

Tentamen

Analyse 2a Bachelor wiskunde jaar 1

Tentamen

Datum: 19 december, 2016

Tijd: 9.00-12.00

Aantal pagina's: 2 (inclusief voorblad)

Aantal vragen: 7

Maximum aantal te behalen punten: 15

Bij iedere vraag staat vermeld hoeveel punten hij waard is.

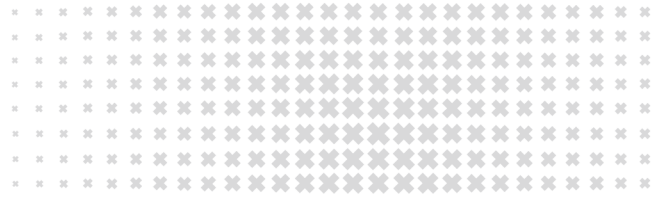
VOORDAT U BEGINT

- Controleer of uw versie van het tentamen compleet is.
- Schrijf **uw naam en studentnummer** en indien van toepassing **versienummer** op **elk vel papier** dat u inlevert en **nummer de pagina's**.
- Uw **mobiele telefoon** moet uit staan en in uw jas of tas zitten. **Uw jas en tas** moeten op de grond liggen.
- **Toegestane hulpmiddelen**: kladpapier. Overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

HUISHOUDELIJKE MEDEDELINGEN

- De eerste 30 minuten mag u de zaal niet verlaten, ook niet voor het bezoeken van het toilet.
- 15 minuten voor het eind wordt u gewaarschuwd dat het inlevertijdstip nadert.
- Vul na afloop van het tentamen het evaluatieformulier in, indien van toepassing.
- U bent verplicht zich op verzoek van de examiner (of diens vertegenwoordiger) te kunnen legitimeren met een bewijs van inschrijving en een geldig legitimatiebewijs.
- Tijdens het tentamen is toiletbezoek niet toegestaan, tenzij de surveillant hier toestemming voor geeft.

Succes!



1. (3pt)

- (a) Geef een voorbeeld van een divergente reeks $\sum a_n$, waarvoor $\sum a_n^2$ convergeert.
- (b) Bewijs dat als, voor $a_n \geq 0$, de reeks $\sum a_n$ convergent is, dat dan $\sum a_n^2$ ook convergeert.
- (c) Geef een voorbeeld van een convergente reeks $\sum a_n$, waarvoor $\sum a_n^2$ divergeert.

2. (2pt) Definieer $f_n(x) = (1-x)^n x$ voor $x \in [0, 1]$.

- (a) Bewijs dat voor $n \rightarrow \infty$, f_n uniform naar 0 convergeert.
- (b) Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1-x)^n \sin x \, dx$.

3. (2pt) Onderzoek convergentie van de volgende reeksen:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$,
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$,
- (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log_e n}$.

4. (2pt) Laat zien dat $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} x^n$ een continue functie is op $(-2, 2)$, maar dat de convergentie op $(-2, 2)$ niet uniform is.5. (2pt) Geef voor $|x| < 1$ expliciete formules voor $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$. Bewijs je antwoord.

6. (1pt) Zonder van l'Hôpital gebruik te maken, bepaal

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2},$$

en bewijs je antwoord.

7. (3pt)

- (a) Verifieer dat voor alle reële
- $y \neq 1$
- ,
- $k \in \mathbb{N}$
- ,

$$\frac{1-y^k}{1-y} = 1 + y + \dots + y^{k-1},$$

en dat dus voor $y \neq -1$,

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + \dots + (-1)^{k-1} y^{k-1} + (-1)^k \frac{y^k}{1+y}.$$

- (b) M.b.v. (a) laat zien dat voor
- $x > -1$
- ,

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^k \frac{x^k}{k} + B_k(x),$$

waarbij $B_k(x) = (-1)^k \int_0^x \frac{y^k}{1+y} \, dy$.

- (c) Bewijs dat voor iedere vaste $x \in (-1, 1)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} B_k(x) = 0$. (Hint: Onderscheid de gevallen $x \in [0, 1)$ en $x \in (-1, 0)$.)
- (d) Bepaal alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ convergeert, en bewijs dat de som een continue functie is van $x \in (-1, 1]$.
- (e) Toon aan dat $\log_e(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ voor $x \in (-1, 1]$.