1. (4pt) Zij $X = C_{\mathbb{R}}[a,b]$, en zij Y de lineaire deelruimte van X bestaande uit de continu differentieerbare functies welke nul zijn in a. Zij $T \in L(X,Y)$ gedefinieerd door $(Tf)(x) = \int_a^x f(t)dt$.
   (a) Laat zien dat T begrensd is en bepaal zijn norm.
   (b) Bepaal T^{-1}. Is deze afbeelding begrensd? Verklaar je antwoord.

2. (4pt) Zij $X \neq \{0\}$ een Hilbertruimte.
   (a) Laat zonder Hahn-Banach zien dat voor $x \in X$, $\|x\| = \sup_{0\neq f\in X'} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$.
   (b) Zij $E \subset X$ zodanig dat voor iedere $f \in X'$, $\sup_{x\in E} |f(x)| < \infty$. Toon aan dat $\sup_{x\in E} \|x\| < \infty$. (Hint: Voor $x \in E$, beschouw $T_x \in B(X', \mathbb{F})$ gedefinieerd door $T_x(f) = f(x)$.)

3. (4pt) Bewijs dat iedere twee normen op een eindig dimensionale lineaire ruimte equivalent zijn. (Hint: Kies een basis $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ en laat zien dat er $0 < m \leq M$ zijn met $\|\sum_i \lambda_i\phi_i\| \in [m, M]$ voor alle $\sqrt{\sum_i |\lambda_i|^2} = 1$.)

4. (4pt) Herinner dat $\{x \mapsto (2\pi)^{-1/2}e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ een orthonormale basis is van $L^2_{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$. Voor $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, beschouw de functie $[0, 2\pi] \to \mathbb{C} : x \mapsto \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i(\pi-x)\alpha}$, en bewijs dat $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi\alpha)^2}$.

5. (6pt) Zij $A \in B(c_0, \ell^\infty)$.
   (a) Bewijs dat met $a_{ij} := (Ae_j)_i$ geldt dat $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j$.
   (b) Bewijs dat $\|A\|_{B(c_0,\ell^\infty)} = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$. (Hint: bewijs eerst dat voor iedere i en $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| \leq \|A\|_{B(c_0,\ell^\infty)}$.)
   (c) Laat zien dat (5a)-(5b) niet waar zijn met c_0 vervangen door $c = \{x \in \ell^\infty : \lim_{i\to\infty} x_i \text{ bestaat en is eindig}\}$. (Hint: Construeer een $0 \neq A \in B(c, \ell^\infty)$ met $(Ae_j)_i = 0$ voor alle i en j.)