Uitwerking tentamen Analyse 2a 2016/2017

Jolien Oomens

21 maart 2017

Opgave 1.

(a) Neem $a_n = \frac{1}{n}$. De reeks $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert, maar de reeks $\sum \frac{1}{n}$ divergeert.

(b) Omdat $\sum a_n$ convergeert weten we dat de termen naar 0 moeten convergeren. Er is dus een N zodat voor alle $n > N$ geldt dat $0 \leq a_n < 1$. Voor $x \in [0, 1)$ hebben we $x^2 \leq x$ dus nu zien we dat $0 \leq a_n^2 \leq a_n$ voor $n > N$. De reeks $\sum a_n^2$ convergeert dus volgens het vergelijkingscriterium.

(c) De reeks $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ convergeert volgens de alternerende reeksen-stelling, maar $a_n^2 = \frac{1}{n}$ en we weten dat $\sum \frac{1}{n}$ divergeert naar oneindig.

Opgave 2.

(a) We zullen eerst f_n maximaliseren. De afgeleide is gelijk aan $f_n'(x) = (1 - x)^n - nx(1 - x)^{n-1}$, dus $f_n'(x) = 0$ oplossen geeft

$$(1 - x)^n - nx(1 - x)^{n-1} = 0$$

en door $(1 - x)^{n-1}$ buiten haakjes te halen krijgen we

$$(1 - x)^{n-1} ((1 - x) - nx) = 0$$

dus dit geeft $x = 1$ of $x = \frac{1}{n+1}$. Omdat $f_n(0) = f_n(1) = 0$ zien we dat het maximum van f_n moet liggen bij $x = \frac{1}{n+1}$. Wanneer we deze x-waarde invullen krijgen we

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

en omdat $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$ (standaardlimiet) gaat dit product naar 0 als $n \to \infty$. Hieruit volgt dat $f_n \to 0$ uniform.

(b) Merk op dat $0 \leq \sin x \leq x$ voor $x \in [0, 1]$. We hebben dus

$$0 \leq \int_0^1 (1 - x)^n \sin(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_0^1 (1 - x)^n x\, \mathrm{d}x$$

voor alle n. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}0 &\leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x)^n \sin(x)\,\mathrm{d}x \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x)^n x\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \int_0^1 \lim_{n\to\infty} (1-x)^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0,\end{aligned}$$

waar we bij $(*)$ gebruikten dat we limieten en integralen mogen omwisselen bij uniforme convergentie. Dit bewijst dat de gevraagde limiet gelijk 0 is.

Opgave 3.

(a) Voor $n \geq 7$ hebben we $n! \geq n^4$ en dus $\sqrt{n!} \geq n^2$. Hieruit volgt dat $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n!}} \leq \frac{1}{n^2}$ voor $n \geq 7$, dus deze som convergeert volgens het vergelijkingscriterium.

De ratiotest werkt ook: er geldt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0 \text{ als } n \to \infty,$$

dus de som convergeert.

(b) We hebben

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

dus de som divergeert.

(c) We passen het integraalkenmerk toe met de functie $\frac{1}{x\log x}$. De integraal is gelijk aan

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x = \log(\log(x))\Big|_2^\infty = \infty,$$

dus de som divergeert.

Opgave 4. Met de ratiotest zien we dat

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$$

dus $R = 2$. Volgens Corollary 26.2 convergeert een machtreeks altijd naar een continue functie op $(-R, R)$, dus dit bewijst het eerste gedeelte.

Herinner je dat als $\sum f_n$ uniform convergeert, dat dan ook $f_n \to 0$ uniform. We hebben echter $\lim_{x\to 2^-} f_n(x) = \lim_{x\to 2^-} 2^{-n}x^n = 1$, dus voor elke n is er een $x \in (-2, 2)$ zodat $f_n(x) > \frac{1}{2}$. De f_n kunnen hierdoor niet uniform naar 0 convergeren. Dit bewijst dat de som niet uniform convergeert.

Opgave 5. Voor $|x| < 1$ hebben we

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Omdat de convergentiestraal van deze som 1 is, mogen we voor $|x| < 1$ onder het somteken afleiden. We krijgen

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

met de kettingregel. Vermenigvuldiging met x geeft

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2},$$

en omdat $n = 0$ de waarde 0 geeft krijgen we ook $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$. Om de tweede som uit te rekenen leiden we nog een keer af:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = -\frac{1+x}{(x-1)^3}.$$

dus vermenigvuldiging met x geeft

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = -\frac{x(1+x)}{(x-1)^3}.$$

Zoals net is de eerste term weer 0, dus dit is ook gelijk aan de som van 0 tot ∞.

Opgave 6. Met behulp van de stelling van Taylor toegepast op $\sqrt{x}$ en $a = 1$ zien we dat

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + R_3(x),$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2} = \frac{-\frac{1}{8}x^2 + R_3(x)}{x^2} = -\frac{1}{8} + \frac{R_3(x)}{x^2}.$$

We weten dat er een C bestaat zodat $|R_3(x)| \leq C|x|^3$ voor x rond 0, dus $\left|\frac{R_3(x)}{x^2}\right| \leq C|x| \to 0$ als $x \to 0$. De gevraagde limiet is dus $-\frac{1}{8}$.

Opgave 7.

(a) Haakjes uitwerken geeft

$$\begin{aligned}(1-y)\left(1 + y + \cdots + y^{k-1}\right) &= 1 + y + \cdots + y^{k-1} - y - y^2 - \cdots - y^k \\ &= 1 - y^k,\end{aligned}$$

dus er geldt inderdaad

$$\frac{1-y^k}{1-y} = 1 + y + \cdots + y^{k-1}.$$

Een substitutie $y \mapsto -y$ geeft nu

$$\frac{1 + (-1)^{k+1}y^k}{1+y} = 1 - y + \cdots + (-1)^{k-1}y^{k-1},$$

Wanneer we het tweede gedeelte van de teller naar rechts halen krijgen we

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + \cdots + (-1)^{k-1}y^{k-1} + \frac{(-1)^k y^k}{1+y}.$$

(b) Er geldt $\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y$ dus we hebben

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= \int_0^x \left(1 - y + \cdots + (-1)^{k-1}y^{k-1} + \frac{(-1)^k y^k}{1+y}\right)\mathrm{d}y \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{(-1)^k y^k}{1+y}\,\mathrm{d}y \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + (-1)^k B_k(x).
\end{aligned}$$

(c) Stel dat $x \in [0,1)$. We hebben voor $y \in (0,x)$ dat $y^k < x^k$ en $1+y \geq 1$, dus

$$|B_k(x)| = \int_0^x \frac{y^k}{1+y}\,\mathrm{d}y \leq \int_0^x x^k\,\mathrm{d}y = x^{k+1} \to 0 \text{ als } k \to \infty.$$

Voor $x \in (-1,0)$ hebben we

$$|B_k(x)| = \int_x^0 \frac{|y|^k}{1+y}\,\mathrm{d}y \leq \int_x^0 \frac{|x|^k}{1+x}\,\mathrm{d}y = \frac{|x|^{k+1}}{1+x} \to 0$$

als $k \to \infty$.

(d) Met de ratiotest zien we dat

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1 \text{ als } n \to \infty,$$

dus de convergentiestraal is 1. Met de alternerende reeksen-stelling zien we dat de reeks ook convergeert voor $x = 1$. Voor $x = -1$ krijgen we de som van $-\frac{1}{n}$, dus dit divergeert. De reeks convergeert dus precies voor $x \in (-1,1]$. We weten al dat machtreeksen continu zijn op $(-R,R)$, dus de limiet is continu op $(-1,1)$. Dankzij de Stelling van Abel is de limiet ook continu in $x = 1$.

(e) In (b) hebben we laten zien dat

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + B_k(x)$$

voor alle k. Wanneer we k naar oneindig laten gaan zien we dat

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{k} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + B_k(x)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \lim_{k\to\infty} B_k(x) \\
&\overset{(c)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}
\end{aligned}$$

voor alle $x \in (-1,1]$.