Delta(s)$ mag worden vervangen door de lineaire uitdrukking

$$\Delta(s) \longrightarrow s + \frac{i}{\hbar}E_0 + \frac{i}{\hbar}\Delta E + \frac{1}{2}\Gamma \quad , \quad (4.2.18)$$

met

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Gamma &= \frac{\pi}{\hbar} \sum_1 |\langle 0|H_1|1\rangle|^2 \delta(E_1 - E_0) = \\ &= \frac{\pi}{\hbar} \int dE_1 g(E_1) |\langle 0|H_1|1\rangle|^2 \delta(E_1 - E_0) \quad , \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

$$\begin{aligned} \Delta E &= -\mathcal{P} \sum_1 |\langle 0|H_1|1\rangle|^2 \frac{1}{E_1 - E_0} = \\ &= -\mathcal{P} \int dE_1 g(E_1) |\langle 0|H_1|1\rangle|^2 \frac{1}{E_1 - E_0} \quad . \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

In de integralen voor c_0 en c_1 hebben we na gebruik van de Weisskopf-Wigner-benadering slechts te maken met simpele polen. Uitwerken geeft

$$c_0(t) = e^{-\frac{1}{2}\Gamma t - \frac{i}{\hbar}\Delta E t} \quad , \quad (4.2.21)$$

$$c_1(t) = \frac{\langle 1|H_1|0\rangle}{E_1 - E_0 - \Delta E + \frac{1}{2}i\hbar\Gamma} \left(1 - e^{\frac{i}{\hbar}E_1 t - \frac{i}{\hbar}E_0 t - \frac{i}{\hbar}\Delta E t - \frac{1}{2}\Gamma t} \right) . \quad (4.2.22)$$

We vinden dus exponentieel verval van de begintoestand.

In de limiet $t \rightarrow \infty$ verschijnt

$$|c_0(t)|^2 = 0 \quad , \quad (4.2.23)$$

$$|c_1(t)|^2 = \frac{|\langle 1|H_1|0\rangle|^2}{(E_1 - E_0 - \Delta E)^2 + \frac{1}{4}\hbar^2\Gamma^2} . \quad (4.2.24)$$

Er is dus compleet verval zoals verwacht. De energie is echter niet scherp behouden, want er is een eindige *lijnbreedte* $\frac{1}{2}\hbar\Gamma$ en een *lijnprofiel*. In de limiet $\Gamma \rightarrow 0$ is er wel scherp energiebehoud.

De lijnbreedte Γ wordt de natuurlijke lijnbreedte genoemd omdat deze inherent is aan de wetten van de quantumtheorie. De in (4.2.19) gegeven uitdrukking voor Γ is gelijk aan de in het vorige hoofdstuk gevonden overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid, volgens de gouden regel van Fermi (zie (3.1.1) en (3.1.2)).

Voorts is de lijn verschoven: de maximale waarde van $|c_1(t)|^2$ wordt gevonden voor $E_1 = E_0 + \Delta E$. De grootheid ΔE staat bekend als de *Lamb-shift* en is in de praktijk bijzonder klein.

Het lijnprofiel is een zogenaamd *Lorentz-profiel*. Andere verbredingseffecten van spectraallijnen komen van Doppler-verschuiving en botsingen tussen atomen. Deze hebben hun eigen karakteristieke lijnprofielen (resp. een Gauss-profiel en, opnieuw, een Lorentz-profiel).

Opgave 17 : Afleiding van de Laplace-getransformeerde vergelijkingen

- Bewijs (4.2.4) en (4.2.5).
- Leid de uitdrukking (4.2.7) voor de inverse Laplace-transformatie af.
- Bewijs (4.2.8) en (4.2.9).

Opgave 18 : Berekening van het atomaire verval in de Weisskopf-Wigner-benadering

- Leid de uitdrukkingen (4.2.21)–(4.2.24) af.
- Laat zien dat er voor $\Gamma \rightarrow 0$ geen lijnverbreding is.

4.3 Jaynes-Cummings-model

In de voorafgaande paragraaf hebben we gekeken naar het verval van een atoom dat is gekoppeld aan een groot aantal modes van het electromagnetische veld. Voor een vervallend atoom in vacuum is dat inderdaad de fysische situatie. Wanneer het atoom echter is opgesloten in een trillholte met goed reflecterende wanden (bv.

een Fabry-Pérot-trilholte), dan verandert het mode-spectrum van het electromagnetische veld. Men kan dan bereiken dat het atoom slechts met een gering aantal modes (of ‘quasi-modes’) is gekoppeld. Deze modes zijn de resonante modes, die juist in de trilholte passen. In het eenvoudigste geval is er slechts koppeling aan een enkele mode. Dit model is bekeken door Jaynes en Cummings in 1963, en sindsdien door vele anderen. Het voordeel van het model is dat het exact is op te lossen, althans in de simpele oorspronkelijke versie (latere modificaties hebben het model weer ingewikkelder gemaakt).

We gebruiken hetzelfde formalisme als in de vorige paragraaf. Er is slechts één relevante mode van het stralingsveld. De Hamiltoniaan van het systeem is weer de som van H_0 en H_1 , waar H_1 de koppeling tussen atoom en stralingsveld geeft.

We willen kijken naar de evolutie van een begintoestand met het atoom in de aangeslagen toestand en het stralingsveld in een toestand met n fotonen (in de ene gepriviligeerde mode). Deze beginconditie is iets algemener dan die van de vorige paragraaf. De toestanden van het systeem die via H_1 zijn gekoppeld zijn nu

$$|0\rangle \equiv |e; \{n\}\rangle \quad , \quad \text{het atoom is in de aangeslagen toestand} \\ \text{en er zijn } n \text{ fotonen aanwezig;}$$

$$|1\rangle \equiv |g; \{n+1\}\rangle \quad , \quad \text{het atoom is in de grondtoestand} \\ \text{en er zijn } n+1 \text{ fotonen aanwezig.}$$

De toestandsvektor van het systeem op het tijdstip t is te schrijven als

$$|\psi(t)\rangle = c_0(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t} |0\rangle + c_1(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t} |1\rangle \quad , \quad (4.3.1)$$

waar E_0, E_1 de energie-eigenwaarden zijn van het ongestoorde systeem.

De evolutie van het systeem kan weer worden gevonden door de Schrödinger-vergelijking op te lossen via Laplace-transformatie. (Oplossen zou ook door directe diagonalisatie kunnen, ga dit na.) We vinden opnieuw (4.2.10)–(4.2.11), met (4.2.12) en een uitdrukking analoog aan (4.2.13) voor $\Gamma(s)$, maar zonder de som over toestanden 1. Het vinden van de nulpunten van $\Delta(s)$ kan nu gebeuren zonder een benadering te maken. Er komt namelijk een eenvoudige vierkantsvergelijking. Uitswerken geeft:

$$c_0(t) = \left[\frac{E_1 - E_0 + W}{2W} e^{(i/2\hbar)Wt} - \frac{E_1 - E_0 - W}{2W} e^{-(i/2\hbar)Wt} \right] e^{(i/2\hbar)(E_0 - E_1)t} \quad , \quad (4.3.2)$$

$$c_1(t) = -\frac{\langle 1|H_1|0\rangle}{W} \left[e^{(i/2\hbar)Wt} - e^{-(i/2\hbar)Wt} \right] e^{(i/2\hbar)(E_1 - E_0)t} \quad , \quad (4.3.3)$$

met $W = [(E_0 - E_1)^2 + 4|\langle 0|H_1|1\rangle|^2]^{1/2}$.

Een meer expliciete vorm voor de ontwikkelingscoëfficiënten ontstaat door het model nader te specificeren, zoals Jaynes en Cummings deden. De vrije Hamiltoniaan voor een twee-niveau-atoom en voor het stralingsveld kan worden geschreven als

$$H_0 = \frac{1}{2}\hbar\Omega\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a \quad . \quad (4.3.4)$$

Hier is $\hbar\Omega$ de afstand tussen de twee atomaire niveaus, en ω de frequentie van de stralingsmode. De twee frequenties kunnen verschillend zijn. We noemen het verschil $\delta \equiv \Omega - \omega$. Het energie-verschil van de toestanden 0 en 1 is dan $E_1 - E_0 = -\hbar\delta$. Voorts is σ_z een van de drie Pauli spin-matrices:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.3.5)$$

De interactie-Hamiltoniaan H_1 verbindt de twee toestanden 0 en 1, en kan worden geschreven als

$$H_1 = \hbar g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-), \quad (4.3.6)$$

met $\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$.

De kansen op de toestanden 0 en 1 kunnen nu verder worden uitgewerkt. Men vindt voor de kansen $P_k(t) \equiv |c_k(t)|^2$ met $k = 0, 1$:

$$P_0(t) = 1 - \frac{4g_n^2}{\delta^2 + 4g_n^2} \sin^2 \left(\sqrt{g_n^2 + \delta^2/4} t \right), \quad (4.3.7)$$

$$P_1(t) = \frac{4g_n^2}{\delta^2 + 4g_n^2} \sin^2 \left(\sqrt{g_n^2 + \delta^2/4} t \right), \quad (4.3.8)$$

met de afkorting $g_n = g\sqrt{n+1}$.

Uit de uitdrukkingen voor de kansen op de toestanden 0 en 1 is te zien dat het verval oscillerend is: het atoom verval wel aanvankelijk (hoewel nooit helemaal tot de grondtoestand, als $\delta \neq 0$), maar keert na enige tijd weer terug in de aangeslagen toestand. Er wordt periodiek energie uitgewisseld tussen het atoom en de veld-mode. Dit verschijnsel van oscillerend verval heet *Rabi-flopping*, er treden *Rabi-oscillaties* op. De Rabi-frequentie is $\omega_{Rabi} = \sqrt{g_n^2 + \delta^2/4}$.

In de Weisskopf-Wigner theorie vonden we geen oscillaties, maar een monotoon exponentieel verval. Dat er daar geen oscillaties zijn kan worden begrepen als een interferentie-effect: door destructieve interferentie worden de Rabi-oscillaties van de vele modes, die aan een atoom in vacuum zijn gekoppeld, juist teniet gedaan en er blijft een monotoon verval over.

De oscillaties die in het Jaynes-Cummings-model worden gevonden zijn ongedempt: het atoom verval nooit definitief. Dit komt, omdat het foton niet weg kan uit de trilhaute. Gedempte oscillaties treden wel op in een iets ander model, het ‘gedempte Jaynes-Cummings-model’ waarin de ideaal reflecterende spiegels zijn vervangen door halfdoorlatende spiegels met een klein maar eindig transmissie-vermogen. Dit is voor het eerst beschouwd door Haroche (1982), en later verder uitgewerkt door Feng en Ujihara (1989).

Opgave 19 : Berekening van de kansen $P_i(t)$

- Bereken de nulpunten van $\Delta(s)$.
- Leid de uitdrukkingen (4.3.2) en (4.3.3) af.
- Bewijs de uitdrukkingen (4.3.7)–(4.3.8) voor de kansen $P_0(t)$ en $P_1(t)$ in het JC-model.

4.4 Superfluorescentie

4.4.1 Afleiding van de bewegingsvergelijkingen

We bekijken een systeem van een aantal (N) atomen. Voor het gemak nemen we aan dat elk van deze atomen zich in een van twee toestanden kan bevinden, een grondtoestand $|g\rangle$ en een aangeslagen toestand $|e\rangle$. Het energieverval tussen deze twee toestanden is $\hbar\omega_0$. Als we het nulpunt van de energie geschikt kiezen dan kunnen we de atomaire Hamiltoniaan schrijven als

$$\begin{aligned} H_{\text{at}} &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \hbar\omega_0 [(|e\rangle_j \langle e|) - (|g\rangle_j \langle g|)] \\ &\equiv \hbar\omega_0 \sum_{j=1}^N R_j^3 \equiv \hbar\omega_0 R^3 \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Hierbij is de atomaire operator R_j^3 gedefinieerd als die operator die $\frac{1}{2}$ oplevert bij inwerking op de aangeslagen toestand en $-\frac{1}{2}$ bij inwerking op de grondtoestand van atoom j .

Tussen de twee atomaire toestanden kunnen overgangen plaats vinden doordat de atomen in wisselwerking zijn met het stralingsveld. De Hamiltoniaan van het stralingsveld is zoals gebruikelijk:

$$H_{\text{rad}} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar\omega_k a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} \quad . \quad (4.4.2)$$

De interactie-Hamiltoniaan die de koppeling van atomen en stralingsveld beschrijft luidt

$$H_{\text{int}} = -\frac{e}{mc} \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_j) \quad , \quad (4.4.3)$$

waar we voor het gemak van de notatie aannemen dat elk atoom slechts één electron heeft (de uitbreiding tot meer electronen per atoom is triviaal) en waar we de kwadratische term in de interactie-Hamiltoniaan verwaarloosd hebben.

Onder de aanname dat alle atomen zich bij benadering in de oorsprong bevinden kunnen we de interactie-Hamiltoniaan representeren als

$$H_{\text{int}} = -i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_0^2}{2\omega_k V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} (a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger) (R^+ - R^-) \quad . \quad (4.4.4)$$

Hierin is $\boldsymbol{\mu} = \langle e | \mathbf{e} \mathbf{r} | g \rangle = \langle g | \mathbf{e} \mathbf{r} | e \rangle$ en

$$R^+ = \sum_{j=1}^N R_j^+ = \sum_{j=1}^N |e\rangle_j \langle g| \quad , \quad R^- = (R^+)^\dagger \quad . \quad (4.4.5)$$

Door commuteren met de Hamiltoniaan kunnen bewegingsvergelijkingen voor de atomaire operatoren en de veldoperatoren in het Heisenberg-beeld worden afgeleid. Daartoe introduceren we eerst langzaam variërende operatoren door

$$R^\pm(t) = \hat{R}^\pm(t) e^{\pm i\omega_0 t} \quad , \quad (4.4.6)$$

$$a_{\mathbf{k}\lambda}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}(t)e^{-i\omega_k t} \quad . \quad (4.4.7)$$

In de zogenaamde *rotating-wave approximation* worden snel variërende termen in de bewegingsvergelijkingen verwaarloosd. In die benadering vinden we voor de tijds-evolutie van de operatoren R^3 , \hat{R}^+ en $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$

$$\frac{dR^3}{dt} = -\frac{1}{\hbar} \sum_{\mathbf{k},\lambda} g_{\mathbf{k}\lambda} \hat{R}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} + \text{h.c.} \quad , \quad (4.4.8)$$

$$\frac{d\hat{R}^+}{dt} = \frac{2}{\hbar} \sum_{\mathbf{k},\lambda} g_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger R^3 e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} \quad , \quad (4.4.9)$$

$$\frac{d\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}}{dt} = \frac{1}{\hbar} g_{\mathbf{k}\lambda} \hat{R}^- e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} \quad . \quad (4.4.10)$$

Hierin is $g_{\mathbf{k}\lambda} = (\hbar\omega_0^2/2\omega_k V)^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu}$.

De formele oplossing van deze laatste vergelijking luidt

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}(0) + \frac{1}{\hbar} g_{\mathbf{k}\lambda} \int_0^t dt' e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t'} \hat{R}^-(t') \quad . \quad (4.4.11)$$

We substitueren (4.4.11) in (4.4.8) en (4.4.9). Daarbij moet goed worden gelet op de operator-volgorde, zodat het rechterlid van (4.4.8) hermitisch blijft en de hermitisch geconjugeerde van (4.4.9) de bewegingsvergelijking voor \hat{R}^- geeft. Uiteraard moeten fysische uitkomsten onafhankelijk zijn van de gekozen volgorde. We vinden

$$\begin{aligned} \frac{dR^3(t)}{dt} &= -\hat{R}^+(t)\hat{F}^-(t) - \hat{F}^+(t)\hat{R}^-(t) \\ &\quad - \frac{1}{\tau} \left[\hat{R}^+(t) \int_0^t dt' D(t-t') \hat{R}^-(t') + \text{h.c.} \right] \quad , \quad (4.4.12) \end{aligned}$$

$$\frac{d\hat{R}^+(t)}{dt} = 2\hat{F}^+(t)R^3(t) + \frac{2}{\tau} \left[\int_0^t dt' D^*(t-t') \hat{R}^+(t') \right] R^3(t) \quad . \quad (4.4.13)$$

Hierbij voerden we de afkortingen in

$$\hat{F}^-(t) = \frac{1}{\hbar} \sum_{\mathbf{k},\lambda} g_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} a_{\mathbf{k}\lambda}(0) \quad , \quad (4.4.14)$$

$$\hat{F}^+(t) = \left(\hat{F}^- \right)^\dagger \quad , \quad (4.4.15)$$

$$\tau^{-1} = \frac{\mu^2 \omega_0^3}{3\pi \hbar c^3} \quad , \quad (4.4.16)$$

$$D(t-t') = \frac{3\pi c^3}{2\omega_0} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \frac{(\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}})^2}{\omega_k V} e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} \quad , \quad (4.4.17)$$

met $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ een eenheidsvector in de richting van $\boldsymbol{\mu}$.

De berekening van $D(t - t')$ uit (4.4.17) is een technisch karwei. Men vindt in goede benadering

$$D(t - t') = \delta(t - t') \quad . \quad (4.4.18)$$

Gebruik (4.4.18) in (4.4.12)–(4.4.13) met

$$\int_0^\infty dx \delta(x) f(x) = \frac{1}{2} f(0) \quad , \quad (4.4.19)$$

omdat

$$\int_{-\infty}^\infty dx \delta(x) f(x) = f(0) \quad (4.4.20)$$

en

$$\delta(x) = \delta(-x) \quad . \quad (4.4.21)$$

Dan verschijnt

$$\frac{dR^3}{dt} = -\hat{R}^+ \hat{F}^- - \hat{F}^+ \hat{R}^- - \frac{1}{\tau} \hat{R}^+ \hat{R}^- \quad , \quad (4.4.22)$$

$$\frac{d\hat{R}^+}{dt} = 2\hat{F}^+ R^3 + \frac{1}{\tau} \hat{R}^+ R^3 \quad . \quad (4.4.23)$$

Met de commutatierelaties van R^+ en R^3 volgt uit (4.4.23)

$$\frac{d\hat{R}^+ \hat{R}^-}{dt} = 2\hat{R}^+ R^3 \hat{F}^- + 2\hat{F}^+ R^3 \hat{R}^- + \frac{2}{\tau} \hat{R}^+ \hat{R}^- (R^3 - 1) \quad . \quad (4.4.24)$$

De vergelijkingen (4.4.22) en (4.4.24) stellen ons in staat om de evolutie van het systeem te volgen. In het bijzonder willen we weten hoe het systeem zich gedraagt op tijdstip $t > 0$ als we weten dat op tijdstip $t = 0$ alle atomen in de aangeslagen toestand zitten en dat er geen fotonen zijn. Daartoe willen we uit (4.4.22) en (4.4.24) een bewegingsvergelijking halen voor de verwachtingswaarden $f^3 \equiv \langle R^3 \rangle$ en $f^{+-} \equiv \langle \hat{R}^+ \hat{R}^- \rangle$.

Opgave 20 : Afleiding van de bewegingsvergelijkingen

- Bewijs de uitdrukking (4.4.4) voor de interactie-Hamiltoniaan.
- Leid de vergelijkingen (4.4.8)–(4.4.10) af.
- Bewijs (4.4.18).

4.4.2 De Hartree-Fock-benadering

We zullen nu proberen om de evolutie van het systeem te bepalen aan de hand van de bewegingsvergelijkingen (4.4.22) en (4.4.24). We nemen aan dat op $t = 0$

alle atomen in de aangeslagen toestand zijn en dat er geen fotonen zijn, zodat de toestand van het systeem is

$$|\psi\rangle = |\{0_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle \prod_{i=1}^N |e\rangle_i \quad . \quad (4.4.25)$$

Omdat we in het Heisenberg-beeld werken is dit de toestand voor alle t . Voor de toestand geldt

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}\lambda}(t=0)|\psi\rangle &= 0 \quad , \\ \langle\psi|a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(0) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

Als we dus de verwachtingswaarde nemen van (4.4.22) en (4.4.24) vallen bijdragen met \hat{F}^\pm weg. We vinden aldus

$$\frac{df^3}{dt} = -\frac{1}{\tau}f^{+-} \quad , \quad (4.4.27)$$

$$\frac{df^{+-}}{dt} = \frac{2}{\tau} [\langle\hat{R}^+\hat{R}^-R^3\rangle - f^{+-}] \quad . \quad (4.4.28)$$

In het rechterlid van de laatste vergelijking treedt de verwachtingswaarde van een product van drie operatoren op, waarvan de tijdontwikkeling onbekend is. Weliswaar zouden we voor dat product van drie operatoren een vergelijking kunnen afleiden analoog aan (4.4.24), maar die vergelijking zou dan in het rechterlid een product van vier operatoren bevatten, zodat dit niet veel helpt.

We kunnen toch informatie uit de vergelijkingen (4.4.27)–(4.4.28) halen als we bereid zijn een benadering te maken. Daartoe gaan we als volgt te werk. Eerst merken we op dat voor $t = 0$ geldt

$$R^3(t=0)|\psi\rangle = \frac{1}{2}N|\psi\rangle \quad , \quad (4.4.29)$$

$$\hat{R}^+(t=0)\hat{R}^-(t=0)|\psi\rangle = N|\psi\rangle \quad . \quad (4.4.30)$$

Immers, men heeft

$$(|e\rangle_j |j\rangle\langle g|) (|g\rangle_k |k\rangle\langle e|) \prod_{i=1}^N |e\rangle_i = \begin{cases} 0 & \text{als } j \neq k \quad , \\ \prod_{i=1}^N |e\rangle_i & \text{als } j = k \quad . \end{cases} \quad (4.4.31)$$

Uit (4.4.29)–(4.4.30) volgt dat voor $t = 0$ geldt

$$\langle\hat{R}^+(t=0)\hat{R}^-(t=0)R^3(t=0)\rangle = \langle\hat{R}^+(t=0)\hat{R}^-(t=0)\rangle\langle R^3(t=0)\rangle = \frac{1}{2}N^2 \quad (4.4.32)$$

en ook

$$\langle R^3(t=0)\hat{R}^+(t=0)\hat{R}^-(t=0)\rangle = \langle R^3(t=0)\rangle\langle\hat{R}^+(t=0)\hat{R}^-(t=0)\rangle = \frac{1}{2}N^2 \quad . \quad (4.4.33)$$

Blijkbaar factoriseren de verwachtingswaarden voor $t = 0$. We veronderstellen nu als benadering dat deze factorisatie ook geldt voor latere tijdstippen. Dit heet de

Hartree-Fock-benadering. In het bijzonder volgt, door (4.4.32) en (4.4.33) van elkaar af te trekken, dat in de Hartree-Fock-benadering geldt

$$\langle [\hat{R}^+ \hat{R}^-, R^3] \rangle = 0 \quad (4.4.34)$$

voor alle t . Nu is de commutator exact 0, zodat dit enig vertrouwen geeft in de gekozen benadering.

De bewegingsvergelijkingen voor de verwachtingswaarden luiden nu

$$\frac{df^3}{dt} = -\frac{1}{\tau} f^{+-} \quad , \quad (4.4.35)$$

$$\frac{df^{+-}}{dt} = \frac{2}{\tau} f^{+-} (f^3 - 1) \quad , \quad (4.4.36)$$

met de begincondities

$$f^3(t=0) = \frac{N}{2} \quad , \quad f^{+-}(t=0) = N \quad . \quad (4.4.37)$$

Oplossen geschiedt door gebruik te maken van het feit dat er een behouden grootte is, gegeven door $(f^3 - 1)^2 + f^{+-}$. Voor $N \gg 1$ ziet de oplossing voor f^3 er uit als

$$f^3(t) = \frac{1}{2} N \tanh \left[-\frac{(t - t_D)N}{2\tau} \right] \quad , \quad (4.4.38)$$

met de vertragingstijd $t_D = (\tau/N) \log N$. Voorts kunnen we de intensiteit van het uitgestraalde licht vinden door berekening van

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{\text{aantal vervallen atomen in } (t, t + dt)}{dt} \hbar\omega_0 = \\ &= -\hbar\omega_0 \frac{df^3}{dt} \quad . \end{aligned} \quad (4.4.39)$$

Men vindt voor de intensiteit $I(t)$

$$I(t) = \hbar\omega_0 \frac{N^2}{4\tau} \text{sech}^2 \left[\frac{(t - t_D)N}{2\tau} \right] \quad . \quad (4.4.40)$$

Het verval van N atomen verschilt dus kwalitatief van het verval van een enkel atoom. In het veeldeeltjes-systeem is een coöperatief effect werkzaam. Dit zorgt ervoor dat het verval niet exponentieel is, maar dat er eerst een tijdje niets gebeurt en dat er vervolgens een lichtpuls ontstaat van intensiteit evenredig met N^2 en van duur evenredig met $1/N$. Dit verschijnsel wordt superfluorescentie (SF) genoemd. SF werd voor het eerst waargenomen door Skribanowitz et al., Phys. Rev. Lett. **30**(1973)390. Aanvankelijk zag het er naar uit dat SF voor belangrijke ontwikkelingen zou kunnen gaan zorgen in de data-communicatie. Daarom werd er eind zeventiger jaren veel onderzoek naar SF gedaan. Uiteindelijk bleek de praktische toepasbaarheid van het verschijnsel niet groot te zijn, omdat ten gevolge van quantumfluctuaties de duur van de vertragingstijd en de hoogte van de puls niet goed controleerbaar waren.

Opgave 21 : Oplossen van de Hartree-Fock-vergelijkingen

- a. Laat zien dat de vergelijkingen (4.4.35) en (4.4.36) een behouden grootte bezitten.
- b. Los de vergelijkingen op en bewijs (4.4.38).
- c. Controleer de formule (4.4.40) voor de intensiteit.

4.5 Aanwijzingen voor de uitwerking van de opgaven

Opgave 17

a. De vergelijkingen volgen uit de Schrödinger-vergelijking

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (H_0 + H_1) |\psi(t)\rangle \quad , \quad (4.5.1)$$

met de condities

$$H_0|0\rangle = E_0|0\rangle \quad , \quad H_0|1\rangle = E_1|1\rangle \quad . \quad (4.5.2)$$

De exponentiaal-factoren in (4.2.1) zijn alvast afgesplitst omdat ze de oplossing zijn van (4.5.1) met de storing H_1 nul. Substitueer (4.2.1) in (4.5.1). Dit geeft met (4.5.2)

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{c}_0 e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t} |0\rangle + i\hbar \sum_1 \dot{c}_1 e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t} |1\rangle = \\ = c_0 e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t} H_1|0\rangle + \sum_1 c_1 e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t} H_1|1\rangle \quad . \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Neem het inproduct van (4.5.3) met respectievelijk de toestand $\langle 0|$ en $\langle 1|$. Bekijk eens de matrix-elementen $\langle 0|H_1|0\rangle$ en $\langle 1|H_1|1\rangle$. De bijdragen tot H_1 bevatten steeds één veldoperator. Dit betekent dat deze matrix-elementen nul zijn omdat aan beide zijden van H_1 toestanden staan met een gelijk aantal fotonen, namelijk nul of één. Aldus volgen (4.2.4) en (4.2.5).

b. Beschouw de Laplace-transform

$$\bar{c}_k(s) = \int_0^{\infty} dt e^{-st - \frac{i}{\hbar}E_k t} c_k(t) \quad , \quad \text{Re } s > 0 \quad , \quad k = 0, 1 \quad . \quad (4.5.4)$$

Daar $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$ als $\text{Re } s > 0$ is, is $\bar{c}_k(s)$ analytisch in het rechterhalfvlak van het complexe s -vlak. Vermenigvuldig (4.5.4) met $\exp\left(st' + \frac{i}{\hbar}E_k t'\right)$ en integreer over s langs een contour parallel aan de imaginaire as in het rechterhalfvlak (dus met $\text{Re } s > 0$). Dit leidt tot

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} ds e^{st' + \frac{i}{\hbar}E_k t'} \bar{c}_k(s) = \\ = \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} ds \int_0^{\infty} dt e^{s(t'-t) + \frac{i}{\hbar}E_k(t'-t)} c_k(t) \quad , \quad \varepsilon > 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Verwissel beide integralen in het rechterlid en gebruik

$$\int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} ds e^{s(t-t')} = 2\pi i \delta(t-t') \quad , \quad (4.5.6)$$

dan volgt

$$c_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} ds e^{st + \frac{i}{\hbar} E_k t} \bar{c}_k(s) \quad , \quad \varepsilon > 0 \quad , \quad k = 0, 1 \quad . \quad (4.5.7)$$

c. Gebruik de hulprelatie

$$\int_0^{\infty} dt e^{-st - \frac{i}{\hbar} E_k t} \frac{dc_k}{dt} = \left(s + \frac{i}{\hbar} E_k \right) \bar{c}_k(s) - c_k(t=0) \quad , \quad (4.5.8)$$

en voorts de begincondities $c_0(t=0) = 1$ en $c_1(t=0) = 0$.

Opgave 18

- a. Het bewijs van (4.2.21)–(4.2.22) volgt door de integratieweg via het linkerhalfvlak te sluiten en de residu-stelling te gebruiken. De afleiding van (4.2.23)–(4.2.24) is daarna zeer eenvoudig.
- b. Voor $\Gamma \rightarrow 0$ vindt men uit (4.2.24) met behulp van de representatie (3.3.5) van de deltafunctie:

$$|c_1|^2 = \frac{2\pi}{\hbar\Gamma} |\langle 1|H_1|0\rangle|^2 \delta(E_1 - E_0 - \Delta E) \quad . \quad (4.5.9)$$

Opgave 19

- a. De nulpunten van $\Delta(s)$ volgen door oplossen van de vierkantsvergelijking

$$\left(s + \frac{i}{\hbar}E_0\right) \left(s + \frac{i}{\hbar}E_1\right) + \frac{1}{\hbar^2} |\langle 0|H_1|1\rangle|^2 = 0 \quad . \quad (4.5.10)$$

De oplossingen zijn

$$s_{1,2} = -\frac{i}{2\hbar}(E_0 + E_1) \pm \frac{i}{2\hbar}W \quad , \quad (4.5.11)$$

met de eerder gegeven W .

- b. De uitdrukkingen volgen direct door de residu-stelling toe te passen op de integralen in (4.2.10) en (4.2.11), voor de twee polen $s_{1,2}$.
- c. De kansen in het JC-model krijgen we door substitutie in (4.3.2)–(4.3.3) van $E_0 - E_1 = \hbar\delta$ en $W = 2\hbar\sqrt{g_n^2 + \delta^2/4}$. Daarbij gebruikten we dat $\langle 0|H_1|1\rangle = \hbar g\sqrt{n+1} = \hbar g_n$.

Opgave 20

a. De interactie-Hamiltoniaan is

$$H_{\text{int}} = -\frac{e}{mc} \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_j) \quad , \quad (4.5.12)$$

met

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_j) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k V}} \left(a_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} + \text{h.c.} \right) \quad . \quad (4.5.13)$$

We maken al meteen een benadering. Neem aan dat alle atomen zo dicht bij elkaar in de oorsprong zitten dat $|\mathbf{r}_j| \ll \lambda$ en dus $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j) \simeq 1$. Verder kunnen we de identiteit schrijven

$$\frac{\mathbf{p}_j}{m} = \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{r}_j, H_{\text{at},j}] \quad , \quad (4.5.14)$$

met

$$H_{\text{at},j} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 (|e\rangle_j \langle e| - |g\rangle_j \langle g|) \quad . \quad (4.5.15)$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{p}_j}{m} &= (|e\rangle_j \langle e| + |g\rangle_j \langle g|) \frac{\mathbf{p}_j}{m} (|e\rangle_j \langle e| + |g\rangle_j \langle g|) = \\ &= \frac{i}{e\hbar} \hbar \omega_0 \boldsymbol{\mu} (|e\rangle_j \langle g| - |g\rangle_j \langle e|) \quad , \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

waarin

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= \langle e | \mathbf{e} \mathbf{r}_j | g \rangle_j \equiv \langle e | \mathbf{e} \mathbf{r} | g \rangle = \\ &= \langle g | \mathbf{e} \mathbf{r}_j | e \rangle_j \equiv \langle g | \mathbf{e} \mathbf{r} | e \rangle \quad . \end{aligned} \quad (4.5.17)$$

Hierbij is verondersteld dat geschikte fasefactoren aan $|e\rangle_j$ en $|g\rangle_j$ zijn toegevoegd zodanig dat $\boldsymbol{\mu}$ reëel is. Met (4.5.16) wordt (4.5.12)

$$H_{\text{int}} = -i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} g_{\mathbf{k}\lambda} \left(a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \right) (R^+ - R^-) \quad , \quad (4.5.18)$$

met

$$g_{\mathbf{k}\lambda} = \left(\frac{\hbar \omega_0^2}{2\omega_k V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} \quad (4.5.19)$$

en

$$R^+ = \sum_{j=1}^N R_j^+ = \sum_{j=1}^N |e\rangle_j \langle g| \quad , \quad (R^+)^\dagger = R^- \quad . \quad (4.5.20)$$

Aldus is (4.4.4) bewezen.

b. Het meeratomige systeem wordt beschreven door de Heisenberg-vergelijkingen

$$\frac{dO_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [O_H, (H_0 + H_{\text{int}})_H] \quad (4.5.21)$$

voor een operator O die in het Schrödinger-beeld onafhankelijk van de tijd is. Hierin is in het Heisenberg-beeld

$$H_0 = \hbar\omega_0 R^3 + \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar\omega_k a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} \quad , \quad (4.5.22)$$

met

$$R^3 = \sum_{j=1}^N R_j^3 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} (|e\rangle_j \langle e| - |g\rangle_j \langle g|) \quad . \quad (4.5.23)$$

Met de commutatierelaties

$$[a_{\mathbf{k}\lambda}, a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad , \quad (4.5.24)$$

$$[R_j^+, R_k^-] = 2R_j^3 \delta_{jk} \quad , \quad (4.5.25)$$

$$[R_j^3, R_k^\pm] = \pm R_j^\pm \delta_{jk} \quad (4.5.26)$$

geeft (4.5.21) nu

$$\frac{dR^3}{dt} = -\frac{1}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} g_{\mathbf{k}\lambda} (a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger) (R^+ + R^-) \quad , \quad (4.5.27)$$

$$\frac{dR^+}{dt} = i\omega_0 R^+ + \frac{2}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} g_{\mathbf{k}\lambda} (a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger) R^3 \quad , \quad (4.5.28)$$

$$\frac{da_{\mathbf{k}\lambda}}{dt} = -i\omega_k a_{\mathbf{k}\lambda} - \frac{1}{\hbar} g_{\mathbf{k}\lambda} (R^+ - R^-) \quad . \quad (4.5.29)$$

Introduceer

$$\hat{R}^\pm = e^{\mp i\omega_0 t} R^\pm \quad , \quad \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} = e^{i\omega_k t} a_{\mathbf{k}\lambda} \quad (4.5.30)$$

en gooi bijdragen met een factor $\exp[\pm i(\omega_0 + \omega_k)t]$ weg, dan worden de bewegingsvergelijkingen

$$\frac{dR^3}{dt} = -\frac{1}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} g_{\mathbf{k}\lambda} \hat{R}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} + \text{h.c.} \quad , \quad (4.5.31)$$

$$\frac{d\hat{R}^+}{dt} = \frac{2}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} g_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger R^3 e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} \quad , \quad (4.5.32)$$

$$\frac{d\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}}{dt} = \frac{1}{\hbar} g_{\mathbf{k}\lambda} \hat{R}^- e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} \quad , \quad (4.5.33)$$

in overeenstemming met (4.4.8)–(4.4.10).

- c. Ga uit van (4.4.17). Vervang $\sum_{\mathbf{k}}$ door een integraal over de \mathbf{k} -ruimte. Noem $d\Omega_{\mathbf{k}}$ een infinitesimale ruimtehoek in de richting \mathbf{k} , dan is $k^2 d\Omega_{\mathbf{k}} dk$ een volume-elementje ter plaatse \mathbf{k} . Dit volume-elementje bevat $k^2 d\Omega_{\mathbf{k}} dk (L/2\pi)^3$ modes van één polarisatie zodat

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3 c^3} \int_0^\infty d\omega_k \omega_k^2 \int d\Omega_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} . \quad (4.5.34)$$

Omdat $\{\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}, \mathbf{e}_{\mathbf{k}2}, \hat{\mathbf{k}}\}$ een orthonormaal stelsel vormen, geldt

$$\int d\Omega_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}})^2 = \int d\Omega_{\mathbf{k}} (\mathbf{U} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) : \hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}} = 8\pi/3 , \quad (4.5.35)$$

wegens $\int d\Omega_{\mathbf{k}} \hat{k}_i \hat{k}_j = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij}$. Zo krijgen we

$$D(t-t') = \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^\infty d\omega_k \omega_k e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} . \quad (4.5.36)$$

Neem een testfunctie $H(t')$ die praktisch constant is over een tijdsinterval ω_0^{-1} . Er geldt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt' D(t-t') H(t') &= \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' H(t') \int_0^\infty d\omega_k \omega_k e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' H(t') \int_0^\infty d\omega_k e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} \\ &\quad - \frac{i}{2\pi\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' H(t') \int_0^\infty d\omega_k \frac{d}{dt'} e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} . \end{aligned} \quad (4.5.37)$$

De tweede term in het rechterlid kan partieel worden geïntegreerd en vervolgens worden verwaarloosd ten opzichte van de eerste, omdat

$$\left| \frac{dH/dt'}{\omega_0 H} \right| \ll 1 . \quad (4.5.38)$$

Er blijft

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' D(t-t') H(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' H(t') \int_0^\infty d\omega_k e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} . \quad (4.5.39)$$

Neem in het rechterlid $\omega = \omega_k - \omega_0$ dan volgt met de bekende Fourier-representatie voor de δ -functie

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' D(t-t') H(t') = \int_{-\infty}^{\infty} dt' H(t') \left[\delta(t-t') - \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} \right] . \quad (4.5.40)$$

De tweede term in het rechterlid mag worden verwaarloosd omdat $\int_{-\infty}^{\infty} dt' H(t') \exp(-i\omega t') \simeq 0$ voor $\omega > \omega_0$. Daarmee is het bewijs van (4.4.18) geleverd.

Opgave 21

a. Men kan inderdaad gemakkelijk nagaan dat geldt

$$\frac{d}{dt} [(f^3 - 1)^2 + f^{+-}] = 0 \quad . \quad (4.5.41)$$

b. Wegens de begincondities volgt uit (4.5.41)

$$(f^3 - 1)^2 + f^{+-} = \left(\frac{N}{2} - 1\right)^2 + N \quad , \quad (4.5.42)$$

hetgeen met (4.4.35) geeft

$$\frac{df^3}{dt} = \frac{1}{\tau} \left[(f^3 - 1)^2 - \frac{N^2}{4} - 1 \right] \quad . \quad (4.5.43)$$

Oplossen van deze differentiaalvergelijking is niet moeilijk:

$$\int^{f^3-1} dx \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{t}{\tau} + \text{constante} \quad , \quad (4.5.44)$$

met $a = (N^2/4 + 1)^{1/2}$, zodat

$$\frac{1}{2a} \log \left| \frac{a - f^3 + 1}{a + f^3 - 1} \right| = \frac{t}{\tau} + \text{constante} \quad . \quad (4.5.45)$$

Met de beginconditie geeft dit

$$\log \left| \frac{a - f^3 + 1}{a + f^3 - 1} \cdot \frac{a + N/2 - 1}{a - N/2 + 1} \right| = \frac{2ta}{\tau} \quad . \quad (4.5.46)$$

Oplossen naar f^3 levert

$$f^3 = 1 + a \tanh \left[-\frac{ta}{\tau} + \log \left(\frac{a + N/2 - 1}{a - N/2 + 1} \right)^{1/2} \right] \quad (4.5.47)$$

en voor $N \gg 1$

$$f^3 = \frac{1}{2}N \tanh \left[-\frac{(t - t_D)N}{2\tau} \right] \quad , \quad (4.5.48)$$

met

$$t_D = \frac{\tau}{N} \log N \quad . \quad (4.5.49)$$

c. De uitdrukking voor de intensiteit volgt eenvoudig door differentiatie van (4.5.48). Daarbij gebruikt men

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} = \text{sech}^2 x \quad . \quad (4.5.50)$$

Hoofdstuk 5

Gestimuleerde emissie van fotonen in lasers

5.1 Inleiding

In paragraaf 3.1 hebben we gezien dat emissie van fotonen door atomen en moleculen via twee mechanismen kan plaats vinden: door *geïnduceerde* (of *gestimuleerde*) emissie en door *spontane* emissie. In het vorige hoofdstuk zagen we dat bij spontane emissie een coöperatief effect (superfluorescentie) kan optreden. Bij geïnduceerde emissie kunnen coöperatieve effecten eveneens een rol spelen. De door het ene molecuul uitgezonden straling kan emissie door een volgend molecuul stimuleren. Het resultaat van herhaalde stimulering van emissie in een collectie moleculen is een “versterking” van het licht dat is ingestraald. Op dit proces van *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* berust de werking van een laser.

Een belangrijke vereiste voor het optreden van een coöperatief gestimuleerd emissie-proces is de aanwezigheid van een voldoende groot aantal moleculen in een aangeslagen toestand. Immers, de gestimuleerde emissie zal de absorptie alleen dan overtreffen als er zich meer moleculen in het aangeslagen niveau bevinden dan in het niveau waarnaar de moleculen na de gestimuleerde emissie terugvallen. Met andere woorden: er moet een zo sterk mogelijke *populatie-inversie* zijn gerealiseerd. In een gewoon medium in thermisch evenwicht wordt de populatie van de verschillende niveaus bepaald door Boltzmann-factoren. Aangeslagen niveaus zijn dan in het algemeen minder bezet dan het grondniveau. Om populatie-inversie te verkrijgen moet er dus een niet-evenwichts-situatie worden gecreëerd waarbij een geschikt gekozen aangeslagen niveau overbezet is. Dit kan gebeuren door voortdurend aan het medium te “pompen”, bij voorbeeld door instraling van licht van een geschikte frequentie of door een elektrische ontlading.

Een met het voorafgaande samenhangende eis is die van opsluiting van de fotonen. Ze moeten een tijdje aan het stimuleringsproces mee kunnen doen voor ze uit het systeem mogen ontsnappen. Men zegt wel dat het “fotonlek” niet te groot mag zijn. Dit wordt in de praktijk gerealiseerd door het systeem op te sluiten tussen halfdoorlatende spiegels, zoals in een Fabry-Pérot-interferometer. Door een hoog reflectievermogen (en dus een corresponderend laag transmissievermogen) van de

spiegels wordt bereikt dat de fotonen slechts met moeite uit het systeem kunnen ontsnappen.

Als aan deze twee eisen in voldoende mate is voldaan dan kan het systeem boven de zogenaamde *drempel* raken, zodat het laser-mechanisme van voortdurende gestimuleerde emissie op gang kan komen. De uittredende fotonen blijken dan een statistiek te vertonen die meer en meer gaat lijken op die van een coherente toestand. Die coherentie van het uittredende licht is een van de opvallendste eigenschappen van een laser die is “aangegaan” (d.i. die boven de drempel is gekomen).

In de volgende paragrafen zullen we aan de hand van een paar relatief eenvoudige modellen laten zien hoe de boven omschreven karakteristieken van een laser kunnen worden begrepen. We zullen niet overgaan tot een bespreking van de eigenschappen van allerlei verschillende typen lasers, maar ons beperken tot een theoretische beschrijving van het basis-mechanisme dat voor al die typen hetzelfde is.

5.2 Coherentie en chaos bij absorptie en emissie van fotonen door een systeem van atomen met vaste populaties

5.2.1 Dynamica van het gemiddeld fotonaantal

We beschouwen een systeem van twee-niveaux-atomen met populaties N_g en N_e , die door een of ander niet nader beschreven mechanisme constant blijven. We nemen aan dat dit systeem in wisselwerking is met met één resonerende mode van het stralingsveld (alle andere modes van het veld worden genegeerd). Het (gemiddelde) bezettingsgetal van die mode (dus het gemiddeld aantal fotonen in die mode) noemen we \bar{n} . Deze \bar{n} verandert in de tijd door absorptie- en door emissie-processen. Het aantal absorptie-processen per tijdseenheid is evenredig met het gemiddeld aantal aanwezige fotonen \bar{n} en met het aantal atomen N_g in de grondtoestand. Het aantal emissies per tijdseenheid is evenredig met het aantal aanwezige fotonen plus 1 (door geïnduceerde, respectievelijk spontane emissie) en met het aantal atomen N_e in de aangestelde toestand. We kunnen dus schrijven:

$$\frac{d\bar{n}}{dt} = G(\bar{n} + 1)N_e - G\bar{n}N_g \quad . \quad (5.2.1)$$

Dit heet een “*rate equation*” voor het (gemiddeld) bezettingsgetal. De factor G is evenredig met het kwadraat van het aan de emissie- en absorptie-processen geassocieerde overgangsmatrix-element.

Oplossen van de differentiaalvergelijking (5.2.1) toont dat de tijdontwikkeling van \bar{n} zeer verschillend is voor de gevallen $N_g > N_e$ en $N_g < N_e$. In het eerste geval ontstaat voor $t \rightarrow \infty$

$$\bar{n}(\infty) = \frac{N_e}{N_g - N_e} \quad . \quad (5.2.2)$$

In het tweede geval komt er voor $t \rightarrow \infty$ iets heel anders, namelijk $\bar{n} \rightarrow \infty$. Blijkbaar is een groot fotonaantal mogelijk als er populatie-inversie is. (Het oneindig worden van \bar{n} is natuurlijk een onrealistisch trekje van het model; het is een gevolg van het rigoreus vasthouden van de atomaire populaties.)

Opgave 22 : Oplossing van de “rate”-vergelijking voor het gemiddeld foton aantal

Los de “rate”-vergelijking:

$$\frac{d\bar{n}}{dt} = G(\bar{n} + 1)N_e - G\bar{n}N_g \quad . \quad (5.2.3)$$

op. Laat zien dat het foton aantal naar oneindig gaat als er populatie-inversie is.

5.2.2 Statistiek van de fotonen

Zij P_n de kans dat precies n fotonen aanwezig zijn in het systeem. Tengevolge van absorptie- en emissie-processen voldoet P_n aan de differentiaalvergelijking

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{dt} = & -GN_e(n+1)P_n - GN_g nP_n \\ & + GN_e nP_{n-1} + GN_g(n+1)P_{n+1} \quad . \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

De termen in de eerste regel ontstaan doordat het aantal fotonen van n verandert in $n+1$ door emissie-processen, en in $n-1$ door absorptie-processen. De termen in de tweede regel treden op, omdat het aantal fotonen van $n-1$ in n kan veranderen door emissie-processen, en van $n+1$ in n door absorptie-processen.

De vergelijking (5.2.4) bepaalt de tijdontwikkeling van de collectie kansen P_n volkomen, indien begincondities zijn gegeven. Vergelijkingen van dit type voor de tijdafgeleide van een (verzameling) kans(en) heten in de literatuur *master-vergelijkingen*.

We lossen de master-vergelijking (5.2.4) op door de tijdafgeleide te nemen van de genererende functie

$$F(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n \quad (5.2.5)$$

en het resultaat om te schrijven in termen van afgeleiden naar z van deze functie. Op die manier verkrijgen we een partiële differentiaalvergelijking voor F . Deze luidt

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [GN_e(1-z)z - GN_g(1-z)] \frac{\partial F}{\partial z} = GN_e(z-1)F \quad . \quad (5.2.6)$$

Oplossen van de eerste-orde lineaire partiële differentiaalvergelijking (5.2.6) kan gebeuren met behulp van de methode van de karakteristieken. Het resultaat is

$$F(z, t) = \frac{N_g - N_e}{N_g - N_e z - N_e(1-z) \exp} F \left(\frac{N_g - N_e z - N_g(1-z) \exp}{N_g - N_e z - N_e(1-z) \exp}, t = 0 \right) \quad , \quad (5.2.7)$$

met

$$\exp \equiv \exp[-G(N_g - N_e)t] \quad . \quad (5.2.8)$$

Met behulp van (5.2.7) kan de tijdontwikkeling van de fotonverdeling worden berekend uitgaande van een zekere verdeling op tijdstip $t = 0$. We zullen nu enkele voorbeelden bezien.

Laten we eens aannemen dat op $t = 0$ de fotonverdeling chaotisch is, dus dat geldt

$$P_n(t = 0) = \frac{x_0^n}{(1 + x_0)^{n+1}} \quad , \quad x_0 = \bar{n}(t = 0) \quad . \quad (5.2.9)$$

Met behulp van de algemene oplossing (5.2.7) volgt dan dat ook voor latere tijdstippen de verdeling chaotisch blijft. Als $N_g > N_e$ is de eindtoestand stabiel met $\bar{n}(t = \infty) = N_e / (N_g - N_e)$.

Als tweede voorbeeld bekijken we een coherente begintoestand. Neem aan dat voor $t = 0$ de verdeling is

$$P_n(t = 0) = e^{-y_0} \frac{y_0^n}{n!} \quad , \quad y_0 = \bar{n}(t = 0) \quad . \quad (5.2.10)$$

Men bewijst nu dat voor $N_g > N_e$ de verdeling niet coherent blijft en zelfs chaotisch wordt voor $t \rightarrow \infty$. Echter bij populatie-inversie vindt men

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta n^2}{\bar{n}^2} \simeq \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{(\alpha + 1)^2} \quad , \quad \alpha = \frac{N_e}{(N_e - N_g)\bar{n}(t = 0)} \quad . \quad (5.2.11)$$

Als $\alpha \ll 1$ dan wordt de fotonverdeling scherp voor $t \rightarrow \infty$ en is de output van de laser niet chaotisch.

We hebben nu gezien dat de fotonstatistiek beschreven door de eenvoudige vergelijking (5.2.4) kwalitatief in overeenstemming is met de realiteit. Het model is echter te simpel om een reële situatie adequaat te beschrijven, daar in de praktijk de atomaire populaties niet vast zijn.

Opgave 23 : Oplossing van de master-vergelijking

- Laat zien dat de rate-vergelijking (5.2.1) volgt uit de master-vergelijking (5.2.4).
- Leid de algemene oplossing (5.2.7) af.
- Bepaal de fotonverdeling op tijdstip t , indien voor $t = 0$ de verdeling chaotisch is.
- Bereken de fotonverdeling op tijdstip t , indien de verdeling voor $t = 0$ coherent is.

5.3 Model voor een laser met variabele populaties

5.3.1 Beschrijving van het model

In het model dat in de vorige paragraaf is besproken zijn de atomaire populaties vast. Bovendien blijven de fotonen altijd in het systeem: ze kunnen niet weglekken. Voor dat model hebben we gezien dat er door gestimuleerde emissie zeer veel fotonen in het systeem worden gecreëerd indien er populatie-inversie is. De invloed van variaties in de atomaire populaties en van het weglekken van de fotonen is echter onduidelijk gebleven. Daarom bekijken we nu een meer realistisch model waarin die

effecten wel optreden. Om het model niet al te ingewikkeld te maken zullen we het zo inrichten dat er in ieder geval populatie-inversie is.

We beschouwen een systeem met N_e atomen in een aangeslagen toestand e en met n fotonen in één mode. Net als tevoren verwaarlozen we alle andere modes. De atomen kunnen, onder uitzending van een foton in de beschouwde mode, terugvallen naar een tweede lagere toestand die we naar analogie met het voorafgaande weer g zullen noemen. In de voorgaande paragraaf kon g eventueel de echte atomaire grondtoestand zijn, hoewel dat niet noodzakelijk was. Hier zullen we echter aannemen dat g beslist niet de atomaire grondtoestand is, en dat atomen in de toestand g instantaan verder vervallen naar een nog lager gelegen toestand g' (bij voorbeeld de echte atomaire grondtoestand). De populatie van de toestand g is dus steeds nul. Om die reden kunnen er dan ook geen absorptieprocessen plaatsvinden, waarbij de atomen van de toestand g weer naar de toestand e getild zouden worden. Voorts veronderstellen we dat de atomen in de aangeslagen toestand e om andere reden dan foton-emissie in de resonerende mode (bij voorbeeld door botsingen of door emissie van een foton in een andere nauwelijks bezette mode) kunnen vervallen en aldus voor het systeem verloren gaan. De overgangswaarschijnlijkheid voor deze processen wordt gegeven door Γ . We introduceren verder een pomp, gekarakteriseerd door de parameter R , die een vast aantal atomen per tijdseenheid in de aangeslagen toestand e brengt. Dit kan bij voorbeeld gebeuren door “pompoptique”, waarbij licht wordt gebruikt om het niveau e te vullen vanuit een ander (hier niet beschouwd) niveau. Tenslotte is er een fotonlek, gekarakteriseerd door de parameter C , waarvan de grootte evenredig is met het aantal aanwezige fotonen.

5.3.2 Dynamica van het fotonaantal en van de atomaire populatie

Voor het boven beschreven model luiden de rate-vergelijkingen:

$$\frac{d\bar{n}}{dt} = G\bar{N}_e(\bar{n} + 1) - C\bar{n} \quad , \quad (5.3.1)$$

$$\frac{d\bar{N}_e}{dt} = -G\bar{N}_e(\bar{n} + 1) - \Gamma\bar{N}_e + R \quad . \quad (5.3.2)$$

In de praktijk geldt steeds $\Gamma/G \gg 1$ en $C/G \gg 1$. Afhankelijk van de onderlinge grootte van Γ en C spreekt men van een trillholte van goede kwaliteit (als $C \ll \Gamma$) of van een trillholte van slechte kwaliteit (als $C \gg \Gamma$).

Het oplossen van de gekoppelde niet-lineaire differentiaalvergelijkingen (5.3.1)-(5.3.2) is niet triviaal. We kijken daarom alleen naar het gedrag voor grote tijden. Omdat noch \bar{n} noch \bar{N}_e dan nog veel zullen veranderen kunnen we hun waarden vinden door de linkerleden van (5.3.1) en (5.3.2) nul te stellen. Voor \bar{n} vinden we dan

$$\bar{n} = \frac{1}{2}(\xi - 1)\frac{\Gamma}{G} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \left[(\xi - 1)\frac{\Gamma}{G} - 1 \right]^2 + 4\xi\frac{\Gamma}{G} \right\}^{1/2} \quad , \quad (5.3.3)$$

met de afkorting $\xi = RG/(\Gamma C)$. Als we nu gebruiken dat $\Gamma/G \gg 1$ dan kunnen we de vierkantswortel in (5.3.3) ontwikkelen mits maar ξ niet al te dicht bij 1 ligt. De

waarde van \bar{n} blijkt dan kritisch af te hangen van ξ . Er komt namelijk

$$\bar{n} \simeq \frac{\xi}{1-\xi} \quad , \quad \xi < 1 \quad , \quad (5.3.4)$$

$$\bar{n} \simeq (\xi - 1) \frac{\Gamma}{G} \quad , \quad \xi > 1 \quad . \quad (5.3.5)$$

Omdat $\Gamma/G \gg 1$ is, bereikt \bar{n} al snel grote waarden als ξ boven 1 komt, terwijl \bar{n} van de orde van 1 is voor alle $\xi < 1$. Omdat het gedrag zo radicaal verandert bij ξ spreekt men van een *drempel*. Pas als de drempel wordt overschreden (dus als de pomp-parameter R groter wordt dan $R_{th} \equiv \Gamma C/G$) “gaat” de door dit model beschreven laser “aan”.

We kunnen ook de stationaire waarde van de gemiddelde atomaire populatie \bar{N}_e vinden. Er komt

$$\bar{N}_e = \frac{R}{G(\bar{n} + 1) + \Gamma} \quad . \quad (5.3.6)$$

Voor de twee gevallen vindt men

$$\bar{N}_e \simeq \xi \frac{C}{G} \quad , \quad \xi < 1 \quad , \quad (5.3.7)$$

$$\bar{N}_e \simeq \frac{C}{G} \quad , \quad \xi > 1 \quad . \quad (5.3.8)$$

We merken op dat de hier gegeven uitdrukkingen voor \bar{n} en \bar{N}_e niet gelden voor ξ in de buurt van 1; in dat geval moet de uitdrukking (5.3.3) wat preciezer worden geanalyseerd. Men vindt dan een wat meer geleidelijke aansluiting tussen de twee regimes.

Opgave 24 : Bepaling van de stationaire oplossing van de rate-vergelijkingen (5.3.1)-(5.3.2)

- Bewijs (5.3.3) en (5.3.6).
- Leid (5.3.4)-(5.3.5) af uit (5.3.3) door ontwikkelen naar G/Γ .
- Controleer (5.3.7)-(5.3.8).
- Bespreek de balans van de fotonen en van de atomen, zowel onder als boven de drempel, door invullen van de uitdrukkingen (5.3.4)-(5.3.5) en (5.3.7)-(5.3.8) in de rate-vergelijkingen.

5.3.3 Fotonstatistiek

Om statistiek te bedrijven gebruiken we weer de master-vergelijking als basis. Noem P_{n,N_e} de kans dat het systeem n fotonen telt en N_e aangeslagen atomen. De master-vergelijking bevat dan de termen die in de tabel staan vermeld. Aldus vinden we de master-vergelijking

	winst	verlies
emissie	$n - 1, N_e + 1 \rightarrow n, N_e$ $+G(N_e + 1)(n - 1 + 1)P_{n-1, N_e+1}$	$n, N_e \rightarrow n + 1, N_e - 1$ $-GN_e(n + 1)P_{n, N_e}$
botsingsverlies	$n, N_e + 1 \rightarrow n, N_e$ $+ \Gamma(N_e + 1)P_{n, N_e+1}$	$n, N_e \rightarrow n, N_e - 1$ $- \Gamma N_e P_{n, N_e}$
pomp	$n, N_e - 1 \rightarrow n, N_e$ $+ R P_{n, N_e-1}$	$n, N_e \rightarrow n, N_e + 1$ $- R P_{n, N_e}$
fotonlek	$n + 1, N_e \rightarrow n, N_e$ $+ C(n + 1)P_{n+1, N_e}$	$n, N_e \rightarrow n - 1, N_e$ $- Cn P_{n, N_e}$

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{n, N_e}}{dt} = & -GN_e(n + 1)P_{n, N_e} + G(N_e + 1)nP_{n-1, N_e+1} \\
& - \Gamma N_e P_{n, N_e} + \Gamma(N_e + 1)P_{n, N_e+1} \\
& - RP_{n, N_e} + RP_{n, N_e-1} \\
& - Cn P_{n, N_e} + C(n + 1)P_{n+1, N_e} \quad .
\end{aligned} \tag{5.3.9}$$

Aangezien we fotonstatistiek willen doen zijn we niet geïnteresseerd in de grootte N_e . We sommeren daarom de vergelijking (5.3.9) uit over alle mogelijke waarden voor N_e . Per definitie geldt

$$P_n = \sum_{N_e=0}^{\infty} P_{n, N_e} \quad . \tag{5.3.10}$$

Introduceer nu $P_{N_e|n}$: dit is de kans dat er N_e atomen aangeslagen zijn als het zeker is dat er n fotonen zijn. Duidelijk is dan dat geldt $P_{n, N_e} = P_{N_e|n} P_n$ en zo volgt

$$\sum_{N_e=0}^{\infty} N_e P_{n, N_e} = P_n \sum_{N_e=0}^{\infty} N_e P_{N_e|n} \equiv \bar{N}_e^{(n)} P_n \quad . \tag{5.3.11}$$

Hierin is $\bar{N}_e^{(n)}$ het gemiddeld aantal atomen in de aangeslagen toestand wanneer er n fotonen zijn in het systeem.

Voor P_n halen we uit (5.3.9) met (5.3.11)

$$\begin{aligned}
\frac{dP_n}{dt} = & -G\bar{N}_e^{(n)}(n + 1)P_n + G\bar{N}_e^{(n-1)}n P_{n-1} \\
& - Cn P_n + C(n + 1)P_{n+1} \quad .
\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

We nemen nu aan dat de relaxatietijd voor de atomaire populatie N_e veel korter is dan die voor de fotonpopulatie n . Deze veronderstelling is redelijk voor trilholtjes van goede kwaliteit, waarvoor immers $C \ll \Gamma$ is. Daarom substitueren we voor

$\bar{N}_e^{(n)}$ de evenwichtsuitdrukking (5.3.6), met n in plaats van \bar{n} . (Merk op dat de fotonpopulatie niet in evenwicht hoeft te zijn!) We vinden dan de vergelijking van Scully en Lamb (1967)

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{dt} = & -\frac{GR(n+1)}{\Gamma + G(n+1)}P_n + \frac{GRn}{\Gamma + Gn}P_{n-1} \\ & - CnP_n + C(n+1)P_{n+1} \quad . \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Het tijdsafhankelijke gedrag van de vergelijking (5.3.13) is analytisch lastig te onderzoeken en we beperken ons daarom tot het stationnaire gedrag. In dat geval kan de vergelijking worden opgelost door de termen symmetrisch rond het gelijkteken te groeperen en aldus in te zien dat er een behouden grootte is. Hiermee vindt men eenvoudig

$$P_n = \frac{R}{C(n + \Gamma/G)}P_{n-1} \quad , \quad (5.3.14)$$

hetgeen impliceert

$$P_n = \left(\frac{R}{C}\right)^n \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{k + \Gamma/G}\right) P_0 \quad . \quad (5.3.15)$$

Om de fotonverdeling verder te onderzoeken voeren we tevens een karakteristieke functie in zoals te voren. Er komt

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n = P_0 {}_1F_1\left(1, 1 + \frac{\Gamma}{G}; \frac{Rz}{C}\right) = \\ &= \frac{{}_1F_1(1, 1 + \Gamma/G; Rz/C)}{{}_1F_1(1, 1 + \Gamma/G; R/C)} \quad , \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

omdat $F(1) = 1$. De functie ${}_1F_1$ heet de confluerende hypergeometrische functie en is gedefinieerd als

$${}_1F_1(a, b; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)} \frac{z^n}{n!} \quad . \quad (5.3.17)$$

We gaan nu de fotonverdeling onder en boven de laserdrempel bekijken. Onder de laserdrempel $\xi < 1$ gaan we als volgt te werk. Uit (5.3.15) volgt

$$P_n = \xi^n \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 + kG/\Gamma} P_0 \quad . \quad (5.3.18)$$

Daar $\xi < 1$ is, worden bijdragen voor grote n onbelangrijk. Omdat $G/\Gamma \ll 1$ is, is het zinvol om te benaderen $kG/\Gamma \ll 1$. Na normering vindt men dan

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}} \quad , \quad \bar{n} = \frac{\xi}{1 - \xi} \quad . \quad (5.3.19)$$

Dit is een chaotische verdeling, precies zoals verwacht. Zoals we eerder hebben gezien is de chaotische verdeling een brede verdeling, met een grote standaardafwijking. De fotonverdeling is dus beslist niet scherp.

We bekijken nu de situatie boven de laserdrempel, dus voor $\xi > 1$. Daartoe gaan we uit van (5.3.16). We gebruiken de representatie

$${}_1F_1(a, b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 dt e^{tz} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} \quad , \quad (5.3.20)$$

met $\Gamma(z)$ de gamma-functie van Euler, om af te leiden dat

$${}_1F_1\left(1, \frac{\Gamma}{G} + 1; \frac{Rz}{C}\right) = \frac{\Gamma}{G} \int_0^1 \left[e^{\xi z t} (1-t) \right]^{\Gamma/G-1} e^{\xi z t} dt \quad , \quad (5.3.21)$$

waar werd gebruikt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Na enkele manipulaties vinden we hieruit voor de genererende functie

$$F(z) = \frac{e^{\xi(z-1)\Gamma/G}}{z^{\Gamma/G}} \quad , \quad \xi > 1 \quad , \quad \xi z > 1 \quad . \quad (5.3.22)$$

De breedte van de fotonverdeling boven de drempel wordt nu gegeven door

$$\frac{\overline{n^2} - \bar{n}^2}{\bar{n}^2} = \frac{G}{\Gamma} \frac{\xi}{(\xi-1)^2} = \frac{\xi}{(\xi-1)\bar{n}} \quad , \quad \xi > 1 \quad . \quad (5.3.23)$$

Omdat $G/\Gamma \ll 1$ is, is de verdeling (relatief) scherp, net als de fotonverdeling van een coherente toestand. De verdeling is echter niet dezelfde als die van een coherente toestand. Immers voor die verdeling geldt $\overline{n^2} - \bar{n}^2 - \bar{n} = 0$. Hier vinden we

$$\overline{n^2} - \bar{n}^2 - \bar{n} = \frac{1}{\xi-1} \bar{n} \quad . \quad (5.3.24)$$

We hebben nu dus uit dit eenvoudige model gevonden dat de fotonverdeling onder en boven de laserdrempel zeer verschillend is. Onder de laserdrempel is de fotonverdeling een brede chaotische verdeling. Boven de drempel is de verdeling relatief scherp.

Opgave 25 : Oplossing van de master-vergelijking

- Bewijs (5.3.15).
- Controleer dat (5.3.20) bij reeksontwikkeling leidt tot (5.3.17). Gebruik daarbij de integraalrelatie van Euler:

$$\int_0^1 dt t^a (1-t)^b = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} \quad . \quad (5.3.25)$$

- Bewijs dat voor $\xi > 1$ en $\xi z > 1$ kan worden geschreven

$${}_1F_1\left(1, \frac{\Gamma}{G} + 1; \frac{Rz}{C}\right) = e^{\xi z \Gamma/G} \frac{\Gamma}{G} \left(\frac{\xi z \Gamma}{G} \right)^{-\Gamma/G} \Gamma\left(\frac{\Gamma}{G}\right) \quad . \quad (5.3.26)$$

- Leid (5.3.22) af.
- Bewijs (5.3.23) en (5.3.24).

5.4 Aanwijzingen voor de uitwerking van de opgaven

Opgave 22

De oplossing luidt:

$$\bar{n}(t) = \left[\bar{n}(0) - \frac{N_e}{N_g - N_e} \right] e^{-G(N_g - N_e)t} + \frac{N_e}{N_g - N_e} \quad . \quad (5.4.1)$$

Als $N_g - N_e < 0$, dan geldt $\bar{n}(t \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$, omdat $\bar{n}(0) - N_e/(N_g - N_e) > 0$ en $G(N_g - N_e) < 0$.

Opgave 23

a. Vermenigvuldig (5.2.4) met n en sommeer over n . Dat geeft:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} n P_n &= -GN_e \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)P_n - GN_g \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n \\ &+ GN_e \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_{n-1} + GN_g \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)P_{n+1} \quad . \quad (5.4.2) \end{aligned}$$

Het linkerlid geeft de tijdafgeleide van \bar{n} . In de derde en vierde term rechts verschuiven we de dummy sommatievariabele zodanig dat de sommand evenredig wordt aan P_n , net als in de eerste twee termen. Na optellen van alle termen vallen de bijdragen met sommanden evenredig aan n^2 weg. In de resterende termen gebruiken we dat wegens de normering van de kansen P_n geldt $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$. Aldus ontstaat inderdaad (5.2.1).

b. Volgens de methode van de karakteristieken volgt uit (5.2.6)

$$\frac{dt}{1} \stackrel{(i)}{=} \frac{dz}{GN_e(1-z)z - GN_g(1-z)} \stackrel{(ii)}{=} \frac{dF}{GN_e(z-1)F} \quad . \quad (5.4.3)$$

Uit (i) en (ii) volgen

$$\frac{N_g - N_e z}{1 - z} = \alpha e^{-G(N_g - N_e)t} \quad , \quad (5.4.4)$$

$$(zN_e - N_g)F = \beta \quad , \quad (5.4.5)$$

met $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Kies $\beta = \Phi(\alpha)$ met Φ een nader te bepalen functie. Hieruit volgt

$$(zN_e - N_g)F = \Phi \left(\frac{[N_g - N_e z] \exp^{-1}}{1 - z} \right) \quad , \quad (5.4.6)$$

met $\exp \equiv \exp[-G(N_g - N_e)t]$. Stel $t = 0$ dan

$$(zN_e - N_g)F(z, 0) = \Phi \left(\frac{N_g - N_e z}{1 - z} \right) \quad , \quad (5.4.7)$$

of

$$\Phi(u) = \frac{N_e u - N_g u}{u - N_e} F\left(\frac{u - N_g}{u - N_e}, 0\right) . \quad (5.4.8)$$

Substitueer dit weer in (5.4.6) dan vindt men

$$F(z, t) = \frac{N_g - N_e}{N_g - N_e z - N_e(1 - z) \exp} F\left(\frac{N_g - N_e z - N_g(1 - z) \exp}{N_g - N_e z - N_e(1 - z) \exp}, t = 0\right) . \quad (5.4.9)$$

c. Ga uit van een chaotische verdeling op $t = 0$. De karakteristieke functie is

$$F(z, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zx_0)^n}{(1+x_0)^{n+1}} = \frac{1}{1+(1-z)x_0} , \quad (5.4.10)$$

als $|z| < |(1+x_0)/x_0|$. Met (5.4.9) ontstaat

$$F(z, t) = \frac{1}{1+(1-z)x} , \quad (5.4.11)$$

waar

$$x(t) \equiv \bar{n}(t) = \frac{N_e}{N_g - N_e} (1 - \exp) + x_0 \exp . \quad (5.4.12)$$

Aan (5.4.11) zien we dat de verdeling chaotisch blijft. Uit (5.4.12) volgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{n}(t) = \frac{N_e}{N_g - N_e} , \quad (5.4.13)$$

als $N_g > N_e$.

d. Ga uit van een coherente verdeling op $t = 0$. De karakteristieke functie is

$$F(z, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-y_0} \frac{(zy_0)^n}{n!} = e^{-y_0(1-z)} . \quad (5.4.14)$$

Op latere tijdstippen geldt

$$F(z, t) = \frac{1}{1+(1-z)x} \exp\left[-\frac{(1-z)y}{1+(1-z)x}\right] , \quad (5.4.15)$$

met

$$x = \frac{N_e}{N_g - N_e} (1 - \exp) , \quad (5.4.16)$$

$$y = \bar{n}(t = 0) \exp . \quad (5.4.17)$$

De verdeling is niet meer coherent. Bij $N_g > N_e$ wordt $y = 0$ en $x = N_e/(N_g - N_e)$ voor $t \rightarrow \infty$, zodat dezelfde verdeling ontstaat als in het chaotische geval. Pas op (5.4.15) de regel toe

$$\overline{n^k} = \left(z \frac{d}{dz}\right)^k F(z, t) \Big|_{z=1} , \quad (5.4.18)$$

dan leidt men af

$$\bar{n} = x + y \quad , \quad \overline{\bar{n}^2} = 2x^2 + y^2 + 4xy + x + y \quad . \quad (5.4.19)$$

Bij populatie-inversie hebben we $\exp \rightarrow \infty$ als $t \rightarrow \infty$ en zo

$$\frac{x}{y} \longrightarrow \frac{N_e}{(N_e - N_g)\bar{n}(t=0)} = \alpha \quad , \quad (5.4.20)$$

terwijl $x, y \rightarrow \infty$. Daarom is dan

$$\frac{\overline{\bar{n}^2} - \bar{n}^2}{\bar{n}^2} = \frac{x^2 + 2xy + x + y}{(x + y)^2} \simeq \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{(\alpha + 1)^2} \quad , \quad (5.4.21)$$

als $t \rightarrow \infty$.

Opgave 24

- a. Eliminatie van \bar{N}_e tussen de nul gestelde rechterleden van (5.3.1) en (5.3.2) leidt tot een vierkantsvergelijking voor \bar{n} , namelijk

$$\bar{n}^2 + \bar{n} \left(1 + \frac{\Gamma}{G} - \frac{R}{C} \right) - \frac{R}{C} = 0 \quad . \quad (5.4.22)$$

Oplossen van deze vergelijking en bedenken dat \bar{n} positief moet zijn geeft dan direct (5.3.3). Voorts volgt (5.3.6) uit het nul gestelde rechterlid van (5.3.2).

- b. Ontwikkelen van de vierkantswortel in (5.3.3) voor kleine G/Γ geeft:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \frac{1}{2}(\xi - 1)\frac{\Gamma}{G} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|\xi - 1|\frac{\Gamma}{G} \left[1 + \frac{\xi + 1}{(\xi - 1)^2} \frac{G}{\Gamma} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2}[\xi - 1 + |\xi - 1|]\frac{\Gamma}{G} - \frac{1}{2} + \frac{\xi + 1}{2|\xi - 1|} + \dots \quad . \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

Wegens het optreden van de absoluutstrepen moeten de gevallen $\xi > 1$ en $\xi < 1$ apart worden bekeken. Men vindt inderdaad in leidende orde (5.3.4) en (5.3.5).

- c. Na invullen van (5.3.4)-(5.3.5) in (5.3.6) en weggooien van alle niet-leidende termen ontstaat (5.3.7)-(5.3.8).
- d. Opmaken van de fotonbalans toont dat onder de drempel het fotonlek wordt gecompenseerd door de som van de geïnduceerde en de spontane emissie (die van gelijke orde zijn), terwijl boven de drempel de spontane emissie is te verwaarlozen en het fotonlek volledig wordt gecompenseerd door de geïnduceerde emissie. De atomaire balans laat zien dat onder de drempel de pomp de verliezen door botsingen compenseert, terwijl het verlies door foton-emissie (spontaan of geïnduceerd) geen rol speelt. Boven de drempel compenseert de pomp de botsingsverliezen en de verliezen door de geïnduceerde emissie (de spontane emissie is opnieuw onbelangrijk).

Opgave 25

- a. In de stationnaire toestand verschijnt

$$\frac{GR(n+1)P_n}{\Gamma + G(n+1)} - C(n+1)P_{n+1} = \frac{GRnP_{n-1}}{\Gamma + Gn} - CnP_n \quad . \quad (5.4.24)$$

De vorm links is blijkbaar onafhankelijk van n en derhalve gelijk aan de waarde voor $n = 0$, die nul is. Daaruit volgt (5.3.15).

- b. Ontwikkel $\exp(tz)$ in een machtreeks en gebruik dat $a(a+1)\dots(a+n-1) = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$.
- c. Ga uit van (5.3.21). De vorm $\exp(\xi z t)(1-t)$ is extreem voor $t = 1 - 1/(\xi z)$, dus voor $t > 0$ als $\xi z > 1$. Omdat genoemde vorm gelijk aan 1 is bij $t = 0$, geldt $|\exp(\xi z t)(1-t)| < 1$ voor $t < 0$, als $\xi z > 1$. Daar $\Gamma/G \gg 1$ is, krijgen we

$$\left[e^{\xi z t}(1-t) \right]^{\Gamma/G} \simeq 0 \quad , \quad (5.4.25)$$

voor $t < 0$ en $\xi z > 1$. De ondergrens nul in (5.3.21) mag dus worden verplaatst naar $-\infty$. Na een triviale transformatie vinden we aldus

$${}_1F_1\left(1, \frac{\Gamma}{G} + 1; \frac{Rz}{C}\right) = e^{\xi z \Gamma/G} \frac{\Gamma}{G} \left(\frac{\xi z \Gamma}{G}\right)^{-\Gamma/G} \int_0^\infty ds s^{\Gamma/G-1} e^{-s} \quad . \quad (5.4.26)$$

De integraal rechts is gelijk aan $\Gamma(\Gamma/G)$ (volgens een standaard-relatie), zodat (5.3.26) volgt.

- d. Invullen van (5.3.26) in (5.3.16) geeft direct (5.3.22).
- e. De momenten volgen met behulp van (5.4.18). Er komt allereerst

$$\bar{n} = (\xi - 1) \frac{\Gamma}{G} \quad , \quad (5.4.27)$$

in overeenstemming met (5.3.5). Voorts vinden we

$$\overline{n^2} - \bar{n}^2 = \xi \frac{\Gamma}{G} \quad . \quad (5.4.28)$$

Door deling van (5.4.28) en (5.4.27) ontstaat (5.3.23). Hieruit volgt (5.3.24) direct.