Analyse 2a Opgaven Set 2

Nicos Starreveld

Maart 2018

1 Opgave 24.14

Definieer $f_n(x) = \frac{xn}{1+x^2n^2}$ en $f(x) = 0$ for $x \in \mathbb{R}$.

(a) Laat zien dat $f_n \to f$ puntsgewijs voor $x \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Voor de puntsgewijs limiet we beschouwen een $x \in \mathbb{R}$. Daarna bestuderen we de convergentie van het rijtje $(f_n(x))_n$ voor de gekozen x. Voor $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{nx}{1+n^2x^2}| \leq |\frac{1}{nx}|.$$

Dus voor elke $\epsilon > 0$ er bestaat een N (afhankelijk van ϵ en x), dat is $N = \frac{1}{\epsilon|x|}$, zodanig dat

$$|\frac{1}{nx}| = \frac{1}{n|x|} < \epsilon \qquad \forall n > N.$$

$\square$

We concluderen dat $f_n(x)$ convergeert puntsgewijs naar $f(x) = 0$ voor elke $x \in \mathbb{R}$.

(b) Convergeert f_n uniform naar f op $[0, 1]$?

Antwoord. Nee. Om uniforme convergentie te hebben moeten we laten zien dat $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N(\epsilon)$ zodanig dat

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| < \epsilon, \qquad \forall x \in [0,1] \text{ en } \forall n > N.$$

Dus de $N(\epsilon, x)$ van vraag (a) moet onafhankelijk van x zijn. Eerste een opmerking, $f_n(\cdot)$ neemt een maximun op $x = \frac{1}{n}$,

$$f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}.$$

Er zijn twee mogelijke manieren om door te gaan.

Definitie van u.c. - Contrapositief Om te laten zien dat de convergentie niet uniform is moeten we laten zien dat $\exists\, \epsilon > 0$ zodanig dat $\forall N \; \exists n > N$ en $\exists x \in [0, 1]$:

$$|f_n(x)| > \epsilon\,.$$

Neem $\epsilon = \frac{1}{3}$ en een willekeurige getal N. Dan er bestaat een $n > N$. Neem $x = \frac{1}{n} \in [0, 1]$, dan geldt dat

$$|f_n(\frac{1}{n})| = \frac{1}{2} > \epsilon = \frac{1}{3}.$$

Dus de convergentie is niet uniform.

Met de supremum Op basis van Remark 24.4 het is genoeg om te laten zien dat

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| > 0.$$

Voor elke n de functie $f_n(\cdot)$ neemt een maximum op $x = \frac{1}{n}$, dus

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{2} > 0.$$

□

(c) Is de convergentie uniform op $[1, \infty)$?

Antwoord. Op $[1, \infty)$ de functies $f_n(\cdot)$ zijn dalend. Dus voor $x \in [1, \infty)$

$$f_n(x) \leq f_n(1) = \frac{n}{1+n^2}.$$

Met dezelfde redenering als in (a) het volgt dat de convergentie uniform is. Jullie kunnen ook Remark 24.4 gebruiken.

□

2 Opgave van toets

Op $[0, 1]$, definieer $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$.

(1) Bereken de puntsgewijs limiet $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Proof. De puntsgewijs limiet is de functie $f(x) = 0$. Voor $x \in [0, 1]$ we moeten laten zien dat

$$\lim_{n\to\infty} n^2 e^{-nx} x = 0.$$

Van de convergentie van de quotiënten

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)^2 e^{-(n+1)x}}{n^2 e^{-nx}} = (1 + \frac{1}{n})^2 e^{-x} \overset{n\to\infty}{\to} e^{-x} < 1,$$

we zien dat $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ voor alle $x \in [0, 1]$. □

(2) Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 1$.

Proof.

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = n^2 \int_0^1 x e^{-nx}\mathrm{d}x = -ne^{-n} + n \int_0^1 e^{-nx}\mathrm{d}x = -ne^{-n} - e^{-n} + 1.$$

Dus

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \lim(-ne^{-x} - e^{-n} + 1) = 1 \neq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

□

(c) Convergeert $(f_n)_n$ uniform op $[0, 1]$.

Antwoord. Nee vanwege de berekening in (b) en Stelling 25.2. Merk op dat

$$\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(\frac{1}{n}) = ne^{-1}.$$

□