Universiteit van Amsterdam

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Tentamen

Analyse 2a

Bachelor wiskunde jaar 1

Tentamen
Datum: 19 december, 2016
Tijd: 9.00-12.00

Aantal pagina's: 2 (inclusief voorblad)
Aantal vragen: 7
Maximum aantal te behalen punten: 15
Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examinator (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!

1. (3pt)
   (a) Geef een voorbeeld van een divergente reeks $\sum a_n$, waarvoor $\sum a_n^2$ convergeert.
   (b) Bewijs dat als, voor $a_n \geq 0$, de reeks $\sum a_n$ convergent is, dat dan $\sum a_n^2$ ook convergeert.
   (c) Geef een voorbeeld van een convergente reeks $\sum a_n$, waarvoor $\sum a_n^2$ divergeert.

2. (2pt) Definieer $f_n(x) = (1-x)^n x$ voor $x \in [0,1]$.
   (a) Bewijs dat voor $n \to \infty$, f_n uniform naar 0 convergeert.
   (b) Bereken $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x)^n \sin x \, dx$.

3. (2pt) Onderzoek convergentie van de volgende reeksen:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$,
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$,
   (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log_e n}$.

4. (2pt) Laat zien dat $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} x^n$ een continue functie is op $(-2,2)$, maar dat de convergentie op $(-2,2)$ niet uniform is.

5. (2pt) Geef voor $|x| < 1$ expliciete formules voor $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$. Bewijs je antwoord.

6. (1pt) Zonder van l'Hôpital gebruik te maken, bepaal
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2},$$
en bewijs je antwoord.

7. (3pt)
   (a) Verifieer dat voor alle reële $y \neq 1$, $k \in \mathbb{N}$,
$$\frac{1-y^k}{1-y} = 1 + y + \cdots + y^{k-1},$$
   en dat dus voor $y \neq -1$,
$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + \cdots + (-1)^{k-1} y^{k-1} + (-1)^k \frac{y^k}{1+y}.$$
   (b) M.b.v. (a) laat zien dat voor $x > -1$,
$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{k} + B_k(x),$$
   waarbij $B_k(x) = (-1)^k \int_0^x \frac{y^k}{1+y} \, dy$.
   (c) Bewijs dat voor iedere vaste $x \in (-1,1)$, $\lim_{k\to\infty} B_k(x) = 0$. (Hint: Onderscheid de gevallen $x \in [0,1)$ en $x \in (-1,0)$.)
   (d) Bepaal alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ convergeert, en bewijs dat de som een continue functie is van $x \in (-1,1]$.
   (e) Toon aan dat $\log_e(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ voor $x \in (-1,1]$.