Inleiding in de formele logica

Nehalennia, Middelburg, 2 oktober 2017

Peter van Ormondt

P.vanOrmondt@uva.nl

http://www.vanormondt.net/~peter

http://www.illc.uva.nl

Programma

Wat is logica?
◦ Voorbeelden van redeneringen ◦ Vorm van de redenering

Propositielogica
◦ Inleiding

Syntaxis van propositielogica
◦ Vocabulaire ◦ Formules ◦ Vertalingen

Semantiek van propositielogica
◦ Semantiek ◦ Waarheid ◦ Compositionaliteit ◦ Waarheidstafels

Eigenschappen van formules
◦ Tautologie, contradictie en contingentie ◦ Logische equivalentie

Geldigheid
◦ Semantische geldigheid ◦ Puzzles ◦ Afronding propositielogica

Epistemische Logica

Conclusie

Programma

Wat is logica?
◦ Voorbeelden van redeneringen ◦ Vorm van de redenering

Propositielogica
◦ Inleiding

Syntaxis van propositielogica
◦ Vocabulaire ◦ Formules ◦ Vertalingen

Semantiek van propositielogica
◦ Semantiek ◦ Waarheid ◦ Compositionaliteit ◦ Waarheidstafels

Eigenschappen van formules
◦ Tautologie, contradictie en contingentie ◦ Logische equivalentie

Geldigheid
◦ Semantische geldigheid ◦ Puzzles ◦ Afronding propositielogica

Epistemische Logica

Conclusie

Leerdoelen

Leerdoelen

- Verdere bekendheid krijgen met een specifiek logisch systeem: de propositielogica

Leerdoelen

- Verdere bekendheid krijgen met een specifiek logisch systeem: de propositielogica
- Vertalingen maken van natuurlijke taal naar formele taal

Leerdoelen

- Verdere bekendheid krijgen met een specifiek logisch systeem: de propositielogica
- Vertalingen maken van natuurlijke taal naar formele taal
- Inzicht krijgen in geldigheidsbegrip voor propositielogica

Leerdoelen

- Verdere bekendheid krijgen met een specifiek logisch systeem: de propositielogica
- Vertalingen maken van natuurlijke taal naar formele taal
- Inzicht krijgen in geldigheidsbegrip voor propositielogica
- Onderzoeken van geldigheid van redeneringen met behulp van semantische notie van geldigheid (waarheidstafels)

Leerdoelen

- Verdere bekendheid krijgen met een specifiek logisch systeem: de propositielogica
- Vertalingen maken van natuurlijke taal naar formele taal
- Inzicht krijgen in geldigheidsbegrip voor propositielogica
- Onderzoeken van geldigheid van redeneringen met behulp van semantische notie van geldigheid (waarheidstafels)
- Bekendheid krijgen met een uitbreiding van propositielogica, nl. epistemische logica

Wat is logica?

Logica en redeneren

- Geldig en ongeldig redeneren
  - Niet al het redeneren is correct? Wat zijn de regels en principes?
- Evolutionaire geschiedenis van cognitieve functie
  - 2M jaar gelden ontstaan duur nageslacht, eten van vlees, grotere breinen. 300K jaar geleden gebruik van vuur, grotere sociale groepen, “hulpeloos” nageslacht, late volwassenheid.
- Geschiedenis
  - In oude Griekenland en China al vragen over logische geldigheid. Aristoteles (384–322 v. Chr.) eerste logische “systeem”. Volgende “grote stap” in 19e eeuw.
- Tijdsverdrijf
  - Sudoku, mastermind, detecive serie
- Logische theorie
  - Logische vorm, variabelen, notaties ($p \to q, \neg p, p \vee \neg p$), wetten ($\models p \vee \neg p, \models p \vee q \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$).
- Toepassingen in filosofie, taalkunde, informatica, wiskunde en cognitiewetenschappen

Redeneringen

Redeneringen

Redeneren doen we de hele dag door en heeft vele toepassingen. Het is belangrijk om te weten wanneer een redenering *geldig* is. Logica bestudeert de principes van *geldig redeneren*.

Definitie

Een redenering is een (eindig) rijtje zinnen: een aantal premissen gevolgd door een conclusie.

Redeneringen

Redeneren doen we de hele dag door en heeft vele toepassingen. Het is belangrijk om te weten wanneer een redenering *geldig* is. Logica bestudeert de principes van *geldig redeneren*.

Definitie

Een redenering is een (eindig) rijtje zinnen: een aantal premissen gevolgd door een conclusie.

Schematisch:

$$\begin{array}{l} \text{Premisse 1} \\ \text{Premisse 2} \\ \quad\vdots \\ \text{Premisse } n \\ \text{Conclusie} \end{array}$$

Redeneringen

Redeneringen

Klaas heeft zich aangegeven bij de politie,
of Piet heeft zich aangegeven bij de politie.
Piet heeft zich niet aangegeven.

Dan: Klaas heeft zich aangegeven.

Redeneringen

Klaas heeft zich aangegeven bij de politie,
of Piet heeft zich aangegeven bij de politie.
Piet heeft zich niet aangegeven.

Dan: Klaas heeft zich aangegeven.

Alle zoogdieren zijn sterfelijk
Alle mensen zijn zoogdieren

Alle mensen zijn sterfelijk

Redeneringen

Klaas heeft zich aangegeven bij de politie,
of Piet heeft zich aangegeven bij de politie.
Piet heeft zich niet aangegeven.

Dan: Klaas heeft zich aangegeven.

Alle zoogdieren zijn sterfelijk
Alle mensen zijn zoogdieren

Alle mensen zijn sterfelijk

We zeggen dat de conclusie *logisch volgt uit de premissen.*

Redeneringen

Een redenering kan geldig of ongeldig zijn. Wanneer is een redenering geldig? En waarom? En wat bedoelen we daar mee?

Een redenering is niet afhankelijk van hoe de wereld toevallig in elkaar steekt. In zekere zin doen de feiten er niet toe:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Alle vissen zijn zoogdieren.}\\ \text{Moby Dick is een vis.}\end{array}}{\text{Moby Dick is een zoogdier.}}$$

Redeneringen

Een redenering kan geldig of ongeldig zijn. Wanneer is een redenering geldig? En waarom? En wat bedoelen we daar mee?

Een redenering is niet afhankelijk van hoe de wereld toevallig in elkaar steekt. In zekere zin doen de feiten er niet toe:

Alle vissen zijn zoogdieren.
Moby Dick is een vis.

Moby Dick is een zoogdier.

De geldigheid van een redenering zegt niets over of de premissen en conclusie waar zijn.

Waarheid van de premissen en de conclusie alleen is onvoldoende grond voor de geldigheid van een redenering.

Redeneringen

Een redenering kan natuurlijk ook ongeldig zijn.

$$\frac{\text{Sommige leerlingen zijn Zeeuws} \quad \text{Sommige Zeeuwen zijn gepensioneerd}}{\text{Sommige leerlingen zijn gepensioneerd}}$$

Redeneringen

Een redenering kan natuurlijk ook ongeldig zijn.

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Sommige leerlingen zijn Zeeuws}\\ \text{Sommige Zeeuwen zijn gepensioneerd}\end{array}}{\text{Sommige leerlingen zijn gepensioneerd}}$$

Er hoeft helemaal geen overlap te zijn tussen Zeeuwse leerlingen en Zeeuwse gepensioneerden.

Redeneringen

Een redenering kan natuurlijk ook ongeldig zijn.

$$\frac{\text{Sommige leerlingen zijn Zeeuws} \quad \text{Sommige Zeeuwen zijn gepensioneerd}}{\text{Sommige leerlingen zijn gepensioneerd}}$$

Er hoeft helemaal geen overlap te zijn tussen Zeeuwse leerlingen en Zeeuwse gepensioneerden.

$$\frac{\text{Als Klaas heeft gelogen, dan is zijn moeder ongelukkig} \quad \text{Klaas heeft niet gelogen}}{\text{De moeder van Klaas is ongelukkig}}$$

Redeneringen

Een redenering kan natuurlijk ook ongeldig zijn.

Sommige leerlingen zijn Zeeuws
Sommige Zeeuwen zijn gepensioneerd

Sommige leerlingen zijn gepensioneerd

Er hoeft helemaal geen overlap te zijn tussen Zeeuwse leerlingen en Zeeuwse gepensioneerden.

Als Klaas heeft gelogen, dan is zijn moeder ongelukkig
Klaas heeft niet gelogen

De moeder van Klaas is ongelukkig

Misschien is de moeder ongelukkig omdat ze gevallen is met de fiets?

Redeneringen

Klaas heeft zich aangegeven bij de politie of
Piet heeft zich aangegeven bij de politie
Piet heeft zich aangegeven bij de politie

Klaas heeft zich niet aangegeven bij de politie

Redeneringen

Klaas heeft zich aangegeven bij de politie of
Piet heeft zich aangegeven bij de politie
Piet heeft zich aangegeven bij de politie

Klaas heeft zich niet aangegeven bij de politie

Marie gaat naar het feest of Jeanine gaat naar het feest
Marie gaat naar het feest

Jeanine gaat niet naar het feest

Redeneringen

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Klaas heeft zich aangegeven bij de politie of} \\ \quad\text{Piet heeft zich aangegeven bij de politie} \\ \text{Piet heeft zich aangegeven bij de politie}\end{array}}{\text{Klaas heeft zich niet aangegeven bij de politie}}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Marie gaat naar het feest of Jeanine gaat naar het feest} \\ \text{Marie gaat naar het feest}\end{array}}{\text{Jeanine gaat niet naar het feest}}$$

$$\frac{\begin{array}{l}p \text{ of } q \\ p\end{array}}{\neg q}$$

Geldigheid hangt af van vorm van het schema en de betekenis van “of”.

Geldigheid

Definitie (Geldigheid)

We zeggen dat een redenering geldig is *dan en slechts dan als* (desda) het volgende het geval is: als de premissen waar zijn, dan is de conclusie waar. Anders: als de premissen niet waar kunnen zijn, zonder dat de conclusie dat ook is.

- Om redeneringen te representeren en vervolgens te toetsen op geldigheid wordt een *formele taal* opgesteld. Bij het opstellen wordt een onderscheid gemaakt tussen logische constanten ($\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$) en variabelen ($p, q, r, \ldots$).
- De variabelen dienen om redeneringen in volle algemeenheid te beschouwen
- De logische constante moeten worden voorzien van een betekenis

Vorm van de redenering

Neem de volgende geldige redeneringen.

Als Marie naar het feest komt, dan komt Jan ook naar het feest.
Marie komt naar het feest.

Jan komt naar het feest.

Als Kees naar het feest komt, dan komt Thea ook naar het feest.
Kees komt naar het feest.

Thea komt naar het feest.

Als het regent, dan wordt de auto nat.
Het regent.

De auto wordt nat.

Vorm van de redenering

Schematische weergave van dezelfde redenering (*redeneerschema*).

$$\begin{array}{l} \text{Als } p \text{, dan } q. \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Vorm van de redenering

Schematische weergave van dezelfde redenering (*redeneerschema*).

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Als } p\text{, dan } q. \\ p\end{array}}{q}$$

$$\frac{\begin{array}{l}p \text{ of } q \\ \text{niet-}p\end{array}}{q}$$

Vorm van de redenering

Schematische weergave van dezelfde redenering (*redeneerschema*).

$$\begin{array}{l} \text{Als } p\text{, dan } q. \\ p \\ \hline q \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \text{ of } q \\ \text{niet-}p \\ \hline q \end{array}$$

- Geldige redeneringen hebben een bepaalde *vorm* gemeen.
- Deze vorm is o.a. verantwoordelijk voor de geldigheid.

Logische constanten

Als Piet naar de bioscoop gaat, dan gaat Jan naar de bioscoop.
Piet gaat naar de bioscoop.

Jan gaat naar de bioscoop.

Piet gaat naar de bioscoop of Jan gaat naar de bioscoop.
Piet gaat naar de bioscoop.

Jan gaat naar de bioscoop.

Logische constanten

Als Piet naar de bioscoop gaat, dan gaat Jan naar de bioscoop.
Piet gaat naar de bioscoop.

Jan gaat naar de bioscoop.

Piet gaat naar de bioscoop of Jan gaat naar de bioscoop.
Piet gaat naar de bioscoop.

Jan gaat naar de bioscoop.

Als p, dan q	p of q
p	p
q	q

Kennelijk kunnen *als* ..., *dan* ... en *of* niet zomaar veranderd worden in het redeneerschema.

Logische constanten

Als p, dan q	$p \vee q$
p	p
q	q

Logische constanten

$$\begin{array}{l} \text{Als } p\text{, dan } q \\ p \\ \hline q \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Naast de vorm van het redeneerschema hangt de geldigheid af van de *betekenis* van de uitdrukkingen *of* en *als* . . . , *dan* . . . . En ook de uitdrukkingen *niet*, *of*, *en* en *dan en slechts dan als*. Deze uitdrukkingen worden wel *logische constanten* genoemd.

In het volgende gedeelte zullen we kijken naar de logica die de geldige redeneringen met deze uitdrukkingen beschrijft: de propositielogica. Dit zijn niet de enige uitdrukkingen die interessante logische eigenschappen hebben. Denk aan *voor alle* x, *voor sommige* y, *ik weet dat* . . . , *het is noodzakelijk dat* . . . , etc.

Samenvatting

- Redeneringen zijn rijtjes zinnen bestaande uit premissen en conclusie.
- Redeneringen kunnen geldig zijn of ongeldig.
- Conclusies volgen noodzakelijk uit premissen in geldige redeneringen.
- De geldigheid van de redenering is niet afhankelijk van de waarheid van de zinnen die voorkomen in de redenering.
- Redeneringen zijn afhankelijk van de vorm van de redenering en de betekenis van logische constanten, bijvoorbeeld *en*, *of*, *niet*, *als* . . . , *dan* . . . .

Propositielogica

Propositielogica

De taal van de propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal die is opgebouwd uit atomaire proposities, connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Propositielogica

De taal van de propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal die is opgebouwd uit atomaire proposities, connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*

Propositielogica

De taal van de propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal die is opgebouwd uit atomaire proposities, connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
   Berend loopt naar het station en het regent hard

Propositielogica

De taal van de propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal die is opgebouwd uit atomaire proposities, connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
   Berend loopt naar het station en het regent hard
2. *Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon.*

Propositielogica

De taal van de propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal die is opgebouwd uit atomaire proposities, connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
   Berend loopt naar het station en het regent hard
2. *Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon.*
   Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon

Propositielogica

De taal van de propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal die is opgebouwd uit atomaire proposities, connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
   Berend loopt naar het station en het regent hard
2. *Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon.*
   Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon
3. *Het is niet het geval dat Halbe Zijlstra voorzitter is van de ministerraad.*

Propositielogica

De taal van de propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal die is opgebouwd uit atomaire proposities, connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
   Berend loopt naar het station en het regent hard
2. *Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon.*
   Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon
3. *Het is niet het geval dat Halbe Zijlstra voorzitter is van de ministerraad.*
   Het is niet het geval dat Halbe Zijlstra voorzitter is van de ministerraad.

Propositielogica

De taal van de propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal die is opgebouwd uit atomaire proposities, connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
   Berend loopt naar het station en het regent hard
2. *Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon.*
   Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon
3. *Het is niet het geval dat Halbe Zijlstra voorzitter is van de ministerraad.*
   Het is niet het geval dat Halbe Zijlstra voorzitter is van de ministerraad.
4. *Koning Willem-Alexander is het staatshoofd van Nederland.*

Propositielogica

De taal van de propositielogica is een vrij eenvoudige logische taal die is opgebouwd uit atomaire proposities, connectieven en negatie. Door middel van de connectieven kan je twee zinnen verbinden tot een nieuwe samengestelde zin en de negatie heeft slecht één zin als argument.

Voorbeeld

1. *Berend loopt naar het station en het regent hard.*
   Berend loopt naar het station en het regent hard
2. *Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon.*
   Als Marie naar het station loopt, dan schijnt de zon
3. *Het is niet het geval dat Halbe Zijlstra voorzitter is van de ministerraad.*
   Het is niet het geval dat Halbe Zijlstra voorzitter is van de ministerraad.
4. *Koning Willem-Alexander is het staatshoofd van Nederland.*
   Koning Willem-Alexander is het staatshoofd van Nederland.

Propositielogica

Een propositie is een bewering of uitspraak uitgedrukt in een (indicatieve) zin. Grofweg zijn dit zinnen die een situtatie of stand van zaken uitdrukken en waar of onwaar zijn, maar niet allebei.

Voorbeeld

Berend loopt naar het station	*en*	*het regent hard*

Propositielogica

Een propositie is een bewering of uitspraak uitgedrukt in een (indicatieve) zin. Grofweg zijn dit zinnen die een situtatie of stand van zaken uitdrukken en waar of onwaar zijn, maar niet allebei.

Voorbeeld

Berend loopt naar het station *en* *het regent hard*

propositieletter

p

Propositielogica

Een propositie is een bewering of uitspraak uitgedrukt in een (indicatieve) zin. Grofweg zijn dit zinnen die een situtatie of stand van zaken uitdrukken en waar of onwaar zijn, maar niet allebei.

Voorbeeld

$\boxed{\textit{Berend loopt naar het station}}\ \boxed{\textit{en}}\ \boxed{\textit{het regent hard}}$

propositieletter *propositieletter*

$p \qquad q$

Propositielogica

Een propositie is een bewering of uitspraak uitgedrukt in een (indicatieve) zin. Grofweg zijn dit zinnen die een situtatie of stand van zaken uitdrukken en waar of onwaar zijn, maar niet allebei.

Voorbeeld

Berend loopt naar het station *en* *het regent hard*

propositieletter *conjunctie* *propositieletter*

$$p \quad \wedge \quad q$$

Syntaxis

De syntaxis van een formele taal bestaat, net als een natuurlijke taal, uit twee componenten

1. Een vocabulaire (≈ alfabet), de symbolen die we gaan gebruiken.
2. De syntaxis, regels die éénduidig vastleggen hoe we van de symbolen zinnen, ofwel *formules* van de taal kunnen vormen.

Vocabulaire

Het vocabulaire van de propositielogica bestaat uit de volgende componenten:

Propositieletters

Symbolen om proposities weer te geven. Het is vaak handig om daarbij herkenbare propositieletters te gebruiken: Stel ‘Jan huilt’ voor door de letter h. Maar we gebruiken ook andere letters $p, q, r, \ldots, p_1, p_2, p_3, \ldots, q_1, q_2, \ldots$.

Vocabulaire

Propositieletters
Symbolen om proposities weer te geven. Het is vaak handig om daarbij herkenbare propositieletters te gebruiken: Stel 'Jan huilt' voor door de letter h. Maar we gebruiken ook andere letters p, q, r, . . . , p_1, p_2, p_3, . . . , q_1, q_2, ...

Vocabulaire

Propositieletters
Symbolen om proposities weer te geven. Het is vaak handig om daarbij herkenbare propositieletters te gebruiken: Stel 'Jan huilt' voor door de letter h. Maar we gebruiken ook andere letters $p, q, r, \ldots, p_1, p_2, p_3, \ldots, q_1, q_2, \ldots$.

Logische symbolen

Symbool	Naam	Voorbeeld	Vertaling
$\neg$	Negatie	Het is niet zo dat Rutte premier is	$\neg r$
$\wedge$	Conjunctie	Rutte is premier en Maxima is koningin	$r \wedge m$
$\vee$	Disjunctie	Rutte is premier of Maxima is koningin	$r \vee m$
$\rightarrow$	Implicatie	Als Rutte premier is, dan is Maxima koningin	$r \rightarrow m$
$\leftrightarrow$	bi-implicatie	Rutte is premier desda Maxima koningin is	$r \leftrightarrow m$

Vocabulaire

Propositieletters
Symbolen om proposities weer te geven. Het is vaak handig om daarbij herkenbare propositieletters te gebruiken: Stel 'Jan huilt' voor door de letter h. Maar we gebruiken ook andere letters $p, q, r, \ldots, p_1, p_2, p_3, \ldots, q_1, q_2, \ldots$.

Logische symbolen

Symbool	Naam	Voorbeeld	Vertaling
$\neg$	Negatie	Het is niet zo dat Rutte premier is	$\neg r$
$\wedge$	Conjunctie	Rutte is premier en Maxima is koningin	$r \wedge m$
$\vee$	Disjunctie	Rutte is premier of Maxima is koningin	$r \vee m$
$\rightarrow$	Implicatie	Als Rutte premier is, dan is Maxima koningin	$r \rightarrow m$
$\leftrightarrow$	bi-implicatie	Rutte is premier desda Maxima koningin is	$r \leftrightarrow m$

Vocabulaire

Propositieletters
Symbolen om proposities weer te geven. Het is vaak handig om daarbij herkenbare propositieletters te gebruiken: Stel 'Jan huilt' voor door de letter h. Maar we gebruiken ook andere letters $p, q, r, \ldots, p_1, p_2, p_3, \ldots, q_1, q_2, \ldots$.

Logische symbolen

Symbool	Naam	Voorbeeld	Vertaling
$\neg$	Negatie	Het is niet zo dat Rutte premier is	$\neg r$
$\wedge$	Conjunctie	Rutte is premier en Maxima is koningin	$r \wedge m$
$\vee$	Disjunctie	Rutte is premier of Maxima is koningin	$r \vee m$
$\rightarrow$	Implicatie	Als Rutte premier is, dan is Maxima koningin	$r \rightarrow m$
$\leftrightarrow$	bi-implicatie	Rutte is premier desda Maxima koningin is	$r \leftrightarrow m$

Hulp symbolen

Verder gebruiken we nog haakjes om ambiguïteit te voorkomen. Bijvoorbeeld:

(1) Het is niet zo dat het regent en Amsterdam de hoofdstad is van Nederland.
  a. Vertaling 1: $\neg(p \wedge q)$
  b. Vertaling 2: $\neg p \wedge q$

Vocabulaire

Propositieletters
Symbolen om proposities weer te geven. Het is vaak handig om daarbij herkenbare propositieletters te gebruiken: Stel 'Jan huilt' voor door de letter h. Maar we gebruiken ook andere letters $p, q, r, \ldots, p_1, p_2, p_3, \ldots, q_1, q_2, \ldots$.

Logische symbolen

Symbool	Naam	Voorbeeld	Vertaling
$\neg$	Negatie	Het is niet zo dat Rutte premier is	$\neg r$
$\wedge$	Conjunctie	Rutte is premier en Maxima is koningin	$r \wedge m$
$\vee$	Disjunctie	Rutte is premier of Maxima is koningin	$r \vee m$
$\rightarrow$	Implicatie	Als Rutte premier is, dan is Maxima koningin	$r \rightarrow m$
$\leftrightarrow$	bi-implicatie	Rutte is premier desda Maxima koningin is	$r \leftrightarrow m$

Hulp symbolen

Verder gebruiken we nog haakjes, (,), om ambiguïteit te voorkomen.

Vocabulaire

Propositieletters
Symbolen om proposities weer te geven. Het is vaak handig om daarbij herkenbare propositieletters te gebruiken: Stel 'Jan huilt' voor door de letter h. Maar we gebruiken ook andere letters $p, q, r, \ldots, p_1, p_2, p_3, \ldots, q_1, q_2, \ldots$.

Logische symbolen

Symbool	Naam	Voorbeeld	Vertaling
$\neg$	Negatie	Het is niet zo dat Rutte premier is	$\neg r$
$\wedge$	Conjunctie	Rutte is premier en Maxima is koningin	$r \wedge m$
$\vee$	Disjunctie	Rutte is premier of Maxima is koningin	$r \vee m$
$\rightarrow$	Implicatie	Als Rutte premier is, dan is Maxima koningin	$r \rightarrow m$
$\leftrightarrow$	bi-implicatie	Rutte is premier desda Maxima koningin is	$r \leftrightarrow m$

Hulp symbolen

Verder gebruiken we nog haakjes, (,), om ambiguïteit te voorkomen.

We zullen nu alles in een mooie overzichtelijke definitie zetten.

Vocabulaire

Laten we de taal der propositielogica $\mathcal{L}$ noemen.

Definitie (Vocabulaire van $\mathcal{L}$)

Het vocabulaire van de propositielogica $\mathcal{L}$ zal bestaan uit de volgende symbolen:

1. Symbolen voor propositieletters: $p, q, r, s, t, \ldots$. Soms gebruiken we indices: $p_1, p_2, \ldots, p_k$.
2. Symbolen logische constanten $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow$.
3. Symbolen voor leesbaarheid: $), ($.

Formules

Met de symbolen van de vocabulaire kunnen we nu met behulp van vaste regels samengestelde uitdrukkingen of zinnen van de propositielogica maken. Deze uitdrukkingen worden *(welgevormde) formules* genoemd.

Formules

Met de symbolen van de vocabulaire kunnen we nu met behulp van vaste regels samengestelde uitdrukkingen of zinnen van de propositielogica maken. Deze uitdrukkingen worden *(welgevormde) formules* genoemd.

Definitie (Syntaxis van $\mathcal{L}$)

1. Alle propositieletters in het vocabulaire zijn formules van $\mathcal{L}$.
2. Als ψ een formule is van $\mathcal{L}$, dan is $\neg\psi$ dat ook.
3. Als φ, ψ een formule is van $\mathcal{L}$, dan zijn $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ook formules van $\mathcal{L}$.
4. Niets, behalve wat op grond van een eindig aantal toepassingen van clausules (1)-(3) is gegenereerd is een formule van $\mathcal{L}$.

Formules

Formules

Terzijde

De definitie op de vorige slide is een voorbeeld van een *recursieve definitie*. Deze definities worden bijvoorbeeld gebruikt om met een eindig aantal (simpele) regels, oneindige verzamelingen te definiëren.

Voorbeeld (Natuurlijke getallen)

$$0 \in \mathbb{N} \tag{1}$$

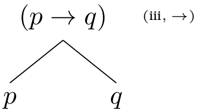
$$\textit{Als } n \in \mathbb{N}, \ \textit{dan } n + 1 \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Niets is een element van $\mathbb{N}$ *behalve wat op grond van (1) en (2) is verkregen.*

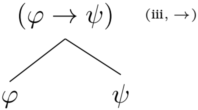
Constructiebomen

Constructiebomen

Neem de volgende formule: $(p \to q)$



Dit hadden ook een willekeurige formules φ, ψ kunnen zijn geweest:



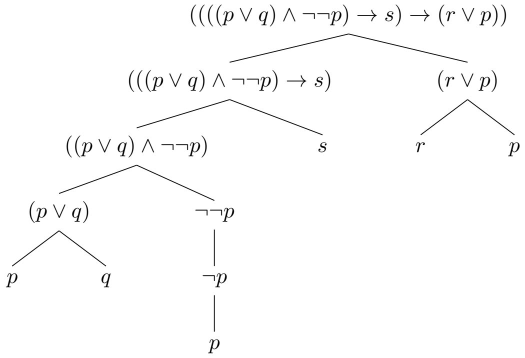
waar bijvoorbeeld $\varphi := ((p \wedge r) \to s)$ en $\psi := \neg(q \leftrightarrow q)$. In dit geval spreken we van een *schematische weergave*.

Constructiebomen

Neem de volgende formule: $((((p \vee q) \wedge \neg\neg p) \to s) \to (r \vee p))$.

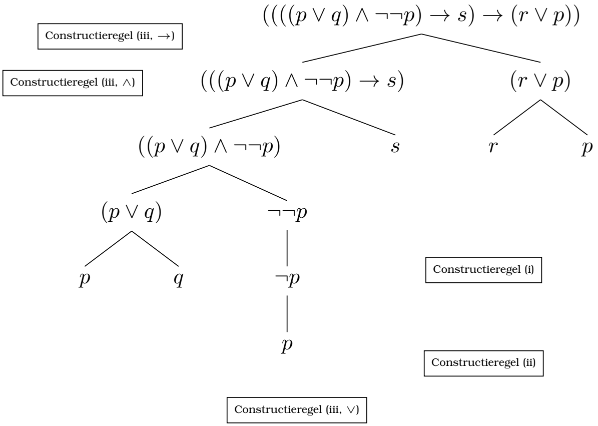
Constructiebomen

Neem de volgende formule: $((((p \vee q) \wedge \neg\neg p) \to s) \to (r \vee p))$.



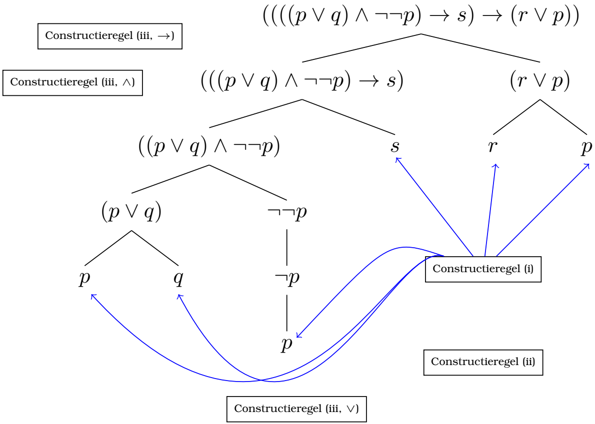
Constructiebomen

Neem de volgende formule: $((((p \vee q) \wedge \neg\neg p) \rightarrow s) \rightarrow (r \vee p))$.



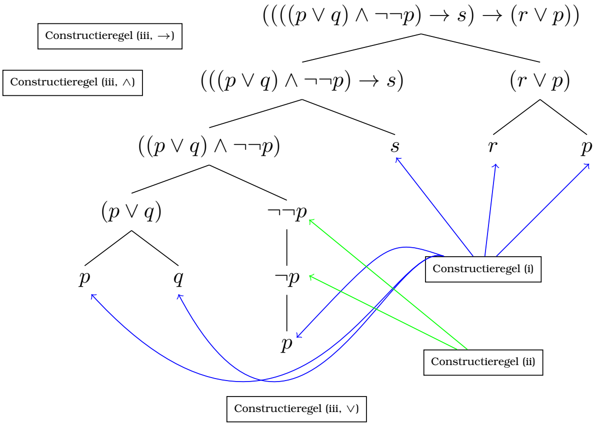
Constructiebomen

Neem de volgende formule: $((((p \vee q) \wedge \neg\neg p) \to s) \to (r \vee p))$.



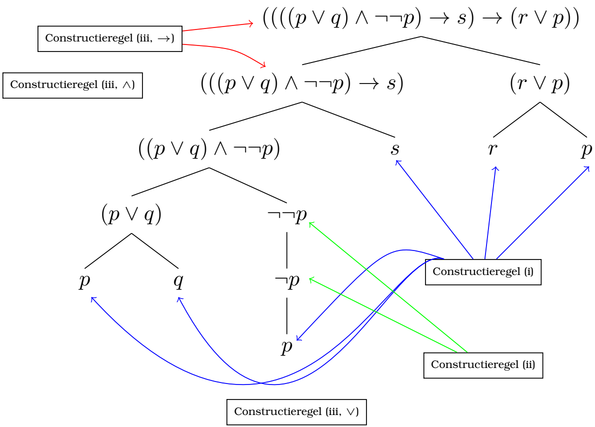
Constructiebomen

Neem de volgende formule: $((((p \vee q) \wedge \neg\neg p) \to s) \to (r \vee p))$.



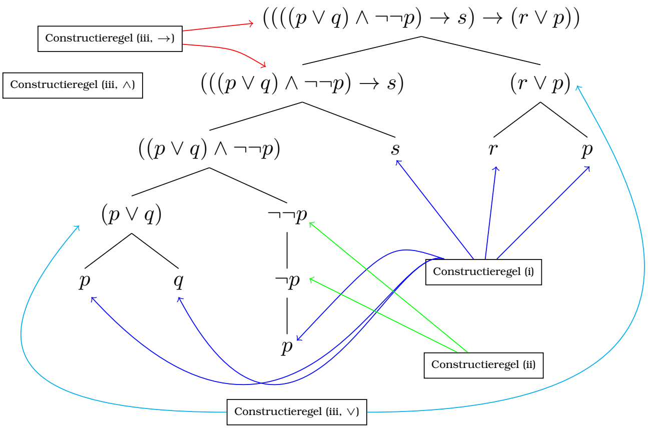
Constructiebomen

Neem de volgende formule: $((((p \vee q) \wedge \neg\neg p) \rightarrow s) \rightarrow (r \vee p))$.



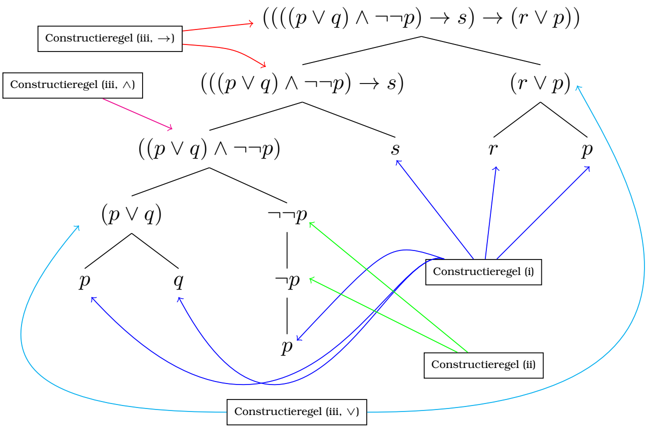
Constructiebomen

Neem de volgende formule: $((((p \vee q) \wedge \neg\neg p) \to s) \to (r \vee p))$.



Constructiebomen

Neem de volgende formule: $((((p \vee q) \wedge \neg\neg p) \to s) \to (r \vee p))$.



Formules

Welgevormde formules

1. p
2. $\neg\neg p$
3. $(p \wedge p)$
4. $\neg(p \vee q)$
5. $(\neg(p \vee q) \wedge p)$
6. $\neg((p \vee q) \wedge p)$

Niet welgevormde formules

1. pqr
2. $(p$
3. $p\neg$
4. $\vee q$
5. $(\neg p \leftrightarrow r \vee s)$
6. $\rightarrow \vee\wedge$

Welgevormde formules

Oefening

Ga na of de volgende formules welgevormd zijn. Als dat het geval is, geef dan een constructieboom van de formule.

1. $pq \rightarrow$
2. $\neg(p \leftrightarrow (r \vee s))$
3. $(p \leftrightarrow \neg(r \vee s))$
4. $(p) \wedge p$
5. $((p \wedge q) \vee (s \rightarrow r))$
6. $((((p \rightarrow q) \rightarrow \neg r) \leftrightarrow s) \vee (t \wedge u))$
7. $\rightarrow \wedge pq \vee pq$

Vertalingen

We kunnen nu zinnen vertalen uit het Nederlands.

Vertalingen

We kunnen nu zinnen vertalen uit het Nederlands.

1. Het regent en Kees is ziek.
   $p :=$ het regent, $q :=$ Kees is ziek.
   $p \wedge q$

Vertalingen

We kunnen nu zinnen vertalen uit het Nederlands.

1. Het regent en Kees is ziek.
   $p :=$ het regent, $q :=$ Kees is ziek.
   $p \wedge q$
2. Fred noch Karel komt naar het feest.
   $p :=$ Fred komt naar het feest, $q :=$ Karel komt naar het feest
   $\neg p \wedge \neg q$

Vertalingen

We kunnen nu zinnen vertalen uit het Nederlands.

1. Het regent en Kees is ziek.
   $p :=$ het regent, $q :=$ Kees is ziek.
   $p \wedge q$
2. Fred noch Karel komt naar het feest.
   $p :=$ Fred komt naar het feest, $q :=$ Karel komt naar het feest
   $\neg p \wedge \neg q$
3. Het regent of het regent niet.
   $p :=$ Het regent
   $p \vee \neg p$

Vertalingen

We kunnen nu zinnen vertalen uit het Nederlands.

1. Het regent en Kees is ziek.
   $p :=$ het regent, $q :=$ Kees is ziek.
   $p \wedge q$
2. Fred noch Karel komt naar het feest.
   $p :=$ Fred komt naar het feest, $q :=$ Karel komt naar het feest
   $\neg p \wedge \neg q$
3. Het regent of het regent niet.
   $p :=$ Het regent
   $p \vee \neg p$
4. Als het regent en Rutte premier is, dan neemt Rutte de dienstwagen.
   $p :=$ het regent, $q :=$ Rutte is premier, $r :=$ Rutte neemt de dienstwagen
   $(p \wedge q) \rightarrow r$

Vertalingen

Oefening

Geef vertalingen van de volgende zinnen in propositielogica:

1. *Dit is niet geschreven met pen of potlood.*

2. *Jan komt, alleen als Piet niet komt.*

3. *We gaan naar het strand, tenzij het regent.*

4. *Als het regent en de zon schijnt, verschijnt er een regenboog.*

5. *Niemand lachte of applaudiseerde.*

6. *Jan gaat naar school en als de zon schijnt, dan Theresa ook.*

Vertalingen

Oefening

Geef vertalingen van de volgende zinnen in propositielogica:

1. *Dit is niet geschreven met pen of potlood.*
   - $\neg(p \vee q)$
2. *Jan komt, alleen als Piet niet komt.*
   - $p \rightarrow \neg q$
3. *We gaan naar het strand, tenzij het regent.*
   - $q \rightarrow \neg p$
4. *Als het regent en de zon schijnt, verschijnt er een regenboog.*
   - $(p \wedge q) \rightarrow r$
5. *Niemand lachte of applaudiseerde.*
   - $\neg p \vee \neg q$
6. *Jan gaat naar school en als de zon schijnt, dan Theresa ook.*
   - $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Samenvatting

- Een formele taal bestaat uit een vocabulaire en regels die éénduidig vastleggen hoe de symbolen van het vocabulaire aaneengeregen moeten worden.
- Zo bestaat de syntaxis van propositielogica uit propositieletters, een symbool voor negatie, connectieven, haakjes en regels wat formules zijn (en wat niet)
- Veel natuurlijk taal uitdrukken hebben een logische structuur die goed te beschrijven is met propositielogica.

Semantiek van de propositielogica

Nu we weten hoe formules er uitzien moeten we kijken wat ze betekenen.

De kleinste bouwstenen van onze taal zijn propositieletters die staan voor proposities. Een propositie is een bewering of uitspraak over de wereld uitgedrukt in een zin:

(2) Geert fietst.

De zinnen die proposities uitdrukken beschrijven situaties of standen van zaken en kunnen waar zijn of onwaar zijn (maar niet allebei). Met behulp van de negatie en de connectieven kunnen we propositieletters verbinden om complexere situaties te beschrijven.

(3) We gaan naar het strand of naar de film, maar niet allebei.

Waarheid

Iedere propostie heeft een zogenaamde *waarheidswaarde*. Een propositie kan waar zijn, we schrijven dan 1, of onwaar, we schrijven 0. De waarheidswaarde correspondeert met de stand van zaken in de wereld.

We zijn echter niet echt geïnteresseerd in het verifiëren van de waarheid van een propositie. We zijn geïnteresseerd in de *voorwaarden* waaronder een propositie (en de zin die haar uitdrukt) waar maakt. Hoe moet de wereld er uitzien wil een propositie waar zijn. Deze voorwaarden zullen de basis vormen voor de betekenis van de zinnen van de propositielogica.

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\Longrightarrow p \wedge q$ waar.

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\Longrightarrow p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\Longrightarrow p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\Longrightarrow p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.
3. p onwaar, q onwaar

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\Longrightarrow p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.
3. p onwaar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\Longrightarrow p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.
3. p onwaar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.
4. p onwaar, q onwaar

Waarheid van samengestelde zin

Berend loopt naar het station en het regent hard: $p \wedge q$

- p kan waar of onwaar zijn en q kan waar of onwaar zijn.
- Dus 4 mogelijkheden!

1. p waar, q waar,
2. p waar, q onwaar,
3. p onwaar, q onwaar,
4. p onwaar, q onwaar.

Wat is de waarheidswaarde van $p \wedge q$ in deze 4 gevallen?

1. p waar, q waar $\Longrightarrow p \wedge q$ waar.
2. p waar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.
3. p onwaar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.
4. p onwaar, q onwaar $\Longrightarrow p \wedge q$ onwaar.

Waarheidstafel

Definitie (Waarheidstafel)

Een tabel die laat zien hoe de waarheidswaarde van een samengestelde zin wordt bepaald door de waarheidswaarden van de delen en de in die zin voorkomende logische constante noemen we een *waarheidstafel*.

Waarheidstafel

Definitie (Waarheidstafel)

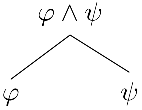
Een tabel die laat zien hoe de waarheidswaarde van een samengestelde zin wordt bepaald door de waarheidswaarden van de delen en de in die zin voorkomende logische constante noemen we een *waarheidstafel*.

De waarheidstafel van de conjunctie ziet er als volgt uit:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Waarheidstafel van de conjunctie

Compositionaliteit



φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$
0	1	0
0	0	0

Compositionaliteit

Definitie (Principe van compostionaliteit van betekenis)

De betekenis van een zin wordt bepaald door de betekenis van de delen waaruit de zin is opgebouwd.

Compositionaliteit

Definitie (Principe van compostionaliteit van betekenis)

De betekenis van een zin wordt bepaald door de betekenis van de delen waaruit de zin is opgebouwd.

Om dus de betekenis van een zin te bepalen zullen we zinnen dus moeten ontleden en kijken naar de betekenis van de delen waaruit die zin is opgebouwd.

Conjunctie

De waarheidstafel van de conjunctie ziet er als volgt uit:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Waarheidstafel van de conjunctie

Negatie

De waarheidstafel van de negatie ziet er als volgt uit:

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

Waarheidstafel van de negatie

Disjunctie

De waarheidstafel van de disjunctie ziet er als volgt uit:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Waarheidstafel van de disjunctie

Implicatie

De waarheidstafel van de implicatie ziet er als volgt uit:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Waarheidstafel van de implicatie

Bi-implicatie

De waarheidstafel van de equivalentie ziet er als volgt uit:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Waarheidstafel van de equivalentie

Alle waarheidstafels op een rij

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Conjunctie

p	$\neg p$
1	0
0	1

Negatie

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Disjunctie

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implicatie

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Bi-implicatie

Berekenen waarheid samengestelde formules

(4) We vergelijken de volgende formules

a. $((\neg p \vee q) \rightarrow r)$

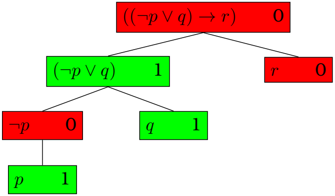
b. $(\neg(p \vee q) \rightarrow r)$

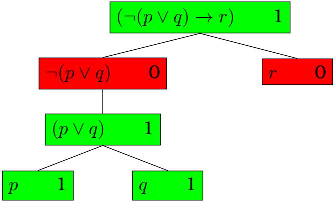
Berekenen waarheid samengestelde formules

(4) We vergelijken de volgende formules

a. $((\neg p \vee q) \to r)$
b. $(\neg(p \vee q) \to r)$

Stel we nemen p waar, q waar en r onwaar.





Semantiek

Het idee van de semantiek van propositielogica is nu als volgt:

1. Geef een waarheidswaarde (= valuatie) aan iedere propositieletter in de taal.
2. Definiëer voor iedere syntactische operatie, i.e., de constructieregels van de syntaxis, een corresponderende semantische operatie, i.e., de waarheidstafels, waar het ‘resultaat’ wordt bepaald door de semantische waarden van de delen.

Vervolgens kan je de waarheidswaarde van iedere mogelijke formule bepalen.

Voorbeeld

Neem de formule $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. De waarheidstafel ziet er als volgt uit:

	p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V_1 :	1	1	1	1	1	1
V_2 :	1	1	0	1	0	1
V_3 :	1	0	1	0	1	1
V_4 :	1	0	0	0	0	0
V_5 :	0	1	1	0	0	0
V_6 :	0	1	0	0	0	0
V_7 :	0	0	1	0	0	0
V_8 :	0	0	0	0	0	0

Samenvatting

- Proposities beschrijven standen van zaken in de wereld en kunnen waar of onwaar zijn.
- De betekenis van de logische constanten hebben we gedefiniëerd door de voorwaarden te geven waaronder ze waar zijn (*waarheidsconditionele semantiek*). De betekenis wordt dus uitgedrukt in termen van waarheid.
- De waarheid van een samengestelde zin is een functie van de waarheid van de delen van die zin (*compositionaliteit*).
- Met behulp van waarheidstafels kunnen we de waarheid van samengestelde formules berekenen.

Oefening

Maak waarheidstafels voor de volgende formules:

1. $\neg(\neg p \wedge \neg q)$
2. $((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$
3. $(q \wedge \neg q)$
4. $((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q)$
5. $((p \wedge q) \vee r)$
6. $(p \wedge (q \vee r))$

Logische eigenschappen van formules

Logische eigenschappen van formules

Definitie (Tautologie)

Zij $\varphi \in \mathcal{L}$. We zeggen dat φ een *tautologie* is desda for alle valuaties V geldt dat $V(\varphi) = 1$.

Voorbeeld (Wet van uitgesloten derde)

	p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V_1 :	1	0	1
V_2 :	0	1	1

Logische eigenschappen van formules

Definitie (Tautologie)

Zij $\varphi \in \mathcal{L}$. We zeggen dat φ een *tautologie* is desda for alle valuaties V geldt dat $V(\varphi) = 1$.

Voorbeeld (Wet van uitgesloten derde)

	p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V_1 :	1	0	1
V_2 :	0	1	1

Is $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ een tautologie?

Logische eigenschappen van formules

Definitie (Tautologie)

Zij $\varphi \in \mathcal{L}$. We zeggen dat φ een *tautologie* is desda for alle valuaties V geldt dat $V(\varphi) = 1$.

Voorbeeld (Wet van uitgesloten derde)

	p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V_1 :	1	0	1
V_2 :	0	1	1

Is $\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$ een tautologie?

Logische eigenschappen van formules

Definitie (Contradictie)

Zij $\varphi \in \mathcal{L}$. We zeggen dat φ een *contradictie* is desda for alle valuaties V geldt dat $V(\varphi) = 0$.

Voorbeeld

	p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V_1 :	1	0	0
V_2 :	0	1	0

Is $(\neg p \to p) \to (p \wedge \neg p)$ een contradictie?

Logische eigenschappen van formules

Definitie (Contingentie)

Zij $\varphi \in \mathcal{L}$. We zeggen dat φ een *contingentie* is desda φ noch een tautologie, noch een contradictie is, i.e., er zijn valuaties V_i en V_j zodanig dat $V_i(\varphi) \neq V_j(\varphi)$.

Voorbeeld (Propositieletters)

	p
V_1 :	1
V_2 :	0

Logische equivalentie

Gegeven de waarheidstafels van formules kunnen we nu gemakkelijk formules gaan *vergelijken*. Zo hebben we bijvoorbeeld de notie van *logische equivalentie* geïntroduceerd.

Definitie

We zeggen dat formules φ, ψ van de propositielogica *logische equivalent* zijn desda voor alle waarheidswaarden die we geven aan de propositieletters de waarheidswaarden van φ en ψ hetzelfde zijn. In dit geval schrijven we $\varphi \equiv \psi$.

Logische equivalentie

	p	$\neg p$	$\neg\neg p$
V_1 :	1	0	1
V_2 :	0	1	0

Logische equivalentie

	p	$\neg p$	$\neg\neg p$
V_1 :	1	0	1
V_2 :	0	1	0

	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$q \to \neg p$
V_1 :	1	1	0	0	0	0
V_2 :	1	0	0	1	1	1
V_3 :	0	1	1	0	1	1
V_4 :	0	0	1	1	1	1

Logische wetten

We kunnen nu een aantal (er zijn er veel meer) logische wetten formuleren:

1. $\varphi \equiv (\varphi \wedge \varphi) \equiv (\varphi \vee \varphi)$
2. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ (*Wet van De Morgan*)
3. $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (*Wet van De Morgan*)
4. $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \equiv (\psi \rightarrow \neg\varphi)$ (*Contrapositie*)
5. $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$ (*Distributiewet*)
6. $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$ (*Distributiewet*)

Oefening

Ga met behulp van waarheidstafels na dat deze equivalenties geldig zijn.

Samenvatting

- Met behulp van valuatiefuncties kunnen we eigenschappen toekennen aan formules (contingentie, tautologie, contradictie).
- Met behulp van deze begrippen kunnen we formules vergelijken.
- We hebben gezien wanneer formules *logisch equivalent* zijn.

Geldigheid

Aan het begin van deze lezing hebben we gezegd dat we willen weten wanneer redeneringen geldig zijn (en wanneer niet), dat wil zeggen: wanneer volgt een formule logisch uit premissen. We zijn nu in een positie hier een antwoord op te geven.

Geldigheid

Aan het begin van deze lezing hebben we gezegd dat we willen weten wanneer redeneringen geldig zijn (en wanneer niet), dat wil zeggen: wanneer volgt een formule logisch uit premissen. We zijn nu in een positie hier een antwoord op te geven.

Definitie

Zij $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ formules van $\mathcal{L}$. We zeggen dat ψ een *logisch gevolg* is van $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ desda: Overal waar de waarheidswaarde van $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ waar is (1), daar is de waarheidswaarde van ψ ook waar. In dit geval schrijven we $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Deze definitie zegt niets anders dan dat als de premissen waar zijn, dan is de conclusie dat ook, alleen hebben we daar nu een hele precieze invulling aan gegeven.

$p \to (q \wedge r), q \to \neg r \models \neg p$

$p \to (q \wedge r), q \to \neg r \models \neg p$

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

$p \to (q \wedge r), q \to \neg r \models \neg p$

p	q	r	$q \wedge r$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

$p \to (q \wedge r), q \to \neg r \models \neg p$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

$p \to (q \wedge r), q \to \neg r \models \neg p$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$\neg r$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

$p \to (q \wedge r), q \to \neg r \models \neg p$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$\neg r$	$q \to \neg r$
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

$p \to (q \land r), q \to \neg r \models \neg p$

p	q	r	$q \land r$	$p \to (q \land r)$	$\neg r$	$q \to \neg r$	$\neg p$
1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

$p \to (q \wedge r), q \to \neg r \models \neg p$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$\neg r$	$q \to \neg r$	$\neg p$	
1	1	1	1	1	0	0	0	
1	1	0	0	0	1	1	0	
1	0	1	0	0	0	1	0	
1	0	0	0	0	1	1	0	
0	1	1	1	1	0	0	0	
0	1	0	0	1	1	1	1	$\Longleftarrow$
0	0	1	0	1	0	1	1	$\Longleftarrow$
0	0	0	0	1	1	1	1	$\Longleftarrow$

$$p \to (q \wedge r), q \to \neg r \models \neg p$$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$\neg r$	$q \to \neg r$	$\neg p$	
1	1	1	1	1	0	0	0	
1	1	0	0	0	1	1	0	
1	0	1	0	0	0	1	0	
1	0	0	0	0	1	1	0	
0	1	1	1	1	0	0	0	
0	1	0	0	1	1	1	1	$\Longleftarrow$
0	0	1	0	1	0	1	1	$\Longleftarrow$
0	0	0	0	1	1	1	1	$\Longleftarrow$

$$\neg p \to (q \wedge \neg r), \neg q \to \neg r \not\models p$$

$$\neg p \to (q \land \neg r), \neg q \to \neg r \not\models p$$

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

$$\neg p \to (q \wedge \neg r), \neg q \to \neg r \not\models p$$

p	q	r	$\neg p$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

$\neg p \to (q \wedge \neg r), \neg q \to \neg r \not\models p$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	0
0	0	0	1	1

$$\neg p \to (q \wedge \neg r), \neg q \to \neg r \not\models p$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$
1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1

$\neg p \to (q \wedge \neg r), \neg q \to \neg r \not\models p$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$\neg p \to (q \wedge \neg r)$
1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0

$\neg p \to (q \land \neg r), \neg q \to \neg r \not\models p$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$q \land \neg r$	$\neg p \to (q \land \neg r)$	$\neg q$
1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1

$$\neg p \to (q \land \neg r), \neg q \to \neg r \not\models p$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$q \land \neg r$	$\neg p \to (q \land \neg r)$	$\neg q$	$\neg q \to \neg r$
1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1

$$\neg p \to (q \wedge \neg r), \neg q \to \neg r \not\models p$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$\neg p \to (q \wedge \neg r)$	$\neg q$	$\neg q \to \neg r$	p
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0

$$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r), \neg q \rightarrow \neg r \not\models p$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r)$	$\neg q$	$\neg q \rightarrow \neg r$	p	
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	$\Longleftarrow$
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	$\Longleftarrow$
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	$\Longleftarrow$
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	$\lightning$
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	

$$\neg p \to (q \land \neg r), \neg q \to \neg r \not\models p$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$q \land \neg r$	$\neg p \to (q \land \neg r)$	$\neg q$	$\neg q \to \neg r$	p	
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	$\Longleftarrow$
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	$\Longleftarrow$
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	$\Longleftarrow$
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	$\lightning$
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	

Tegenvoorbeelden

We hebben gezegd dat een redenering geldig is dan en slechts dan als in alle gevallen waar de premissen waar zijn, de conclusie dat ook is. Als er een situatie mogelijk is waar de premissen waar zijn maar de conclusie onwaar, betekent dit dus dat de redenering *ongeldig* is wat we kunnen aantonen door het geven van een *tegenvoorbeeld*.

Op de vorige slide is het tegenvoorbeeld dus:
$V(p) = 0, V(q) = 1, V(r) = 0.$

Tegenvoorbeelden

We hebben gezegd dat een redenering geldig is dan en slechts dan als in alle gevallen waar de premissen waar zijn, de conclusie dat ook is. Als er een situatie mogelijk is waar de premissen waar zijn maar de conclusie onwaar, betekent dit dus dat de redenering *ongeldig* is wat we kunnen aantonen door het geven van een *tegenvoorbeeld*.

Op de vorige slide is het tegenvoorbeeld dus:
$V(p) = 0, V(q) = 1, V(r) = 0$.

Het kan natuurlijk voorkomen dat er meerdere tegenvoorbeelden zijn te formuleren.

Tegenvoorbeelden

Voorbeeld (Voorbeeld 2.4, Van Benthem et al., *Logic in Action*, p. 2-3)

If you take my medication, you will get better.
But you are not taking my medication.

You will not get better.

Tegenvoorbeelden

Voorbeeld (Voorbeeld 2.4, Van Benthem et al., *Logic in Action*, p. 2-3)

If you take my medication, you will get better.
But you are not taking my medication.

You will not get better.

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg q$	
1	1	1	0	0	
1	0	0	0	1	
0	1	1	1	0	↯
0	0	1	1	1	

Samenvatting

- We hebben geleerd hoe we aan de hand van een waarheidstafel kunnen onderzoeken of een redenering geldig is.
- Opvallend is dat we de geldigheid (of ongeldigheid) gewoon kunnen aflezen.
- Dit is een *algoritme* dat altijd zal uitwijzen of een redenering (in de propositielogica) geldig is of niet. In technisch jargon zeggen we dat de propositielogica *beslisbaar* is.

Oefening

Onderzoek m.b.v. waarheidstafels de geldigheid van volgende redeneringen. Specificeer in het geval van ongeldigheid een tegenvoorbeeld.

1. $p \wedge q / p$
2. $p \rightarrow (q \wedge \neg q) / \neg p$
3. $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r / r$
4. $p \rightarrow (q \rightarrow r) / (p \wedge q) \rightarrow r$

Puzzles

De jongedame en de tijgers

In een wereld ver weg zit een Keizerin op de troon en regeert met ferme doch rechvaardige hand over het land Validus. Het is bekend dat zij meerdere zonen heeft en op een dag verschijnt er een jongedame aan de poort om naar de hand van een prins te dingen. De keizerin neemt de jongedame mee naar een hal met deuren en achter iedere deur zit of een prins of een tijger maar niet allebei. Dit kan betekenen dat er achter iedere deur een prins zit of achter iedere deur een tijger. Als de jongedame een deur met een prins opent mag zij hem huwen, als het een tijger is wordt ze verslonden.

Puzzles

Puzzle 1

In de hal zijn twee deuren. Het volgende staat op de deuren geschreven:

- **Deur 1** In deze kamer zit een prins en in de andere een tijger.
- **Deur 2** In één van deze kamers zit een prins en in één van deze kamers zit een tijger.

De keizerin zegt dat precies één van de twee zinnen onwaar is. Hoe zou de jongedame met behulp van een waarheidstafel haar keuze bepalen?

Puzzles

Helden en leugenaars

Een reiziger komt in een land dat wordt bevolkt door mensen die of een held of een leugenaar zijn. Helden spreken altijd de waarheid (behalve misschien bij het invullen van hun belanstingaangifte). Leugenaars liegen altijd.

Puzzle 2

De reiziger ontmoet twee personen A en B. A zegt: “Ten minste één van ons is een leugenaar.” Wat zijn A en B?

Semantische & syntactische geldigheid

Tot nu toe hebben we redeneringen bestudeerd door te kijken naar de semantiek of betekenis van de zinnen die in een redenering voorkomen. De betekenis hebben we vervolgens uitgedrukt in termen van waarheid. Door gebruik te maken van waarheidstafels kunnen we aflezen of een redenering geldig is. We hebben namelijk gezegd dat een redenering geldig is dan en slechts dan als, in die gevallen dat de premissen waar zijn, is de conclusie ook waar: de waarheid van de premissen accepteren dwingt men om ook de conclusie te accepteren. We zouden deze notie van geldigheid *semantisch* kunnen noemen omdat het gebaseerd is op de betekenis van zinnen.

Semantische & syntactische geldigheid

De semantische notie van geldigheid is niet de enige notie van geldigheid. We zullen nu kijken naar wat ook wel een *syntactische notie van geldigheid* wordt genoemd. Deze notie baseert zich op hoe redeneringen voorkomen als opeenvolging van *redeneerstappen* en manipulatie van de syntactische vorm van formules met als doel om de beoogde conclusie te bewijzen.

Wat is een logisch systeem

Wat hebben we vandaag gezien?

Wat is een logisch systeem

Wat hebben we vandaag gezien?

- Een logisch systeem bestaat uit een vocabulaire en syntaxis, een semantiek en een notie van geldigheid.

Wat is een logisch systeem

Wat hebben we vandaag gezien?

- Een logisch systeem bestaat uit een vocabulaire en syntaxis, een semantiek en een notie van geldigheid.
  - Hoe zijn zinnen gestructueerd?
  - Wat zijn de logische constanten van de taal en wat is hun betekenis?
  - Wat is de expressiviteit van de taal? Wat kan je er mee uitdrukken?
  - Wanneer zijn redeneringen geldig?
  - Wat is geldigheid en hoe kunnen we dat onderzoeken?
  - Wat is de relatie tussen de verschillende noties van geldigheid?

Epistemische Logica

Wat is de logica van kennis?

Er bestaan meerdere uitbreidingen van de propositielogica. Een daarvan is de epistemische logica.

Vergelijk de volgende zinnen

(5) a. Johan is ziek.
b. Ik weet dat Johan ziek is.
c. Ik geloof dat Johan van ziek is.

Deze zinnen hebben allemaal verschillende logische eigenschappen. Vergelijk bijvoorbeeld

$$\frac{\text{Ik weet dat Johan ziek is}}{\text{Johan is ziek}} \qquad \frac{\text{Ik geloof dat Johan ziek is}}{\text{Johan is ziek}}$$

Epistemische logica

De taal van epistemische logica is die van de propositielogica, met daar aan toegevoegd een *kennisoperator* $\mathcal{K}$. Bijvoorbeeld $\mathcal{K}p$ leest als *ik weet dat* p. En in het algemeen: $\mathcal{K}\varphi$.

Wat zijn de principes (of "tautologiën") van deze logica? Welke denk je dat altijd waar (zouden moeten) zijn:

$$\mathcal{K}p \to p$$

$$p \to \mathcal{K}p$$

$$\mathcal{K}p \to \mathcal{K}\mathcal{K}p$$

$$\neg\mathcal{K}p \to \mathcal{K}\neg\mathcal{K}p$$

Afsluiting

- Logica is een interdisciplinaire studie die overlapt met veel andere disciplines (filosofie, taalkunde, wiskunde, informatica, economie, . . .)
- Logica bestudeert de principes van geldig redeneren door een formele taal te construeren waarin redeneringen kunnen worden gerepresenteerd.
- De logica brengt in kaart wat de logische *wetten* zijn van die taal

Vraag

Zeggen logische wetten iets

1. Over ons denken? Zijn het denkwetten, dwz, zo *denken* we nu eenmaal?
2. Over de wereld? Zo zit de wereld fundamenteel in elkaar?
3. Over onze taal? Zo *praten* we nu eenmaal?

Links

- `http://www.logicinaction.org`
- `http://events.illc.uva.nl/MasterClass/Logica2017`

Referenties I

Johan van Benthem. Fanning the flames of reason. Universiteit van Amsterdam, 2014. Afscheidsrede uitgesproken op 26 september 2014. http://www.illc.uva.nl/Research/Publications/Inaugurals/IV-04-UvA-Johan-van-Benthem.text.pdf.

Johan van Benthem, Hans van Ditmarsch, Jan van Eijck, and Jan Jaspars. *Logic in Action*. 2016. http://www.logicinaction.org/docs/lia.pdf.

Jan van Eijck and Albert Visser. *Inzien en Bewijzen*, volume 2 of *Exact in context*. Amsterdam University Press, 2005. http://homepages.cwi.nl/~jve/qed/.