

Voorrede

Wat ontbreekt. Dit zou de plaats zijn om kort in te gaan op de geschiedenis van de algebra, de universele algebra, en de infinitaire en partiële aftakkingen daarvan; en het verband met de informatica aan te duiden dat mijn directe motivatie voor dit werk is geweest. Voor het moment zou dat echter te ver voeren. Wie er meer over wil weten, kan te rade gaan bij Derbyshire [De] en Burmeister [BuI].

Onderwerp en aanpak. Het onderwerp van deze studie is de modeltheorie van partiële en infinitaire operaties. De nadruk ligt op logisch eenvoudige, ‘algebraïsche’ formules. Het betoog is gebaseerd op een enigszins libertaire en informele vorm van ZFC, en dus ouderwets dogmatisch. Structuren en theorieën worden niet beschreven in kategoriethoretische termen zoals in het boek van Hoehnke en Schreckenberger; integendeel, categorieën zijn de interessantste *toepassing* van de te ontwikkelen theorie. Dat neemt niet weg dat ze, net als tralies in de klassieke universele algebra, naast onderwerp van studie ook gereedschap zijn.

Het leek me aardig om de zaken van de grond af op te bouwen. De lezer hoeft dus in principe niets te weten om deze verhandeling te kunnen volgen. Het is echter mijn ervaring in vergelijkbare situaties dat de geïnteresseerde nieuweling een bijna bovenmenselijke vasthoudendheid nodig heeft; en misschien belangrijker nog, dat men zich zonder ervaring, in dit geval van algebra en logica, niet kan voorstellen dat iemand zich over zulke dingen het hoofd wil breken. In de geschiedenis van de wiskunde komen fundamentele beschouwingen ook niet uit de lucht vallen.

Waarom Nederlands. Wetenschappelijk proza wordt tegenwoordig haast uitsluitend in het Engels geschreven; een beetje zoals men in de middeleeuwen in het Latijn schreef. Dat Latijn was vaak erbarmelijk, net als het Engels van nu, en men is daar dan ook vanaf gestapt. Toch zou ik misschien in het Engels hebben geschreven, mijn overtuiging ten spijt dat ik dat niet zo mooi kan als in mijn eigen taal, in de hoop om, zoals de Nederlandse popmusici van de jaren ’60 zeiden, door te breken in Amerika. Maar het is niks meer met Amerika; en het Nederlands is zo langzamerhand een bedreigde taal. Dat laatste ziet men aan de afnemende geletterdheid, de grammaticale kaalslag bij elitaire bladen als *De Nieuwe Rotterdamsche Courant* en *De Groene Amsterdammer*, en het verontrostende gebrek aan jeugdige belangstelling voor de studie der Nederlandse Taal- en Letterkunde. Nu kan men wellicht denken: laten we allemaal Engels spreken, dan kunnen we elkaar verstaan! Dat dat niet zo is, zien we, wederom, aan de Verenigde Staten. Bovendien is een taal verknoopt met een manier van leven, die zonder de taal grotendeels verloren gaat. Alles wat men in het Xhosa kan zeggen, kan in het Nederlands worden vertaald; maar niet per se even gemakkelijk bedacht. Als het Nederlands verloren gaat, dan spreekt Vondel alleen nog tot een handvol experts:

*Myn wensch behoede u onverrot,
O STOCK en stut, die geen’ verrader,
Maer ’s vrydoms stut en Hollants Vader
Gestut hebt op dat wreet schavot;
Toen hy voor ’t bloedigh zwaert most knielen,
Veroordeelt, als een Seneka
Door Neroos haet en ongena,
Tot droefenis der braefste zielen.*

0. INLEIDING

*Ghy zult noch, jaeren achter een,
Den uitgangk van dien Helt getuigen,
En hoe Gewelt het Recht dorf buigen,
Tot smaet der onderdruckte steên.
Hoe dickwyl streckt' ghy, onder 't stappen
Naer 't hof der Staeten stadigh aen,
Hem voor een derden voet in 't gaen
En klimmen, op de hooge trappen:
Als hy, belast van ouderdom,
Papier en schriften, overleende,
En onder 't lastigh lantspack steende!
Wie ging, zoo krom gebuckt, noit krom!
Ghy ruste van uw trouwe plichten,
Na 'et rusten van dien ouden stock,
Geknot door 's bloetraets bittren wrock:
Nu stut en styft ghy noch myn dichten.*

— terwijl een ontwikkelde burger wiens moedertaal het is alleen hoeft te weten dat *stock* in Vondels tijd ook *grijsaard* betekende om te verstaan dat onrecht niet moet worden vergeten. Hoe anders schreef Wyatt na de juridische moord op Thomas Cromwell:

*The pillar perish'd is whereto I leant,
The strongest stay of my unquiet mind;
The like of it no man again can find,
From east to west still seeking though he went,
To mine unhap. For hap away hath rent
Of all my joy the very bark and rind:
And I, alas, by chance am thus assign'd
Daily to mourn, till death do it relent.
But since that thus it is by destiny,
What can I more but have a woful heart;
My pen in plaint, my voice in careful cry,
My mind in woe, my body full of smart;
And I myself, myself always to hate,
Till dreadful death do ease my doleful state.*

Mooier en gevoeliger, misschien; maar dat worden wij niet door het na te praten.

Notatie

Operaties worden in de praktijk nogal eens beschreven met behulp van een transformatieregel. Als een operatie f aldus correspondeert met een transformatie van x in $M(x)$, dan definiëren we f door te schrijven

$$f: x \mapsto M(x).$$

Bijvoorbeeld, verdubbeling van een getal kunnen we omschrijven als de transformatie van x in $2 \cdot x$. Hebben we de definitie “ $g: x \mapsto 2 \cdot x$ ” gegeven, dan geldt

$$g(3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Een enkele keer gebruiken we ook lambda-notatie. Als de transformatie

$$x \mapsto M(x)$$

van toepassing wordt geacht op de elementen van de klasse X , dan kunnen we de hierboven beschreven operatie f definiëren als

$$\lambda x \in X. M(x).$$

De verdubbeling van natuurlijke getallen wordt dan bijvoorbeeld weergegeven door de term $\lambda n \in \mathbb{N}. 2 \cdot n$ — te onderscheiden van onder meer de verdubbeling $\lambda z \in \mathbb{Z}. 2 \cdot z$ der gehele getallen.

Laat $D(x)$ een bewering zijn over een schematisch individu x . Dan symboliseert $\forall x D(x)$ ‘voor iedere x , $D(x)$ ’; en $\exists x D(x)$ ‘er bestaan x zo dat $D(x)$ ’. Bijvoorbeeld, als $D(x)$ staat voor ‘ x zit me dwars’, dan betekent $\forall x D(x)$ ‘alles zit me dwars’, en $\exists x D(x)$ ‘iets zit me dwars’.

In plaats van het woord ‘en’ gebruiken we soms het symbool $\&$, als in ‘het regent $\&$ het waait’. We gebruiken ook $\wp$ in plaats van ‘en/of’: *het regent $\wp$ het waait* als het regent, waait, of allebei. We schrijven $A \Rightarrow B$ in plaats van ‘als A , dan B ’, $A \Leftrightarrow B$ in plaats van ‘ A dan en slechts dan als B ’, en $\sim A$ in plaats van ‘het is niet zo dat A ’.

Als P een klasse is, dan noteren we ‘ x behoort tot P ’ (equivalent: ‘ x is een element van P ’) als $x \in P$. De $\in$ -notatie wordt soms gecombineerd met de *quantoren* $\exists$ en $\forall$; dan schrijven we

$$(1) \quad \forall x \in P D(x)$$

om uit te drukken dat $D(x)$ geldt voor alle elementen van P , en

$$(2) \quad \exists x \in P D(x)$$

om te beweren dat $D(x)$ geldt voor minstens één element van P . Met meer omhaal kan (1) worden weergegeven als

$$(1a) \quad \forall x (x \in P \Rightarrow D(x)),$$

en (2) als

$$(2a) \quad \exists x (x \in P \& D(x)).$$

Als D is als boven en P de klasse der problemen aanduidt, dan zegt (1) ‘ieder probleem zit me dwars’, en (2) ‘er is een probleem dat me dwars zit’.

We schrijven $\exists! x D(x)$ voor ‘er is precies één x met de eigenschap D ’. Met behulp van de eerder ingevoerde notatie kunnen we de quantor $\exists!$ definiëren:

$$\exists! x D(x) :\Leftrightarrow \exists x \forall y (D(y) \Leftrightarrow x = y).$$

Een definitie met enkelvoudige gevalsonderscheiding, van de vorm

$$F(x) = \begin{cases} M(x) & \text{als } A(x) \text{ geldt,} \\ N(x) & \text{als } A(x) \text{ niet geldt} \end{cases}$$

kan worden weergegeven in *Church-Hoare-notatie* als

$$M(x) \triangleleft A(x) \triangleright N(x).$$

Een gevalsonderscheiding kan ook *verborgen parameters* bevatten: we schrijven

$$F(x) = M(x, y) \triangleleft A(x, y) \triangleright N(x)$$

als $F(x) = M(x, y)$ wanneer er een y bestaat zo dat $A(x, y)$, en anders $F(x) = N(x)$.

Een dergelijke definitie werkt natuurlijk alleen als voor alle y_1 en y_2 ,

$$A(x, y_1) \& A(x, y_2) \Rightarrow M(x, y_1) = M(x, y_2).$$

0. INLEIDING

Het eind van een bewijs wordt gemarkeerd met een benzineblikbodem, ☊. Ik gebruik de symboolcombinatie $:=$ voor ‘is per definitie gelijk aan’. Dus

$$P(x, n) := \frac{1}{n} \sin x^n$$

legt $P(x, n)$ uit als $\frac{1}{n} \sin x^n$. Analoog staat de symboolcombinatie $:\Leftrightarrow$ voor ‘is per definitie equivalent met’. Dus

$$Q(x, n) :\Leftrightarrow P(x, n) = 1$$

verklaart cumulatief dat $Q(x, n)$ staat voor de bewering dat $\frac{1}{n} \sin x^n$ gelijk is aan 1. Merk op dat in de laatste definitie extra spaties worden gebruikt om de lezer te helpen raden dat ‘ $P(x, n)$ ’ meer bij ‘=’ hoort dan bij ‘ $\Leftrightarrow$ ’.

Met “2§A” verwijs ik naar paragraaf A van hoofdstuk 2 — enzovoort. Verwijzingen naar de literatuurlijst worden gegeven door afkortingen tussen vierkante haken, bijvoorbeeld, [BuI] voor *Burmeister: Introduction...*

Oefeningen

De oefeningen zijn vaak heel eenvoudig, en dienen dan bijvoorbeeld ter bevestiging van iets dat de zorgvuldige lezer al dacht. Naar de mening van de auteur is bevestiging van dien aard over het algemeen van aanmerkelijk nut.

Slordigheid

In de universele algebra is men meestal wat preciezer dan in de klassieke algebra; men zal bijvoorbeeld onderscheid maken tussen een groep $\mathbf{G}$ en de verzameling G van de elementen van $\mathbf{G}$. Ook ik ben behept met die gewoonte. Het is niet erg wanneer precisie overbodig is. Soms zit ze echter in de weg. De liefhebber van slordige notatie zal dan ook het genoeg smaken van, bijvoorbeeld, het onderscheid tussen een ordinaalgetal α en de inclusie- en $\in$ -structuren over zijn elementen verwaarloosd te zien worden.

Een ander voorbeeld van slordigheid is trouwens dat men zegt: “Zij $\mathbf{G}$ een groep. Een element e van G is een *eenheidselement* als voor alle $x \in G$, $ex = e$.” Die e is een eenheidselement *van de groep* $\mathbf{G}$, maar de meeste mensen hadden dat al bedacht, ze zijn geen rekenmachines en worden wantrouwig bij overbodige aanwijzingen. Wiskunde is mensenwerk, en dient ruimte te laten voor het misverstand.

Er kan soms gevarieerd worden op uitdrukkingen zonder dat daar een aparte definitie aan wordt besteed. Bijvoorbeeld, als er gedefinieerd is wat het betekent dat a het begin is van een pad en b het eind, dan wordt van de lezer verwacht dat hij weet wat een pad van c naar d is.

Dwalingen, fouten en vergissingen

Lezer: wat u voor zich heeft is een deel van een onvoltooid werk, een deel waarvan de schrijver denkt dat het leesbaar is en de moeite van het lezen waard. Het is niet per se in definitieve vorm. Misschien blijken sommige stellingen later overbodig te zijn, niet interessant genoeg op zichzelf en niet nodig voor iets dat wèl interessant is. Sommige bewijzen zijn misschien te gedetailleerd.

Mocht u een fout of vergissing opmerken, hoe groot of hoe klein ook, dan zult u mij verplichten door het mij te melden: P.H.Rodenburg@uva.nl