University of Amsterdam

Faculty of Science

Exam

Functional Analysis

Bachelor mathematics year 3

re-re-take
Date: August 22, 2019
Time: 9:00-12:00

Number of pages: 2 (including front page)
Number of questions: 5
Maximum number of points:
For each question is indicated how many points it is worth.

BEFORE YOU START

- Check if your version of the exam is complete.
- Write down **your name, student ID number**, and if applicable the **version number** on **each sheet** that you hand in. Also **number the pages**.
- Your **mobile phone** has to be switched off and be put in your coat or bag. Your **coat and bag** should be on the ground.
- **Tools allowed**: scratch paper. Other tools are not allowed.

PRACTICAL MATTERS

- The first 30 minutes you are not allowed to leave the room, not even to visit the toilet.
- 15 minutes before the end, you will be warned that the time to hand in is approaching.
- If applicable, fill out the evaluation form at the end of the exam.
- You are obliged to identify yourself at the request of the examiner (or his representative) with a proof of your registration and a valid ID.
- During the examination it is not permitted to visit the toilet, unless the invigilator gives permission to do so.

Good luck!

1. Zij $L_r, L_\ell : \ell^2 \to \ell^2$ gedefinieerd door

$$L_r : (x_1, x_2, \ldots) \to (0, x_1, x_2, \ldots), \quad L_\ell : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \to (x_2, x_3, \ldots).$$

   (a) Bewijs dat $L_r - \lambda I$ niet surjectief is voor $|\lambda| \leq 1$ (d.w.z. construeer een geschikte ℓ^2 rij welke niet als beeld van een ℓ^2 rij optreedt).

   (b) Bepaal $\|L_r\|$ en $\sigma(L_r)$.

   (c) Zij H een Hilbert ruimte en $S, T : H \to H$ begrensde lineaire operatoren. Toon aan dat $(ST)^* = T^*S^*$ en $T^{**} = T$. Toon aan dat T begrensd inverteerbaar is dan en slechts dan als T^* begrensd inverteerbaar is, en dat in dat geval $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

   (d) Bepaal $\sigma(L_\ell)$.

   (e) Bepaal de eigenwaarden van L_r en L_ℓ.

2. Zij $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormale bases in een Hilbert ruimte H, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{F}$, en zij $Tx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \langle x, u_n\rangle v_n$.

   (a) Bewijs dat T begrensd is dan en slechts dan als $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ begrensd is.

   (b) Bewijs dat T compact is dan en slechts dan als $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

   (c) Voor begrensde $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bepaal T^* en toon aan dat $T^*T = TT^* = I$ dan en slechts dan als $|\alpha_n| = 1$ voor alle n.

3. Zij H een complexe Hilbert ruimte en $T : H \to H$ een begrensde lineaire operator.

   (a) Laat zien dat uit $\langle Tx, x\rangle = 0$ voor alle $x \in H$ volgt dat $T = 0$.

   (b) Laat zien dat uit $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ voor alle $x \in H$ volgt dat T zelfgeadjungeerd is.

4. Zij H een Hilbert ruimte en $\emptyset \neq M \subset H$. Bewijs dat $M^{\perp\perp}$ de kleinste gesloten deelruimte van H is welke M bevat. D.w.z. bewijs dat als $Y \subset H$ en gesloten lineaire deelruimte is met $M \subset Y$, dat dan $M^{\perp\perp} \subset Y$.

5. Zij X een genormeerde lineaire ruimte, $z \in X$ en $f \in X'$. Laat zien dat $T : X \to X$ gedefinieeerd door $Tx = f(x)z$ compact is.