Analyse 2a Opgaven Set 1

Nicos Starreveld

February 2018

1 Opgave 14.4 (c)

Latten zien dat de reeks

$$\sum \frac{n!}{n^n}$$

convergeert.

Met de ratio test Beschouw het rijtje $a_n = \frac{n!}{n^n}$, dan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (\frac{n}{n+1})^n = (1+\frac{1}{n})^{-n} \to \frac{1}{e} < 1.$$

Dus de gegeven reeks convergeert.

Met de comparison test De formule van Stirling zegt dat

$$n! \leq e n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n},$$

dus

$$\frac{n!}{n^n} \leq e n^{\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

Beschouw de reeks

$$\sum n^{\frac{1}{2}} e^{-n} \tag{1}$$

en het rijtje $b_n = n^{\frac{1}{2}} e^{-n}$. Dan hebben we dat

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = (\frac{n+1}{n})^{\frac{1}{2}} e^{-1} \to e^{-1} < 1$$

Met gebruik maken van de ratio test krijgen we dat de reeks in (1) convergeert. Dus de oorspronkelijke reeks convergeert ook.

2 Opgave 14.12

Van

$$\lim \inf_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

krijgen we dat er bestaat een deelrij van a_n, noem hem a_{n_k}, die naar 0 convergeert. Dus voor elke $\epsilon > 0$ er bestaat een $k_0 \in \mathbb{N}$ zodanig dat

$$|a_{n_k}| < \epsilon.$$

for alle $k > k_0$. Voor elke $m \in \mathbb{N}$ er bestaat een $k(m) \in \mathbb{N}$ zodanig dat

$$|a_{n_k}| < \frac{1}{m^2},$$

voor alle $k > k(m)$. Beschouw de rij a_{n_m} die een deelrij van a_{n_k} is. Dan

$$\sum_{m \geq 1} a_{n_m} < \sum \frac{1}{m^2} < \infty.$$

3 Opgave 15.4 (c)

Beschouw de reeks

$$\sum_{n \geq 4} \frac{1}{n \log n \log \log n},$$

en de functie

$$f(x) = \frac{1}{x \log x \log \log x}.$$

f is een dalende functie op $(4, +\infty)$ en

$$\int_4^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_4^\infty (\log \log \log x)' \mathrm{d}x = +\infty.$$