waarden van a de afgeleide van $x \mapsto x^a$ op grotere verzamelingen dan $]0,\infty[$ bepalen.

(2.8) Regel van de l'Hôpital

[Tweede middelwaardestelling van de differentiaalrekening]. Laten $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu zijn op $[a,b]$ en differentieerbaar op $]a,b[$. Dan bestaat er een $c \in]a,b[$ zó, dat: $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$.

Bewijs:

We definiëren $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ door $h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$. Dan voldoet h aan de voorwaarden van de stelling van Rolle; en daarom heeft h een kritiek punt in $]a,b[$.

Opmerking. Indien $g'(x) \neq 0$ voor $x \in]a,b[$, dan kunnen we ook schrijven:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

I.h.b. met $g(x) = x$, vinden we de eerste middelwaardestelling terug.

Stelling. [Regel van de l'Hôpital]. Laten $f,g :]a-\delta,a+\delta[\to \mathbb{R}$ continu zijn op $]a-\delta,a+\delta[$ en differentieerbaar voor $x \neq a$, terwijl $g'(x) \neq 0$ voor $x \neq a$. Stel $f(a) = g(a) = 0$. Dan geldt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

indien de laatsgenoemde limiet bestaat en eindig is.

Bewijs:

Volgens de tweede middelwaardestelling bestaat bij elke $x \neq a$ een $c = c(x)$ tussen a en x zó, dat:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$

Krachtens de insluitingsstelling geldt $\lim\limits_{x\to a} c(x) = a$; derhalve volgt uit de subsitutiestelling (zie (1.5)) dat:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Opmerking. Er bestaan voor de hand liggende versies van de regel van de l'Hôpital voor f en g gedefinieerd op $[a,a+\delta]$, resp. $[a-\delta,a]$.

Stelling Laten $f,g :]M,\infty[\to \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn, terwijl $g'(x) \neq 0$ voor $x > M$. Stel $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$. Dan geldt, in de notatie van (5.1), (ii):

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

indien de laatstgenoemde limiet bestaat en eindig is. Analoog voor $-\infty$.

Bewijs:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{y\downarrow 0}\frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{y\downarrow 0}\frac{-f'(1/y).y^{-2}}{-g'(1/y).y^{-2}} =$$
$$=\lim_{y\downarrow 0}\frac{(f(1/y))'}{(g(1/y))'} = \lim_{y\downarrow 0}\frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Voorbeelden: (controleer zelf de voorwaarden)

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$(zie voorbeeld b en d in (2.4))

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$ (volgens a).

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-e^x+1}{xe^x-x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{e^x+xe^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^x}{2e^x+xe^x} = -\frac{1}{2}$

d. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{-x}}{\text{arctg } x-\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-e^{-x}}{\frac{1}{x^2+1}} = -\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x^2)e^{-x} = 0$. Zie voorbeeld d in (5.1).

(2.9). Herhaald differentiëren, formule van Taylor.

Zij I een open interval in $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar. We krijgen dan een functie $f' : I \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x),\ x \in I,$$