EXTRA SOMMEN ANALYSE 2A, 8 MAART, 2018

(1) Voor een $n \geq 1$, zij f $n\times$ continu differentieerbaar op een interval (a,b). Voor een $c \in (a,b)$, zij $R_n(x)$ de restterm van het Taylor polynoom van graad $n-1$ van f rond c. Bewijs dat voor ieder gesloten deelinterval $I \subset (a,b)$ er een $C > 0$ is z.d.d.
$$|R_n(x)| \leq C|x-c|^n \quad \forall x \in I.$$

(2) Zij I een gesloten interval dat 0 bevat. Bewijs dat er $C_i > 0$ zijn z.d.d. $\forall x \in I$,
  (a) $\sin x = x + R(x)$ met $|R(x)| \leq C_1|x|^3$.
  (b) $\sin^2 x = x^2 + R(x)$ met$|R(x)| \leq C_2|x|^4$.
  (c) $1 - \cos^2 x = x^2 + R(x)$ met $|R(x)| \leq C_3|x|^4$.

(3) Toon aan dat voor $x \geq 0$ en $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ geldt
$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \leq \log(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

(4) Voor $n \in \mathbb{N}$, zij $f(x) = x^n$. Schijf de Taylor reeks op van f rond a. Bewijs hiermee dat voor $a, b \in \mathbb{R}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

(5) Bekend is dat $e \in (2\frac{1}{2}, 3)$. We gaan bewijzen dat e irrationaal is. Stel niet, d.w.z. $e = \frac{k}{n}$ voor zekere $k, n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat
$$0 < e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} < \frac{e}{(n+1)!}.$$
Vermenigvuldig deze ongelijkheden met $n!$, en leidt een tegenspraak af.

Date: March 8, 2018.