TOETS ANALYSE 2A, 14 DECEMBER, 2016

(1) Voor $y \in (0, \infty)$, zij $L(y) := \int_1^y \frac{1}{t}\, dt$. Voor een vaste $z \in (0, \infty)$, definieer voor $y \in (0, \infty)$ de functie $g(y) := L(yz) - L(y) - L(z)$.
  (a) Laat zien dat $g(1) = 0$ en $g'(y) = 0$ voor alle $y \in (0, \infty)$. Bewijs hiermee dat
$$L(yz) = L(y) + L(z).$$
De functie $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ is bijectief. Zij E de inverse van L.
  (b) Bewijs dat voor $u, v \in \mathbb{R}$,
$$E(u + v) = E(u)E(v).$$

(2) ('l Hôpital) Zij f en g $k\times$ differentieerbaar op (a, b) met $f^{(k)}$ en $g^{(k)}$ continu. Voor een $c \in (a, b)$, zij
$$f(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0 = g(c) = \cdots = g^{(k-1)}(c),$$
en zij $g^{(k)}(c) \neq 0$. Bewijs dat
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(k)}(c)}{g^{(k)}(c)}.$$
(gebruik Taylor polynomen van graad $k - 1$ plus restterm).

Date: December 12, 2016.