Opgave 0.1.

Stel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ is uniform convergent op $(-1,1)$. We weten dan dat de reeks voldoet aan het uniforme Cauchy criterium: voor alle $\epsilon > 0$ is er een N zodat voor $m > n > N$ geldt dat

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{x^k}{k} < \epsilon$$

voor alle $x \in (-1,1)$.

We gaan dit criterium proberen te koppelen aan het Cauchy criterium voor de reeks $\sum \frac{1}{n}$. We gaan aantonen dat $\sum \frac{1}{n}$ aan het Cauchy criterium voldoet als $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ uniform convergent is op $(-1,1)$.

Neem hiervoor $\epsilon > 0$. We weten dan dus dat er een N is zodat voor $m > n > N$ geldt dat

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{x^k}{k} < 1/2\epsilon$$

voor alle $x \in (-1,1)$.

Pak $m > n > N$. Merk nu op dat $x^m \leq x^k$, voor $k < m$. Ook is er een $x_* \in (-1,1)$ met $x_*^m = 1/2$. Voor deze x_* geldt dan dat

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{x_*^k}{k} \geq \sum_{k=n}^{m} \frac{x_*^m}{k} = 1/2 \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k}.$$

Voor dezelfde n en m geldt daarom dat

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \leq 2 \sum_{k=n}^{m} \frac{x_*^k}{k} < \epsilon.$$

Ditzelfde kunnen we doen voor elke $m > n > N$. Dus als onze reeks uniform convergeert op $(-1,1)$, dan hebben we dat $\sum \frac{1}{n}$ ook convergent is. Dat laatste klopt natuurlijk niet en daarom is onze aanname fout.