Universiteit van Amsterdam

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

# Tentamen

## Analyse 2a

### Bachelor wiskunde jaar 1

Tentamen
Datum: 19 april, 2017
Tijd: 18.00-21.00

Aantal pagina's: 2 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 6
Maximum aantal te behalen punten: 30
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

---

**VOORDAT U BEGINT**

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

---

**HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN**

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

---

**Succes!**

1. (6pt) Onderzoek de convergentie van de volgende reeksen:
   (a) $\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n})$.
   (b) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(\log n)^n}$.
   (c) $\sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

   Motiveer je antwoorden.

2. (4pt) Van de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ is gegeven dat voor een constante $C > 0$ geldt

$$|a_n - a_{n+1}| \leq \frac{C}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat.

3. (6pt) Op $[0,1]$, definieer $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$.
   (a) Bereken $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
   (b) Laat zien dat $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$.
   (c) Convergeert $(f_n)_{n\geq 1}$ uniform on $[0,1]$? Motiveer je antwoord.

4. (6pt) Zij $f_n(x) = \frac{x^n}{n(n-1)}$
   (a) Bewijs dat $\sum_{n\geq 2} f_n$ uniform convergeert op $[-1,1]$.
   (b) Bewijs dat voor $|x| < 1$, $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = x + (1-x)\log_e(1-x)$.
   (c) Bereken $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ en $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$. Motiveer je antwoord.

5. (4pt)
   (a) Bewijs dat voor iedere $x > 0$ en $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\log_e(1+x) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

6. (4pt)
   (a) Bewijs dat voor $a < 1$, $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$ uniform convergent is op $[-a,a]$.
   (b) Bewijs dat $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$ *niet* uniform convergent is op $(-1,1)$. (Hint: Gebruik het uniforme Cauchy criterium)