EXTRA SOMMEN ANALYSE 2B

(1) Zij $(V, \| \|_V)$ een eindig dimensionale lineaire ruimte over $\mathbb{R}$, zeg met dimensie k.

(a) Selecteer een basis van V, en construeer daarmee een bijectieve lineaire afbeelding $\Phi : \mathbb{R}^k \to V$.
Zij $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ een basis, dan $\Phi : \mathbb{R}^k \to V : \vec{x} \mapsto \sum_{i=1}^k x_i \phi_i$ is bijectief.

(b) Kies een norm $\| \|$ op $\mathbb{R}^k$, en bewijs dat er een constante $C > 0$ is z.d.d. $\|\Phi\vec{x}\|_V \leq C\|\vec{x}\|$ voor alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$.
Kies bijv. $\| \cdot \| := \| \cdot \|_\infty$. Dan $\|\Phi\vec{x}\|_V = \| \sum_{i=1}^k x_i\phi_i\|_V \leq \|\vec{x}\|_\infty \sum_{i=1}^k \|\phi_i\|_V$. Dus neem $C = \sum_{i=1}^k \|\phi_i\|_V$.

(c) Bewijs met Bolzano-Weierstrass (Thm. 13.5) dat

$$\inf_{\{\vec{x}\in\mathbb{R}^k\colon \|\vec{x}\|=1\}} \|\Phi\vec{x}\|_V > 0.$$

Met de kennis van nu doen we dit met compactheid: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R} : \vec{x} \mapsto \|\Phi\vec{x}\|_V$ is continu (als compositie van twee continue afbeeldingen). $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^k\colon \|\vec{x}\|_\infty = 1\}$ is gesloten en begrensd, dus compact, en dus neemt $\|\Phi\vec{x}\|_V$ een minimum aan op $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^k\colon \|\vec{x}\|_\infty = 1\}$. Dit minimum is strikt positief, want $\|\Phi\vec{x}\|_V > 0$ voor alle $\vec{x} \neq 0$.
Concludeer dat er constante $c > 0$ is z.d.d. $c\|\vec{z}\| \leq \|\Phi\vec{z}\|_V$ voor alle $\vec{z} \in \mathbb{R}^k$.
Ok voor $\vec{z} = 0$. Zij nu $\vec{z} \neq 0$. Definieer $\vec{y} = \vec{z}/\|\vec{z}\|_\infty$. Dan met $c = \inf_{\{\vec{x}\in\mathbb{R}^k\colon \|\vec{x}\|=1\}} \|\Phi\vec{x}\|_V$ geldt $c \leq \|\Phi\vec{y}\|_V = \|\Phi\vec{z}\|_V/\|\vec{z}\|_\infty$, dus $c\|\vec{z}\|_\infty \leq \|\Phi\vec{z}\|_V$.

(d) Laat zien dat iedere 2 normen op V equivalent zijn.
Zij normen $\| \|_{V_i}$ voor $i \in \{1, 2\}$ gegeven. Bovenstaande laat zien dat er $c_i, C_i > 0$ zijn met

$$c_i\|\Phi^{-1}x\|_\infty \leq \|x\|_{V_i} \leq C_i\|\Phi^{-1}x\|_\infty \quad (\forall x \in V)$$

en $\|x\|_{V_1} \leq C_1/c_2\|x\|_{V_2}$ en $\|x\|_{V_2} \leq C_2/c_1\|x\|_{V_1}$.

(e) M.b.v. de volledigheid van $\mathbb{R}^k$ (Thm. 13.4), toon aan dat $(V, \| \|_V)$ volledig is.
Zij $(x_n)_n$ CR in V, dan $(\Phi^{-1}x_n)_n$ CR in $\mathbb{R}^k$, convergeert naar zeg $\vec{x}$, maar dan convergeert $(x_n)_n$ naar $\Phi\vec{x}$ (alles triviaal met de continuiteit van Φ en Φ^{-1}.

Date: 21 maart 2017.

(2) Zij (S, d) een metrische ruimte. Bewijs dat voor $E \subset S$,

(a)

$$E^- = S \setminus (S \setminus E)^\circ.$$

$(S \setminus E)^\circ \subset S \setminus E$ dus door complement te nemen, $E \subset S \setminus (S \setminus E)^\circ$. De verzameling aan de rechterkant is gesloten, en zo ook $E^- \subset S \setminus (S \setminus E)^\circ$.
Anderzijds is $S \setminus E^- = (S \setminus E^-)^\circ$ want E^- gesloten en dus $S \setminus E^-$ is open. Verder geldt $(S \setminus E^-)^\circ \subset (S \setminus E)^\circ$, d.w.z. $S \setminus E^- \subset (S \setminus E)^\circ$, en dus $S \setminus (S \setminus E)^\circ \subset E^-$.

(b)

$$x \in E^- \iff \forall \varepsilon > 0, B(x; \varepsilon) \cap E \neq \emptyset.$$

Zie soortgelijke bewering in volgende opgave.

(3) Zij (S, d) een metrische ruimte. Zij $E \subset S$. Herinner: E heet *dicht* indien voor iedere open, niet-lege $U \subset S$ geldt $U \cap E \neq \emptyset$, en E heet *nergens dicht* indien $(E^-)^\circ = \emptyset$.

Laat zien dat

(a) $x \in E^- \iff$ Voor alle open $U \subset S$ met $x \in U$ geldt $U \cap E \neq \emptyset$.

$$s \notin E^- \iff s \in S \setminus E^-$$
$$\iff \exists \text{ open } U \ni s \text{ met } U \subset S \setminus E \text{ d.w.z. } E \cap U = \emptyset.$$

Draai nu de bewering om.

(b) E is dicht $\iff E^- = S$.

$$E \text{ dicht } \iff \forall s \in S, \text{ en open } U \ni s \text{ geldt } U \cap E \neq \emptyset \iff E^- = S$$

(c) E is niet dicht $\iff S \setminus E$ bevat een open, niet-lege verzameling.

$$E \text{ niet dicht } \iff \exists \text{ open, niet-lege } U \text{ met } U \cap E = \emptyset \text{ d.w.z. } U \subset S \setminus E$$

(d) E is nergens dicht $\iff S \setminus E^-$ is dicht.

Vorafgaande exercise onderdeel a) geeft $(S \setminus E)^- = S \setminus E^\circ$, en zo $E^\circ = S \setminus (S \setminus E)^-$. Nu E door E^- vervangen geeft $(E^-)^\circ = S \setminus (S \setminus E^-)^-$. Dus E is nergens dicht $\iff (S \setminus E^-)^- = S \iff S \setminus E^-$ is dicht.

(4) (a) We gaan bewijzen dat $\mathbb{Q}$ *niet* de doorsnede is van een rij van open deelverzamelingen $(V_i)_{i\geq 1} \subset \mathbb{R}$:

(i) Stel wel, laat dan zien dat ieder van die V_i dicht is in $\mathbb{R}$.

Als $(\cap_{i\geq 1} V_i)^- = S$ dan zeker $V_i^- = S$

(ii) Bewijs dat $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ de doorsnede is van een rij van open en dichte deelverzamelingen $(W_j)_{j\geq 1}$ in $\mathbb{R}$.

$\bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{R}\setminus\{q\} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, immers voor ieder $q \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\{q\} \supset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, en dus $\bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{R}\setminus\{q\} \supset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Anderzijds $\mathbb{Q}\cap\bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{R}\setminus\{q\} = \emptyset$, oftewel $\bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{R}\setminus\{q\} \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

(iii) Merk op dat $\big(\cap_{i\geq 1} V_i\big) \cap \big(\cap_{j\geq 1} W_j\big) = \emptyset$, en concludeer m.b.v. een stelling een tegenspraak.

Inderdaad $\big(\cap_{i\geq 1} V_i\big) \cap \big(\cap_{j\geq 1} W_j\big) = \mathbb{Q}\cap\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \emptyset$. Alle V_i en W_j zijn open, en dicht, en dus volgens Baire zou de doorsnede van de hele club ook dicht moeten zin in $\mathbb{R}$, en dat is de lege verzameling niet. Tegenspraak.

(b) Laat zien dat $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ *niet* de vereniging is van een rij van gesloten deelverzamelingen.

Stel wel, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \cup_{i\geq 1} Z_i$, dan $\mathbb{Q} = \mathbb{R}\setminus\cup_{i\geq 1} Z_i = \cap_{i\geq 1}\mathbb{R}\setminus Z_i$, tegenspraak met eerste onderdeel.