EXTRA SOMMEN ANALYSE 2B

(1) Zij $(V, \|\ \|_V)$ een eindig dimensionale lineaire ruimte over $\mathbb{R}$, zeg met dimensie k.

  (a) Selecteer een basis van V, en construeer daarmee een bijectieve lineaire afbeelding $\Phi : \mathbb{R}^k \to V$.

  (b) Kies een norm $\|\ \|$ op $\mathbb{R}^k$, en bewijs dat er een constante $C > 0$ is z.d.d. $\|\Phi\vec{x}\|_V \leq C\|\vec{x}\|$ voor alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$.

  (c) Bewijs met Bolzano-Weierstrass (Thm. 13.5) dat
$$\inf_{\{\vec{x}\in\mathbb{R}^k :\ \|\vec{x}\|=1\}} \|\Phi\vec{x}\|_V > 0.$$
  Concludeer dat er constante $c > 0$ is z.d.d. $c\|\vec{x}\| \leq \|\Phi\vec{x}\|_V$ voor alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$.

  (d) Laat zien dat iedere 2 normen op V equivalent zijn.

  (e) M.b.v. de volledigheid van $\mathbb{R}^k$ (Thm. 13.4), toon aan dat $(V, \|\ \|_V)$ volledig is.

(2) Zij (S, d) een metrische ruimte. Bewijs dat voor $E \subset S$,

  (a)
$$E^- = S \setminus (S \setminus E)^\circ.$$

  (b)
$$x \in E^- \iff \forall\varepsilon > 0, B(x; \varepsilon) \cap E \neq \emptyset.$$

(3) Zij (S, d) een metrische ruimte. Zij $E \subset S$. Herinner: E heet *dicht* indien voor iedere open, niet-lege $U \subset S$ geldt $U \cap E \neq \emptyset$, en E heet *nergens dicht* indien $(E^-)^\circ = \emptyset$.

  Laat zien dat

  (a) $x \in E^- \iff$ Voor alle open $U \subset S$ met $x \in U$ geldt $U \cap E \neq \emptyset$.

  (b) E is dicht $\iff E^- = S$.

  (c) E is niet dicht $\iff S \setminus E$ bevat een open, niet-lege verzameling.

  (d) E is nergens dicht $\iff S \setminus E^-$ is dicht.

Date: 7 maart 2017.

(4) (a) We gaan bewijzen dat $\mathbb{Q}$ *niet* de doorsnede is van een rij van open deelverzamelingen $(V_i)_{i\geq 1} \subset \mathbb{R}$:
   (i) Stel wel, laat dan zien dat ieder van die V_i dicht is in $\mathbb{R}$.
   (ii) Bewijs dat $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ de doorsnede is van een rij van open en dichte deelverzamelingen $(W_j)_{j\geq 1}$ in $\mathbb{R}$.
   (iii) Merk op dat $\left(\cap_{i\geq 1} V_i\right) \cap \left(\cap_{j\geq 1} W_j\right) = \emptyset$, en concludeer m.b.v. een stelling een tegenspraak.

(b) Laat zien dat $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *niet* de vereniging is van een rij van gesloten deelverzamelingen.