Analyse 2a - vraag 6b hertentamen '17

Raviar Karim

24 maart 2018

Bewijs dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ niet uniform convergent is op (-1,1).

Solution.

(i) Bewijs uit het ongerijmde: stel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *wel* uniform convergent op (-1,1). Dan voldoet de reeks aan het Cauchy Criterion: voor alle $\epsilon > 0$ is er een $N \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $m > n > N$ geldt

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} \frac{x^k}{k}\Big| < \epsilon,$$

voor alle $x \in (-1, 1)$. We gaan laten zien dat er een ϵ is zodat voor bepaalde $n, m \in \mathbb{N}$, de ongelijkheid hierboven niet geldt. Laat $n \in \mathbb{N}$ vast en zij $m = 2n$. Definier het rijtje $a_n = 1 - \frac{1}{n} \in (0, 1) \subseteq (-1, 1)$ en merk op $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Dan krijgen we de volgende afschatting van de partile som:

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{n}(a_n)^k\Big| &= \Big|\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n})^k\Big| \\ &\geq (1 - \frac{1}{n})^{2n} \to \frac{1}{e^2} > 0,\end{aligned}$$

waar de eerste ongelijkheid volgt uit het feit dat $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n} = 1$ en voor $k \leq 2n$ geldt $(1-\frac{1}{n})^k \geq (1-\frac{1}{n})^{2n}$. Ook hebben we gebruikt dat $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = e^{-1}$. Nu kunnen we $\epsilon \in (0, \frac{1}{e^2})$ nemen en dan krijgen we

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n})^k > \epsilon,$$

in tegenspraak met de aanname dat onze reeks uniform convergent is en moet voldoen aan het uniforme Cauchy criterion voor alle $x \in (-1, 1)$.

(ii) We weten (uit vorige vraag, of Taylor expansie) dat $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, dus we kunnen onze machtreeks schrijven als $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1 - x)$. Stel nu dat de reeks *wel* uniform convergeert op (-1,1). Dan moet volgens stelling 25.5, de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ een continue functie zijn op ons interval. Maar intutief zien we dat het misgaat in de buurt van $x = 1$, omdat het argument van onze logaritme dan in de buurt van 0 zit, wat naar oneindig gaat. Concreet krijgen we:

$$\lim_{x \nearrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{x \nearrow 1} - \log(1-x) = \infty,$$

$\blacksquare$