



Tentamen

Analyse 2a Bachelor wiskunde jaar 1

Tentamen

Datum: 19 april, 2017

Tijd: 18.00-21.00

Aantal pagina's: 2 (inclusief voorblad)

Aantal vragen: 6

Maximum aantal te behalen punten: 30

Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

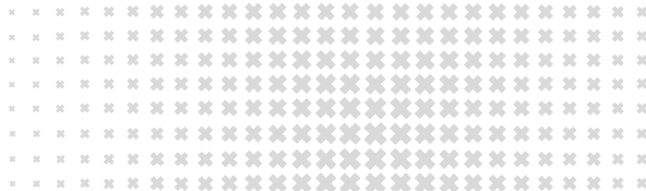
VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen:** kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examiner (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!



1. (6pt) Onderzoek de convergentie van de volgende reeksen:

(a) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$.

(b) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\log n)^n}$.

(c) $\sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Motiveer je antwoorden.

2. (4pt) Van de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ is gegeven dat voor een constante $C > 0$ geldt

$$|a_n - a_{n+1}| \leq \frac{C}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs dat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ bestaat.

3. (6pt) Op $[0, 1]$, definieer $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$.

(a) Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

(b) Laat zien dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1$.

(c) Convergeert $(f_n)_{n \geq 1}$ uniform op $[0, 1]$? Motiveer je antwoord.

4. (6pt) Zij $f_n(x) = \frac{x^n}{n(n-1)}$

(a) Bewijs dat $\sum_{n \geq 2} f_n$ uniform convergeert op $[-1, 1]$.

(b) Bewijs dat voor $|x| < 1$, $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = x + (1-x) \log_e(1-x)$.

(c) Bereken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ en $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$. Motiveer je antwoord.

5. (4pt)

(a) Bewijs dat voor iedere $x > 0$ en $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \log_e(1+x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

6. (4pt)

(a) Bewijs dat voor $a < 1$, $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ uniform convergent is op $[-a, a]$.

(b) Bewijs dat $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ *niet* uniform convergent is op $(-1, 1)$. (Hint: Gebruik het uniforme Cauchy criterium)