

HOOFDSTUK 1

VERZAMELINGEN

De verzamelingstheorie is een universeel theoretisch kader voor de wiskunde. Voor wiskunde binnen dat kader geldt, algemeen gesproken, dat het kader zichtbaarder is naarmate de onderhanden wiskunde algemener is. Omdat het onderwerp van dit boek zeker nogal algemeen is, beginnen we met een beknopte bespreking van verzamelingstheoretische begrippen. Daarin komen we tegemoet aan een zwak van de auteur, te weten, een zekere hang naar volledigheid, en ontwikkelen we een reeks van conventies en notaties, die soms wat afwijken van de standaard waar dat beter uitkomt voor een verhandeling over partiële algebra's. De gretige lezer kan haar overslaan, en terugbladeren wanneer zulks nodig blijkt. Wie daarentegen een echte inleiding wenst, moet elders zoeken: bijvoorbeeld in het voortreffelijke boek van Van Dalen, Doets en De Swart [DDS], of P.R. Halmos' klassieke *Naive Set Theory* [Hal].

§A Klassen en verzamelingen

Laat een welbepaalde eigenschap P gegeven zijn, die welbepaalde dingen van een of ander slag al of niet kunnen bezitten. Dan kunnen we de *klasse* $\{x|P(x)\}$ beschouwen van al die dingen die de eigenschap P bezitten, de *extensie* van P . Als x de eigenschap P bezit, dan zeggen we dat x *een element is van*, of *behoort tot*, $\{x|P(x)\}$; we noteren $x \in X$ voor ' x is een element van de klasse X ', en $x \notin X$ voor ' x is geen element van X '. (Doorhaling wordt wel vaker gebruikt om negatie weer te geven.)

In principe kunnen klassen ook welbepaalde dingen zijn, en dus samengevat worden in een klasse. Er is bijvoorbeeld een klasse

$$\{x|x \text{ is een klasse van natuurlijke getallen}\};$$

maar er zijn grenzen. Die worden zichtbaar in de *Russell-paradox*: definieer K als $\{x|x \notin x\}$, en vraag je af of $K \in K$. Als $K \in K$, dan heeft K de definiërende eigenschap van K , dus $K \notin K$; maar dan geldt, omdat K het collectief is van alle dingen die niet tot zichzelf behoren, dat $K \in K$. Kennelijk is K niet het soort van ding waarvan we ons af kunnen vragen of het tot K behoort.

Het is gebruikelijk om onderscheid te maken tussen klassen waarvan je je veilig af kunt vragen of ze behoren tot een willekeurige gegeven klasse, en die *verzamelingen* te noemen, en klassen waarvoor die vraag niet veilig is. Men noemt die laatste soms *echte klassen*. Een klasse is een echte klasse als ze te groot is om een verzameling te zijn; bijvoorbeeld, men kan beredeneren dat $\{x|x \notin x\}$ alle verzamelingen bevat. Maar een echte klasse kan ook heel klein zijn, zoals $\{\{x|x \notin x\}\}$: uit het verenigingsaxioma (zie beneden) volgt dat dat geen verzameling kan zijn.

Verzamelingen moeten op een of andere manier geconstrueerd zijn. De axioma's van Zermelo, met aanvullingen door Fraenkel en Skolem, inventariseren de respectabele constructieprincipes. Ze vormen de inspiratie voor de axioma's die hieronder staan opgesomd.

Het eerste axioma heeft een afwijkend karakter: het formuleert geen constructieprincipe, maar het wezenskenmerk van klassen.

1. VERZAMELINGEN

Extensionaliteit: als klassen X en Y dezelfde elementen hebben, dan $X = Y$.

§B Oerelementen

Hoewel het strict genomen niet nodig is, nemen we aan dat er respectabele dingen bestaan die geen verzamelingen zijn, en die men kan samenvatten in verzamelingen. In het bijzonder bestaat de verzameling $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ der natuurlijke getallen.

De natuurlijke getallen voldoen aan het principe van *volledige inductie*:

- (VI) Als P een predikaat is van natuurlijke getallen dat toekomt aan 0 en voor ieder natuurlijk getal n voldoet aan

$$P(n) \text{ impliceert } P(n+1),$$

dan komt P toe aan alle natuurlijke getallen.

Een object dat geen verzameling is, noemen we een *oerelement*; en een verzameling van oerelementen een *oerverzameling*.

§C Paren

Een langzame maar zekere methode om verzamelingen te construeren is

Paring: als a en b welbepaalde objecten zijn, dan bestaat er een verzameling die precies a en b bevat.

We noemen die verzameling het *paar* van a en b , en noteren haar als $\{a, b\}$. *Let wel:* we beschouwen willekeurige klassen niet als welbepaalde objecten. Oerelementen zijn voldoende welbepaald. Een paar van klassen is alleen dan een verzameling als die klassen verzamelingen zijn.

Het Extensionaliteitsaxioma impliceert dat $\{a, b\} = \{b, a\}$. Als $a = b$, dan heet $\{a, b\}$ een *eenling*. In plaats van $\{a, a\}$ schrijven we $\{a\}$.

De basis voor alle soorten ordening is de notie van *geordend paar*. Het geordende paar met eerste element x en tweede element y noteren we als $\langle x, y \rangle$. De fundamentele eigenschap van geordende paren is

$$\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle \text{ dan en slechts dan als } x = u \text{ en } y = v. \quad (*)$$

Er zijn meerdere verzamelingstheoretische constructies die deze eigenschap hebben. Veelgebruikt is die van Kuratowski, die $\langle x, y \rangle$ definieerde als

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Het is eenvoudig na te gaan dat met deze definitie wordt voldaan aan de conditie (*).

We definiëren de *projecties* e en e' van geordende paren $z = \langle x, y \rangle$ door

$$e(z) = x \text{ en } e'(z) = y.$$

§D Vervanging

In deze § introduceren we binaire relaties, in hun oervorm van klassen van geordende paren. Dan formuleren we het Vervangingsaxioma, en leiden enige gevolgen af.

Een *binair relatie* is een klasse van geordende paren. Voorlopig spreken we kortweg van *relaties*. Het *domein* of *definitiegebied* van een relatie R is de klasse $\text{Dom } R$, gedefinieerd als

$$\{y \mid \exists x \langle x, y \rangle \in R\},$$

en het *bereik* of het *beeld* van R , notatie $\text{Im } R$ (Im voor Imago), is

$$\{x \mid \exists y \langle x, y \rangle \in R\}.$$

Voor elke klasse Y definiëren we $R[Y]$ als

$$\{x \mid \exists y \in Y \langle x, y \rangle \in R\}.$$

In plaats van $R[\{y\}]$ (of $R\{y\}$) schrijven we meestal y/R .

Nu kunnen we een nieuw constructieprincipe introduceren.

Vervanging: Zij R een relatie en Y een verzameling. Als y/R een verzameling is voor alle $y \in Y$, dan is $R[Y]$ een verzameling.

In woorden: als we ieder element van een verzameling vervangen door de elementen van een verzameling, is het resultaat een verzameling.

1 DEFINITIE. Zij X een collectie van klassen. Dan is $\bigcup X$, de *vereniging* van X , de klasse van alle elementen van elementen van X .

In feite is het niet eens nodig te eisen dat de elementen van X allemaal klassen zijn; als $x (\in X)$ geen klasse is, dan heeft x geen elementen, dus is er geen spoor van x in $\bigcup X$. Door vereniging kunnen we verzamelingen construeren:

2 STELLING (Verenigingsaxioma). Als X een verzameling is, dan is $\bigcup X$ ook een verzameling.

BEWIJS. Zij X een verzameling. Beschouw de relatie $R := \{\langle u, v \rangle \mid u \in v\}$. Volgens het vervangingsprincipe is $R[X]$ een verzameling. Maar $R[X] = \bigcup X$. $\square$

In het bijzonder geldt dat $\bigcup \{X\} = X$. De vereniging van een paar $\{X, Y\}$ wordt gewoonlijk genoteerd als $X \cup Y$.

We duiden de klasse zonder elementen, de *lege* klasse, aan met $\emptyset$. Dat er maar één zo'n klasse is, is een gevolg van *Extensionaliteit*. Uit Stelling 2 en het bestaan van verzamelingen van oerelementen volgt dat $\emptyset$ een verzameling is:

3 GEVOLG. De lege klasse is een verzameling.

BEWIJS. Zij A een gegeven verzameling van oerelementen, zoals $\mathbb{N}$. Dan geldt: $\emptyset = \bigcup A$.

Zij $x_0, \dots, x_{n-1}$ een eindig lijstje van dingen. Dan duiden we de klasse die precies die dingen bevat aan met $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$. Bijvoorbeeld: de klasse die precies de getallen 3, 5, 6 en 9 bevat, is $\{3, 5, 6, 9\}$.

4 GEVOLG. Als $x_0, \dots, x_{n-1}$ welbepaalde objecten zijn (in het bijzonder moet geen van alle een echte klasse zijn), dan is $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ een verzameling.

BEWIJS. Met inductie naar n . Dat wil zeggen, we vatten de te bewijzen uitspraak op als een bewering $P(n)$ over een natuurlijk getal n , en passen dan het principe (VI) van §B toe op het predikaat P .

Als $n = 0$, dan is onze lijst leeg, dus $\{x_0, \dots, x_{n-1}\} = \emptyset$, en zoals we gezien hebben, is dat een verzameling.

Veronderstel nu dat lijsten van n welbepaalde objecten tot verzamelingen leiden. Als we dan een lijst $x_0, \dots, x_n$ hebben van $n + 1$ acceptabele items, is volgens veronderstelling $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ een verzameling. Bovendien is $\{x_n\}$ een verzameling volgens het Paringsaxioma. Dus opnieuw volgens *Parings* is

$$\{\{x_0, \dots, x_{n-1}\}, \{x_n\}\}$$

een verzameling; en $\{x_0, \dots, x_n\} = \{x_0, \dots, x_{n-1}\} \cup \{x_n\}$. $\square$

5 NOTATIE. In de *zuivere* verzamelingenleer kent men geen oerelementen. Men definieert er het natuurlijke getal n als de verzameling $\{0, \dots, n-1\}$ van zijn voorgangers. In het bijzonder is 0 de lege verzameling. — Als dat in het vervolg zo uitkomt, zullen wij ons aansluiten bij dit gebruik. Het symbool 3, bijvoorbeeld, zal dus zowel een oerelement aan kunnen duiden als de verzameling $\{0, 1, 2\}$. (Zie verder Oefening H26 en haar inleiding.)

§E Doorsnede en Regulariteit

Het Regulariteitsaxioma is een algemene bewering over klassen, vergelijkbaar met het Extensionaliteitsaxioma, maar lastiger te formuleren.

Zij X een niet-lege klasse: dan is de *doorsnede* van X , notatie $\cap X$, de klasse

$$\{y \mid \forall x \in X \ y \in x\}.$$

We moeten veronderstellen dat de klasse X niet leeg is, want *alles* is een element van ieder element van de lege klasse, en we weten in het algemeen niet wat *alles* is. Er geldt, net als bij de vereniging, dat $\cap\{X\} = X$. De doorsnede van een paar $\{X, Y\}$ wordt gewoonlijk genoteerd als $X \cap Y$. Klassen X, Y zo dat $X \cap Y = \emptyset$ heten *disjunct*.

PROPOSITIE (Comprehensie). Als X een verzameling is en Y een klasse, dan is $X \cap Y$ een verzameling.

BEWIJS. Zij X een verzameling; definieer R als de relatie

$$\{\langle x, x \rangle \mid x \in X \text{ en } x \in Y\}.$$

Dan is x/R een verzameling, voor elke $x \in X$: ofwel $x \notin Y$, en dan $x/R = \emptyset$, of $x \in Y$, en $x/R = \{x\}$. Dus $R[X]$ is een verzameling. Maar $R[X] = X \cap Y$. $\square$

Bijgevolg is, als X een verzameling is en $P(-)$ een predikaat, de klasse

$$\{x \mid x \in X \text{ en } P(x)\}$$

een verzameling (*Separatieprincipe*); ze is namelijk de doorsnede van X en de klasse $\{x \mid P(x)\}$. We noteren gewoonlijk

$$\{x \in X \mid P(x)\}.$$

Het *verschil* $X \setminus Y$ van twee klassen X en Y is $\{x \mid x \in X \text{ en } x \notin Y\}$. Als X een verzameling is, dan is $X \setminus Y$ er ook een. Het *symmetrisch verschil* is

$$X \Delta Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

De klasse $X \Delta Y$ is een verzameling als X of Y een verzameling is.

We stellen ons collecties voor als geconstrueerd, niet als gegeven dingen. Iets is een element van een collectie op grond van eigenschappen die wij eraan toekennen. Klassen kunnen dus bestaan uit verzamelingen, verzamelingen van verzamelingen, enzovoort; maar uiteindelijk classificeren we dingen die geen klassen zijn. Dit is het beginsel van

Regulariteit: Als een klasse elementen heeft, dan heeft ze elementen waarmee ze disjunct is.

(Bedenk dat als a geen klasse is, $X \cap a = \emptyset$.)

§F De Machtsverzameling

Een klasse X is een *subklasse* van een klasse Y , en Y is een *superklasse* van X , als alle elementen van X ook elementen zijn van Y ; notatie $X \subseteq Y$ en $Y \supseteq X$. We zeggen ook dat X *bevat is in* Y , en dat Y de klasse X *omvat* of *uitbreidt*. We schrijven $X \subset Y$ (X is een *echte subklasse* van Y , X is *echt bevat* in Y) als $X \subseteq Y$ en $X \neq Y$. Wegens Extensionaliteit moeten er dan dingen zijn die tot Y behoren en niet tot X .

De relatie $\subseteq$ heet *inclusie*; $\subset$ is *stricte inclusie*.

Wegens Comprehensie zijn subklassen van een gegeven verzameling zelf ook verzamelingen; we spreken van *deelverzamelingen*. We postuleren dat ze samen een verzameling vormen:

Machtsverzameling: Zij X een verzameling. Dan is de klasse van alle deelverzamelingen van X een verzameling.

We gebruiken de notatie $\mathcal{P}X$ ($\mathcal{P}$ voor *potestas*) om deze verzameling, de *machtsverzameling* van X , aan te duiden.

§G Binaire Relaties

Het *veld* van een relatie R is de vereniging van haar beeld en haar domein. We duiden het aan met $\text{Vld}R$; we hadden het kunnen definiëren als

$$\{x, y \mid \langle x, y \rangle \in R\},$$

of, onder aanname van Kuratowski's definitie van geordende paren, $\bigcup \bigcup R$. Als $\text{Vld}R \subseteq X$, dan heet R een relatie *over* X . In het bijzondere geval dat $\text{Vld}R = X$ zeggen we ook dat R een relatie is *op* X . Bijvoorbeeld, de bekende ordening $<$ van de natuurlijke getallen (de verzameling $\{\langle m, n \rangle \mid m \in \mathbb{N} \ \& \ n \in \mathbb{N} \ \& \ m < n\}$) is een relatie op $\mathbb{N}$, net als gelijkheid, $\{\langle n, n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$. Voor gelijkheid is het nuttig een algemeen toepasbare notatie te hebben die de onderliggende klasse laat zien: we schrijven Δ_X (de *diagonaal op* X) voor $\{\langle x, x \rangle \mid x \in X\}$.

Het *cartesisch*¹ product $X \times Y$ van twee klassen X en Y is de klasse

$$\{\langle x, y \rangle \mid x \in X \ \& \ y \in Y\}.$$

Het product van twee verzamelingen is weer een verzameling — zie oefening 1. Het *quadraat* van een klasse X is $X \times X$; omdat het in zekere zin het tegenovergestelde is van de diagonaal, noteren we het quadraat van X soms als $\bar{V}_X$. Het *cartesisch omhulsel* van een relatie R , notatie $\text{Ch}R$, is $\text{Im } R \times \text{Dom } R$.

Merk op dat $\text{Dom}(X \times Y) = Y$, $\text{Im}(X \times Y) = X$, $\text{Im } \Delta_X = \text{Dom } \Delta_X = X$, en dat voor de bovengenoemde ordening $<$, $\text{Im}(<) = \mathbb{N}$, en $\text{Dom}(<) = \{1, 2, \dots\}$: de verzameling $\mathbb{Z}_+$ der positieve gehele getallen. Als R een verzameling is, dan zijn $\text{Dom } R$ en $\text{Im } R$ ook verzamelingen.

We schrijven vaak Rxy , $R(x, y)$ of xRy in plaats van $\langle x, y \rangle \in R$. Merk op dat

$$R \subseteq \text{Ch}R \subseteq \bar{V}_{\text{Vld}R},$$

en dat een relatie over een verzameling X een deelverzameling is van $X \times X$.

Een relatie R is *symmetrisch* als voor alle x en y , $xRy \Rightarrow yRx$, en *transitief* als voor alle x, y en z , $xRy \ \& \ yRz \Rightarrow xRz$. Een relatie die zowel symmetrisch is als transitief heet een *equivalentierelatie*, of kortweg een *equivalentie*. We gebrui-

¹ Naar René Descartes (Renatus Cartesius), 1596-1650, de ontdekker van de analytische meetkunde.

1. VERZAMELINGEN

ken Griekse onderkast voor equivalenties: θ, η, ζ , etc. In plaats van $x\theta y$ schrijven we soms $x \equiv_{\theta} y$ of $x \equiv y (\theta)$ or $x \equiv y (\text{mod } \theta)$; we zeggen dat x en y *equivalent zijn modulo* θ . De klasse x/θ heet de *equivalentieklasse van x over θ* . Als X een klasse is, dan heet de klasse der equivalentieklassen van elementen van $X \cap \text{Vld } \theta$ het *quotient* van X over θ , notatie X/θ .

Een *kavelstelsel* is een collectie van paarsgewijs disjuncte niet-lege klassen. (Die klassen zijn de *kavels* van het stelsel.)

Equivalenties en kavelstelsels zijn twee kanten van dezelfde medaille.

1 PROPOSITIE. (a) Als θ een equivalentie is, dan is $(\text{Vld } \theta)/\theta$ een kavelstelsel.

(b) Zij $\mathcal{A}$ een kavelstelsel. Definieer de relatie Q op $\bigcup \mathcal{A}$ door

$$xQy \Leftrightarrow x \text{ en } y \text{ tot dezelfde kavel van } \mathcal{A} \text{ behoren.}$$

Dan is Q een equivalentie.

Voor het moment zullen we met $\mathcal{A}_{\theta}$ het kavelstelsel aanduiden dat hierboven in (a) is geassocieerd met een equivalentie θ , en met $\theta_{\mathcal{A}}$ de equivalentie die we in (b) associeerden met een kavelstelsel $\mathcal{A}$. Voor kavelstelsels $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ schrijven we $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ als ieder element van $\mathcal{A}$ bevat is in een element van $\mathcal{B}$.

2 PROPOSITIE. (a) Laat θ en η equivalenties zijn. Als $\theta \subseteq \eta$, dan $\mathcal{A}_{\theta} \leq \mathcal{A}_{\eta}$.

(b) Laat $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ kavelstelsels zijn. Als $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, dan $\theta_{\mathcal{A}} \subseteq \theta_{\mathcal{B}}$.

Als een kavelstelsel bestaat uit subklassen van een gegeven klasse A , dan spreken we van een kavelstelsel *over* A .

Een relatie R is *reflexief* over een klasse X , of *X-reflexief*, als xRx geldt voor alle $x \in X$. We noemen een relatie ‘reflexief’ zonder nadere qualificatie als ze reflexief is over haar veld. In het bijzonder zijn equivalenties reflexief: als xRy , dan yRx wegens symmetrie, dus xRx en yRy wegens transitiviteit. Een equivalentie met veld X (‘op X ’) heet ook een *volle equivalentie(relatie) over X* . We noteren de collectie der volle equivalentierelaties over X als $\text{Eqv } X$. Voor equivalentierelaties θ, η op een verzameling X zullen we soms $\theta \leq \eta$ noteren in plaats van $\theta \subseteq \eta$.

Voorbeelden

i. Voor elke klasse X is de diagonaal Δ_X een equivalentie op X . Het corresponderende kavelstelsel bestaat uit de eenlingen $\{x\}$ voor $x \in X$.

ii. Zij n een natuurlijk getal. Gehelen x en y zijn congruent modulo n , notatie

$$x \equiv y (n),$$

als een $z \in \mathbb{Z}$ bestaat zo dat $x = y + zn$.

iii. Zij de relatie θ op de verzameling $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ der paren van natuurlijke getallen gedefinieerd door de conditie

$$\langle x, y \rangle \theta \langle u, v \rangle \text{ als en alleen als } x + v = u + y.$$

Dan $\theta \in \text{Eqv } \mathbb{N}$. De afbeelding $\langle x, y \rangle \mapsto x - y$ bepaalt een één-op-één-correspondentie tussen de equivalentieklassen en de gehelen (cf. §H, oefening 4).

Een *partitie* van X is een kavelstelsel $\mathcal{A}$ zo dat $X = \bigcup \mathcal{A}$.

De *samengestelde* $Q \circ R$ van twee relaties Q en R is de relatie gedefinieerd door

$$z(Q \circ R)x \Leftrightarrow \exists y (zQy \ \& \ yRx).$$

Het samenstellingssymbool $\circ$ wordt soms weggelaten.

De *scheve vereniging* van twee relaties Q en R is de relatie

$$Q \uplus R := R \cup (Q \setminus (\text{Im } Q \times \text{Dom } R));$$

dus $y(Q \uplus R)x$ dan en slechts dan als ofwel yRx , of $(x \notin \text{Dom } R \ \& \ yQx)$.

De *inverse* van een relatie R is de relatie R^{-1} gedefinieerd door

$$R^{-1} = \{\langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R\}.$$

Voor sommige inversen wordt een geïnverteerd symbool gebruikt. Zo is $\ni$ de inverse van $\in$; $\supseteq$ de inverse van $\subseteq$, en $\supset$ die van $\subset$.

§H Operaties

We introduceren operaties en functies (1); daarna, rijtjes en families (2); en formuleren het Keuze-Axioma (3). In subsectie 4 leggen we eindelijk uit waarom we relaties *binair* noemden bij hun invoering.

1 Operaties en functies

Een relatie f is een *operatie* als er voor elke x hoogstens één y bestaat zo dat yfx . Als f een operatie is en yfx , dan is y de *waarde* die f aanneemt bij het *argument* x ; we schrijven $f: x \mapsto y$, en duiden y aan met $f(x)$, of fx , of f_x . Als er een y bestaat zo dat yfx , dan zeggen we dat f *gedefinieerd is voor* x , of dat $f(x)$ *gedefinieerd is*. We noteren $f(x) \downarrow$, en we schrijven $f(x) \uparrow$ in het andere geval, als $f(x)$ *ongedefinieerd* is. Als we een operatie voorstellen als een lijst van geordende paren, dan schrijven we soms

$$\{y_0 \leftarrow x_0, \dots, y_{n-1} \leftarrow x_{n-1}\}, \{x_0 \mapsto y_0, \dots, x_{n-1} \mapsto y_{n-1}\}, \text{ of } (y_0/x_0, \dots, y_{n-1}/x_{n-1})$$

in plaats van $\{\langle y_0, x_0 \rangle, \dots, \langle y_{n-1}, x_{n-1} \rangle\}$.

Een niet-lege operatie is *constant* als ze voor alle elementen van haar domein dezelfde waarde geeft. Bij gegeven klassen X en Y definiëren we

$$k^{X \leftarrow Y} := \lambda x \in X. \lambda y \in Y. x.$$

Bijgevolg is $k^{X \leftarrow Y}(x)$ de constante operatie $\{x\} \times Y$ die aan elke $y \in Y$ de waarde x toekent. We laten in de praktijk het superscript bij voorkeur weg: als X en Y bekend zijn, dan noteren we $k^{X \leftarrow Y}(x)$ als k_x .

Als f een operatie is en U een klasse, dan noteren we de klasse $f[U]$ (die volgens het vervangingsaxioma een verzameling is als U een verzameling is) ook wel als $\{f(u) \mid u \in U\}$.

De notatie $f(x)$, voor de waarde van f bij het argument x , kan herhaald worden: als x de waarde is van g voor y , dan $f(x) = f(g(y))$. We houden daarbij de volgende *strictheidsconventie* aan:

$$(\text{strict}) \quad f(g(y)) \downarrow \Rightarrow g(y) \downarrow.$$

Met andere woorden, we spreken af dat we uitdrukkingen altijd in hun geheel evalueren; als de evaluatie van een onderdeel niet lukt, kan het geheel ook niet geëvalueerd worden. De evidente uitzondering op die regel zijn logische formules: bijvoorbeeld, in een specifiek geval waarin $g(y)$ niet gedefinieerd is, blijft de formule (**strict**) van toepassing.

Zij f een operatie.

1° De *kern* van f is de equivalentierelatie

$$\ker f := \{\langle x_1, x_2 \rangle \in \text{Dom } f \times \text{Dom } f \mid f(x_1) = f(x_2)\}.$$

op $\text{Dom } f$. Merk op dat $\ker f = f^{-1} \circ f$, en dat $\ker f \supseteq \Delta_{\text{Dom } f}$. We noemen f *injectief* als $\ker f = \Delta_{\text{Dom } f}$.

1. VERZAMELINGEN

2° Als X en Y klassen zijn zo dat $f \subseteq Y \times X$, dan heet f een *operatie van X naar Y* , en noteren we $f: X \rightarrow Y$ of $f: Y \leftarrow X$. De klasse X is de *oorsprong* van f , en Y is de *bestemming*. Als $X = \text{Dom } f$, dan heet f , *qua* operatie van X naar Y , *totaal*. Als f totaal is, spreken we ook van een *afbeelding van X naar Y* , of van X in Y , en laten we het cirkeltje weg, als in $f: X \rightarrow Y$ en $f: Y \leftarrow X$. Als $Y = \text{Im } f$, dan heet $f: X \rightarrow Y$ *surjectief*, of een operatie van X op Y . Notatie: $f: X \twoheadrightarrow Y$ of $f: Y \leftarrow X$; en $f: X \twoheadrightarrow Y$ en $f: Y \leftarrow X$ als $\text{Dom } f = X$.

Een *functie* is een operatie die een verzameling is. Een operatie van een verzameling is een functie, volgens het Vervangingsaxioma. Het Principe van Volledige Inductie doet een manier aan de hand om afbeeldingen van $\mathbb{N}$ te definiëren:

1° definieer $f(0)$;

2° definieer $f(n+1)$ in termen van $f(n)$.

Uit (VI) volgt dat $\mathbb{N} \subseteq \text{Dom } f$. Een dergelijke definitie heet *recursief* — omdat je in complexe gevallen terugloopt naar een eenvoudiger geval — of *inductief*.

Voorbeelden

i. Laat een verzameling X gegeven zijn als deelverzameling van een verzameling Y . De *karakteristieke functie* van X ($\subseteq Y$) is de afbeelding $\chi_X: 2 \leftarrow Y$ gedefinieerd door

$$\chi_X(y) = 1 \triangleleft y \in X \triangleright 0.$$

ii. De optelling van natuurlijke getallen kan men recursief definiëren we door

$$1^\circ m + 0 = m;$$

$$2^\circ m + (n + 1) = (m + n) + 1.$$

Strict genomen wordt hier een oneindige rij functies

$$0 + \dots, 1 + \dots, 2 + \dots, \dots$$

gedefinieerd; men zegt ook dat m een *parameter* is in de definitie van $+$.

iii (gevalsinductie) De *afgeknotte voorgangerfunctie* $P: \mathbb{N} \leftarrow \mathbb{N}$ zouden we recursief willen definiëren door

$$1^\circ P(0) = 0;$$

$$2^\circ P(n + 1) = n.$$

Dit is evenwel geen echte recursie: we definiëren $f(n+1)$ in termen van n in plaats van $f(n)$. We kunnen de definitie ook voorstellen als een gevalsonderscheiding:

$$P(n) = k \triangleleft n = k + 1 \triangleright n.$$

Nog eenvoudiger zijn de signumfuncties sg en $\overline{sg}$:

$$sg(n) = 0 \triangleleft n = 0 \triangleright 1;$$

$$\overline{sg}(n) = 1 \triangleleft n = 0 \triangleright 0.$$

De collectie van alle operaties van een verzameling X naar een verzameling Y is een deelverzameling van $\mathcal{P}(Y \times X)$; ze wordt aangeduid met $[Y \leftarrow X]$. De deelverzameling der afbeeldingen noteren we als $[Y \rightarrow X]$, of Y^X .

Zij $f: X \rightarrow Y$ een operatie. We schrijven

$$f: X \hookrightarrow Y$$

als f injectief is. Als bovendien $Y = \text{Im } f$, dan heet $f: X \rightarrow Y$ *bijjectief*, en schrijven we $f: X \hookrightarrow Y$. Voor afbeeldingen gebruiken we pijlen zonder bolletje:

$$\hookrightarrow, \twoheadrightarrow.$$

Injectieve/surjectieve/bijectieve afbeeldingen heten, respectievelijk, *injecties*, *surjecties*, en *bijecties*.

Samenstelling van operaties is een speciaal geval van relatiesamenstelling. De samengestelde $f \circ g$ van operaties f en g is een operatie, en

$$\text{als } (f \circ g)(x) \downarrow \text{ of } f(g(x)) \downarrow, \text{ dan } (f \circ g)(x) = f(g(x)); \quad (1)$$

met gebruikmaking van Kleene's volledige gelijkheid (2§A) kunnen we (1) inkorten tot:

$$(f \circ g)(x) \simeq f(g(x)). \quad (\tilde{1})$$

1.1 SAMENSTELLINGSLEMMA. (a) Als $f: X \rightarrowtail Y$ en $g: Y \rightarrowtail Z$, dan $gf: X \rightarrowtail Z$.

(b) Als $f: X \twoheadrightarrow Y$ en $g: Y \twoheadrightarrow Z$, dan $gf: X \twoheadrightarrow Z$.

(c) Als $f: X \hookrightarrowtail Y$ en $g: Y \hookrightarrowtail Z$, dan $gf: X \hookrightarrowtail Z$.

(d) Als $f: X \hookrightarrowtail Y$ en $g: Y \hookrightarrowtail Z$, dan $gf: X \hookrightarrowtail Z$.

GEVOLG. (a) Als $f: X \rightarrow Y$ en $g: Y \rightarrow Z$, dan $gf: X \rightarrow Z$.

(b) Als $f: X \twoheadrightarrow Y$ en $g: Y \twoheadrightarrow Z$, dan $gf: X \twoheadrightarrow Z$.

(c) Als $f: X \hookrightarrow Y$ en $g: Y \hookrightarrow Z$, dan $gf: X \hookrightarrow Z$.

(d) Als $f: X \hookrightarrow Y$ en $g: Y \hookrightarrow Z$, dan $gf: X \hookrightarrow Z$.

We zeggen dat een klasse (relatie, operatie) X *de kleinste* is met een gegeven eigenschap P wanneer X de eigenschap P heeft en voor elke klasse (etc.) Y met de eigenschap P geldt dat $X \subseteq Y$.

1.2 DRIEHOEKSLUITINGSLEMMA. Laat $f: X \rightarrowtail Y$ en $g: X \rightarrowtail Z$ operaties zijn. Definieer: $K = (\ker f)[\text{Dom } g]$.

(i) Er bestaat een operatie $h: Y \rightarrowtail Z$ zo dat $h \circ f = g$, als en alleen als

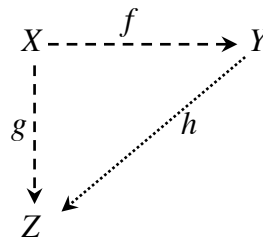
$$\Delta_{\text{Dom } g} \subseteq \ker f \cap \nabla_K \subseteq \ker g. \quad (2)$$

(ii) Als er een operatie h bestaat zo dat $h \circ f = g$, dan is er een kleinste operatie met die eigenschap, en die is

(iii) injectief als en alleen als $\ker f \cap \nabla_K = \ker g$, en

(iv) surjectief als en alleen als g surjectief is.

De situatie is geschetst in het onderstaande diagram.



BEWIJS. (i) $(\Rightarrow)$ Stel dat $h \circ f = g$, voor zekere operatie $h: Y \rightarrowtail Z$.

Dan $\text{Dom } g \subseteq \text{Dom } f$, dus $\Delta_{\text{Dom } g} \subseteq \ker f$, en $\text{Dom } g \subseteq K$. Dus

$$\Delta_{\text{Dom } g} \subseteq \ker f \cap \nabla_K.$$

Als $x \in K$, dan is er een $x' \in \text{Dom } g$ zo dat $f(x) = f(x')$, dus $(h \circ f)(x) \downarrow$, dus $x \in \text{Dom } g$. Als $x_1, x_2 \in K$, en $f(x_1) = f(x_2)$, dan zeker

$$g(x_1) = h(f(x_1)) = h(f(x_2)) = g(x_2);$$

dus $\ker f \cap \nabla_K \subseteq \ker g$.

$(\Leftarrow)$ Neem aan dat $\Delta_{\text{Dom } g} \subseteq \ker f \cap \nabla_K \subseteq \ker g$.

1. VERZAMELINGEN

Uit $\Delta_{\text{Dom } g} \subseteq \ker f \cap \nabla_K$ volgt dat $K \supseteq \text{Dom } g$. Omdat $K \subseteq \text{Dom } f$, impliceert $\ker f \cap \nabla_K \subseteq \ker g$ dat $K \subseteq \text{Dom } g$. Dus $K = \text{Dom } g$. Definieer de operatie h met domein $f[K]$ door

$$h(f(x)) = g(x), \text{ voor } x \in K \quad (3)$$

Dat is een correcte definitie, want als $f(x') = f(x)$, voor $x, x' \in K$, dan $x' \equiv x (\ker f)$, dus $x' \equiv x (\ker g)$ volgens (2). Er geldt dat $\text{Dom}(h \circ f) = K$, want $f(x) \in f[K]$ impliceert $x \in K$. We zagen al dat $\text{Dom } g = K$; en voor $x \in K$ geldt per definitie dat $h(f(x)) = g(x)$.

Laat voor de rest van het bewijs h_0 de operatie h zijn met domein $f[K]$ die gedefinieerd wordt door (3).

(ii) Stel $h \circ f = g$. Dan geldt (2), volgens (i); en als $y \in \text{Dom } h_0$, dan is er een $x \in \text{Dom } g$ zo dat $y = f(x)$. Dan $h_0(y) = (h_0 \circ f)(x) = g(x) = (h \circ f)(x) = h(y)$, dus $h_0 \subseteq h$.

(iii) ($\Rightarrow$) Stel dat h_0 injectief is. Wegens (i) volgt uit $h_0 \circ f = g$ onmiddellijk dat

$$\ker f \cap \nabla_K \subseteq \ker g.$$

Voor de omgekeerde inclusie, stel $g(x) = g(a)$. Dan $h_0(f(x)) = h_0(f(a))$, dus $f(x) = f(a)$ omdat h_0 injectief is. Omdat $a \in \text{Dom } g, x \in K$; evenzo $a \in K$.

($\Leftarrow$) Neem aan dat $\ker f \cap \nabla_K = \ker g$. Dan $\text{Dom } g = K$. Stel $h_0(y_1) = h_0(y_2)$. Er zijn $x_i \in K, i = 1, 2$, zo dat $y_i = f(x_i)$. Dan

$$g(x_1) = h_0(f(x_1)) = h_0(f(x_2)) = g(x_2),$$

dus $x_1 \equiv x_2 (\ker f)$, wat impliceert dat $y_1 = y_2$.

(iv) ($\Rightarrow$) Stel dat h_0 surjectief is; neem $z \in Z$. Dan is er een $y \in f[K]$ zo dat

$$h_0(y) = z.$$

Uit de definitie van K volgt dat er een $x \in \text{Dom } g$ bestaat zo dat $f(x) = y$. Dan

$$g(x) = h_0(f(x)) = z.$$

($\Leftarrow$) $\text{Im}(h_0 \circ f) \subseteq \text{Im } h_0$. ☒

1.3 GEVOLG (driehoeksluitingslemma voor afbeeldingen). Laat

$$f: X \longrightarrow Y \text{ en } g: X \longrightarrow Z$$

afbeeldingen zijn.

(i) Er bestaat een afbeelding $h: Y \longrightarrow Z$ zo dat $h \circ f = g$ dan en slechts dan als $\ker f \subseteq \ker g$.

(ii) Als zo'n afbeelding h bestaat, dan wordt ze uniek bepaald door de conditie $h \circ f = g$.

Bovendien is

(iii) h injectief als en alleen als $\ker f = \ker g$, en

(iv) surjectief als en alleen als g surjectief is.

BEWIJS. Omdat f en g totaal zijn, $\text{Dom } g = (\ker f)[\text{Dom } g] = X$. Dus (2) is equivalent met $\ker f \subseteq \ker g$.

(i) Omdat f surjectief is, kan $h \circ f$ alleen totaal zijn als h totaal is.

(ii) Volgens het Driehoeksluitingslemma is er een kleinste h zo dat $h \circ f = g$. Omdat een dergelijke h totaal moet zijn, is de kleinste de enige. ☒

In de meestvoorkomende toepassing van het Driehoeksluitingslemma is f de *quotientfunctie* q_α bij een equivalentie α over X , die $x \in \text{Vld } \alpha$ afbeeldt naar x/α . Merk op dat $\ker q_\alpha = \alpha$.

Als een afbeelding $f: X \rightarrow Y$ bijectief is, is de inverse f^{-1} een bijectieve afbeelding van Y op X . Als er een bijectie bestaat van X op Y , dan heten X en Y *gelijkmachting*. Een verzameling is *eindig* als ze gelijkmachting is met een beginsegment $n = \{0, \dots, n-1\}$ van $\mathbb{N}$; anders is ze *oneindig*. Als X een eindige verzameling is, dan noteren we het aantal der elementen van X , het natuurlijke getal n zo dat X gelijkmachting is met $\{0, \dots, n-1\}$, als $|X|$ (zie 3§F voor het oneindige geval). De verzameling van alle eindige deelverzamelingen van een verzameling Y duiden we aan met $\mathcal{P}_o Y$.

Soms wensen we een diagonaal Δ_X als afbeelding te beschouwen. Als de bestemming $Y (\supseteq X)$ is, dan schrijven we 1_Y^X , en spreken we van de *kanonieke inbedding* van X in Y . Als $Y = X$, kunnen we de notatie vereenvoudigen tot 1_X , en spreken we van *de identiteit*, of *de identieke afbeelding*, op X .

1.4 PROPOSITIE. Laat $f: X \rightarrow Y$ en $g: Y \rightarrow X$ afbeeldingen zijn. Als

$$g \circ f = 1_X \quad \text{en} \quad f \circ g = 1_Y,$$

dan is f bijectief en $g = f^{-1}$.

BEWIJS. De identiteit 1_Y is surjectief, dus uit $f \circ g = 1_Y$ volgt dat f surjectief is. Anderzijds, als $f(x_1) = f(x_2)$ dan

$$x_1 = 1_X(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = 1_X(x_2) = x_2,$$

dus f is injectief. We concluderen dat f bijectief is. Voor alle $x \in X$ en $y \in Y$, als $f(x) = y$, dan $g(y) = g(f(x)) = x$, en insgelijks impliceert $g(y) = x$ dat $f(x) = y$; dus $g = f^{-1}$. $\square$

Zij f een operatie. De *beperking* $f \upharpoonright U$ van f tot U is de operatie gedefinieerd door

$$f \upharpoonright U = \{\langle f(u), u \rangle \in f \mid u \in U\}.$$

In het bijzonder geldt $f \upharpoonright a = \emptyset$ voor ieder ding a dat geen klasse is. Als g een beperking is van f , dan heet f een *uitbreiding* van g .

2 Rijtjes en families

Rijtjes van lengte n bestaande uit elementen van een gegeven klasse X zijn afbeeldingen van $n (= \{0, \dots, n-1\})$ naar X . We zullen X^2 (de klasse der afbeeldingen van $\{0, 1\}$ naar X) meestal identificeren met $X \times X$. Dikwijls worden rijtjes $x \in X^n$ aangeduid met pseudo-opsommingen tussen hoekige haken, zoals $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$. De indices in de opsomming kunnen ook afkomstig zijn uit een ander rijtje, bijvoorbeeld, $\langle x_4, x_9, x_5 \rangle$ bestaat uit elementen van een rijtje x van lengte minstens 10; of we beginnen met 1 in plaats van 0, als we daar eens zin in hebben. We identificeren het rijtje $\langle x_0, x_1 \rangle$ met het geordende paar; $\langle x_0 \rangle$, gewoonlijk, met x_0 ; en het lege rijtje ε is de verzameling $\emptyset$. De klasse van alle eindige rijtjes van elementen van X duiden we aan met $X^{<\omega}$. De *schakeling* of *concatenatie* $x * y$ van een rijtje $x = \langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ van lengte n en een rijtje $y = \langle y_0, \dots, y_{m-1} \rangle$ van lengte m kan formeel worden gedefinieerd als

$$x \cup \{\langle y_i, n+i \rangle \mid i < m\}.$$

We noemen x een *beginsegment* van $x * y$; een *echt beginsegment* als $y \neq \varepsilon$. Verlenging met een enkel element noteren we met een beugeltje: $x \hat{a} = x * \langle a \rangle$.

Om te benadrukken dat x een *rijtje* is van elementen van X , en geen element van X , kunnen we vectornotatie gebruiken: $\vec{x} = x = \langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$.

1. VERZAMELINGEN

We generaliseren de rijtjesnotatie naar oneindige indexverzamelingen, niet per se met een voor de hand liggende ordening, als volgt. Laat A een klasse zijn, en I een verzameling. Een *familie* van elementen van A *geïndexeerd uit* I , of een *I -geïndexeerde familie in* A , is een afbeelding $a: I \rightarrow A$. We noteren een dergelijke familie soms als $\langle a_i | i \in I \rangle$, of $\langle a_i \rangle_{i \in I}$, of zelfs, als I bekend is, $\langle a_i \rangle_i$. Het beeld $\{a_i | i \in I\}$ van a kunnen we noteren als $\{a_i\}_{i \in I}$, of $\{a_i\}_i$. Bijvoorbeeld: als $\{0, \dots, n-1\}$ -geïndexeerde familie noteren we $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ als $\langle x_i | i < n \rangle$ of $\langle x_i \rangle_{i < n}$; het beeld is $\{x_i | i < n\}$ ($= \{x_i\}_{i < n}$). We noemen een familie $a: I \rightarrow A$ een *opsomming van* A als $\text{Im } a = A$.

We definiëren de vereniging en de doorsnede van een familie $X = \langle X_i | i \in I \rangle$ van verzamelingen als de vereniging (respectievelijk de doorsnede) van haar beeld; we schrijven

$$\bigcup X, \bigcup (X_i | i \in I), \bigcup_{i \in I} X_i, \text{ of } \bigcup_i X_i.$$

Bijvoorbeeld, voor een verzameling A , $A^{<\omega} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$.

Analoog voor de doorsnede: $\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap \{X_i | i \in I\}$.

De generalisatie van paren naar families correspondeert met een generalisatie van cartesische producten. Het cartesisch product $\prod X$ van een familie $X = \langle X_i | i \in I \rangle$ van verzamelingen is de verzameling van alle families $x = \langle x_i | i \in I \rangle$ die de eigenschap hebben dat $x_i \in X_i$ voor elke $i \in I$. Die families *kiezen* dus een element van X_i voor iedere index i ; daarom heten ze *keuzefuncties*.

Alternatieve notaties voor het product zijn

$$\prod (X_i | i \in I), \prod_{i \in I} X_i \text{ en } \prod_i X_i.$$

In plaats van $\prod (X_i | i < n)$ en dergelijke schrijven we ook

$$X_0 \times \dots \times X_{n-1}$$

(cf. Oefening 16); $\prod (X_i | i < 1)$ identificeren we met X_0 , en

$$\prod (X_i | i < 0) = \prod \emptyset = \{\emptyset\}.$$

In het bijzondere geval dat iedere X_i dezelfde verzameling X is, spreken we van een cartesische *macht*, en noteren X^I : inderdaad is het cartesische product dan gewoon de collectie van alle afbeeldingen van I naar X .

Stel $j \in I$. We definiëren de *projectie* e_j^X van $\prod (X_i | i \in I)$ op de j -factor X_j door

$$e_j^X(x_i | i \in I) = x_j.$$

Anders gezegd, voor ieder keuzefunctie f , $e_j^X(f) = f(j)$. We zullen het superscript X vaak weglaten wanneer dat niet van belang is of uit de context kan worden afgeleid.

3 Het Keuze-Axioma

Twee van de axioma's van de verzamelingenleer die we tot dusver besproken hebben — Extensionaliteit en Regulariteit — betreffen wezenskenmerken van klassen; de rest is van de vorm

‘constructie Γ , toegepast onder voorwaarden Υ , resulteert in een verzameling’.

Ze zijn dus *constructief* in de zin dat ze allemaal een claim dat iets bestaat ondersteunen met een recept om het te bereiden.

De constructieve axioma's impliceren dat het cartesisch product $\prod_i X_i$ van een gegeven familie $\langle X_i | i \in I \rangle$ van verzamelingen bestaat, in het verzamelingen-universum. Ze impliceren ook dat een *eindig* product van niet-lege verzamelin-

gen elementen heeft. Ze zeggen echter niet veel over het oneindige geval. Daarvoor hebben we een nieuwe aanname nodig, het

Keuze-Axioma: Elke familie van niet-lege verzamelingen heeft een keuzefunctie.

Equivalent: ieder cartesisch product van niet-lege verzamelingen is niet leeg.

Russell illustreerde het niet-constructieve karakter van dit axioma als volgt. Intuïtief wordt een functie gegeven door een regel die voor elk element van haar domein de bijpassende waarde specificeert. Dus als we paren schoenen hebben, genummerd van 0 naar oneindig, dan specificeert ‘neem de linkerschoen’ een functie die een element kiest uit ieder ongeordend paar schoenen. Voor oneindig veel paren *sokken* is er niet zo’n regel.² De keuze van sokken moet worden overgelaten aan het initiatief van de kiezer.

We eindigen met een eenvoudige toepassing van het Keuze-Axioma.

PROPOSITIE. Zij $\langle X_i | i \in I \rangle$ een familie van verzamelingen, and $j \in I$. De projectie e_j is surjectief als en alleen als X_j leeg is, of X_i niet-leeg voor alle $i \in I$.

BEWIJS. ($\Rightarrow$) Als er lege X_i zijn, dan is $\prod_i X_i$ leeg, dus e_j is leeg, en als X_j niet leeg is, is e_j dan niet surjectief.

($\Leftarrow$) Zij x een willekeurig element van X_j . Definieer $\langle Y_i | i \in I \rangle$ als volgt:

$$Y_j = \{x\}; Y_i = X_i \text{ als } i \neq j.$$

Als X_i niet-leeg is voor alle $i \neq j$, dan heeft volgens het Keuze-Axioma $\prod_i Y_i$ een element y . Maar omdat $Y_i \subseteq X_i$ voor alle $i \in I$, $\prod_i X_i \supseteq \prod_i Y_i$; dus $y \in \prod_i X_i$, en $e_j(y) = y(j) = x$. $\square$

4 Plaatsigheid

Een operatie f waarvan het domein bestaat uit I -geïndexeerde families heet een *I-plaatsige operatie*; we noemen de indexverzameling I dan ook wel de *plaatsigheid* van f . Operaties heten *gelijkplaatsig* als hun plaatsigheden gelijkmachtig zijn. In plaats van 1-plaatsig (éénplaatsig) zeggen we soms *unair*; tweeplaatsig is ook binair, drieplaatsig ternair, enzovoort. We noteren $f(x_i | i \in I)$ in plaats van $f(\langle x_i | i \in I \rangle)$, en $f(x_0, \dots, x_{n-1})$ in plaats van $f(\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle)$. Als voor een gegeven klasse X , $f \subseteq X \times X^I$, dan heet f een *I-plaatsige operatie over X*. Een dergelijke operatie is *totaal* als $\text{Dom } f = X^I$. Een nulplaatsige operatie wordt gewoonlijk een *constante* genoemd. Officieel is een nulplaatsige operatie f ofwel leeg of een eenling $\{\langle c, \varepsilon \rangle\}$; maar het is gebruikelijk de constante te identificeren met het object $c = f(\varepsilon)$, als een dergelijk object bestaat.

In het algemeen is een operatie over een klasse X een operatie van één of andere functieruimte X^I naar X .

Analoog generaliseren we het relatiebegrip. Een *I-plaatsige relatie* is een klasse van I -geïndexeerde families. Een *I-plaatsige relatie over een klasse X* is een deelklasse van X^I . We identificeren 2-plaatsige relaties met de (binaire) relaties van §D. Analoog aan de notatie voor binaire relaties schrijven we, in plaats van $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in R$, ook $R(x_1, \dots, x_n)$ of $Rx_1 \dots x_n$.

Als R een relatie is en B een klasse, dan duiden we de elementen van R die families zijn van elementen van B aan als $R|_B$. Dus als R een *I-plaatsige relatie* is,

² We gaan uit van sokken in het goedkopere segment: zonder gescheiden tenen of gespiegelde verstevigingen.

$$R|_B = R \cap B^I.$$

De relatie $R|_B$ heet de *begrenzing* van R tot B . Analoog heeft een operatie f over B een begrenzing $f|_B$ die families van elementen van B afbeeldt naar B — als f een I -plaatsige operatie is, dan

$$f|_B = f \cap (B \times B^I).$$

§I Nawoord

De meeste van de hierboven besproken axioma's zijn geformuleerd door Zermelo. Het vervangingsaxioma is een bijdrage van Fraenkel en Skolem (los van elkaar), en het regulariteitsaxioma is voor het eerst voorgesteld door Von Neumann. De informele formulering op basis van welbepaalde eigenschappen is in de stijl van Zermelo; het gebruik van het klassebegrip daarbij is indirect geïnspireerd door de variant van de verzamelingentheorie die zijn naam ontleent aan Von Neumann, Bernays en Gödel.

Het keuze-axioma heeft een bijzondere status. Het lijkt een voor de hand liggende explicitering van het functiebegrip — als er mogelijke waarden zijn dan is er een functie —, maar Banach en Tarski hebben er verrassende stellingen mee bewezen [BaT]. In het vervolg zal het voor waar worden aangenomen.

De verzamelingentheorie gebaseerd op de zeven bovenstaande axioma's zullen we aanduiden met ZFK, naar *Zermelo*, *Fraenkel* en *Keuze*.

Oefeningen

§B

1. Bewijs de volgende varianten van het Principe van volledige inductie:

a) Zij $k \in \mathbb{N}$. Als P een predikaat is van natuurlijke getallen dat toekomt aan k en voor ieder natuurlijk getal $n \geq k$ voldoet aan

$$P(n) \text{ impliceert } P(n+1),$$

dan komt P toe aan alle natuurlijke getallen vanaf k .

b) Als P een predikaat is van natuurlijke getallen dat toekomt aan 0 en voor ieder even natuurlijk getal n voldoet aan

$$P(n) \text{ impliceert } P(n+2),$$

dan komt P toe aan alle even natuurlijke getallen.

2. Bewijs met volledige inductie:

$$\forall x \in \mathbb{N} (\forall y \in \mathbb{N} (y < x \Rightarrow P(y)) \Rightarrow P(x)) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{N} P(x),$$

in woorden: wanneer altijd als alle voorgangers van een gegeven natuurlijk getal x de eigenschap P hebben, x ook de eigenschap P heeft, dan hebben alle natuurlijke getallen de eigenschap P .

§C

Laat zien dat $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ als en alleen als $x = u$ en $y = v$.

§D

1. Zij R een binaire relatie. Bewijs: als R een verzameling is, dan zijn $\text{Dom } R$ en $\text{Im } R$ ook verzamelingen.

2. Zij $K = \{x | x \notin x\}$. Bewijs dat $\{K\}$ geen verzameling is.

§E

Zij x een verzameling. Bewijs dat $x \notin x$.

§G

1. Bewijs dat onder Kuratowski's definitie van geordende paren $X \times Y$ een verzameling is als X en Y verzamelingen zijn.
2. Zij R een relatie die een verzameling is. Bewijs dat $\text{Dom } R$ en $\text{Im } R$ verzamelingen zijn. Concludeer dat ook $\text{Vld } R$ en $\text{Ch } R$ verzamelingen zijn.
3. Laat X een verzameling zijn en θ een equivalentierelatie. Bewijs dat de equivalentieklassen van de elementen van X over θ en het quotient X/θ verzamelingen zijn.
4. Bewijs Propositie 1.
5. Bewijs Propositie 2.
6. Zij n een natuurlijk getal. Definieer de relatie θ_n over $\mathbb{Z}$ door

$$x\theta_n y :\Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z}. x = y + zn.$$

Bewijs dat $\theta_n \in \text{Eqv } \mathbb{Z}$.

7. Beschouw elk van de volgende beweringen over een willekeurige binaire relatie R , en geef er een bewijs voor of een tegenvoorbeeld:

- (a) Als $X = \text{Vld } R$, dan $\Delta_X \subseteq R \circ R^{-1}$;
- (b) Als $X = \text{Im } R$, dan $\Delta_X \subseteq R \circ R^{-1}$;
- (c) $R \subseteq R \circ R^{-1} \circ R$;
- (d) $R = R \circ R^{-1} \circ R$.

8. Stel dat de relaties R en S verzamelingen zijn. Waarom is $R \circ S$ dan ook een verzameling?

§H

1. De *associatieve wet* voor een binaire operatie f is de bewering dat voor alle relevante x, y en z ,

$$f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z),$$

of, als f wordt voorgesteld door een infix-symbool $*$,

$$x * (y * z) = (x * y) * z.$$

Een operatie is *associatief* als ze voldoet aan deze wet.

- (a) Bewijs dat relatiesamenstelling associatief is: $Q \circ (R \circ S) = (Q \circ R) \circ S$.

Zij $*$ een binaire operatie. Definieer, voor $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} & \text{als } m < n = k + 1, \quad \text{dan } \bigstar_{i=1}^m x_i = x_m, \\ & \text{en als } m < n = k + 1, \quad \bigstar_{i=m}^n x_i = \bigstar_{i=m}^k x_i * x_n. \end{aligned}$$

- (b) Bewijs dat, als $1 \leq m < n$, $\bigstar_{i=1}^m x_i * \bigstar_{j=m+1}^n x_j = \bigstar_{i=1}^n x_i$.

Concludeer dat men veilig $x * y * z, x * y * z * w$, en algemeen $x_1 * x_2 * \dots * x_n$ kan schrijven, omdat de uitkomst bij elke zinvolle plaatsing van haakjes dezelfde is.

2. Laat f, g, h operaties zijn. Bewijs:

- (i) Als $\text{Im } f = \text{Dom } g = \text{Dom } h$ en $g \circ f = h \circ f$, dan $g = h$.
- (ii) Als f injectief is, $\text{Im } g \cup \text{Im } h \subseteq \text{Dom } f$, en $f \circ g = f \circ h$, dan $g = h$.
- (iii) Als $f: X \hookrightarrow Y$ bijectief is, dan is f^{-1} een injectieve afbeelding van Y in X .

3. Bewijs het samenstellingslemma (1.1).

4. Laat $f: X \rightarrow Y$ en $g: Y \rightarrow Z$ afbeeldingen zijn. Bewijs:

- (i) als $g \circ f: X \rightarrow Z$ surjectief is, dan is g surjectief;
- (ii) als $g \circ f: X \rightarrow Z$ injectief is, dan is f injectief;
- (iii) als $g \circ f: X \rightarrow Z$ injectief is, en f is surjectief, dan is g injectief.

1. VERZAMELINGEN

5. Zij θ de relatie gedefinieerd op $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ door:

$$\langle x, y \rangle \theta \langle u, v \rangle \text{ als en alleen als } x + v = u + y$$

(§G, voorbeeld iii). Bewijs dat de afbeelding $\langle x, y \rangle / \theta \mapsto x - y$ een bijectie is van $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \theta$ op $\mathbb{Z}$.

6. Zij X een verzameling.

(a) Bewijs dat $|X^\emptyset| = 1$.

(b) Bewijs dat $|\emptyset^X| = 0$ als X niet leeg is.

7. Laat X en Y eindige verzamelingen zijn; $|X| = m$ en $|Y| = n$. Bewijs dat

$$|X^Y| = m^n.$$

8. Laat X, Y en Z verzamelingen zijn; stel dat X en Y disjunct zijn. Laat zien dat $Z^X \times Z^Y$ en $Z^{X \cup Y}$ gelijkmatig zijn. Concludeer dat, voor natuurlijke getallen m en n , $Z^m \times Z^n$ en Z^{m+n} gelijkmatig zijn.

9. Bewijs dat gelijkmatig zijn:

(a) $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}_+$;

(b) $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$;

(c) $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

10. Zij $f: A \rightarrow B$ een afbeelding, $X \subseteq A$ en $Y \subseteq B$.

(a) Verifieer dat $ff^{-1}[Y] \subseteq Y$.

(b) Laat zien dat $ff^{-1}[Y] = Y$ voor alle $Y \subseteq B$ als en slechts als f surjectief is.

(c) Geef een voorbeeld dat aantoonst dat niet noodzakelijkerwijs $f^{-1}f[X] \subseteq X$.

11. Verifieer dat de beperking van een afbeelding $f: X \rightarrow Y$ tot een klasse $U \subseteq X$ geconstrueerd kan worden door samenstelling met de kanonieke inbedding: $f \upharpoonright U = f \circ 1_X^U$.

12. Bewijs dat concatenatie van rijtjes associatief is: als $x, y, z \in X^{<\omega}$, dan

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

(Gebruik de formele definitie van rijtjes.)

13. Waarom kan er geen oneindige rij

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \dots$$

van verzamelingen bestaan?

14. (a) Definieer, voor $n \in \mathbb{N}$, $[n]$ als $\{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$. Merk op dat $\langle [n] \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ een $\mathbb{N}$ -geïndexeerde familie is. Vereenvoudig de uitdrukking

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n].$$

(b) Laat voor ieder positief geheel getal n , $(-1/n, 1/n) \subseteq \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn als $\{x \in \mathbb{R} \mid -1/n < x < 1/n\}$. Merk op dat $\langle (-1/n, 1/n) \mid n \in \mathbb{Z}_+ \rangle$ een $\mathbb{Z}_+$ -geïndexeerde familie is. Vereenvoudig de uitdrukking

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} (-1/n, 1/n).$$

15. Bewijs dat het cartesisch product $\prod_i X_i$ van een familie $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ van verzamelingen een verzameling is.

16. (a) Zij X een verzameling. De lezer zal zich herinneren dat X^1 per definitie bestaat uit alle functies van $\{0\}$ naar X ; en dat voor zo'n functie f , $e_0(f) = f(0)$. Construeer een bijectie $\phi: X \rightarrow X^1$ zodanig dat voor alle $x \in X$, $e_0(\phi(x)) = x$.

(b) Construeer een bijectie $\phi: X_0 \times X_1 \rightarrow \prod (X_i \mid i = 0, 1)$ zodanig dat voor alle $w \in X_0 \times X_1$, $e_0(\phi(w)) = e(w)$ en $e_1(\phi(w)) = e'(w)$.

(c) Zij $0 < m < n$. Construeer een bijectie

$$\phi: \prod(X_i | 0 \leq i < m) \times \prod(X_j | m \leq j < n) \rightarrow \prod(X_k | 0 \leq k < n)$$

zodanig dat voor alle $w \in \prod(X_i | 0 \leq i < m) \times \prod(X_j | m \leq j < n)$, en alle $i < m$ en j zo dat $m \leq j < n$, $e_i(\phi(w)) = e_i(e(w))$ en $e_j(\phi(w)) = e_{j-m}(e'(w))$.

Op grond van deze correspondenties heeft men er een gewoonte van gemaakt om X^1 te identificeren met X en $\prod(X_i | i = 0, 1)$ met $X_0 \times X_1$; en geïtereerde productvormingen $X_0 \times \dots \times X_{n-1}$ te noteren zonder haakjes, en ze te identificeren met $\prod(X_i | 0 \leq i < n)$.

17. Een *transversaal* van een kavelstelsel $\mathcal{B}$ is een klasse C zo dat

- (i) $C \subseteq \bigcup \mathcal{B}$;
- (ii) voor alle $B \in \mathcal{B}$, $|B \cap C| = 1$.

Bewijs dat het Keuze-axioma equivalent is met de bewering

Elke partitie heeft een transversaal.

18. Een *representatie* van een partitie $\mathcal{A}$ van een verzameling X is een afbeelding $f: X \rightarrow X$ zo dat voor alle $x, y \in X$, $x \equiv f(x) \pmod{\theta_{\mathcal{A}}}$, en als $x \equiv y \pmod{\theta_{\mathcal{A}}}$, dan $f(x) = f(y)$. Bewijs dat het Keuze-axioma equivalent is met de bewering

Elke partitie heeft een representatie.

19. Zij f een unaire operatie over een verzameling B , en $A \subseteq B$. Is het noodzakelijk waar dat $f \upharpoonright A = f|_A$?

20. Zij X een verzameling. Laat zien dat $\mathcal{P}(X) \not\subseteq X$.

21. Zij M een verzameling. Laat zien dat $\mathcal{P}(\bigcup M) \notin M$.

22. Zij M een verzameling, a een willekeurig object. Laat zien dat

$$\{a, \mathcal{P}(\bigcup M)\} \notin M.$$

23. Laat M een verzameling zijn, en a en a' willekeurige objecten. Laat zien:

$$\text{als } \{a, \mathcal{P}(\bigcup M)\} = \{a', \mathcal{P}(\bigcup M)\}, \text{ dan } a = a'.$$

24. Laat $\mathcal{U}$ het universum zijn, de klasse van alle verzamelingen en alle oerelementen. Zij M een verzameling. Laat zien dat de toekenning $a \mapsto \{a, \mathcal{P}(\bigcup M)\}$ een injectieve afbeelding is van $\mathcal{U}$ naar $\mathcal{U} \setminus M$.

25 (Pickert-Van der Waerden-Lemma). Laat A en M verzamelingen zijn, en

$$i: M \hookrightarrow A$$

een injectieve afbeelding. Construeer een verzameling B en een bijectie

$$j: B \twoheadrightarrow A$$

zo dat $(A \cup M) \cap B = \emptyset$.

Zij $C := M \cup (B \setminus j^{-1}i[M])$. Laat zien dat

$$i \cup j \upharpoonright (B \setminus j^{-1}i[M]): C \twoheadrightarrow A.$$

26. Zij $\langle R_i | i \in I \rangle$ een familie van binaire relaties.

(a) Ga na dat $\bigcap_{i \in I} R_i \subseteq \bigcap_{i \in I} \text{Vld } R_i$.

(b) Laat zien dat de omgekeerde inclusie niet geldt, ook niet als de R_i symmetrisch zijn.

(c) Bewijs de omgekeerde inclusie voor het geval dat de R_i reflexief zijn.

De natuurlijke getallen

Als de natuurlijke getallen niet gegeven zijn als een verzameling oerelementen, dan moeten we postulieren dat er een verzameling bestaat die groot genoeg (om precies te zijn: oneindig) is. Laten we een verzameling *inductief* noemen als

1. VERZAMELINGEN

ze de lege verzameling $\emptyset$ bevat, en bij elke verzameling x die ze bevat, ook $x \cup \{x\}$. Dan luidt het *Oneindigheidsaxioma*:

Er bestaat een inductieve verzameling.

We definiëren ω als de doorsnede van alle inductieve verzamelingen; die speelt de rol van $\mathbb{N}$.

27. Laat zien dat ω inductief is.

Omdat ω de kleinste inductieve verzameling is, geldt het principe van volledige inductie, in de vorm:

Als een verzameling X inductief is, dan $\omega \subseteq X$.

De elementen van ω zijn $\emptyset$, die we in dit verband met 0 aanduiden;

$$0 \cup \{0\} = \{0\},$$

aangeduid met 1; $1 \cup \{1\}$, ofwel 2, enzovoort. Merk op dat

$$0 \in 1, 2, 3, \dots; \quad 1 \in 2, 3, \dots,$$

enzovoort: de relatie $\in$ op ω correspondeert met de relatie $<$ op $\mathbb{N}$. Elke $n \in \omega$ is tegelijkertijd een deelverzameling van ω , bestaande uit de eerste n elementen van ω .

Een verzameling is eindig als ze gelijkmachting is met een beginsegment

$$\{0, \dots, n-1\}$$

van $\mathbb{N}$. Als we ω gebruiken in plaats van $\mathbb{N}$, dan wordt dat: een verzameling x is eindig als en alleen als er een surjectie op x bestaat van een element van ω .